Modèles algébriques pour les systèmes manufacturiers : systèmes (min,+) cycliques

Bertrand Cottenceau

Mars 2019

Introduction

Ce sujet s'inscrit dans le cadre de l'étude des systèmes de production. Plus précisément, l'objet de l'approche adoptée ici est l'analyse et le contrôle des flux (de produits, de moyens de transports) au sein d'un système manufacturier. On cherche généralement à estimer et réguler les flux de produits afin de diminuer les phénomènes de congestion (stocks internes de produits en cours de fabrication).

L'étude théorique des systèmes de production peut s'appuyer sur différents types de modèles. Certains sont graphiques, d'autres algébriques:

- graphes d'état / automates à états finis (cours M.Lahaye EI3)
- langages réguliers/expressions régulières (RegEx)
- réseaux de Petri (cours Simulation EI5)
- réseaux de files d'attente
- algèbre (min,+) (semi-anneaux idempotents)

Les modèles que l'on considère ici sont des modèles graphiques (sous-ensemble des réseaux de Petri) et des modèles algébriques de la famille de l'algèbre (min,+). Les modèles graphiques permettent la mise en évidence des relations entre les phénomènes élémentaires du système considéré. Leur mise en équation dans un cadre algébrique conduit à l'analyse de performance (à quelle vitesse le système opère-t-il?) et au contrôle.

Contexte

On va tenter d'esquisser les principales idées mises en oeuvre dans cette approche. A un niveau microscopique, les systèmes manufacturiers sont régis par des règles de fonctionnement impliquant des phénomènes élémentaires parmi les suivants :

- la précédence : une tâche/une opération (T_2) succède immédiatement à une tâche (T_1)

- la synchronisation : (T_3) est après (T_1) ET après (T_2)
- le retard : (T_2) est 5 unités de temps après (T_1)
- la duplication : une tâche (T_1) est systématiquement suivie de 2 tâches (T_2), c'est-à-dire $(T_1) \Rightarrow 2 \times (T_2)$
- le groupement : (T_2) se produit toutes les 2 tâches (T_1), c'est-à-dire $2 \times (T_1) \Rightarrow (T_2)$

Lorsque l'on s'intéresse au comportement de ces systèmes dans le temps, on peut utiliser une abstraction où les tâches sont représentées par des phénomènes ponctuels notés $a, b, ...$ (typiquement le début et la fin des opérations (T_i)) qui sont répartis dans le temps. Ces phénomènes ponctuels sont appelés des **événements**. On peut alors "voir" le comportement d'un système comme une séquence, possiblement infinie, d'événements répartis dans le temps : la notation $< a, 2 >$ signifie une occurrence de l'événement a à la date 2.

Si dans un système tout événement a est suivi de 2 événements b après un retard de 3 unités de temps, alors on pourra par exemple observer la séquence suivante:

$$< a, 1 >, < b, 4 >, < b, 4 >, < a, 5 >, < a, 7 >, < b, 8 >, < b, 8 >, < b, 10 >, < b, 10 > .$$

Cette abstraction du comportement d'un système sous forme de liste d'événements est au coeur du fonctionnement des simulateurs de flux (Siman/Arena par exemple).

Une autre façon de décrire des séquences d'événements est de recourir à des fonctions **compteurs** pour chaque type d'événement

$$a(t) : \text{ nombre de fois où l'événement } a \text{ a été observé à la date } t.$$

Pour la séquence ci-dessus, $a(2) = 1$, $a(8) = 3$, $b(2) = 0$ et $b(9) = 4$.

Avec cette nouvelle description, les occurrences des événements sont décrites par des fonctions (les compteurs) qui jouent le rôle de signaux, et les phénomènes de précédence, de retard, de duplication sont modélisés par des équations sur ces signaux:

- a précède b : $b(t) \leq a(t)$
- c est la synchronisation de a et b : $c(t) \leq \min(a(t), b(t)$
- duplication $a \Rightarrow 2 \times b$: $b(t) = 2 \times a(t)$

Dans cette modélisation, l'opérateur $\min$ représente la synchronisation. Ou inversement, les systèmes appréhendés par des modèles algébriques de type (min,+) sont ceux où les synchronisations sont primordiales.

Mais on peut encore aller plus loin en décrivant les phénomènes élémentaires (retard, synchronisation ...) par des opérateurs qui transforment les signaux (les séquences d'événements). Par exemple, un retard de 3 unités de temps sera vu comme un opérateur noté δ^3 qui transforme une séquence d'événements a en une séquence d'événements b, ce que l'on note formellement $b = \delta^3 a$. Pour décrire un système manufacturier, on introduit un jeu d'opérateurs élémentaires :

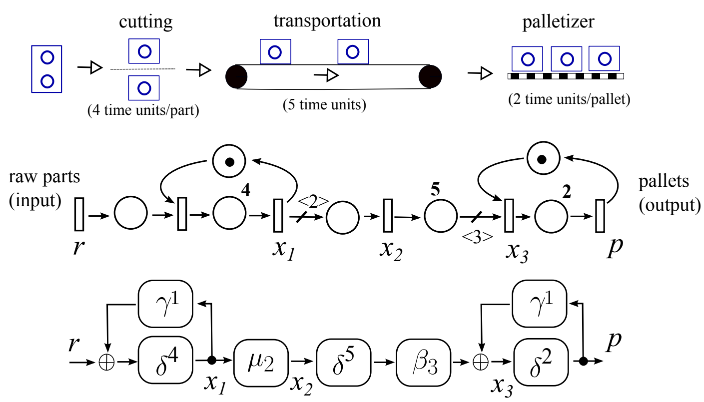

Figure 1: Système manufacturier décrit au moyen d'opérateurs

δ pour le retard temporel, γ pour le décalage dans les numéros d'événements, μ pour la duplication et β pour le groupement.

Sur la base de ces opérateurs élémentaires, certains systèmes sont décrits par composition série ou parallèle (synchronisation) d'opérateurs. La Figure 1 fournit par exemple une description d'un système manufacturier où les opérations principales sont décrites au moyen des opérateurs élémentaires introduits précédemment. Le figure donne également le modèle réseau de Petri décrivant graphiquement le système. Ce système reçoit des pièces brutes (r) qu'il découpe en 4 unités de temps, transporte en 5 unités de temps, puis regroupe en palettes de 3 pièces (2 unités de temps pour faire une palette).

Le système peut être décrit par un schéma-bloc décomposant toutes les opérations élémentaires, et son comportement se résume alors à une expression régulière n'impliquant que des opérateurs élémentaires $\delta, \gamma, \mu, \beta$. Ceci est comparable à l'expression régulière qui définit un automate fini. L'expression régulière traduit complètement le comportement entrée-sortie du système manufacturier (fonction de transfert). Elle indique comment le système transforme les événements d'entrée (ici, l'arrivée de pièces brutes) en événements de sortie (le départ de palettes de pièces traitées). Pour cet exemple, la série de transfert est

$$H = \delta^2(\gamma^1\delta^2)^*\beta_3\delta^5\mu_2\delta^4(\gamma^1\delta^4)^*$$

Objectif

Pour pouvoir mener l'étude des systèmes manufacturiers décrits par des expressions régulières avec les opérateurs $\gamma, \mu, \beta, \delta$, il convient de connaître des règles de réécriture d'expressions. Par exemple, on a une identité $\mu_2\gamma^1 = \gamma^2\mu_2$ ou encore $\beta_2\mu_2\gamma^1 = \gamma^1$. Ces systèmes d'identités remarquables sont au coeur des problèmes de manipulation des expressions régulières.

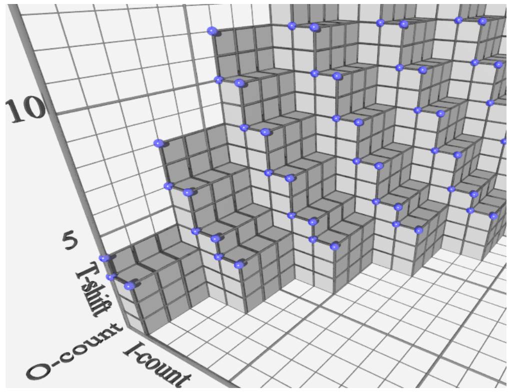

Figure 2: Représentation 3D d'une expression rationnelle

On sait par ailleurs aussi décrire graphiquement (Figure 2) des expressions régulières sous forme de dessin dans $\mathbb{Z}^3$. On voit par exemple que la représentation graphique possède plusieurs formes de périodicité selon le plan de coupe. Les différentes réécritures proviennent aussi de ces interprétations géométriques.

L'objectif du stage est d'étudier les systèmes manufacturiers au travers d'expressions régulières de ce type en cherchant à exhiber différentes écritures équivalentes d'une expression. Ces questions sont importantes pour compléter un outil informatique de calcul sur les séries régulières (librairie C++) qui est en cours de développement.