



Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés



Université d'Angers

–*Équipe Modèles et Systèmes Dynamiques*–

DEA Automatique et Informatique Appliquée

Mémoire DEA

thème

**Utilisation de la transformée de Fenchel pour représenter
la dynamique des systèmes $(\max,+)$ linéaires**

ABEKA ABDERREZAK

Juillet 2005

Responsable de stage : Bertrand Cottenceau, Maître de Conférences *LISA ANGERS*
Laurent Hardouin, Maître de Conférences *LISA ANGERS*

Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés
FRE 2656 CNRS
62, avenue Notre Dame du Lac
49000 Angers

Remerciements

Je voudrais tout d'abord remercier **Jean-Louis Ferrier** pour son accueil en stage de DEA au sein du Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés (LISA).

Je remercie **Bertrand Cottenceau** et **Laurent Hardouin**, pour la qualité de leur encadrement, ainsi que pour leurs conseils et leurs remarques avisées.

Je remercie en général tous les membres du LISA, et en particulier les doctorants, avec qui travailler est très agréable. Je les remercie tous pour leur disponibilité, leurs conseils et pour l'aide qu'ils m'apportent tout au long de ce stage.

Mes remerciements vont également à **Samir Hamaci**, pour son aide, sa disponibilité et son soutien pour la réalisation de ce travail.

J'adresse mes remerciements à ma mère et à mon oncle ainsi qu'à toute ma famille et amis qui, de près comme de loin m'ont aidé et encouragé au moment opportun.

Enfin je remercie tous ceux qui n'ont pas été cités ci-dessus et qui pourtant ont eu un rôle à jouer dans cette belle année d'études.

Table des matières

1 Algèbre des dioïdes	5
1.1 Dioïdes	5
1.2 Dioïdes de séries formelles	7
1.3 Conclusion	8
2 Systèmes (max,+) linéaires	9
2.1 Modélisation de systèmes (max,+) linéaires	9
2.1.1 Modèle linéaire sur $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$	9
2.2 Transformée en γ et δ	11
2.2.1 Monotonie des trajectoires de tir d'un GET	11
2.2.2 Matrice de transfert en γ	13
2.3 Représentation bi-dimensionnelle: dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$	13
2.3.1 Dioïde $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$	13
2.3.2 Représentation graphique des éléments de $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$	14
2.3.3 Dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$	14
2.3.4 Manipulation sur les éléments de dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ et règles de simplifications	15
2.3.5 Représentation graphique des éléments de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$	15
2.3.6 Exemple de calcul sur des polynômes de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$	16
2.3.7 Modèle linéaire sur $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$	17
2.4 Séries périodiques de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$	18
2.4.1 Causalité, Rationalité, Périodicité, Réalisabilité	18
2.4.2 Forme canonique des séries périodiques de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$	19
2.5 MinMaxGD Librairie de calcul dans le dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$	20
2.6 Conclusion	21
3 Construction du dioïde $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$	22
3.1 Transformée de Fenchel	22
3.2 Dioïde $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$	23
3.2.1 Propriétés graphiques des représentants de $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$	25
3.3 Séries périodiques de $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$	26
3.3.1 Forme canonique d'une série périodique dans $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$	26
3.3.2 Somme de deux séries périodiques de $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$	28
3.3.3 Produit de deux séries périodiques de $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$	29
3.3.4 Étoile d'un élément de $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$	30
3.3.5 Inf de deux séries périodiques de $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$	32
Conclusion	36
Annexe	37
Bibliographie	46

Introduction

La théorie des "**systèmes à événements discrets**", bien que relativement récente, fait l'objet de nombreuses recherches. Par opposition à la théorie dite "classique" de l'automatique, l'étude des systèmes à événements discrets s'intéresse uniquement au début et à la fin de certains événements. Cette théorie est utilisée pour modéliser des phénomènes de synchronisation ou de concurrence, elle trouve ses applications dans des systèmes de conception humaine comme les systèmes de production, les réseaux informatiques, les réseaux de transport...

La classe des systèmes à événements discrets qui met en jeu des phénomènes de synchronisation ne peut pas être décrite dans l'algèbre usuelle par des équations linéaires à cause de la non linéarité du \max , cependant elle est modélisable par des équations linéaires dans une algèbre particulière: **l'algèbre des dioïdes**.

Cette théorie concerne la sous-classe des systèmes à événements discrets temporisés dont l'évolution de l'état est représentable par des équations récurrentes linéaires sur **l'algèbre $(\max, +)$** . Ces systèmes correspondent en fait aux **graphes d'événements temporisés (GET)** qui constituent une sous-classe des **réseaux de Petri** dont chaque place n'admet qu'une seule transition en amont et une transition en aval.

Grâce aux avancées dans ce domaine, il existe aujourd'hui des outils en informatique permettant de représenter les systèmes linéaires dans les dioïdes sous forme de séries formelles périodiques (voir la librairie MinMaxGD). Il a été montré que certaines manipulations sur ces outils sont coûteuses en temps de calcul et en occupation de mémoire. L'objectif de ce travail est, d'une part de proposer une nouvelle représentation des systèmes $(\max, +)$ linéaires, et d'autre part d'implémenter une librairie de calcul sur cette nouvelle représentation.

Ce document est conçu de la manière suivante

- Dans le premier chapitre, nous présentons les outils mathématiques liés à l'algèbre des dioïdes. Nous présentons également les dioïdes de séries formelles. Cette partie repose sur les références suivantes: [Cunningham-Green, 1979], [Baccelli, 1992].
- Le second chapitre porte sur la modélisation des systèmes $(\max, +)$ linéaires dans l'algèbre des dioïdes, en particulier les GET. On rappellera la représentation des GET par des séries formelles faisant intervenir des opérateurs de décalages Ce chapitre constitue une synthèse des articles suivants: [Gaubert, 1992], [Cohen, 1995], [Cottenceau, 1999].
- Enfin, le chapitre 3 aborde le problème suivant: chercher une nouvelle représentation des systèmes $(\max, +)$ linéaires dont le but est de réduire le temps de calcul des algorithmes permettant de représenter ces systèmes. Nous introduisons la transformée de Fenchel qui nous permet de regrouper dans une classe d'équivalence tous les séries formelles ayant la même transformée. On présentera ensuite un nouveau dioïde quotienté par la congruence modulo la transformée de Fenchel. Nous terminerons ce chapitre par l'élaboration des algorithmes permettant d'effectuer les opérations \oplus , \otimes , $*$, et \inf sur les séries périodiques dans ce nouveau dioïde. Ces algorithmes ont été implémentés dans une librairie de calcul FMinMaxgd, écrite en SCILAB. Ce chapitre repose sur les références suivantes: [Quadrat, 1990], [MaxPlus, 1991], [Menguy, 1997], [Cohen,].

Chapitre 1

Algèbre des dioïdes

Dans ce chapitre nous présenterons les outils algébriques nécessaires à la représentation et à la modélisation des graphes d'événements temporisés (GET)¹ dans l'algèbre des dioïdes. Après un bref rappel sur la théorie des dioïdes, on s'intéressera ensuite à la représentation des dioïdes de séries formelles qui permet de modéliser les GET. Pour une étude plus approfondie, nous recommandons au lecteur les ouvrages [Cunninghame-Green, 1979], [Bacelli, 1992].

1.1 Dioïdes

Définition 1 (Dioïde) *Un dioïde est un ensemble \mathcal{D} muni de deux opérations \oplus (addition ou somme) et \otimes (multiplication ou produit) vérifiant les axiomes suivants, pour tous a, b, c dans \mathcal{D} :*

- .l'addition \oplus est associative: $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) = a \oplus b \oplus c$.*
- .l'addition est commutative: $a \oplus b = b \oplus a$.*
- .l'addition admet un élément neutre noté ε : $a \oplus \varepsilon = a$*
- .l'addition est idempotente: $a \oplus a = a$.*
- .la multiplication \otimes est associative: $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c) = a \otimes b \otimes c$.*
- .la multiplication est distributive vis-à-vis de l'addition: $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$.*
- .la multiplication admet un élément neutre noté e : $a \otimes e = a$.*
- . e est absorbant pour la multiplication: $a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$.*

Notation 1 (Dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$) *On note $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ le dioïde défini sur $\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et muni des opérations \max et $+$ respectivement comme \oplus -addition et \otimes -multiplication.*

Notation 2 (Dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$) *On note $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$ le dioïde défini sur $\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$ et muni des opérations \min et $+$ respectivement comme \oplus -addition et \otimes -multiplication.*

Exemple 1 *Sur le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$,*

$$2 \oplus 3 = 3, 1 \otimes 2 = 3, 1 \otimes (2 \oplus 3) = (1 \otimes 2) \oplus (1 \otimes 3) = (3 \oplus 4) = 4$$
$$\varepsilon = -\infty, e = 0.$$

Définition 2 (Relation d'équivalence) *On considère une relation R sur un ensemble X . On dit que R est une relation d'équivalence sur X si les trois axiomes suivants sont vérifiés, pour tous $x, y, z \in X$:*

- 1. R est réflexive: xRx ,*
- 2. R est symétrique: $xRy \Rightarrow yRx$,*
- 3. R est transitive: si xRy et yRz alors xRz .*

Définition 3 (Relation d'ordre) *On considère une relation R sur un ensemble X . On dit que R est une relation d'ordre sur X si les trois axiomes suivants sont vérifiés, pour tous $x, y, z \in X$:*

- 1. R est réflexive: xRx ,*
- 2. R est antisymétrique: si xRy et yRx alors $x = y$,*
- 3. R est transitive: si xRy et yRz alors xRz .*

1. Sous classe de réseaux de Pétri temporisés dont chaque place n'admet qu'une transition en amont et qu'une transition en aval.

Définition 4 (Relation d'ordre canonique d'un dioïde) Dans un dioïde $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$, la relation \succeq définie par

$$a \succeq b \Leftrightarrow a = a \oplus b$$

est une relation d'ordre compatible avec les lois additive \oplus et multiplicative \otimes , c'est-à-dire,

$$a \succeq b \Rightarrow \forall c \in \mathcal{D}, \quad a \oplus c \succeq b \oplus c,$$

$$a \succeq b \Rightarrow \forall c \in \mathcal{D}, \quad a \otimes c \succeq b \otimes c,$$

$$c \otimes a \succeq c \otimes b.$$

Preuve:

- . La relation \succeq est réflexive: $a \succeq a \Leftrightarrow a = a \oplus a = a$
- . La relation \succeq est antisymétrique:
 $a \succeq b \Leftrightarrow a = a \oplus b$ et $b \succeq a \Leftrightarrow b = a \oplus b$ d'où $a = b$
- . La relation \succeq est transitive: $a \succeq b \Leftrightarrow a = a \oplus b$ et $b \succeq c \Leftrightarrow b = b \oplus c$ d'où, $a = a \oplus b \oplus b \oplus c = a \oplus c \Leftrightarrow a \succeq c$.

Remarque 1 L'ordre canonique défini dans la définition 4 est tel que sur $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$, $\succeq = \geq$ et sur $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$, $\succeq = \leq$.

Définition 5 (Dioïde complet) Un dioïde est dit complet s'il est fermé pour les sommes infinies et si la loi \otimes distribue sur les sommes infinies, c'est-à-dire si pour tout $c \in \mathcal{D}$ et tout sous-ensemble $A \subseteq \mathcal{D}$,

$$c \otimes \left(\bigoplus_{x \in A} x \right) = \bigoplus_{x \in A} c \otimes x.$$

Théorème 1 (Étoile de Kleene) Soit \mathcal{D} un dioïde complet, l'équation

$$x = ax \oplus b.$$

définie dans \mathcal{D} admet $x = a^*b$ comme plus petite solution, où l'opérateur étoile $*$ est défini par:

$$a^* = \bigoplus_{i=0}^{+\infty} a^i. \quad (\text{avec } a^0 = e)$$

Définition 6 (L'élément top d'un dioïde complet) L'élément top d'un dioïde complet \mathcal{D} existe et sera noté T . Il correspond à la somme des éléments du dioïde $T = \bigoplus_{x \in \mathcal{D}} x$. L'élément T est donc absorbant pour l'addition: $T \oplus a = T$.

Rappelons néanmoins que, puisque ε est absorbant pour la loi \otimes , on a: $T \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes T = \varepsilon$.

Sur $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$, $T = +\infty$. Par convention $T \otimes \varepsilon = (+\infty) + (-\infty) = -\infty = \varepsilon$.

Sur $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$, $T = -\infty$. Par convention $T \otimes \varepsilon = (-\infty) + (+\infty) = +\infty = \varepsilon$.

Définition 7 (Borne inférieure) Un dioïde complet a une structure de treillis complet pour l'ordre défini dans la définition 4. Par conséquent, tout sous-ensemble d'un dioïde complet admet une borne inférieure. Pour toute paire $(a, b) \in \mathcal{D}$, l'inf de a et b est défini par

$$a \wedge b = \bigoplus_{\{x | x \preceq a, x \preceq b\}} x.$$

Exemple 2 Sur $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$, $\wedge = \min$, $3 \wedge 4 = 3$ et sur $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$, $\wedge = \max$, $12 \wedge 5 = 12$.

Définition 8 (Homomorphisme de dioïde) Soient \mathcal{D} et \mathcal{C} deux dioïdes et $f : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{C}$. L'application f est un homomorphisme si $\forall a, b \in \mathcal{D}$,

$$f(a \oplus b) = f(a) \oplus f(b) \quad \text{et} \quad f(\varepsilon) = \varepsilon.$$

$$f(a \otimes b) = f(a) \otimes f(b) \quad \text{et} \quad f(e) = e.$$

Définition 9 (Congruence) Une congruence dans un dioïde $\{\mathcal{D}, \oplus, \otimes\}$ est une relation d'équivalence (notée R) dans \mathcal{D} qui est compatible avec \oplus et \otimes . Autrement dit $\forall a, b, c \in \mathcal{D}$:

$$a_R b \Rightarrow (a \oplus c)_R (b \oplus c).$$

$$a_R b \Rightarrow (a \otimes c)_R (b \otimes c).$$

Théorème 2 (Congruence induite par un homomorphisme) Soit $\Pi : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{C}$ un homomorphisme de dioïde, la relation $a \stackrel{\Pi}{\equiv} b \Leftrightarrow \Pi(a) = \Pi(b)$ est une congruence.

Preuve: Puisque Π est un homomorphisme, alors on a :

$$\forall c, \Pi(a \oplus c) = \Pi(a) \oplus \Pi(c) \quad \text{et} \quad \Pi(b \oplus c) = \Pi(b) \oplus \Pi(c).$$

Par conséquent si $a \stackrel{\Pi}{\equiv} b$, alors $\Pi(a) = \Pi(b)$ donc $\Pi(a \oplus c) = \Pi(b \oplus c)$, soit :

$$a \oplus c \stackrel{\Pi}{\equiv} b \oplus c.$$

Idem pour \otimes .

D'après la définition 9, la relation $\stackrel{\Pi}{\equiv}$ est une congruence.

Théorème 3 (Baccelli et al.92, p.158) Le quotient d'un dioïde \mathcal{D} par une congruence R noté \mathcal{D}/R (c'est-à-dire l'ensemble des classes d'équivalence) est un dioïde pour l'addition et la multiplication induites par celles de $\mathcal{D} : \forall a, b \in \mathcal{D}$,

$$[a]_R \oplus [b]_R = [a \oplus b]_R \quad \text{et} \quad [a]_R \otimes [b]_R = [a \otimes b]_R.$$

Preuve:

On va montrer comment l'on définit la somme (\oplus) et le produit (\otimes) dans l'ensemble quotient. Une classe de \mathcal{D}/R est définie par

$$[a]_R = \{ x \in \mathcal{D} \mid a_R x \}.$$

Soit $[a]_R$ la classe d'équivalence de a ($x \in [a]_R \Leftrightarrow x \equiv a \Leftrightarrow [x]_R = [a]_R$). La définition $[a]_R \oplus [b]_R = [a \oplus b]_R$ est correcte par ce que si $a' \in [a]_R$ et $b' \in [b]_R$ alors :

$$[a' \oplus b]_R = [a \oplus b']_R = [a' \oplus b']_R = [a \oplus b]_R.$$

C'est-à-dire $[a \oplus b]_R$ dépend seulement de $[a]_R$ et $[b]_R$, et non des représentants particuliers de ces classes. Les mêmes considérations s'appliquent au produit (\otimes).

Remarque 2 : Par la suite, sur un dioïde quotient \mathcal{D}/R on notera généralement $a = b$ à la place de $[a]_R = [b]_R$. Ainsi, l'égalité = désigne en fait l'égalité des classes (ou l'équivalence modulo R).

1.2 Dioïdes de séries formelles

Définition 10 (Série formelle à plusieurs variables) Une série formelle à n variables (z_1, z_2, \dots, z_n) commutatives à coefficients dans un dioïde \mathcal{D} est une application f de \mathbb{Z}^n dans $\mathcal{D} : \forall \{k_1, k_2, \dots, k_n\} \in \mathbb{Z}^n$, $f(k_1, k_2, \dots, k_n)$ représente le coefficient de $\{z_1^{k_1}, z_2^{k_2}, \dots, z_n^{k_n}\}$. Une autre représentation équivalente est :

$$f = \bigoplus_{\{k_1, k_2, \dots, k_n\} \in \mathbb{Z}^n} f(k_1, k_2, \dots, k_n) z_1^{k_1} z_2^{k_2} \dots z_n^{k_n}.$$

Définition 11 (Dioïde de séries formelles à plusieurs variables) Soient f et g deux séries formelles à n variables (z_1, z_2, \dots, z_n) . L'ensemble des séries formelles à n variables commutatives à coefficients dans un dioïde \mathcal{D} muni des opérations suivantes :

$$f \oplus g : (f \oplus g)(k_1, k_2, \dots, k_n) = f(k_1, k_2, \dots, k_n) \oplus g(k_1, k_2, \dots, k_n)$$

$$f \otimes g : (f \otimes g)(k_1, k_2, \dots, k_n) = \bigoplus_{i_\lambda + j_\lambda = k_\lambda} f(i_1, i_2, \dots, i_n) \otimes g(j_1, j_2, \dots, j_n), \quad \lambda \in \{1, 2, \dots, n\}$$

est un dioïde noté $\mathcal{D}[[z_1, z_2, \dots, z_n]]$. Si \mathcal{D} est complet, alors $\mathcal{D}[[z_1, z_2, \dots, z_n]]$ l'est également .

Notation 3 (Dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]$) On notera $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]$ le dioïde des séries formelles à une variable γ à coefficients dans $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ et exposants dans \mathbb{Z} .

Exemple 3 Soient S_1 et S_2 deux séries formelles définies dans $\overline{\mathbb{Z}_{max}}[\gamma]$ par :

$$S_1 = 2\gamma^3 \oplus 4\gamma^4, \quad S_2 = 1\gamma^3 \oplus 5\gamma^6.$$

On peut définir la somme et le produit de S_1 et S_2 de la façon suivante:

$$\begin{aligned} S_1 \oplus S_2 &= 2\gamma^3 \oplus 4\gamma^4 \oplus 1\gamma^3 \oplus 5\gamma^6 \\ &= (1 \oplus 2)\gamma^3 \oplus 4\gamma^4 \oplus 5\gamma^6 \\ &= 2\gamma^3 \oplus 4\gamma^4 \oplus 5\gamma^6. \\ S_1 \otimes S_2 &= (2\gamma^3 \oplus 4\gamma^4) \otimes (1\gamma^3 \oplus 5\gamma^6) \\ &= 3\gamma^6 \oplus 5\gamma^7 \oplus 7\gamma^9 \oplus 9\gamma^{10}. \end{aligned}$$

1.3 Conclusion

Ce chapitre introductif a permis de dresser une liste d'outils mathématiques nécessaires à l'étude des systèmes à événements discrets. Le chapitre suivant porte essentiellement sur la modélisation des systèmes à événement discrets dans l'algèbre $(\max,+)$ et le comportement des GET dans les diodes des séries formelles.

Chapitre 2

Systemes (max,+) linéaires

Certains systemes à événements discrets qui mettent en jeu des phénomènes de synchronisation peuvent être décrits de façon linéaire dans l'algèbre des dioïdes. Ces systemes peuvent également être représentés par un modèle graphique appelé graphe d'événements temporisé (GET). L'objectif de ce chapitre est de proposer un survol de la théorie des systemes (max,+)
linéaires et de rappeler la modélisation des GET dans les dioïdes de séries formelles. Pour la modélisation des GET dans l'algèbre des dioïdes, nous conseillons [Cohen, 1995]. Pour la modélisation dans les dioïdes de séries formelles, nous aiguillons le lecteur vers [Baccelli, 1992] [Cottenceau, 1999].

2.1 Modélisation de systemes (max,+) linéaires

On considère ici les systemes dynamiques à événements discrets dont la dynamique est décrite par des systemes d'équations linéaires dans des algèbres de type (max,+). C'est-à-dire sous la forme:

$$\begin{cases} x(k) = Ax(k-1) \oplus Bu(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases} \quad (2.1)$$

Où $A \in \overline{\mathbb{Z}}_{max}^{n \times n}$, $B \in \overline{\mathbb{Z}}_{max}^{n \times m}$, $C \in \overline{\mathbb{Z}}_{max}^{p \times m}$, avec n , m , et p désignent respectivement la taille du vecteur d'état $x(k)$, d'entrée $u(k)$ et de sortie $y(k)$.

Avec $x(k)$: un vecteur des fonctions dateurs associées aux transitions x ; $x(k)$ désigne la date du tir numérotée k de la transition x .

2.1.1 Modèle linéaire sur $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$

Les GET sont des systemes non linéaires dans le cadre de l'algèbre usuelle, cependant ils peuvent être décrits sur une structure algébrique adaptée (par exemple sur le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$). Une théorie des systemes linéaires sur une structure de dioïde a été développée dans ([Baccelli, 1992], [Gaubert, 1992]).

La figure 2.1 représente un exemple de GET. Les équations aux dateurs dans l'algèbre classique qui décrivent ce GET sont les suivantes:

$$\begin{cases} x_1(k) = \max(1 + u_1(k-1), 1 + x_2(k)) \\ x_2(k) = \max(u_2(k), x_1(k-1)) \\ x_3(k) = \max(2 + x_1(k-2), x_2(k)) \\ y(k) = x_3(k) \end{cases} \quad (2.2)$$

Les équations aux dateurs deviennent linéaires dans le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$:

$$\begin{cases} x_1(k) = 1 \otimes u_1(k-1) \oplus 1 \otimes x_2(k) \\ x_2(k) = u_2(k) \oplus x_1(k-1) \\ x_3(k) = 2 \otimes x_1(k-2) \oplus x_2(k) \\ y(k) = x_3(k) \end{cases} \quad (2.3)$$

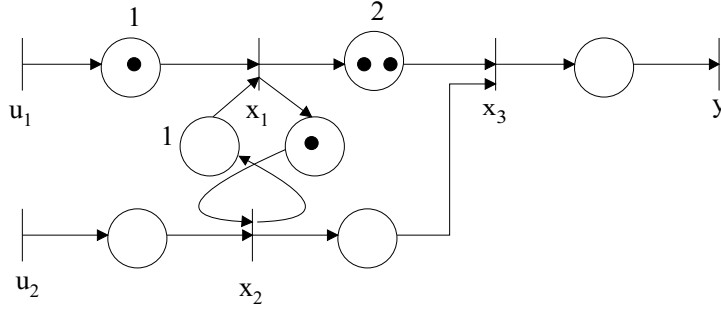


FIG. 2.1 – Un graphe d'événements temporisés

Les équations aux dateurs peuvent s'écrire sous forme matricielle:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(k) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \end{pmatrix} x(k) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} x(k-1) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} x(k-2) \\ \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} u(k) \oplus \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} u(k-1) \\ y(k) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & e \end{pmatrix} x(k) \end{array} \right.$$

D'une manière générale, on obtient donc la forme sur $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(k) = \bigoplus_{i=0}^a A_i x(k-i) \oplus \bigoplus_{j=0}^b B_j u(k-j) \\ y(k) = \bigoplus_{l=0}^c C_l x(k-l) \end{array} \right. \quad (2.4)$$

Il est possible avec quelques manipulations [Cohen, 1995], de passer à une forme récurrente, en procédant au préalable à une extension du vecteur d'état, on trouve la représentation d'état où le retard est au plus de 1 sur le vecteur d'état et de 0 sur le vecteur de commande. On se ramène alors à un système sous la forme:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(k) = A_0 x(k) \oplus A_1 x(k-1) \oplus B_0 u(k) \\ y(k) = C x(k) \end{array} \right. \quad (2.5)$$

Pratiquement il s'agit d'étendre le graphe afin que chaque place ne contienne initialement pas plus d'un jeton, la figure 2.2 donne une extension du GET de la figure 2.1, soit le modèle :

$$\left\{ \begin{array}{l} x(k) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} x(k) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} x(k-1) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} u(k) \\ y(k) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} x(k) \end{array} \right.$$

L'équation précédente est implicite en $x(k)$. En appliquant le théorème 1, on peut passer à la forme ARMA¹ explicite suivante:

$$\left\{ \begin{array}{l} x(k) = A x(k-1) \oplus B u(k) \\ y(k) = C x(k) \end{array} \right. \quad (2.6)$$

avec $A = A_0^* A_1$ et $B = A_0^* B_0$.

1. Auto Regressive - Moving Average

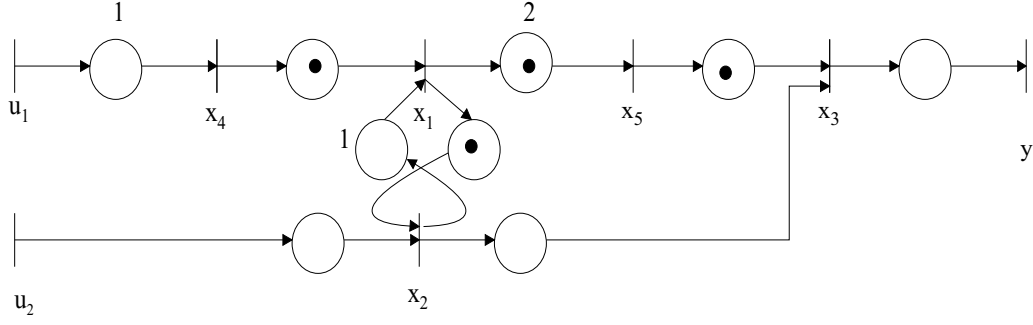


FIG. 2.2 – *GET correspondant au modèle de celui de la figure 2.1 après extension du vecteur d'état*

Remarque 3 *On peut également obtenir une représentation linéaire du comportement des GET sur le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$. Pour cela, on doit associer des fonctions compteur $c(t)$ aux tirs des transitions d'un GET : $x(t)$ représente le nombre de tirs de la transition x à la date t .*

2.2 Transformée en γ et δ

Tout comme il existe la transformée en z pour les systèmes classiques échantillonnés, les systèmes à événements discrets disposent des transformées en γ et δ . Dans la suite on s'intéresse à la transformée en γ et de manière analogue, on peut introduire la transformée en δ pour les compteurs. La transformée en γ d'un dateur d est définie comme la série formelle

$$D(\gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} d(k) \gamma^k. \quad (2.7)$$

Exemple 4 *Soient deux dateurs reliés par l'égalité $x_1(k) = x_2(k-1)$, leurs transformées en γ se ramènent à*

$$X_1(\gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x_1(k) \gamma^k = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x_2(k-1) \gamma^k = \gamma \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x_2(k-1) \gamma^{k-1} = \gamma X_2(\gamma).$$

Par conséquent, on peut interpréter γ comme un opérateur de décalage événementiel. De façon formelle, on écrira $x(k-1) = \gamma x(k)$.

La transformée en γ d'une fonction dateur peut être considérée comme appartenant à un dioïde de séries formelles en γ par exemple le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]$ (voir la notation 3). Notons que le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]$ permet de coder tout type de trajectoire. Or, l'évolution des dateurs $x_i(k)$ associés aux transitions des GET sont de nature monotones: le $k^{\text{ième}}$ tir d'une transition est toujours postérieur au $(k-1)^{\text{ième}}$. Par conséquent, le modèle mathématique utilisé pour représenter le comportement d'un GET doit tenir compte de ce caractère monotone.

2.2.1 Monotonie des trajectoires de tir d'un GET

Soit $\{d(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ un dateur sur $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$, la monotonie de cette variable s'écrit:

$$\forall k \in \mathbb{Z} \quad d(k) \succeq d(k-1).$$

La variable dateur est donc monotone non décroissante sur $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$; elle vérifie:

$$d(k) = d(k-1) \oplus d(k).$$

La transformée en γ de cette égalité produit la relation suivante, simplifiée en accord avec le théorème 1:

$$D(\gamma) = \gamma D(\gamma) \oplus D(\gamma) \implies D(\gamma) = \gamma^* D(\gamma).$$

Autrement dit, pour pouvoir prendre en compte les propriétés de monotonie des dateurs, il faut considérer seulement les séries de $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]$ invariantes par rapport à la multiplication de γ^* . Le théorème suivant montre que cet ensemble de "séries croissantes" a également une structure de dioïde qui est en outre isomorphe à un dioïde quotient.

Théorème 4 [Baccelli et al.92, p.224]

1. Le sous ensemble $\gamma^*\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]$, composé des éléments de la forme $\gamma^*D(\gamma)$ est un dioïde d'élément neutre $\varepsilon(\gamma)$ pour l'addition et γ^* pour la multiplication. Ce dioïde sera noté $D[[\gamma]]$.
2. Soit la congruence \mathcal{R}_γ définie sur $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]$ par

$$\{D_1(\gamma)\mathcal{R}_\gamma D_2(\gamma)\} \iff \{\gamma^*D_1(\gamma) = \gamma^*D_2(\gamma)\}$$

Chaque classe du dioïde quotient $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]/\mathcal{R}_\gamma$ contient un plus grand élément qui appartient à $D[[\gamma]]$.

Exemple 5 Soient $D_1(\gamma)$ et $D_2(\gamma)$, deux séries formelles définies ci-dessous

$$D_1(\gamma) = 3\gamma \oplus 2\gamma^3 \oplus 4\gamma^5,$$

$$D_2(\gamma) = 3\gamma \oplus 1\gamma^4 \oplus 4\gamma^5.$$

On peut remarquer que ces deux séries ne sont pas monotones non décroissantes. Par conséquent, elles ne peuvent pas représenter la transformée en γ d'un dateur. Ceci se traduit, d'autre part, par le fait que $\gamma^*D_1(\gamma)$ est différent de $D_1(\gamma)$ et que $\gamma^*D_2(\gamma)$ est différent de $D_2(\gamma)$. Le calcul de $\gamma^*D_1(\gamma)$ et $\gamma^*D_2(\gamma)$ est détaillé ci-dessous et les séries $D_1(\gamma)$, $D_2(\gamma)$, $\gamma^*D_1(\gamma)$ et $\gamma^*D_2(\gamma)$ sont représentées en figure 2.3.

$$\begin{aligned} \gamma^*D_1 &= \gamma^*(3\gamma \oplus 2\gamma^3 \oplus 4\gamma^5) \\ &= (3\gamma \oplus 3\gamma^2 \oplus \dots) \oplus (2\gamma^3 \oplus 2\gamma^4 \oplus \dots) \oplus (4\gamma^5 \oplus 4\gamma^6 \oplus \dots) \\ &= 3\gamma \oplus 3\gamma^2 \oplus (3 \oplus 2)\gamma^3 \oplus (3 \oplus 2)\gamma^4 \oplus (3 \oplus 2 \oplus 4)\gamma^5 \dots \\ &= 3\gamma \oplus 3\gamma^2 \oplus 3\gamma^3 \oplus 3\gamma^4 \oplus 4\gamma^5 \oplus \dots \\ \\ \gamma^*D_2 &= \gamma^*(3\gamma \oplus \gamma^4 \oplus 4\gamma^5) \\ &= (3\gamma \oplus 3\gamma^2 \oplus \dots) \oplus (\gamma^4 \oplus \gamma^5 \oplus \dots) \oplus (4\gamma^5 \oplus 4\gamma^6 \oplus \dots) \\ &= 3\gamma \oplus 3\gamma^2 \oplus 3\gamma^3 \oplus (3 \oplus 1)\gamma^4 \oplus (3 \oplus 1 \oplus 4)\gamma^5 \dots \\ &= 3\gamma \oplus 3\gamma^2 \oplus 3\gamma^3 \oplus 3\gamma^4 \oplus 4\gamma^5 \oplus \dots \end{aligned}$$

Clairement, on a $\gamma^*D_2(\gamma) = \gamma^*D_1(\gamma) = 3\gamma \oplus 4\gamma^5$, donc les séries $D_1(\gamma)$ et $D_2(\gamma)$ appartiennent à la même classe d'équivalence dans $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]/\mathcal{R}_\gamma$. De plus, le plus grand élément de cette classe est $\gamma^*D_2(\gamma) = \gamma^*D_1(\gamma)$. Graphiquement on peut trouver le plus grand élément de la classe d'équivalence en considérant la plus haute demi-droite en parcourant les γ croissants.

Remarque 4 La série $3\gamma \oplus 4\gamma^5$ peut représenter la transformée en γ d'un dateur, car elle est monotone non décroissante et $3\gamma \oplus 4\gamma^5 = \gamma^*(3\gamma \oplus 4\gamma^5)$ dans $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]/\mathcal{R}_\gamma$.

Au vu du théorème 4, le véritable dioïde des transformées en γ de dateurs est le dioïde $D[[\gamma]]$ et non $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]$. On rappelle que le dioïde $D[[\gamma]]$ correspond à l'ensemble des séries formelles monotones sur $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]$, on parle alors de "filtrage" des trajectoires monotones pour la multiplication par γ^* .

Règle de simplification

Le "filtrage" conduit à la règle de simplification suivante dans $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]$

$$\gamma^*(\gamma^n \oplus \gamma^{n'}) = \gamma^*\gamma^{\min(n,n')}.$$

Dans une même classe de $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]/\mathcal{R}_\gamma$, la règle de simplification devient

$$\gamma^n \oplus \gamma^{n'} = \gamma^{\min(n,n')}. \quad (2.8)$$

Remarque 5 De manière analogue, les fonctions compteurs sont monotones. Ainsi, la transformée en δ d'un compteur est une série monotone du dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{min}[[\delta]]$. Pour la transformée en δ d'un compteur, on obtient la règle de simplification suivante sur $\overline{\mathbb{Z}}_{min}[[\delta]]/\mathcal{R}_{\delta^{-1}}$:

$$\delta^t \oplus \delta^{t'} = \delta^{\max(t,t')}. \quad (2.9)$$

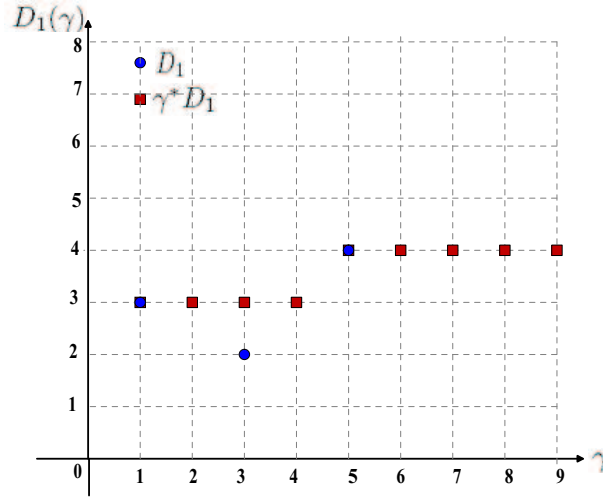


FIG. 2.3 – Représentation graphique de la série D_1 et γ^*D_1

2.2.2 Matrice de transfert en γ

Tout comme en automatique classique, il est possible de déduire une matrice de transfert à partir des équations d'état. On a vu que les équations d'un GET peuvent être mises sous la forme 2.6 ,

$$\begin{aligned} x(k) &= Ax(k-1) \oplus Bu(k) \Rightarrow X(\gamma) = A\gamma X(\gamma) \oplus BU(\gamma) \Rightarrow X(\gamma) = (A\gamma)^*BU(\gamma) \\ y(k) &= Cx(k) \Rightarrow Y(\gamma) = CX(\gamma) \end{aligned}$$

La matrice de transfert apparaît alors naturellement dans l'équation suivante

$$Y(\gamma) = C(A\gamma)^*BU(\gamma).$$

On peut également écrire $Y(\gamma) = H(\gamma)U(\gamma)$ avec $H(\gamma) = C(A\gamma)^*B$. La transformée en γ des équations aux dateurs de la figure (2.1) s'écrit sous la forme matricielle:

$$\begin{aligned} X(\gamma) &= \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \gamma & \varepsilon & \varepsilon \\ 2\gamma^2 & e & \varepsilon \end{pmatrix} X(\gamma) \oplus \begin{pmatrix} 1\gamma & \varepsilon \\ \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} U(\gamma) \\ Y(\gamma) &= (\varepsilon \quad \varepsilon \quad e) X(\gamma) \end{aligned}$$

Le calcul de la fonction de transfert du GET de la figure 2.1 donne:

$$H(\gamma) = (1\gamma^2 \oplus 3\gamma^3(1\gamma)^* \quad e \oplus 1\gamma \oplus 3\gamma^2(1\gamma)^*). \quad (2.10)$$

2.3 Représentation bi-dimensionnelle: dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$

Cette section est essentiellement inspirée de [Cohen et al.1989, Baccelli et al.1992, Cottenceau 1999]. Dans la section précédente, il a été question de deux représentations linéaires (mais dans deux dioïdes différents) de GET. La représentation bi-dimensionnelle permet de prendre en compte le domaine événementiel et le domaine temporel. Le principe de la représentation bi-dimensionnelle est de coder les trajectoires de tir de GET non plus par des séries formelles en une variable (γ ou δ) mais par des séries formelles en deux variables γ et δ à exposants dans \mathbb{Z} et à coefficients booléens, ce dioïde sera noté $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$.

2.3.1 Dioïde $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$

Définition 12 (*Dioïde $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$*) On appelle $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$ le dioïde des séries formelles commutatives à coefficients booléens en deux indéterminées γ et δ et à exposants en \mathbb{Z} . Une série formelle de $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$ s'écrit de manière unique:

$$s = \bigoplus_{n, t \in \mathbb{Z}} s(n, t) \gamma^n \delta^t; \quad (2.11)$$

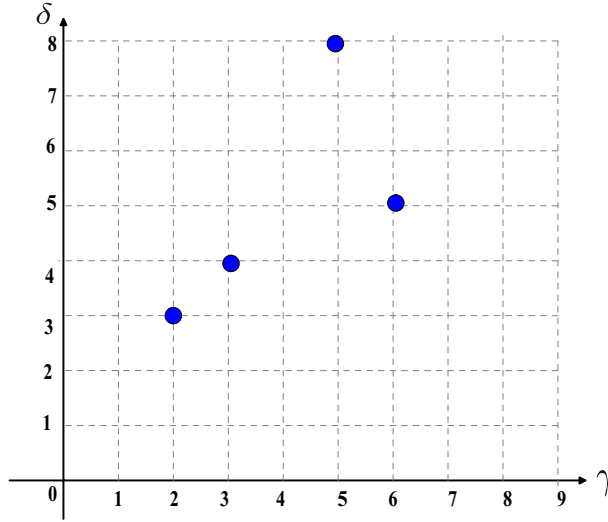


FIG. 2.4 – Représentation graphique de la série s

avec $s(n,t) = e$ ou ε . $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$ est un dioïde complet.

Définition 13 (Support d'une série) Le support d'une série s est la partie de \mathbb{Z}^2 suivante:

$$\text{Supp}(s) = \{(n,t) \in \mathbb{Z}^2 \mid s(n,t) \neq \varepsilon\}$$

2.3.2 Représentation graphique des éléments de $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$

Une série de $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$ est représentée par la collection des points (n, t) du plan \mathbb{Z}^2 appartenant au support de cette série. Pratiquement la série $s = \gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^3\delta^4 \oplus \gamma^5\delta^8 \oplus \gamma^6\delta^5 \in \mathbb{B}[\gamma, \delta]$ sera représentée par les points de coordonnées $(2, 3)$, $(3, 4)$, $(5, 8)$ et $(6, 5)$ de \mathbb{Z}^2 . (voir figure 2.4).

2.3.3 Dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$

Afin de prendre en compte la monotonie des trajectoires de tir de GET, il ne faut considérer que les séries qui sont invariantes par rapport à la multiplication par γ^* (monotonie des dateurs) et la multiplication par $(\delta^{-1})^*$ (monotonie des compteurs). Dans cet objectif, seul ce sous-ensemble de $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$, noté $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$, sera considéré.

Théorème 5

1. Nous appelons $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ le dioïde $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$ quotienté par la congruence

$$\{X_1(\gamma, \delta) \mathcal{R}_{(\gamma, \delta)} X_2(\gamma, \delta)\} \iff \{\gamma^*(\delta^{-1})^* X_1(\gamma, \delta) = \gamma^*(\delta^{-1})^* X_2(\gamma, \delta)\}$$

2. Le dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ est un dioïde complet isomorphe à $D[\gamma]$ et $D[\delta]$
3. Chaque classe du dioïde quotient $\mathbb{B}[\gamma, \delta] / \mathcal{R}_{(\gamma, \delta)}$ contient un plus grand élément qui appartient à $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$.

Propriété 1 Le dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ est un dioïde complet distributif qui admet un élément neutre $\varepsilon = \varepsilon(\gamma, \delta)$ (la série nulle de $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$) pour la loi \oplus et un élément neutre $e = (\gamma \oplus \delta^{-1})^*$ pour la loi \otimes .

Exemple 6 Soient s_1 et s_2 , deux éléments de $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$ définis ci-dessous

$$\begin{aligned} s_1 &= \gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^3\delta^2 \oplus \gamma^5\delta^6, \\ s_2 &= \gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^5\delta^6. \end{aligned}$$

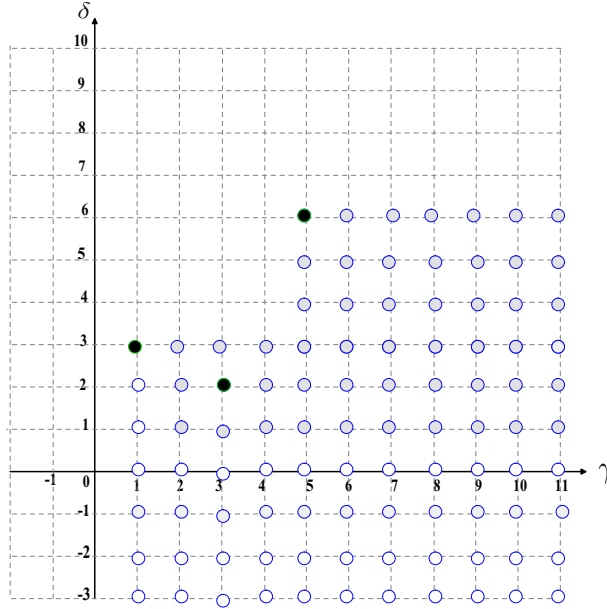


FIG. 2.5 – Représentation graphique de la série $\bullet \equiv s_1$, $\circ \equiv (\gamma^*(\delta^{-1})^*)s_1$

Le calcul de $(\gamma^*(\delta^{-1})^*)s_1$ est détaillé ci-dessous

$$\begin{aligned}
(\gamma^*(\delta^{-1})^*)s_1 &= (e \oplus \gamma^1 \oplus \gamma^2 \oplus \gamma^3 \oplus \dots)(e \oplus \delta^{-1} \oplus \delta^{-2} \oplus \delta^{-3} \oplus \dots)(\gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^3\delta^2 \oplus \gamma^5\delta^6) \\
&= (e \oplus \gamma^1\delta^{-1} \oplus \gamma^1\delta^{-2} \oplus \gamma^1\delta^{-3} \oplus \dots \oplus \gamma^2\delta^{-1} \oplus \gamma^2\delta^{-2} \oplus \gamma^2\delta^{-3} \oplus \dots)(\gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^3\delta^2 \oplus \gamma^5\delta^6) \\
&= (\gamma^*(\delta^{-1})^*)(\gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^5\delta^6) \\
&= (\gamma^*(\delta^{-1})^*)s_2.
\end{aligned}$$

Clairement, on a $(\gamma^*(\delta^{-1})^*)s_1 = (\gamma^*(\delta^{-1})^*)s_2 = (\gamma^*(\delta^{-1})^*)(\gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^5\delta^6)$, donc les séries s_1 et s_2 appartiennent à la même classe d'équivalence dans $\mathbb{B}[\gamma, \delta]_{/\mathcal{R}_{(\gamma, \delta)}}$. De plus $(\gamma^*(\delta^{-1})^*)(\gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^5\delta^6)$ est le plus grand élément de cette classe dans $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$.

2.3.4 Manipulation sur les éléments de dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ et règles de simplifications

Un élément de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ sera désigné par un représentant quelconque dans $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$. La manipulation des éléments de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ se fait donc avec les règles de somme et de produit du dioïde $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$ auxquelles on ajoute les règles de simplifications issues de (2.8) et (2.9) suivantes:

$$\gamma^n \delta^t \oplus \gamma^{n'} \delta^t = \gamma^{\min(n, n')} \delta^t \quad (2.12)$$

$$\gamma^n \delta^t \oplus \gamma^n \delta^{t'} = \gamma^n \delta^{\max(t, t')} \quad (2.13)$$

On dispose aussi de la règle suivante qui permet d'établir la borne inf de deux monômes de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$:

$$\gamma^n \delta^t \wedge \gamma^{n'} \delta^{t'} = \gamma^{\max(n, n')} \delta^{\min(t, t')} \quad (2.14)$$

2.3.5 Représentation graphique des éléments de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$

Nous nous appuyons sur la représentation des éléments de $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$ pour définir une représentation graphique des éléments de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$. Graphiquement, pour le monôme $\gamma^n \delta^t$, on ne considère plus le point de coordonnées (n, t) mais le "cône Sud-Est" de sommet (n, t) . (voir figure 2.5)

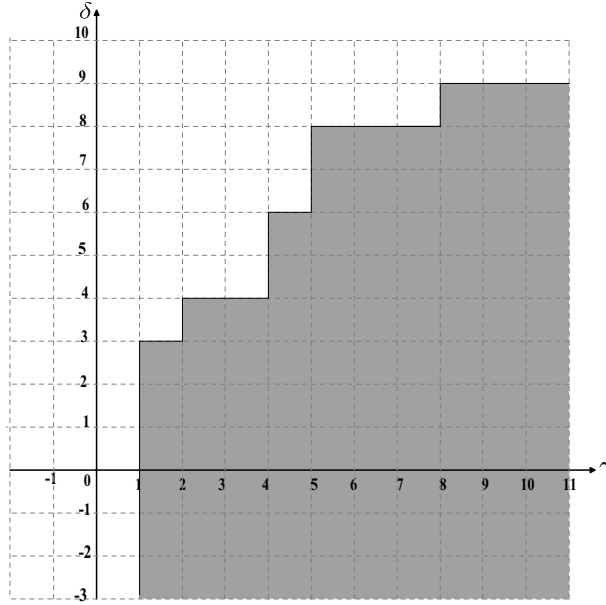


FIG. 2.6 – Le représentant maximal de la série $s = \gamma^1 \delta^3 \oplus \gamma^2 \delta^2 \oplus \gamma^2 \delta^4 \oplus \gamma^4 \delta^3 \oplus \gamma^4 \delta^6 \oplus \gamma^5 \delta^8 \oplus \gamma^6 \delta^7 \oplus \gamma^7 \delta^8 \oplus \gamma^8 \delta^9$.

Représentant maximal Les dioïdes $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ et $\mathbb{B}[\gamma, \delta] / \mathcal{R}_{(\gamma^* (\delta^{-1})^*)}$ sont isomorphes. En d'autre terme, tout élément $a \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ vérifié l'égalité $a = (\gamma^* (\delta^{-1})^*)a$ et $(\gamma^* (\delta^{-1})^*)a$ est le représentant maximal de la classe de a dans $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$. Graphiquement dans \mathbb{Z}^2 , le représentant maximal est représenté par tous les points de \mathbb{Z}^2 situés dans le cône sud-est qui s'étend sur la plus grande surface, en couvrant les représentations de chacun des autres éléments de sa classe.

Exemple 7 (Représentant maximal) Soit $s = \gamma^1 \delta^3 \oplus \gamma^2 \delta^2 \oplus \gamma^2 \delta^4 \oplus \gamma^4 \delta^3 \oplus \gamma^4 \delta^6 \oplus \gamma^5 \delta^8 \oplus \gamma^6 \delta^7 \oplus \gamma^7 \delta^8 \oplus \gamma^8 \delta^9$. On vérifie facilement que cette série est égale à la série (sont dans la même classe d'équivalence):

$$\gamma^1 \delta^3 \oplus \gamma^2 \delta^4 \oplus \gamma^4 \delta^6 \oplus \gamma^5 \delta^8 \oplus \gamma^8 \delta^9.$$

Le représentant maximal de s est donné par

$$(\gamma^* (\delta^{-1})^*)(\gamma^1 \delta^3 \oplus \gamma^2 \delta^4 \oplus \gamma^4 \delta^6 \oplus \gamma^5 \delta^8 \oplus \gamma^8 \delta^9).$$

Le représentant maximal de s est représenté par La figure 2.6.

Représentant minimal De même que tout élément de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ admet un représentant maximal dans $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$, il est montré, notamment dans [Baccelli et al., 1992], que certains éléments de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ admettent également un représentant minimal dans $\mathbb{B}[\gamma, \delta]$. C'est le cas notamment des polynômes. Graphiquement, on obtient ce représentant minimal en ne codant que les sommets du représentant de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$.

Exemple 8 (Représentant minimal) Soit $s = \gamma^1 \delta^4 \oplus \gamma^2 \delta^2 \oplus \gamma^5 \delta^6 \oplus \gamma^6 \delta^3$ un élément de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$, l'élément $\gamma^* (\delta^{-1})^*(\gamma^1 \delta^4 \oplus \gamma^5 \delta^6)$ est le représentant maximal (graphiquement correspond à toute la surface de l'union de deux cônes de sommet (1, 4) et (5, 6)) et $(\gamma^1 \delta^4 \oplus \gamma^5 \delta^6)$ est son représentant minimal (seulement les sommets de deux cônes).

Le représentant minimal de s est représenté par la figure 2.7.

2.3.6 Exemple de calcul sur des polynômes de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$

On notera $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ l'ensemble des polynômes de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$, c'est-à-dire l'ensemble des éléments à support fini.

Soit $a, b \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$, $a = \gamma^1 \delta^1 \oplus \gamma^2 \delta^3 \oplus \gamma^3 \delta^5$ et $b = \gamma^1 \delta^2 \oplus \gamma^3 \delta^3 \oplus \gamma^4 \delta^4$. On peut représenter graphiquement (figure 2.8) les deux polynômes a et b ainsi que les opérations suivantes

$$a \oplus b = \gamma^1 \delta^2 \oplus \gamma^2 \delta^3 \oplus \gamma^3 \delta^5 \text{ (on remarque on effet que } \gamma^1 \delta^1 \preceq \gamma^1 \delta^2 \text{ et } \gamma^3 \delta^3 \oplus \gamma^4 \delta^4 \preceq \gamma^3 \delta^5 \text{).}$$

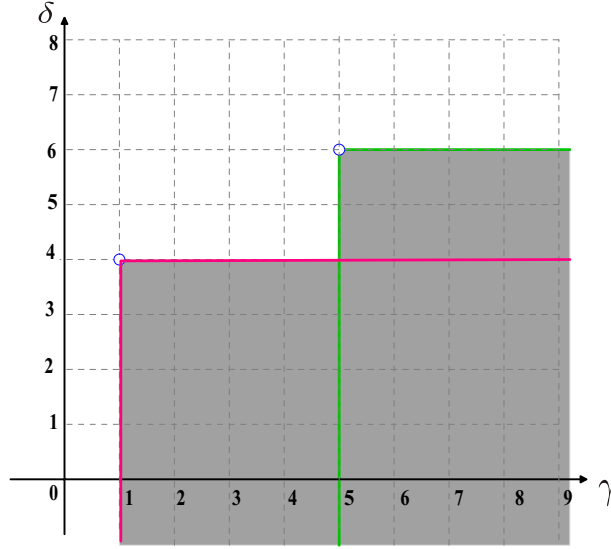


FIG. 2.7 – Le représentant maximal (grisé) et minimal (les sommets) de $(\gamma^1\delta^4 \oplus \gamma^5\delta^6)$

$$a \otimes b = \gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^3\delta^5 \oplus \gamma^4\delta^7 \oplus \gamma^6\delta^8 \oplus \gamma^7\delta^9 \text{ (on remarque on effet que } \gamma^4\delta^4 \oplus \gamma^5\delta^5 \oplus \gamma^5\delta^6 \oplus \gamma^6\delta^7 \preceq \gamma^4\delta^7).$$

$$a \wedge b = \gamma^1\delta^1 \oplus \gamma^2\delta^2 \oplus \gamma^3\delta^3 \oplus \gamma^4\delta^4.$$

2.3.7 Modèle linéaire sur $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$

La représentation bi-dimensionnelle permet de modéliser les GET dans un dioïde de séries formelles de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$, ainsi d'établir un modèle entrée-sortie par une matrice de transfert H . D'un point de vue dynamique, le GET peut alors être vu comme un système induisant des décalages (événementiels et temporels) sur les trajectoires d'entrée, les opérateurs permettant de caractériser ces décalages étant l'opérateur γ dans le domaine événementiel et l'opérateur δ dans le domaine temporel.

Définition 14 (*Matrice de transfert*) *Comme en automatique des systèmes continus, il est possible de calculer la matrice de transfert à partir de la représentation d'état. Les éléments de la matrice de transfert sont des séries périodiques et causales de la forme $p \oplus qr^*$, avec p et q des polynômes de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$. Cette matrice est donnée par:*

$$H = CA^*B \tag{2.15}$$

Exemple 9 *Nous formulons ici la représentation d'état du GET de la figure 2.1, on obtient directement le modèle d'état sous forme canonique suivant:*

$$\begin{cases} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \varepsilon & \delta & \varepsilon \\ \gamma & \varepsilon & \varepsilon \\ \gamma^2\delta^2 & e & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \gamma\delta & \varepsilon \\ \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \\ y = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & e \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \end{cases}$$

Le calcul de la matrice de transfert donne:

$$H(\gamma, \delta) = CA^*B = (\gamma^2\delta \oplus \gamma^3\delta^3(\gamma\delta)^* \quad e \oplus \gamma\delta \oplus \gamma^2\delta^3(\gamma\delta)^*) \tag{2.16}$$

On constate bien que la forme de H fait apparaître le caractère ultimement périodique de la réponse impulsionnelle: cette période ultime est décrite par la présence d'une seule étoile de monôme, ici $(\gamma\delta)^*$.

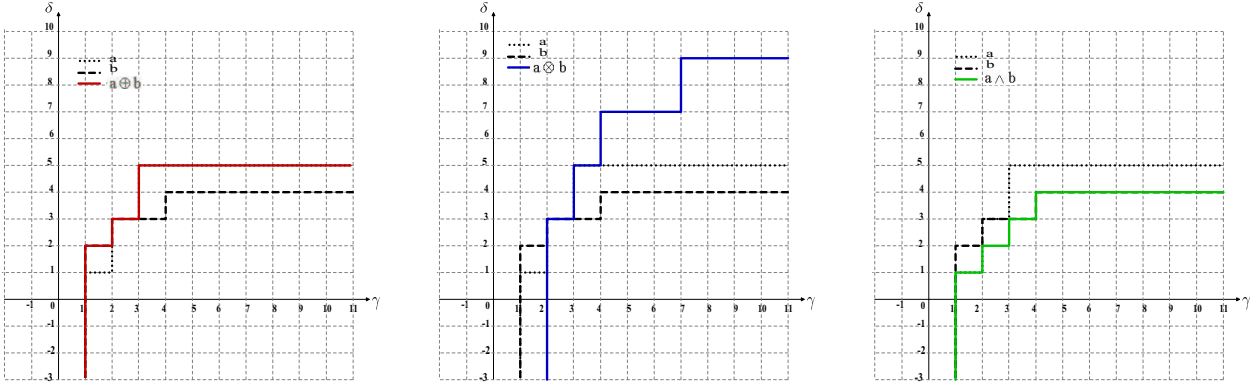


FIG. 2.8 – Manipulation des éléments de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$

2.4 Séries périodiques de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$

La représentation bi-dimensionnelle permet de caractériser un système à partir de sa matrice de transfert. De façon analogue aux systèmes linéaires classiques, l'étude de la matrice de transfert fournit les caractéristiques du système. Dans un GET, les éléments de cette matrice sont en fait des séries périodiques en (γ, δ) . Il est possible de mettre en avant certaines propriétés de ces séries.

2.4.1 Causalité, Rationalité, Périodicité, Réalisabilité

Les notations suivantes sont tirées de [Baccelli et al.92, p.254 à 256].

Définition 15 (Causalité) Une série $s \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ est dite causale si $s = \varepsilon(\gamma, \delta)$ (la série est nulle) ou si chacun de ses monômes est à exposants dans \mathbb{N} . Une matrice est causale si ses éléments sont causaux.

Définition 16 (Rationalité) Une série $s \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ est dite rationnelle si son représentant minimal peut s'écrire avec un nombre fini d'opérations \oplus , \otimes , et $*$, et avec les opérands $\{\varepsilon, e, \gamma, \delta\}$. Une matrice est rationnelle si ses éléments sont rationnels.

Définition 17 (Réalisabilité) Une matrice $H \in (\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta])^{p \times m}$ est réalisable si il existe quatre matrices A_1 , A_2 , B et C de tailles respectivement $n \times n$, $n \times m$ et $p \times m$ à coefficients dans l'ensemble $\{\varepsilon, e\}$ telles que $H = C(\gamma A_1 \oplus \delta A_2) * B$.

Définition 18 (Périodicité) Une série s de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ est dite périodique s'il existe deux polynômes p et q de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$

$$p = \bigoplus_{i=0}^{\alpha} \gamma^{n_i} \delta^{t_i} \quad \text{et} \quad q = \bigoplus_{j=0}^{\beta} \gamma^{N_j} \gamma^{T_j}$$

et un monôme $r = \gamma^\nu \delta^\tau$ tels que

$$s = p \oplus q r^*.$$

Cette notion est illustrée sur la figure 2.9.

Une matrice est périodique si ses éléments sont périodiques.

Remarque 6 Un polynôme de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ est une série périodique dégénérée ($r = \varepsilon$).

Définition 19 (Pente ultime) La pente ultime d'une série périodique $s = p \oplus q(\gamma^\nu \delta^\tau)^*$ notée σ_∞ est définie comme le ratio $\sigma_\infty(s) = \nu/\tau$.

Théorème 6 (Baccelli et al., 1992, p.256) Pour toute matrice $H \in (\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta])^{p \times m}$, les propositions suivantes sont équivalentes:

- (i) H est réalisable,
- (ii) H est périodique et causale,
- (iii) H est rationnelle.

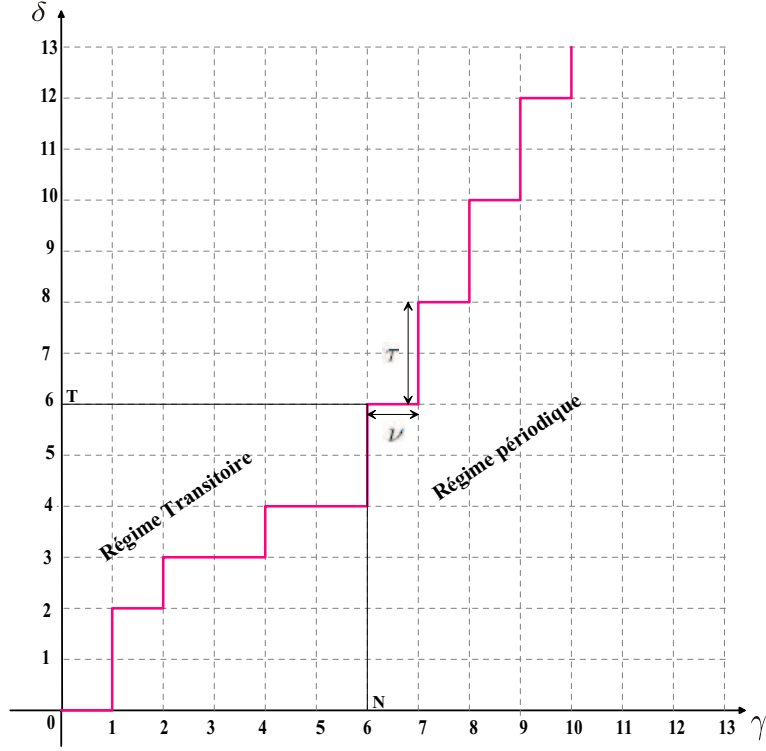


FIG. 2.9 – Représentation graphique de la série $s = e \oplus \gamma^1 \delta^2 \oplus \gamma^2 \delta^3 \oplus \gamma^4 \delta^4 \oplus \gamma^6 \delta^6 (\gamma^1 \delta^2)^*$

Ce théorème met en évidence le fait que le transfert des systèmes $(\max, +)$ linéaires est décrit par des séries périodiques.

Théorème 7 *L'ensemble des séries périodiques de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ est stable pour la somme, le produit, l'inf et l'étoile de Kleene. En outre, pour s_1 et s_2 deux séries périodiques non dégénérées, on obtient les résultats suivants:*

$$\begin{aligned} \sigma_\infty(s_1 \oplus s_2) &= \min(\sigma_\infty(s_1), \sigma_\infty(s_2)), \\ \sigma_\infty(s_1 \otimes s_2) &= \min(\sigma_\infty(s_1), \sigma_\infty(s_2)), \\ \sigma_\infty(s_1 \wedge s_2) &= \max(\sigma_\infty(s_1), \sigma_\infty(s_2)), \\ \sigma_\infty(s_1^*) &= \min_{i,j} \left(\frac{n_i}{t_i}, \frac{N_j}{T_j}, \frac{\nu}{\tau} \right). \end{aligned}$$

2.4.2 Forme canonique des séries périodiques de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$

D'après le théorème 6, la manipulation des séries rationnelles de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ joue un rôle central dans l'étude des GET, plus précisément pour le calcul de leur relation de transfert entrée-sortie. Mais les manipulations des éléments rationnels n'est pas aisée. On préférera donc de plus souvent présenter les séries rationnelles en accord avec la définition 18, sous forme de séries périodiques et causales qui ont l'avantage de bénéficier d'un représentant canonique.

Forme canonique des polynômes Un polynôme $p = \bigoplus_{i=0}^{\alpha} \gamma^{n_i} \delta^{t_i}$ est dit sous la forme canonique (ou forme minimale) si $n_0 < n_1 < \dots < n_\alpha$ et $t_0 < t_1 < \dots < t_\alpha$. Nous rappelons que cette forme est obtenue par exemple graphiquement en ne gardant que l'expression des sommets des cônes constituant le représentant graphique de p .

Forme canonique des séries périodiques de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ L'élaboration d'une forme canonique s'effectue en deux temps. Tout d'abord une série périodiques $s = p \oplus qr^*$ (voir définition 18) peut toujours se

réécrire sous une forme dite propre vérifiant:

- p et q sont sous forme canonique
- $(n_\alpha, t_\beta) < (N_0, T_0)$
- $(N_\beta - N_0, T_\beta - T_0) < (\nu, \tau)$

Lorsque s est sous une forme propre, le polynôme p caractérise le transitoire de la série périodique et le polynôme q caractérise le motif du régime périodique.

Dans un second temps, parmi les formes propres d'une séries périodiques, il en est une qui minimise la taille du transitoire et la longueur du motif du périodique.

Ainsi parmi les formes propres d'une série périodique $s = p \oplus qr^*$, la forme canonique (ou représentation minimale) est celle qui minimise les couples (n_α, t_β) et (ν, τ) . La preuve de ce résultat, ainsi que les algorithmes permettant d'aboutir à la représentation minimale, sont donnés dans [Gaubert, 1992].

On illustre les différents étapes par l'exemple suivant ce qui donne également (intuitivement) des indications sur les algorithmes permettant d'arriver à la forme canonique dans le cas général.

Exemple 10 Soit la série périodique

$$s = e \oplus \gamma^2 \delta^1 \oplus \gamma^3 \delta^5 \oplus (\gamma^2 \oplus \gamma^3 \delta^1)(\gamma^2 \delta^2)^*$$

On remarque tout d'abord qu'il ne s'agit pas d'une forme propre. On peut exprimer s sous forme propre de la manière suivante :

$$\begin{aligned} s &= e \oplus \gamma^2 \delta^1 \oplus \gamma^3 \delta^5 \oplus (\gamma^2 \oplus \gamma^3 \delta^1)(\gamma^2 \delta^2)^* \\ &= e \oplus \gamma^2 \delta^1 \oplus \gamma^3 \delta^5 \oplus \underbrace{(\gamma^2 \oplus \gamma^3 \delta^1)}_q \oplus \underbrace{(\gamma^2 \oplus \gamma^3 \delta^1) \gamma^2 \delta^2}_{qr} \oplus \underbrace{(\gamma^2 \oplus \gamma^3 \delta^1) \gamma^4 \delta^4}_{qr^2} \oplus \underbrace{(\gamma^2 \oplus \gamma^3 \delta^1) \gamma^6 \delta^6 (\gamma^2 \delta^2)^*}_{qr^3 r^*}. \end{aligned}$$

Après simplification du transitoire (forme canonique de p) et réécriture du périodique, on obtient s sous la forme suivante

$$s = e \oplus \gamma^2 \delta^1 \oplus \gamma^3 \delta^5 \oplus (\gamma^8 \delta^6 \oplus \gamma^9 \delta^7)(\gamma^2 \delta^2)^*$$

On peut factoriser q par $(e \oplus \gamma^1 \delta^1)$. On peut donc écrire s sous la forme

$$\begin{aligned} s &= e \oplus \gamma^2 \delta^1 \oplus \gamma^3 \delta^5 \oplus \gamma^8 \delta^6 (e \oplus \gamma^1 \delta^1)(\gamma^2 \delta^2)^* \\ &= e \oplus \gamma^2 \delta^1 \oplus \gamma^3 \delta^5 \oplus \gamma^8 \delta^6 (\gamma^1 \delta^1)^* \end{aligned}$$

Cette dernière représentation est la forme périodique canonique de la série s . Il n'existe pas d'autre représentation périodique dont la taille du motif (ν, τ) et la taille du transitoire (n_α, t_β) soient plus petites que pour cette représentation.

2.5 MinMaxGD Librairie de calcul dans le dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$

La librairie MinMaxGD [Lhommeau et Hardouin, 2000] se présente comme un ensemble de routines écrites en C++, liées au Logiciel scilab. Cette librairie permet de manipuler des séries rationnelles dans le dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$. MinMaxGD reconnaît les types élémentaires suivants: type série (noté series) et le type matrice (noté smatrix) correspondant au dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$. MinMaxGD reconnaît les opérations de base suivantes: $\oplus, \otimes, \setminus, *, \wedge$ et $Pr+$ (projection dans les causaux).

Exemple 11 Pour la série $s = \gamma^1 \delta^2 \oplus \gamma^2 \delta^3 \oplus \gamma^5 \delta^8 (\gamma^2 \delta^5)^*$ la synthèse sera la suivante $s = \text{series}([1 \ 2; 2 \ 3], [5 \ 8], [2 \ 5])$. La commande $A = \text{smatrix}(n, m)$ permet de déclarer une matrice (notée A) de n lignes et m colonnes.

2.6 Conclusion

Dans ce chapitre nous avons présenté les dioïdes permettant de modéliser les systèmes $(\max,+)$, en particulier les GET. Nous avons également insisté sur le caractère périodique des éléments de la matrice de transfert, en particulier le calcul du transfert des GET qui se ramène à la manipulation de séries périodiques et causales pour lesquelles certains algorithmes ont été développés et implémentés dans la librairie MinMaxGD.

Notons que certaines opérations de calcul sur les séries périodiques de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma,\delta]$ peuvent être coûteuses en temps de calcul. Ceci est dû à une possible explosion de la quantité d'information nécessaire à coder une série périodique sous forme canonique lorsque le polynôme transitoire p contient beaucoup de monômes. Prenons l'exemple suivant

Exemple 12 Soit $a, b \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma,\delta]$, $a = (\gamma^{13}\delta^{14})^*$ et $b = \delta^4(\gamma^{14}\delta^{15})^*$. Sous forme canonique périodique, on obtient

$$a \oplus b = \gamma^0\delta^4 \oplus \gamma^{13}\delta^{14} \oplus \dots \oplus \gamma^{2886}\delta^{3108} \oplus (\gamma^{2898}\delta^{3109})(\gamma^{2899}\delta^{3122})^*$$

$$a \otimes b = \gamma^0\delta^4 \oplus \gamma^{13}\delta^{18} \oplus \dots \oplus \gamma^{153}\delta^{168} \oplus \gamma^{154}\delta^{169} \oplus (\gamma^{156}\delta^{172} \oplus \dots \oplus \gamma^{168}\delta^{184})(\gamma^{13}\delta^{14})^*$$

Ce genre d'explosion peut se produire lorsque les pentes $\sigma_\infty(a)$ et $\sigma_\infty(b)$ sont proches.

Pour remédier à ces problèmes de calcul, on souhaite donc introduire une nouvelle représentation des séries périodiques pour laquelle les opérations \oplus , \otimes et $*$ soient moins coûteuses (réduction de la complexité algorithmique des calculs).

Remarque 7 (Complexité des opérations sur les séries périodiques de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma,\delta]$) Suite à l'exemple précédent, on comprend que la complexité des opérations sur les séries périodiques ne dépend pas uniquement de la taille des données (taille de p et de q) mais aussi des pentes $\sigma_\infty(a)$ et $\sigma_\infty(b)$. Par conséquent, il est difficile d'établir la complexité algorithmique de ces opérations.

Le prochain chapitre est consacré à l'introduction d'un nouveau dioïde de séries formelles qui sera noté $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma,\delta]$.

Chapitre 3

Construction du dioïde $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$

Certaines manipulations sur les séries périodiques de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ peuvent être coûteuses en temps de calcul. En effet les algorithmes dont on dispose pour la manipulation des séries rationnelles (Librairie Min-MaxGD) peuvent générer des phénomènes transitoires de très grande taille; il suffit de faire la somme $(\gamma^{13}\delta^{14})^* \oplus \delta^4(\gamma^{14}\delta^{15})^*$ pour s'en convaincre. Le but est de chercher une nouvelle représentation de ces séries qui nous permette de réduire la taille des données nécessaires à leur représentation et ainsi réduire la complexité des opérations.

Nous proposons dans ce chapitre une représentation des séries de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ dans un nouveau dioïde noté $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$. Dans un premier temps, nous présenterons la transformée de Fenchel d'une série du dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$, puis le dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ quotienté par la transformée de Fenchel, ce dioïde sera noté $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$. On s'intéressera notamment aux propriétés graphiques de ses représentants.

Dans un second temps, notre intérêt se porte sur les algorithmes permettant de mettre une série périodique sous forme canonique, calculer la somme, le produit et l'étoile des séries périodiques dans le dioïde $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$. Ces algorithmes ont été implémentés sous forme de script SCILAB .

3.1 Transformée de Fenchel

Définition 20 (Transformée de Fenchel) Soit g une application de $\overline{\mathbb{R}}_{max} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{max}$. On définit la transformée de Fenchel $\mathcal{F}(g)$ comme l'application: $\mathcal{F}(g) : \overline{\mathbb{R}}_{max} \rightarrow \overline{\mathbb{R}}_{max}$ telle que

$$[\mathcal{F}(g)](x) = \sup_c [cx + g(c)].$$

Par la suite, on notera également:

$$[\mathcal{F}(g)](x) = \sup_c [cx + g(c)] = \bigoplus_{c \in \mathbb{Z}} g(c) \otimes x^c,$$

où $x^c = x \times c$ (\times désigne ici le produit usuel).

Définition 21 (Dioïde \mathcal{C}_v) Le dioïde \mathcal{C}_v est l'ensemble des fonctions numériques continues de $\overline{\mathbb{R}}_{max}$ à $\overline{\mathbb{R}}_{max}$ muni par les deux opérations \oplus et \otimes définies ci-dessous; et admet un élément neutre pour \oplus noté $\varepsilon = x \mapsto -\infty$ et un élément neutre pour \otimes noté $e = x \mapsto 0$.

$$\text{soit } f, g \in \mathcal{C}_v; \forall t, \quad (f \oplus g)(t) = f(t) \oplus g(t) = \max(f(t), g(t)) \text{ et} \\ (f \otimes g)(t) = f(t) \otimes g(t) = f(t) + g(t).$$

Avec \oplus : le max point par point et \otimes : la somme point par point.

Définition 22 (La transformée de Fenchel d'une série $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$) Soit $\mathcal{F} : \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta] \rightarrow \mathcal{C}_v$ la transformée qui a une série $f = \bigoplus_{c \in \mathbb{Z}} \gamma^c \delta^{f(c)} \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ associe la fonction convexe

$$x \mapsto \bigoplus_{c \in \mathbb{Z}} f(c) \otimes x^c.$$

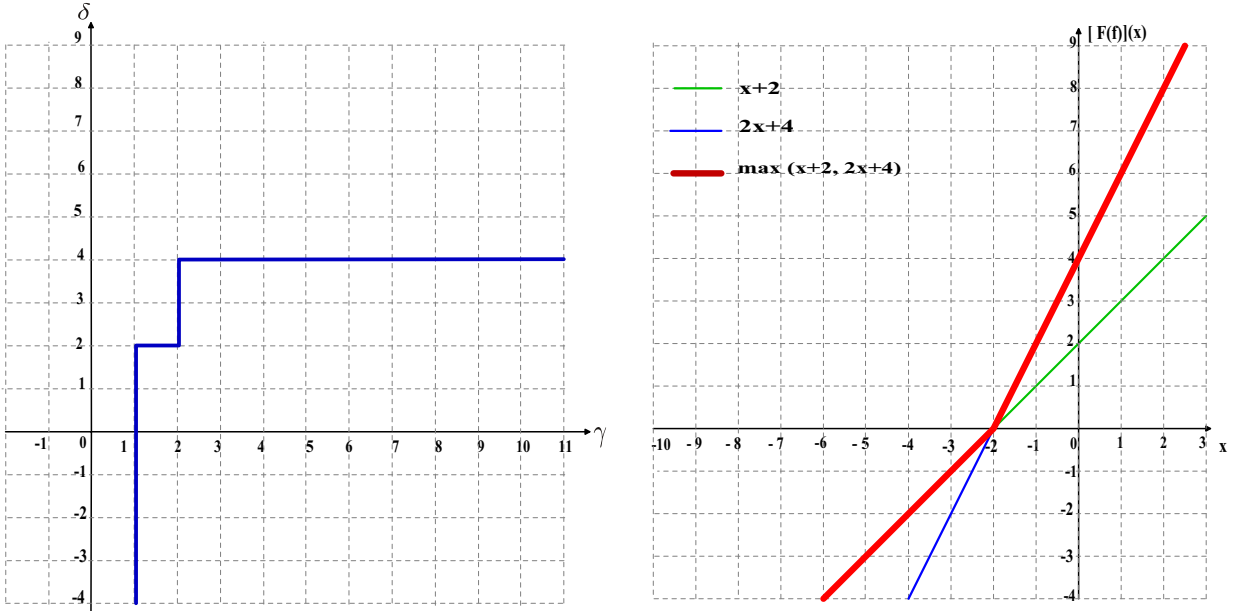


FIG. 3.1 – Le polynôme $f = \gamma^1\delta^2 \oplus \gamma^2\delta^4$ et sa transformée de Fenchel

Exemple 13 Soit f un élément de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$

$$f = \gamma^1\delta^2 \oplus \gamma^2\delta^4 \Rightarrow [\mathcal{F}(f)](x) = \max(x+2, 2x+4).$$

, où $[\mathcal{F}(f)](x)$ est une fonction continue convexe. La figure 3.1 illustre la transformée de Fenchel de f .

Exemple 14 Soient a, b et $c \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ tels que:

$$a = \gamma^1\delta^1 \oplus \gamma^5\delta^5, \quad b = \gamma^1\delta^1 \oplus \gamma^3\delta^2 \oplus \gamma^5\delta^5, \quad c = \gamma^1\delta^1 \oplus \gamma^2\delta^2 \oplus \gamma^5\delta^5.$$

Les polynômes a, b et c ont la même transformée de Fenchel, d'où $\mathcal{F}(a) = \mathcal{F}(b) = \mathcal{F}(c)$ (voir figure 3.2).

3.2 Dioïde $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$

On va voir ici que la transformée de Fenchel est un homomorphisme de dioïde. Aussi, on pourra quotienter $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ par la relation d'équivalence modulo la transformée de Fenchel.

Définition 23 Une classe d'équivalence $[a]_{\mathcal{F}}$, est définie par :

$$[a]_{\mathcal{F}} = \{y \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta] \mid \mathcal{F}(y) = \mathcal{F}(a)\}$$

c'est-à-dire, l'ensemble des éléments de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ ayant la même transformée de Fenchel que celle de a .

Théorème 8 1. La transformée \mathcal{F} est un homomorphisme de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ dans \mathcal{C}_v ,

2. L'homomorphisme \mathcal{F} induit une congruence $\stackrel{\mathcal{F}}{\equiv}$ sur $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ définie par $a \stackrel{\mathcal{F}}{\equiv} b \Rightarrow \mathcal{F}(a) = \mathcal{F}(b)$,

3. Chaque classe d'équivalence $[a]_{\mathcal{F}}$ admet un plus grand élément noté $\sup[a]_{\mathcal{F}}$.

Preuve:

1. Soient A et B deux séries formelles de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$, telles que

$$A = \bigoplus_c \gamma^c \delta^{A(c)}; \quad B = \bigoplus_c \gamma^c \delta^{B(c)}$$

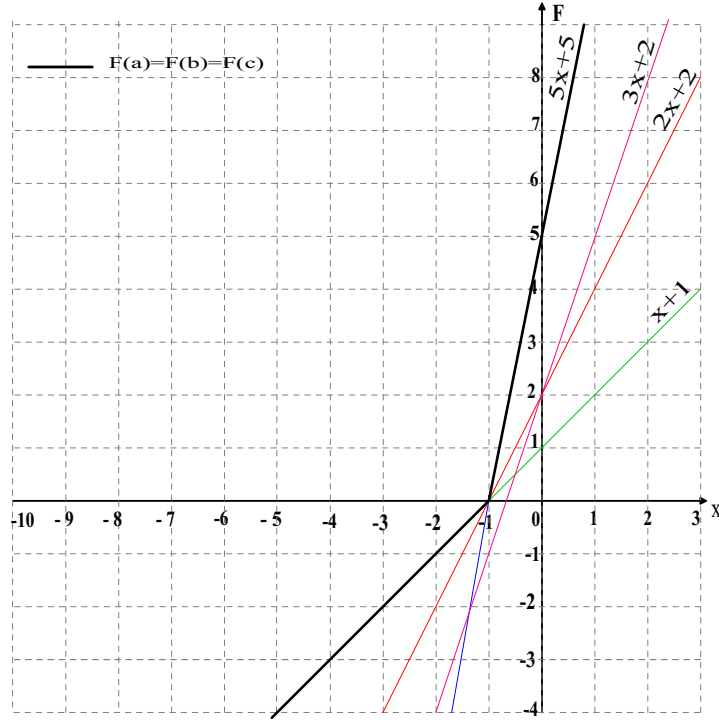


FIG. 3.2 – La transformée de Fenchel de a , b , et c

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(A \oplus B)(x) &= \mathcal{F}\left(\bigoplus_c \gamma^c \delta^{A(c) \oplus B(c)}\right) \\
 &= \bigoplus_c (A(c) \oplus B(c)) \otimes x^c \\
 &= \bigoplus_c (A(c) \otimes x^c \oplus B(c) \otimes x^c) \\
 &= \bigoplus_c A(c) \otimes x^c \oplus \bigoplus_c B(c) \otimes x^c \\
 &= \mathcal{F}(A)(x) \oplus \mathcal{F}(B)(x).
 \end{aligned}$$

On a:

$$A \otimes B = \left[\bigoplus_c \gamma^c \delta^{A(c)} \right] \otimes \left[\bigoplus_c \gamma^c \delta^{B(c)} \right] = \bigoplus_c \left(\gamma^c \left(\bigoplus_\tau \delta^{A(\tau) \otimes B(c-\tau)} \right) \right)$$

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}(A \otimes B)(x) &= \bigoplus_c \left[\bigoplus_\tau [A(\tau) \otimes B(c-\tau)] \otimes x^c \right] \\
 &= \bigoplus_c \left[\bigoplus_\tau [A(\tau) \otimes B(c-\tau)] \otimes x^\tau \otimes x^{c-\tau} \right] \\
 &= \bigoplus_c \left[\bigoplus_\tau A(\tau) \otimes x^\tau \right] \otimes B(c-\tau) \otimes x^{c-\tau} \\
 &= \bigoplus_c \mathcal{F}(A) \otimes B(c-\tau) \otimes x^{c-\tau} \\
 &= \mathcal{F}(A)(x) \otimes \bigoplus_c B(c-\tau) \otimes x^{c-\tau} \\
 &= \mathcal{F}(A)(x) \otimes \mathcal{F}(B)(x).
 \end{aligned}$$

2. Voir le théorème 2.
3. Soient α et $\beta \in [a]_{\mathcal{F}} \Rightarrow \mathcal{F}(\alpha) = \mathcal{F}(\beta) = \mathcal{F}(a)$.

$$\mathcal{F}(\alpha \oplus \beta) = \mathcal{F}(\alpha) \oplus \mathcal{F}(\beta) = \mathcal{F}(a) \oplus \mathcal{F}(a) = \mathcal{F}(a)$$

Cela signifie que si α et β sont dans la classe $[a]_{\mathcal{F}}$ alors $\alpha \oplus \beta$ est aussi dans la classe $[a]_{\mathcal{F}}$. Par extension $\bigoplus_i x_i \in [a]_{\mathcal{F}}$. Par conséquent, $\bigoplus_i x_i$ est le plus grand élément de la classe $[a]_{\mathcal{F}}$.

Grâce aux résultats préliminaires obtenus précédemment, on peut construire un nouveau dioïde en quotientant le dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ par la congruence $\stackrel{\mathcal{F}}{\equiv}$.

Définition 24 (Dioïde $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$) Nous noterons $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$ le dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ quotienté par la congruence

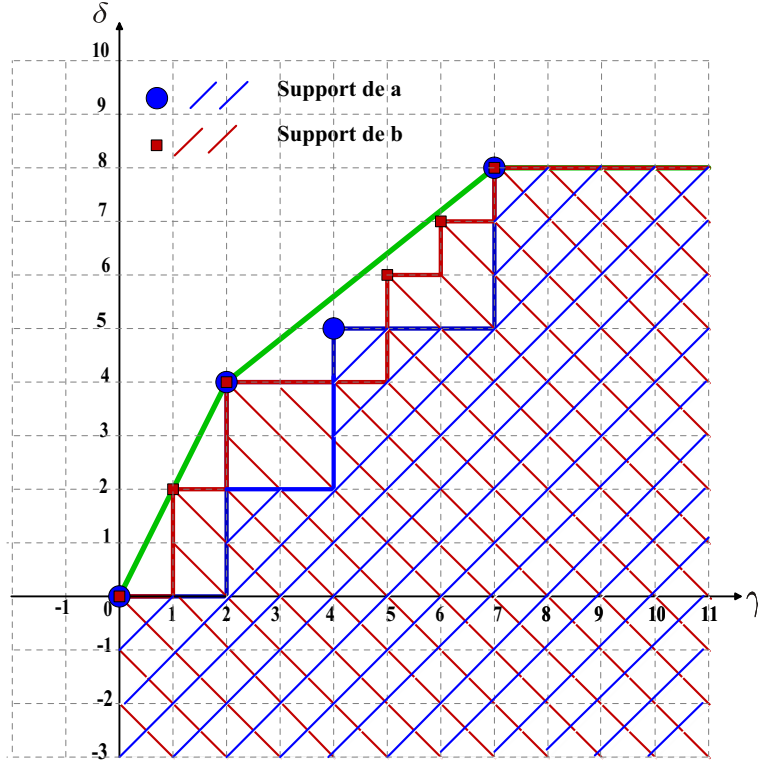


FIG. 3.3 – Le support de a et de b et leur enveloppe convexe.

\mathcal{F} , où \mathcal{F} est la transformée de Fenchel :

$$\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta] \stackrel{d\acute{e}f}{=} \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]_{/\mathcal{F}}.$$

3.2.1 Propriétés graphiques des représentants de $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$

Propriété 2 (Bacelli et al.1992) Deux séries de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ ont la même transformée de Fenchel si les points du support de leur représentant maximal ont la même enveloppe convexe (le plus petit polygone convexe contenant tous les points du support des deux séries).

Exemple 15 Soit $a, b \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$, $a = \gamma^0 \delta^0 \oplus \gamma^2 \delta^4 \oplus \gamma^4 \delta^5 \oplus \gamma^7 \delta^8$ et $b = \gamma^0 \delta^0 \oplus \gamma^1 \delta^2 \oplus \gamma^2 \delta^4 \oplus \gamma^5 \delta^6 \oplus \gamma^6 \delta^7 \oplus \gamma^7 \delta^8$. Les éléments a et b ont la même transformée de Fenchel car les points du support de leur représentant maximal ont la même enveloppe convexe comme le montre la figure 3.3.

D'une façon générale, les deux polynômes $a = \gamma^{n_0} \delta^{t_0} \oplus \gamma^{n_m} \delta^{t_m}$ et $b = \gamma^{n_0} \delta^{t_0} \oplus \gamma^{n_1} \delta^{t_1} \oplus \dots \oplus \gamma^{n_{m-1}} \delta^{t_{m-1}} \oplus \gamma^{n_m} \delta^{t_m}$ ont la même transformée de Fenchel si est seulement si

1. $\frac{t_j - t_0}{n_j - n_0} \leq \frac{t_m - t_0}{n_m - n_0}$, $j = 1 : m - 1$
2. $t_0 \leq t_j \leq t_m$ et $n_0 \leq n_j \leq n_m$, $j = 1 : m - 1$

Propriété 3 D'après le théorème 8, un élément a de $\mathcal{F}_{min}^{ax}[\gamma, \delta]$ admet un représentant maximal, il correspond au plus grand élément de la classe de $[a]_{\mathcal{F}}$ dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$. Graphiquement, le représentant maximal est celui dont le support contient tous les points de \mathbb{Z}^2 à l'intérieur de l'enveloppe convexe. Prenons l'élément $a = \gamma^{n_1} \delta^{t_1} \oplus \gamma^{n_2} \delta^{t_2}$, le représentant maximal de a noté $\text{Sup}[a]_{\mathcal{F}}$ revient à déterminer tous les points (n_i, t_i) de \mathbb{Z}^2 vérifiant:

1. $\frac{t_i - t_1}{n_i - n_1} \leq \frac{t_2 - t_1}{n_2 - n_1}$.

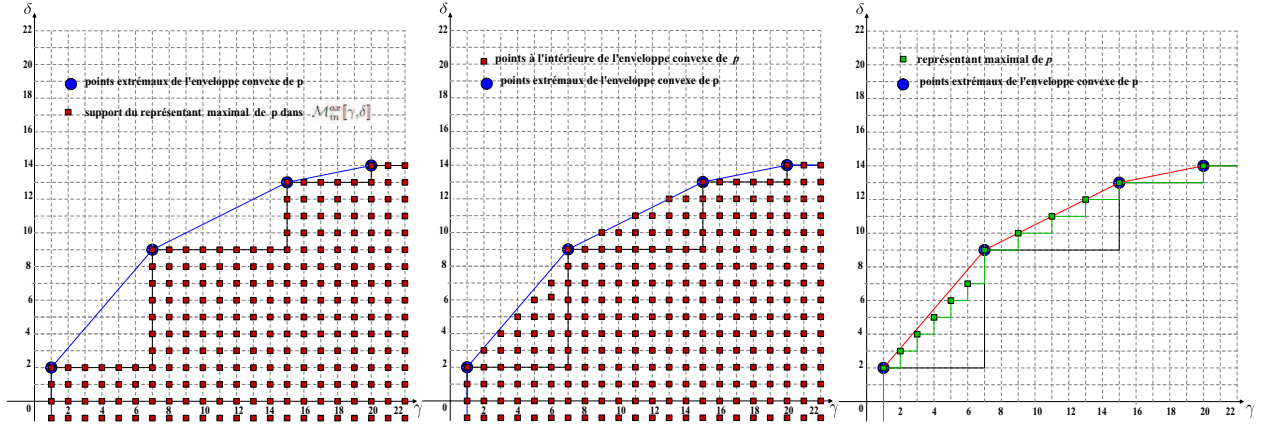


FIG. 3.4 – Interprétation graphique du représentant maximal d'une classe de $\mathcal{F}_{min}^{max}[[\gamma, \delta]]$.

$$2. \quad n_1 \leq n_i \leq n_2 \quad \text{et} \quad t_1 \leq t_i \leq t_2,$$

On illustre le représentant maximal par l'exemple suivant qui donne également (intuitivement) des indications sur l'algorithme permettant de calculer le représentant maximal d'un élément de $\mathcal{F}_{min}^{max}[[\gamma, \delta]]$. Cet algorithme sera fourni dans la suite.

Exemple 16 Soit p un élément de $\mathcal{F}_{min}^{max}[[\gamma, \delta]]$ tel que

$$p = \gamma^1 \delta^2 \oplus \gamma^7 \delta^9 \oplus \gamma^{15} \delta^{13} \oplus \gamma^{20} \delta^{14}$$

Le représentant maximal de p est

$$\gamma^1 \delta^2 \oplus \gamma^2 \delta^3 \oplus \gamma^3 \delta^4 \oplus \gamma^4 \delta^5 \oplus \gamma^5 \delta^6 \oplus \gamma^6 \delta^7 \oplus \gamma^7 \delta^9 \oplus \gamma^9 \delta^{10} \oplus \gamma^{11} \delta^{11} \oplus \gamma^{13} \delta^{12} \oplus \gamma^{15} \delta^{13} \oplus \gamma^{20} \delta^{14}$$

Le représentant maximal de p est représenté par la figure 3.4.

3.3 Séries périodiques de $\mathcal{F}_{min}^{max}[[\gamma, \delta]]$

Comme le dioïde $\mathcal{F}_{min}^{max}[[\gamma, \delta]]$ est un sous-dioïde de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$, il peut modéliser les systèmes $(\max, +)$ linéaires où la relation entrée-sortie (matrice de transfert) est décrite par des séries périodiques de $\mathcal{F}_{min}^{max}[[\gamma, \delta]]$. La mise sous forme canonique est donc nécessaire pour les manipulations de ces séries.

3.3.1 Forme canonique d'une série périodique dans $\mathcal{F}_{min}^{max}[[\gamma, \delta]]$

Par construction le dioïde $\mathcal{F}_{min}^{max}[[\gamma, \delta]]$ regroupe dans une classe d'équivalence les séries de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ ayant la même transformée de Fenchel et donc la même enveloppe convexe. On peut donc coder une classe de $\mathcal{F}_{min}^{max}[[\gamma, \delta]]$ par les points extrémaux de l'enveloppe convexe associée, ceci en vue de réduire les données nécessaires à sa représentation. Par conséquent, il est possible d'exhiber une forme canonique pour les classes d'équivalence de séries périodiques sur $\mathcal{F}_{min}^{max}[[\gamma, \delta]]$.

On rappelle que les séries périodiques de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ s'écrivent sous la forme (voir définition 18):

$$s = p \oplus qr^* = p \oplus q(\gamma^\nu \delta^\tau)^*,$$

où p et q sont des polynômes. Si l'on représente $s = p \oplus qr^*$ par les points extrémaux de l'enveloppe convexe, alors s peut être mise sous une forme canonique $s' = p' \oplus m'(r')^*$ dans $\mathcal{F}_{min}^{max}[[\gamma, \delta]]$, où p' est un polynôme et m' et r' sont des monômes notés:

$$\begin{aligned} p' &= \bigoplus_{i=0}^{\alpha'} \gamma^{n_i} \delta^{t_i} \\ m' &= \gamma^{N'} \delta^{T'} \\ r' &= \gamma^{\nu'} \delta^{\tau'} \end{aligned}$$

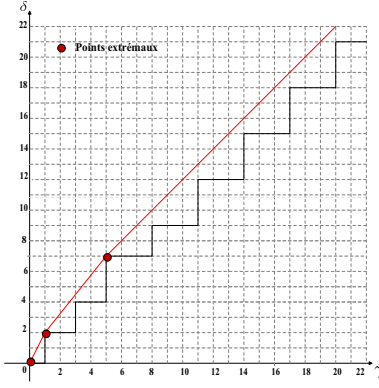


FIG. 3.5 – La série s de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$

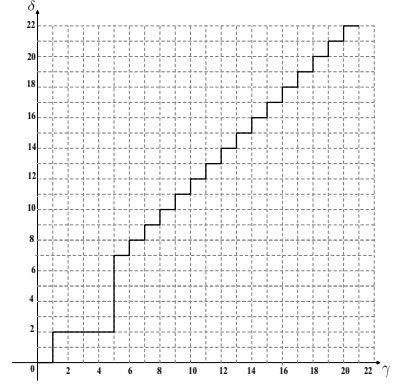


FIG. 3.6 – La série s de $\mathcal{F}_{min}^{ax}[\gamma, \delta]$

La série s' est dite sous forme canonique dans $\mathcal{F}_{min}^{ax}[\gamma, \delta]$ si:

1. $n'_0 < n'_1 < \dots < n'_{\alpha'} < N'$ et $t'_0 < t'_1 < \dots < t'_{\alpha'} < T'$.
2. $\frac{\tau}{\nu} < \frac{T' - t'_{\alpha'}}{N' - n'_{\alpha'}} < \frac{t'_{\alpha'} - t'_{\alpha'-1}}{n'_{\alpha'} - n'_{\alpha'-1}} < \dots < \frac{t'_2 - t'_1}{n'_2 - n'_1} < \frac{t'_1 - t'_0}{n'_1 - n'_0}$.
3. $\frac{\tau'}{\nu'} = \frac{\tau}{\nu}$, sous forme irréductible .

Exemple 17 Soit la série périodique

$$s = e \oplus \gamma^1 \delta^2 \oplus \gamma^3 \delta^4 \oplus (\gamma^5 \delta^7 \oplus \gamma^8 \delta^9) (\gamma^3 \delta^3)^* .$$

Les points extrémaux de l'enveloppe convexe de s sont $\{(0,0), (1,2), (5,7)\}$. La série s s'exprime sous la forme canonique dans $\mathcal{F}_{min}^{ax}[\gamma, \delta]$ de la manière suivante avec la mise sous forme irréductible de la pente ultime:

$$s = e \oplus \gamma^1 \delta^2 \oplus (\gamma^5 \delta^7) (\gamma^1 \delta^1)^* .$$

le principe de la forme canonique est illustré par les figures 3.5 et 3.6.

Algorithme 1 (Forme canonique d'une série périodique dans le dioïde $\mathcal{F}_{min}^{ax}[\gamma, \delta]$) Nous allons ici donner l'algorithme de la mise sous forme canonique d'une série périodique de $\mathcal{F}_{min}^{ax}[\gamma, \delta]$. La série en entrée est $s = p \oplus qr^*$, la série retournée est $s' = p' \oplus m'r'^*$

$$(p', m', r') = \text{Forme_canoniqueFMinMaxGD}(p, q, r)$$

début

1. polynômes : p_1, p_2
2. $p_1 = p \oplus q$; $r = \gamma^\nu \delta^\tau$;
3. mettre p_1 sous la forme canonique dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$, soit $p_1 = \bigoplus_{j=1}^l \gamma^{n_j} \delta^{t_j}$;
4. $j = 1$; $p_2 = \varepsilon$; continue = vrai;
5. $\nu' = \nu / \text{pgcd}(\nu, \tau)$; $\tau' = \tau / \text{pgcd}(\nu, \tau)$;
6. **Tant que** ($j \leq l$) et (continue = vrai) **faire**
7. $p_2 = p_2 \oplus \gamma^{n_j} \delta^{t_j}$;
8. $\lambda_{max} = \frac{\tau'}{\nu'}$;
9. $j_{max} = j$;
10. **Pour** $i = j + 1$ à l **faire**
11. $\lambda_{ji} = \frac{t_i - t_j}{n_i - n_j}$;

12. **Si** $\lambda_{ji} \geq \lambda_{max}$ **alors**
13. $\lambda_{max} = \lambda_{ji};$
14. $j_{max} = i;$
15. **fin Si**
16. **fin Pour**
17. **Si** $\lambda_{max} = \frac{r'}{v'}$ **alors**
18. $continue = faux;$
19. **fin Si**
20. $j = j_{max};$
21. **fin Tant que**
22. $r' = \gamma^{v'} \delta^{\tau'};$
23. $m' =$ dernier monôme de $p_2;$
24. $p' = p_2$ (excepté m');
25. retourner $p', m', r'.$
fin

Remarque 8 La mise sous forme canonique de p_1 dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ a une complexité en $\mathcal{O}(l \log l)$ (un tri) et le reste de l'algorithme a une complexité en $\mathcal{O}(l^2)$. Au final l'algorithme de la mise sous la forme canonique dans $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$ a une complexité en $\mathcal{O}(l^2)$ dans le pire des cas, avec l le nombre de monômes de $p \oplus q$.

Exemple de la mise sous la forme canonique

Exemple 18 Soit s_1, s_2 deux séries périodiques

$$\begin{aligned}
s_1 &= e \oplus \gamma^1 \delta^1 \oplus \gamma^3 \delta^2 \oplus \gamma^4 \delta^3 \oplus (\gamma^5 \delta^6 \oplus \gamma^6 \delta^7)(\gamma^4 \delta^2)^*. \\
s_2 &= e \oplus \gamma^1 \delta^2 \oplus \gamma^3 \delta^3 \oplus \gamma^5 \delta^7 \oplus (\gamma^{12} \delta^8)(\gamma^1 \delta^2)^*.
\end{aligned}$$

La mise sous forme canonique de s_1 et s_2 en appliquant l'algorithme précédent donne

$$\begin{aligned}
s_1 &= e \oplus \gamma^5 \delta^6 \oplus (\gamma^6 \delta^7)(\gamma^2 \delta^1)^*. \\
s_2 &= (\gamma^1 \delta^2)^*.
\end{aligned}$$

Les algorithmes donnés par la suite supposeront les séries s_1 et s_2 initialement sous forme canonique au sens de $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$.

3.3.2 Somme de deux séries périodiques de $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$

Théorème 9 La somme de deux séries s_1 et s_2 de $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$ est une série périodique de pente asymptotique

$$\sigma_\infty(s_1 \oplus s_2) = \min(\sigma_\infty(s_1), \sigma_\infty(s_2)).$$

Étant données deux séries s_1 et s_2 de $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$ sous forme canonique avec $s_1 = p_1 \oplus m_1 r_1^*$ et $s_2 = p_2 \oplus m_2 r_2^*$, où $r_1 = \gamma^{\nu_1} \delta^{\tau_1}$ et $r_2 = \gamma^{\nu_2} \delta^{\tau_2}$. Le calcul de la somme $s_1 \oplus s_2$ revient à mettre sous la forme canonique la série $s = p_1 \oplus p_2 \oplus (m_1 \oplus m_2) r^*$, avec $r = \gamma^\nu \delta^\tau$ tel que $\frac{\nu}{\tau} = \min\left(\frac{\nu_1}{\tau_1}, \frac{\nu_2}{\tau_2}\right)$.

Algorithme 2 (Somme de deux séries du dioïde $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$) Nous formulons ici l'algorithme permettant de calculer la somme $s_1 \oplus s_2$ dans $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$ lorsque $s_1 = p_1 \oplus m_1 r_1^*$ et $s_2 = p_2 \oplus m_2 r_2^*$ sont des séries périodiques. En entrée on a p_1, m_1, r_1, p_2, m_2 et r_2 , en sortie on aura $s' = s_1 \oplus s_2$ sous la forme $s' = p' \oplus m' r'^*$.

$$(\mathbf{p}', \mathbf{m}', r') = \text{SommeFMinMaxGD}(\mathbf{p}_1, \mathbf{m}_1, r_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{m}_2, r_2)$$

début

1. monôme : r
2. $\frac{\nu}{\tau} = \min\left(\frac{\nu_1}{\tau_1}, \frac{\nu_2}{\tau_2}\right)$;
3. $r = \gamma^\nu \delta^\tau$;
4. retourner $(\mathbf{p}', \mathbf{m}', r') = \text{Forme_canoniqueFMinMaxGD}(\varepsilon, \mathbf{p}_1 \oplus \mathbf{m}_1 \oplus \mathbf{p}_2 \oplus \mathbf{m}_2, r)$;

fin

Remarque 9 Notons l le nombre de monômes de $\mathbf{p}_1 \oplus \mathbf{m}_1 \oplus \mathbf{p}_2 \oplus \mathbf{m}_2$. L'opération de somme des polynômes a une complexité en $\mathcal{O}(l)$ (c'est simplement une concaténation de tableaux si l'on ne met pas le résultat sous forme canonique). L'algorithme de la somme $s_1 \oplus s_2$ dans $\mathcal{F}_{\min}^{max}[[\gamma, \delta]]$ a donc la complexité de l'algorithme de la mise sous forme canonique, c'est-à-dire une complexité en $\mathcal{O}(l^2)$.

Exemple de la somme dans $\mathcal{F}_{\min}^{max}[[\gamma, \delta]]$

Exemple 19 Soit s_1, s_2 deux séries périodiques de $\mathcal{F}_{\min}^{max}[[\gamma, \delta]]$

$$s_1 = e \oplus \gamma^1 \delta^2 \oplus \gamma^3 \delta^5 (\gamma^3 \delta^3)^*$$

$$s_2 = e \oplus \gamma^4 \delta^6 \oplus \gamma^5 \delta^7 (\gamma^4 \delta^2)^*$$

On a $\mathbf{p}_1 = e \oplus \gamma^1 \delta^2$, $\mathbf{m}_1 = \gamma^3 \delta^5$, $r_1 = \gamma^3 \delta^3$, $\mathbf{p}_2 = e \oplus \gamma^4 \delta^6$, $\mathbf{m}_2 = \gamma^5 \delta^7$, $r_2 = \gamma^4 \delta^2$. On a aussi $\frac{\nu}{\tau} = \min\left(\frac{3}{3}, \frac{4}{2}\right) = \frac{3}{3}$, d'où $r = \gamma^3 \delta^3$. La fonction $(\mathbf{p}', \mathbf{m}', r') = \text{forme_canonique}(\varepsilon, \mathbf{p}_1 \oplus \mathbf{m}_1 \oplus \mathbf{p}_2 \oplus \mathbf{m}_2, r)$ donne dans ce cas : $\mathbf{p}' = e \oplus \gamma^1 \delta^2$, $\mathbf{m}' = \gamma^3 \delta^5$ et $r' = \gamma^1 \delta^1$, soit

$$s' = s_1 \oplus s_2 = e \oplus \gamma^1 \delta^2 \oplus (\gamma^3 \delta^5)(\gamma^1 \delta^1)^*$$

3.3.3 Produit de deux séries périodiques de $\mathcal{F}_{\min}^{max}[[\gamma, \delta]]$

Théorème 10 Le produit de deux séries s_1 et s_2 de $\mathcal{F}_{\min}^{max}[[\gamma, \delta]]$ est une série périodique de pente asymptotique

$$\sigma_\infty(s_1 \otimes s_2) = \min(\sigma_\infty(s_1), \sigma_\infty(s_2)).$$

Soient $s_1 = \mathbf{p}_1 \oplus \mathbf{m}_1 r_1^*$ et $s_2 = \mathbf{p}_2 \oplus \mathbf{m}_2 r_2^*$ deux séries de $\mathcal{F}_{\min}^{max}[[\gamma, \delta]]$, où $r_1 = \gamma^{\nu_1} \delta^{\tau_1}$ et $r_2 = \gamma^{\nu_2} \delta^{\tau_2}$. Le produit $s_1 \otimes s_2$ dans $\mathcal{F}_{\min}^{max}[[\gamma, \delta]]$ se fait en mettant la série $((\mathbf{p}_1 \oplus \mathbf{m}_1) \otimes (\mathbf{p}_2 \oplus \mathbf{m}_2)) r^*$ sous forme canonique où $r = \gamma^\nu \delta^\tau$ est tel que $\frac{\nu}{\tau} = \min\left(\frac{\nu_1}{\tau_1}, \frac{\nu_2}{\tau_2}\right)$.

Algorithme 3 (Produit de deux séries du dioïde $\mathcal{F}_{\min}^{max}[[\gamma, \delta]]$) Nous allons donner ici l'algorithme permettant de calculer le produit $s_1 \otimes s_2$ dans $\mathcal{F}_{\min}^{max}[[\gamma, \delta]]$ lorsque $s_1 = \mathbf{p}_1 \oplus \mathbf{m}_1 r_1^*$ et $s_2 = \mathbf{p}_2 \oplus \mathbf{m}_2 r_2^*$ sont des séries périodiques. En entrée on a $\mathbf{p}_1, \mathbf{m}_1, r_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{m}_2, r_2$, en sortie on aura $s' = s_1 \otimes s_2$ avec $s' = \mathbf{p}' \oplus \mathbf{m}' r'^*$.

$$(\mathbf{p}', \mathbf{m}', r') = \text{ProduitFMinMaxGD}(\mathbf{p}_1, \mathbf{m}_1, r_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{m}_2, r_2)$$

début

1. polynôme : Q ;
2. monôme : r
3. $Q = (\mathbf{p}_1 \oplus \mathbf{m}_1) \otimes (\mathbf{p}_2 \oplus \mathbf{m}_2)$;
4. $\frac{\nu}{\tau} = \min\left(\frac{\nu_1}{\tau_1}, \frac{\nu_2}{\tau_2}\right)$;
5. $r = \gamma^\nu \delta^\tau$;
6. retourner $(\mathbf{p}', \mathbf{m}', r') = \text{Forme_canoniqueFMinMaxGD}(\varepsilon, Q, r)$;

fin

Remarque 10 Notons l_1 le nombre de monômes de $\mathbf{p}_1 \oplus \mathbf{m}_1$ et l_2 le nombre de monômes de $\mathbf{p}_2 \oplus \mathbf{m}_2$. Le calcul du polynôme Q a une complexité en $\mathcal{O}(l_1 \times l_2)$ et le nombre maximal de monômes dans Q est $l_1 \times l_2$. Par conséquent, l'algorithme du produit $s_1 \otimes s_2$ dans $\mathcal{F}_{\min}^{max}[[\gamma, \delta]]$ a une complexité en $\mathcal{O}((l_1 \times l_2)^2)$.

Exemple de produit dans $\mathcal{F}_{min}^{max}[[\gamma, \delta]]$

Exemple 20 Soit s_1, s_2 deux séries de $\mathcal{F}_{min}^{max}[[\gamma, \delta]]$

$$s_1 = e \oplus \gamma^1 \delta^3 \oplus (\gamma^2 \delta^5)(\gamma^1 \delta^1)^*.$$

$$s_2 = \gamma^2 \oplus (\gamma^3 \delta^4)(\gamma^3 \delta^1)^*.$$

Dans ce cas, on a

$$Q = (e \oplus \gamma^1 \delta^3 \oplus \gamma^2 \delta^5) \otimes (\gamma^2 \oplus \gamma^3 \delta^4) = \gamma^2 \oplus \gamma^3 \delta^3 \oplus \gamma^3 \delta^4 \oplus \gamma^4 \delta^5 \oplus \gamma^4 \delta^7 \oplus \gamma^5 \delta^9.$$

On a $\frac{\nu}{\tau} = \min\left(\frac{1}{1}, \frac{3}{1}\right) = \frac{1}{1}$, d'où $r = \gamma^1 \delta^1$.

La fonction $(p', m', r') = \text{forme_canonique}(\varepsilon, Q, r)$ donne : $p' = \gamma^2 \oplus \gamma^3 \delta^4 \oplus \gamma^4 \delta^7$, $m' = \gamma^5 \delta^9$ et $r' = \gamma^1 \delta^1$, soit

$$s' = s_1 \otimes s_2 = \gamma^2 \oplus \gamma^3 \delta^4 \oplus \gamma^4 \delta^7 \oplus (\gamma^5 \delta^9)(\gamma^1 \delta^1)^*.$$

3.3.4 Étoile d'un élément de $\mathcal{F}_{min}^{max}[[\gamma, \delta]]$

Théorème 11 L'étoile d'une série périodique $s = p \oplus mr^*$ de $\mathcal{F}_{min}^{max}[[\gamma, \delta]]$ est une série périodique de pente asymptotique

$$\sigma_\infty(s^*) = \min_j \left(\frac{n_j}{t_j}, \frac{N}{T}, \frac{\nu}{\tau} \right).$$

Etant donnée une série périodique $s = p \oplus mr^*$ de $\mathcal{F}_{min}^{max}[[\gamma, \delta]]$, alors

$$s^* = (\gamma^{\nu'} \delta^{\tau'})^*.$$

où $\frac{\nu'}{\tau'} = \min_j \left(\frac{n_j}{t_j}, \frac{N}{T}, \frac{\nu}{\tau} \right)$.

Algorithme 4 (Étoile d'une série dans le dioïde $\mathcal{F}_{min}^{max}[[\gamma, \delta]]$) Nous fournissons ici l'algorithme permettant de calculer l'étoile s^* dans $\mathcal{F}_{min}^{max}[[\gamma, \delta]]$ lorsque $s = p \oplus mr^*$. En entrée on a p, m, r , en sortie on aura $s' = p' \oplus m'r'^* = s^*$ avec $p' = \varepsilon$, $m' = e$ et $r' = \gamma^{\nu'} \delta^{\tau'}$.

$(\mathbf{p}', \mathbf{m}', \mathbf{r}') = \text{EtoileFMinMaxGD}(\mathbf{p}, \mathbf{m}, \mathbf{r})$

début

1. polynôme : E ;
2. $E = p \oplus m = \bigoplus_{j=1}^l \gamma^{n_j} \delta^{t_j}$, $r = \gamma^\nu \delta^\tau$;
3. $\lambda_{max} = \frac{\tau}{\nu}$;
4. **Pour** $j = 1$ à l **faire**
5. $\lambda_j = \frac{t_j}{n_j}$;
6. **Si** $\lambda_j \geq \lambda_{max}$ **alors**
7. $\theta = n_j, \xi = t_j$;
8. $\lambda_{max} = \lambda_j$;
9. **fin Si**
10. **fin Pour**
11. $\nu' = \theta / \text{pgcd}(\theta, \xi)$; $\tau' = \xi / \text{pgcd}(\theta, \xi)$;
12. $p' = \varepsilon$, $m' = e$, $r' = \gamma^{\nu'} \delta^{\tau'}$;
13. retourner (p', m', r')

fin

Remarque 11 L'algorithme de l'étoile s^* dans $\mathcal{F}_{min}^{max}[[\gamma, \delta]]$ a une complexité en $\mathcal{O}(l)$, où l est le nombre de monômes de $p \oplus m$.

Exemples

Exemple 21 Soient s_1, s_2 et $s_3 \in \mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$

$$\begin{aligned}
 s_1 &= \gamma^1 \delta^2 \oplus (\gamma^2 \delta^5)(\gamma^2 \delta^2)^* \\
 &\Rightarrow \frac{\nu'}{\tau'} = \min\left(\frac{1}{2}, \frac{2}{5}, \frac{2}{2}\right) = \frac{2}{5} \\
 &\Rightarrow s_1^* = (\gamma^2 \delta^5)^*, \\
 s_2 &= \gamma^2 \delta^3 \oplus (\gamma^5 \delta^6)(\gamma^2 \delta^1)^* \\
 &\Rightarrow \frac{\nu'}{\tau'} = \min\left(\frac{2}{3}, \frac{5}{6}, \frac{2}{1}\right) = \frac{2}{3} \\
 &\Rightarrow s_2^* = (\gamma^2 \delta^3)^*, \\
 s_3 &= \gamma^2 \delta^4 \oplus (\gamma^5 \delta^7)(\gamma^2 \delta^6)^* \\
 &\Rightarrow \frac{\nu'}{\tau'} = \min\left(\frac{2}{4}, \frac{5}{7}, \frac{2}{6}\right) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \\
 &\Rightarrow s_3^* = (\gamma^1 \delta^3)^*.
 \end{aligned}$$

Algorithme 5 (Représentant maximal d'une classe de $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$) Nous fournissons ici l'algorithme permettant de calculer le représentant maximal d'une classe de $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$ vue dans la propriété 3. En entrée on a $p' = \bigoplus_{i=1}^{\alpha'} \gamma^{n_i} \delta^{t_i}$, $m' = \gamma^{N'} \delta^{T'}$ et $r' = \gamma^{\nu'} \delta^{\tau'}$, en sortie on aura p, q et $r = \gamma^\nu \delta^\tau$, où p et q sont des polynômes et r est un monôme. Le représentant maximal dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ d'une classe de $\mathcal{F}_{min}^{ax}[\gamma, \delta]$ prend la forme : $s = p \oplus q(\gamma^\nu \delta^\tau)^*$.

(p,q,r) = Representant_MaximalFMinMaxGD(p',m',r')

début

1. polynômes : p ; p_1 ; q ;
2. $p = \varepsilon$;
3. $p_1 = p' \oplus m' = \bigoplus_{i=1}^m \gamma^{n_i} \delta^{t_i}$;
4. **Pour** $i = 1$ à $m - 1$ **faire**
5. $a_i = \frac{t_{i+1} - t_i}{n_{i+1} - n_i}$;
6. $b_i = t_i - a_i n_i$;
7. $x_i = n_i$;
8. **Tant que** $(x_i \leq n_{i+1})$ **faire**
9. $y_i = \lfloor a_i x_i + b_i \rfloor$;
10. $p = p \oplus \gamma^{x_i} \delta^{y_i}$;
11. $x_i = x_i + 1$;
12. **fin Tant que**
13. **fin Pour**
14. enlever le dernier monôme de p
15. mettre p sous la forme canonique dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$;
16. $q = \varepsilon$;
17. $a = \frac{\tau'}{\nu'}$; $b = T' - aN'$; $x_1 = N'$;
18. **Tant que** $(x_1 \leq N' + \nu')$ **faire**
19. $y = \lfloor ax_1 + b \rfloor$;
20. $q = q \oplus \gamma^x \delta^y$;
21. $x_1 = x_1 + 1$;
22. **fin Tant que**
23. mettre q sous la forme canonique dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$;
24. $r = r'$;
25. retourner p, q, r ;

fin

Remarque 12 Le calcul de p a une complexité en $\mathcal{O}(m)$ et sa mise sous forme canonique dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ a une complexité en $\mathcal{O}(m \log m)$ (un tri), avec $m = n'_{\alpha'} + N'$. Le calcul de q a une complexité en $\mathcal{O}(m_1)$ et sa mise sous forme canonique dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ a une complexité en $\mathcal{O}(m_1 \log m_1)$ (un tri), avec $m_1 = N' + \nu'$. Au final l'algorithme du représentant maximal d'une classe de $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$ a une complexité en $\mathcal{O}(n'_{\alpha'} + N' + \nu')$ dans le pire des cas, avec $n'_{\alpha'}$ est l'exposant en γ du dernier monôme de p' , N' est l'exposant en γ du m' et ν' est l'exposant en γ du r' .

3.3.5 Inf de deux séries périodiques de $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$

Théorème 12 L'inf de deux séries s_1 et s_2 de $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$ est une série périodique de pente asymptotique

$$\sigma_{\infty}(s_1 \oplus s_2) = \max(\sigma_{\infty}(s_1), \sigma_{\infty}(s_2)).$$

Nous rappelons que par définition:

$$a \wedge b = \bigoplus_{\{x | x \preceq a, x \preceq b\}} x.$$

Soient $s_1 = p_1 \oplus m_1 r_1^*$ et $s_2 = p_2 \oplus m_2 r_2^*$ deux séries de $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$, où $r_1 = \gamma^{\nu_1} \delta^{\tau_1}$ et $r_2 = \gamma^{\nu_2} \delta^{\tau_2}$. Graphiquement, le calcul de $s_1 \wedge s_2$ dans $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$ se fait en déterminant l'intersection (en ne considérant que les points de \mathbb{Z}^2) de l'enveloppe convexe de s_1 (voir propriété 3) et de celle de s_2 . Ensuite, le résultat sera mis sous la forme canonique $s' = p' \oplus m' r'^*$ avec $r' = \gamma^{\nu'} \delta^{\tau'}$ tel que $\frac{\nu'}{\tau'} = \max\left(\frac{\nu_1}{\tau_1}, \frac{\nu_2}{\tau_2}\right)$.

Algorithme 6 (Inf de deux séries périodiques de $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$) Nous formulons ici l'algorithme permettant de calculer l'inf $s_1 \wedge s_2$ dans $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$ lorsque $s_1 = p_1 \oplus m_1 r_1^*$ et $s_2 = p_2 \oplus m_2 r_2^*$ sont des séries périodiques. En entrée on a p_1, m_1, r_1, p_2, m_2 et r_2 , en sortie on aura $p', m',$ et r' . L'inf $s_1 \wedge s_2$ prend la forme $p' \oplus m' r'^*$.

Le calcul de l'inf se fait en trois étapes. La première consiste à déterminer le représentant maximal de s_1 et de s_2 , la deuxième fait appel¹ à l'inf de ces deux séries dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$, la troisième est la mise sous forme canonique dans $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$.

$$(\mathbf{p}', \mathbf{m}', \mathbf{r}') = \text{InfFMinMaxGD}(\mathbf{p}_1, \mathbf{m}_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{p}_2, \mathbf{m}_2, \mathbf{r}_2)$$

début

1. polynômes : $p'_1, p'_2, q'_1, q'_2, p, q$;
2. monôme : r'_1, r'_2, r ;
3. $(\mathbf{p}'_1, \mathbf{q}'_1, \mathbf{r}'_1) = \text{Representant_MaximalFMinMaxGD}(\mathbf{p}_1, \mathbf{m}_1, \mathbf{r}_1)$;
4. $(\mathbf{p}'_2, \mathbf{q}'_2, \mathbf{r}'_2) = \text{Representant_MaximalFMinMaxGD}(\mathbf{p}_2, \mathbf{m}_2, \mathbf{r}_2)$;
5. $(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r}) = \text{InfMinMaxGD}(\mathbf{p}'_1, \mathbf{q}'_1, \mathbf{r}'_1, \mathbf{p}'_2, \mathbf{q}'_2, \mathbf{r}'_2)$;
6. $(\mathbf{p}', \mathbf{m}', \mathbf{r}') = \text{Forme_canoniqueFMinMaxGD}(\mathbf{p}, \mathbf{q}, \mathbf{r})$
7. retourner p', m', r' ;

fin

Exemple de l'inf dans $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$

Exemple 22 Soit s_1, s_2 deux séries périodiques

$$\begin{aligned} s_1 &= \gamma^1 \delta^2 \oplus \gamma^8 \delta^{13} (\gamma^3 \delta^2)^*, \\ s_2 &= \gamma^3 \delta^1 \oplus \gamma^6 \delta^{14} (\gamma^3 \delta^1)^*. \end{aligned}$$

Le représentant maximal de s_1 en appliquant l'algorithme 5 donne

$$\gamma^1 \delta^2 \oplus \gamma^2 \delta^3 \oplus \gamma^3 \delta^5 \oplus \gamma^4 \delta^6 \oplus \gamma^5 \delta^8 \oplus \gamma^6 \delta^9 \oplus \gamma^7 \delta^{11} \oplus (\gamma^8 \delta^{13} \oplus \gamma^{10} \delta^{14} \oplus \gamma^{11} \delta^{15}) (\gamma^3 \delta^2)^*,$$

Idem pour s_2 , on obtient

$$\gamma^3 \delta^1 \oplus \gamma^4 \delta^5 \oplus \gamma^5 \delta^9 \oplus (\gamma^6 \delta^{14} \oplus \gamma^9 \delta^{15}) (\gamma^3 \delta^1)^*,$$

1. l'algorithme InfMinMaxGD est disponible dans la librairie LMinMaxGD et n'est pas retranscrit ici.

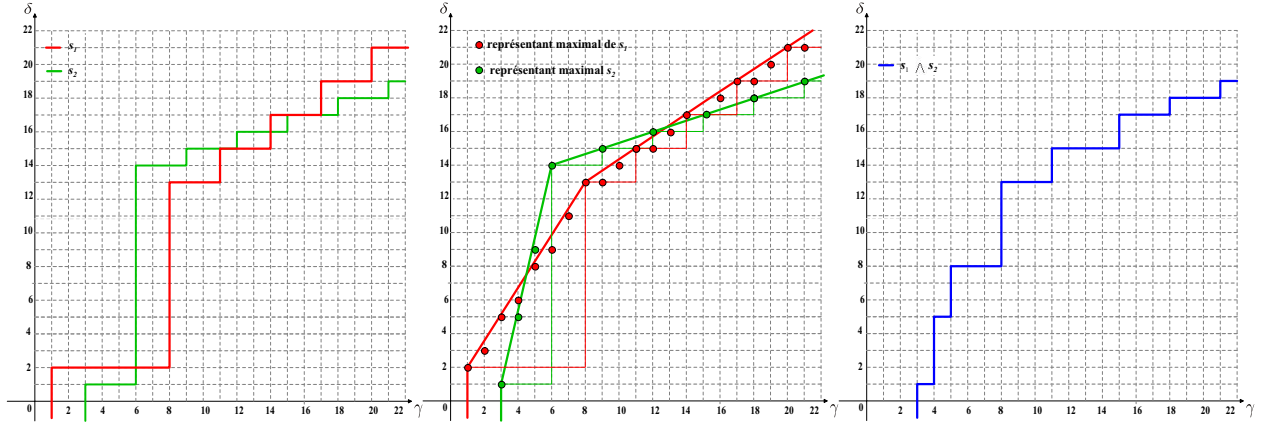


FIG. 3.7 – Les différentes étapes du calcul de $(\gamma^1\delta^2 \oplus \gamma^8\delta^{13}(\gamma^3\delta^2)^*) \wedge (\gamma^3\delta^1 \oplus \gamma^6\delta^{14}(\gamma^3\delta^1)^*)$.

Le calcul de $s_1 \wedge s_2$ dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ donne

$$\gamma^3\delta^1 \oplus \gamma^4\delta^5 \oplus \gamma^5\delta^8 \oplus \gamma^6\delta^9 \oplus \gamma^7\delta^{11} \oplus \gamma^8\delta^{13} \oplus \gamma^{10}\delta^{14} \oplus \gamma^{11}\delta^{15} \oplus \gamma^{13}\delta^{16} \oplus (\gamma^{15}\delta^{17})(\gamma^3\delta^1)^*.$$

Après mise sous forme canonique du résultat précédent dans $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$ (en appliquant l'algorithme 1), on obtient finalement $s_1 \wedge s_2$ dans $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$, tel que

$$s_1 \wedge s_2 = \gamma^3\delta^1 \oplus \gamma^4\delta^5 \oplus \gamma^5\delta^8 \oplus \gamma^8\delta^{13} \oplus \gamma^{11}\delta^{15} \oplus (\gamma^{15}\delta^{17})(\gamma^3\delta^1)^*.$$

Les différentes étapes effectuées pour calculer $s_1 \wedge s_2$ sont illustrés par la figure (3.7).

Exemple 23 Soit s_1, s_2 deux séries périodiques

$$s_1 = (\gamma^6\delta^7)^*,$$

$$s_2 = \gamma^2\delta^9(\gamma^{13}\delta^4)^*.$$

Le représentant maximal de s_1 en appliquant l'algorithme 5 donne

$$(e \oplus \gamma^1\delta^1 \oplus \gamma^2\delta^2 \oplus \gamma^3\delta^3 \oplus \gamma^4\delta^4 \oplus \gamma^5\delta^5)(\gamma^6\delta^7)^*,$$

Idem pour s_2 , on obtient

$$(\gamma^2\delta^9 \oplus \gamma^6\delta^{10} \oplus \gamma^9\delta^{11} \oplus \gamma^{12}\delta^{12} \oplus \gamma^{15}\delta^{13})(\gamma^{13}\delta^4)^*,$$

Le calcul de $s_1 \wedge s_2$ dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ donne

$$\gamma^2\delta^2 \oplus \gamma^3\delta^3 \oplus \gamma^4\delta^4 \oplus \gamma^5\delta^5 \oplus \gamma^6\delta^7 \oplus \gamma^7\delta^8 \oplus \gamma^8\delta^9 \oplus \gamma^9\delta^{10} \oplus \gamma^{10}\delta^{11} \oplus (\gamma^{12}\delta^{12} \oplus \gamma^{15}\delta^{13} \oplus \gamma^{19}\delta^{14} \oplus \gamma^{22}\delta^{15})(\gamma^{13}\delta^4)^*,$$

Finalement, on obtient l'inf de s_1 et s_2 dans $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$ en mettant ce résultat sous forme canonique par l'application de l'algorithme 1, soit :

$$s_1 \wedge s_2 = \gamma^2\delta^2 \oplus \gamma^6\delta^7 \oplus \gamma^{10}\delta^{11} \oplus \gamma^{12}\delta^{12} \oplus \gamma^{15}\delta^{13}(\gamma^{13}\delta^4)^*.$$

Les différentes étapes effectuées pour calculer $s_1 \wedge s_2$ sont illustrées par la figure 3.8.

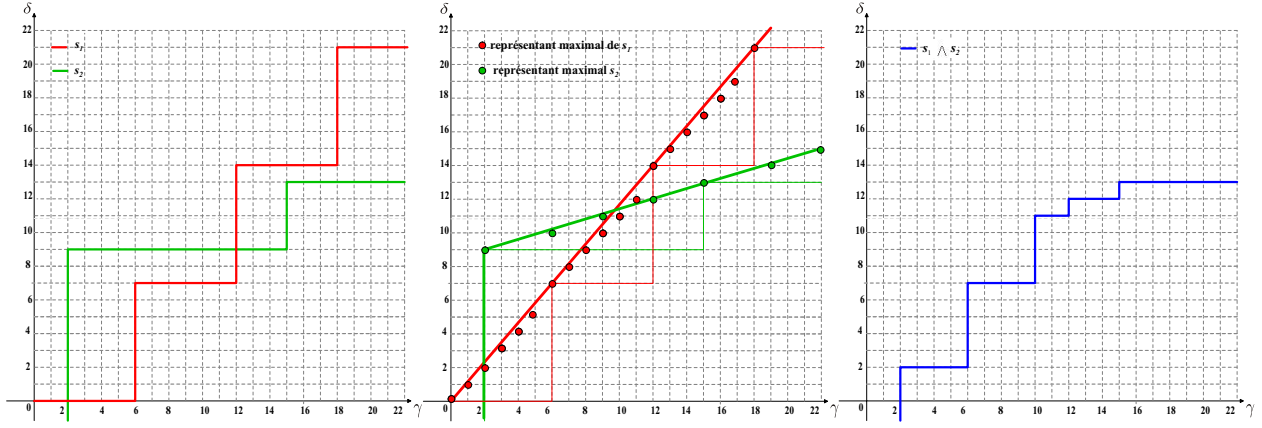


FIG. 3.8 – Les différentes étapes du calcul de $((\gamma^6 \delta^7)^*) \wedge (\gamma^2 \delta^9 (\gamma^{13} \delta^4)^*)$.

Remarque 13 Certains calculs de l'inf peuvent générer des monômes d'exposant élevé, notamment dans la cas où $\sigma_\infty(s_1)$ est très proche de $\sigma_\infty(s_2)$, l'exemple suivant confirme cela.

Exemple 24 Soit s_1, s_2 deux séries périodiques

$$s_1 = \gamma^0 \delta^0 \oplus \gamma^2 \delta^7 \oplus \gamma^5 \delta^{10} \oplus \gamma^{10} \delta^{13} (\gamma^5 \delta^1)^*,$$

$$s_2 = \gamma^3 \delta^6 \oplus \gamma^5 \delta^9 \oplus \gamma^9 \delta^{15} (\gamma^{11} \delta^2)^*.$$

En appliquant l'algorithme 5, on obtient le représentant maximal de s_1

$$\gamma^0 \delta^0 \oplus \gamma^1 \delta^3 \oplus \gamma^2 \delta^7 \oplus \gamma^3 \delta^8 \oplus \gamma^4 \delta^9 \oplus \gamma^5 \delta^{10} \oplus \gamma^7 \delta^{11} \oplus \gamma^9 \delta^{12} \oplus (\gamma^{10} \delta^{13} \oplus \gamma^{15} \delta^{14}) (\gamma^5 \delta^1)^*,$$

de même pour s_2

$$\gamma^3 \delta^6 \oplus \gamma^4 \delta^7 \oplus \gamma^5 \delta^9 \oplus \gamma^6 \delta^{10} \oplus \gamma^7 \delta^{12} \oplus \gamma^8 \delta^{13} \oplus (\gamma^9 \delta^{15} \oplus \gamma^{15} \delta^{16} \oplus \gamma^{20} \delta^{17}) (\gamma^{11} \delta^2)^*,$$

Le calcul de $s_1 \wedge s_2$ dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ donne

$$\begin{aligned} & \gamma^3 \delta^6 \oplus \gamma^4 \delta^7 \oplus \gamma^5 \delta^9 \oplus \gamma^6 \delta^{10} \oplus \gamma^7 \delta^{11} \oplus \gamma^9 \delta^{12} \oplus \gamma^{10} \delta^{13} \oplus \gamma^{15} \delta^{14} \oplus \gamma^{20} \delta^{15} \oplus \gamma^{25} \delta^{16} \oplus \gamma^{30} \delta^{17} \oplus \gamma^{35} \delta^{18} \oplus \gamma^{40} \delta^{19} \oplus \\ & \gamma^{45} \delta^{20} \oplus \gamma^{50} \delta^{21} \oplus \gamma^{55} \delta^{22} \oplus \gamma^{60} \delta^{23} \oplus \gamma^{65} \delta^{24} \oplus \gamma^{70} \delta^{25} \oplus \gamma^{75} \delta^{26} \oplus \gamma^{80} \delta^{27} \oplus \gamma^{85} \delta^{28} \oplus \gamma^{90} \delta^{29} \oplus \gamma^{95} \delta^{30} \oplus \gamma^{100} \delta^{31} \oplus \\ & \gamma^{105} \delta^{32} \oplus \gamma^{110} \delta^{33} \oplus \gamma^{115} \delta^{34} \oplus \gamma^{120} \delta^{35} \oplus (\gamma^{125} \delta^{36} \oplus \gamma^{130} \delta^{37}) (\gamma^{11} \delta^2)^*. \end{aligned}$$

La mise sous forme canonique de ce résultat dans le dioïde $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$ conduit à

$$s_1 \wedge s_2 = \gamma^3 \delta^6 \oplus \gamma^5 \delta^9 \oplus \gamma^7 \delta^{11} \oplus \gamma^{10} \delta^{13} \oplus \gamma^{130} \delta^{37} (\gamma^{11} \delta^2)^*.$$

Cet exemple montre bien les simplifications qu'apporte le dioïde $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$ (voir figure 3.9). Dans l'exemple précédent, le calcul de l'inf dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ contient 29 monômes dans le transitoire, par contre dans $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$ il ne contient que 4 monômes.

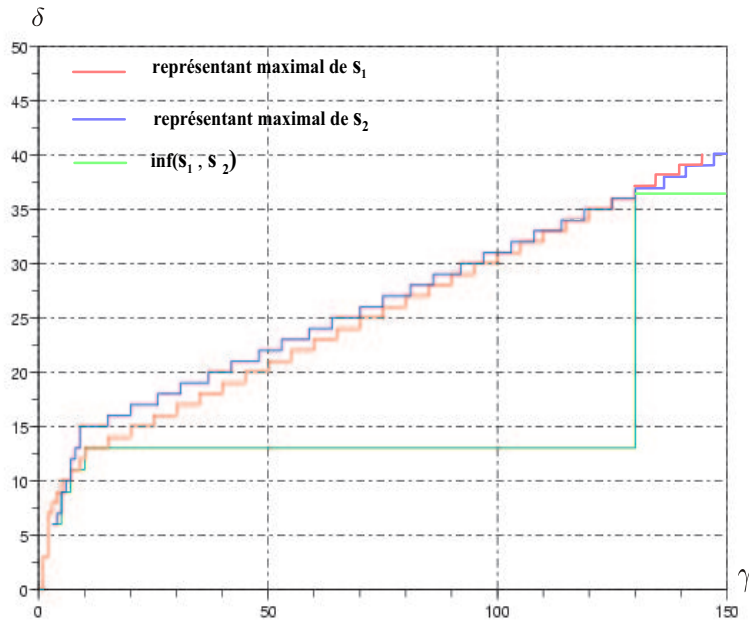


FIG. 3.9 – Illustration graphique de l'inf $(\gamma^0 \delta^0 \oplus \gamma^2 \delta^7 \oplus \gamma^5 \delta^{10} \oplus \gamma^{10} \delta^{13} (\gamma^5 \delta^1)^*) \wedge (\gamma^3 \delta^6 \oplus \gamma^5 \delta^9 \oplus \gamma^9 \delta^{15} (\gamma^{11} \delta^2)^*)$.

Conclusion

Dans ce mémoire, nous avons dans un premier temps rappelé des éléments de l'algèbre des dioïdes, notamment la définition des dioïdes de séries formelles.

Dans un second temps, nous nous sommes intéressés à la modélisation des systèmes $(\max, +)$ -linéaires dans l'algèbre des dioïdes. Nous avons insisté sur la représentation bi-dimensionnelle, en constatant que la relation entrée-sortie des systèmes $(\max, +)$ est décrite par des séries périodiques de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$.

Une bibliothèque de calcul existe pour ces séries, mais certaines opérations peuvent nécessiter une quantité de mémoire et un temps de calcul importants.

Nous avons introduit un dioïde noté $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$ obtenu en filtrant les séries de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ par la relation d'équivalence modulo la transformée de Fenchel. Ce filtrage par transformation de Fenchel conduit à simplifier les séries périodiques tout en conservant certaines caractéristiques fortes comme le taux de production.

La complexité polynômiale des algorithmes de somme, produit et étoile fournis dans ce mémoire nous autorisera désormais à traiter des problèmes de taille beaucoup plus importante, au prix d'une certaine approximation. Ces algorithmes nous permettront certainement de calculer la dynamique de systèmes $(\max, +)$ -linéaires comportant plusieurs centaines de transitions, tâche qu'il nous est impossible de réaliser avec la bibliothèque LMinMaxGD.

Annexe

Nous fournissons dans cette annexe les scripts SCILAB permettant de mettre sous forme canonique une série périodique de $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$, calculer le représentant maximal d'une classe d'équivalence de $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$, calculer la somme, le produit et l'inf de deux séries périodiques de $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$.

Remarque 14 *Toutes les fonctions qui seront utilisés dans la suite sont regroupées dans un script SCILAB.*

Fonctions utiles dans la librairie $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$

```
//////////-----Fonctions utiles dans la librairie FMinMaxGD -----////////////////////////////////////
//-----Le PGCD de deux nombres-----
function b=pgdc(r)
    //b=pgdc([30,21])
    a=r;
    while a(1,2)<>0
        a=[a(1,2) modulo(a(1,1),a(1,2))];
    end
    PGCD=a(1,1);
    if PGCD==0
        b=r;
    else
        b=r/PGCD;
    end
endfunction
//-----pente entre deux points -----
function p=pente_point(p1,p2)
    //p=pente_point([1 2],[4 5])
    if p1==p2
        p=0;
    else
        if (p2(1,1)-p1(1,1))==0 then
            p=%inf;
        else
            p=(p2(1,2)-p1(1,2))/(p2(1,1)-p1(1,1));
        end
    end
endfunction
//-----inf de deux points -----
function p_inf=inf_point(pt1,pt2)
    //p=inf_point([1 2],[4 5])

    if (pt1(1,1)==pt2(1,1))
```

```

        t1=bool2s(pt1(1,2)<pt2(1,2));
        p_inf=t1*pt1+(1-t1)*pt2;
    else
        t1=bool2s(pt1(1,1)>pt2(1,1));
        p_inf=t1*pt1+(1-t1)*pt2;
    end
endfunction
//-----Le max de deux pentes -----
function pente=pente_max(pente1,pente2)
    //p=pente_max([3 1],[2 1])
    p1=pente_point([0 0],pente1);
    p2=pente_point([0 0],pente2);
    if pente1(1,1)==pente2(1,1)|pente1(1,2)==pente2(1,2)
        pente=max(pente1,pente2);
    else
        if p1>p2 then
            pente=pente1;
        else
            pente=pente2;
        end
    end
endfunction
//-----Le min de deux pentes-----
function pente=pente_min(pente1,pente2)
    //p=pente_min([1 2],[4 5])
    p1=pente_point([0 0],pente1);
    p2=pente_point([0 0],pente2);
    if pente1(1,1)==pente2(1,1)|pente1(1,2)==pente2(1,2)
        pente=min(pente1,pente2);
    else
        if p1<p2
            pente=pente1;
        else
            pente=pente2;
        end
    end
endfunction
//-----Tri d'une série (la mise sous forme canonique d'un polynôme dans MinMaxGD)---
function serie=tri_serie(serie)
    //serie=tri_serie([1 0;3 4;7 5;3 6;0 0;1 5])
    serie=gsort(serie,'lr','i');//trier la série
    i=1;
    while i<=size(serie,:)-1
        if serie(i,1)==serie(i+1,1)
            serie(i,:)=[];
        else
            i=i+1;
        end
    end
endfunction
//-----approximation d'un segment "les point Z*Z au dessous d'un segment"-----
function pc=appro_seg(p1,p2)
    //pc=appro_seg([0 0],[3 3])
    pc=[];
    if (p1(1,1)-p2(1,1))<>0
        a=(p2(1,2)-p1(1,2))/(p2(1,1)-p1(1,1));b=p1(1,2)-a*p1(1,1);
        for x=p1(1,1):p2(1,1)

```

```

                y=a*x+b;
                pc=[pc;x int(y)];
            end
        else
            pc=[p1;p2];
        end
    endfunction
//-----Equation d'un segment:y=a*x+b-----
function [Y,a,b,x0]=equa_seg(p,x)
    //[Y,a,b,x0]=equa_seg([0 0;3 3],[0:3]);
    if (p(1,1)-p(2,1))<>0
        a=(p(2,2)-p(1,2))/(p(2,1)-p(1,1));b=p(1,2)-a*p(1,1);x0=[]
        Y=a*x+b;
    else
        Y=[];a=%inf;b=%inf; x0=p(1,1);
        for y=p(1,2):p(2,2)
            Y=[Y y]
        end
    end
end
endfunction
//-----intersection de deux segments -----
function PI=p_inter(seg1,seg2)
    //PI= p_inter([1 2;4 5],[2 1;3 6])
    x=[max(seg1(1,1),seg2(1,1)):min(seg1(2,1),seg2(2,1))]
    [Y1,a1,b1,x01]=equa_seg(seg1,x);
    [Y2,a2,b2,x02]=equa_seg(seg2,x);
    if a1==%inf & a2==%inf then
        PI=[];
    end
    if a1<>%inf & a2<>%inf then
        xx=linsolve(a1-a2,b1-b2);
        if xx(1,1)>=x(1,1)
            y=equa_seg(seg1,xx);
            PI=[xx y]; //point d'intersection
        else
            PI=[];
        end
    end
    if a1==%inf & a2<>%inf
        xx=x01;
        if xx(1,1)>=x(1,1)
            y=equa_seg(seg2,xx);
            PI=[xx y]; //point d'intersection
        else
            PI=[];
        end
    end
    if a2==%inf & a1<>%inf
        xx=x02;
        if xx(1,1)>=x(1,1)
            y=equa_seg(seg1,xx);
            PI=[xx y]; //point d'intersection
        else
            PI=[];
        end
    end
end
endfunction

```

```

//-----point d'intersection entre deux segments à l'infini-----
function [m1,m2,PI_inf]=infini(c1,pen1,c2,pen2)
    //[m1,m2,PI_inf]=infini([0 0],[6 7],[2 9],[13 4])
    m1f=c1+pen1;
    m2f=c2+pen2;
    PI_inf=p_inter([c1;m1f],[c2;m2f]);
    if PI_inf<>[] then
        alpha=1;
        while PI_inf >=(c1+alpha*pen1)
            alpha=alpha+1;
        end
        m1=c1+alpha*pen1;
        bet=1;
        while PI_inf >=(c2+bet*pen2)
            bet=bet+1;
        end
        m2=c2+bet*pen2;
    else
        m1=m1f;m2=m2f;
    end

end

endfunction
//-----

```


La mise sous forme canonique dans $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$

```

////////----- Script SCILAB: La mise sous forme canonique de s=p+qr* dans FMinMaxGD -----//

function [p1,m1,r1]=Forme_canoniqueFMinMaxGD(p,q,r)

    //[p1,m1,r1]=Forme_canoniqueFMinMaxGD([2 2;3 5],[4 6],[1 0])

//-----La mise de la pente ultime sous la forme irréductible -----
    r1=pgdc(r);
//-----La mise sous forme canonique de la série dans MinMaxGD -----
    pq=[p;q];
    pq=tri_serie(pq);//tri de la série

//-----Détermination des monômes de la série dans FMinMaxGD -----
    pu=pente_point([0 0],r1);
    pq1=[];i=1;continue=%t;
    while (i<=size(pq,:))&(continue==%t)
        pq1=[pq1;pq(i,:)];
        pentemax=pu;jmax=i;
        for j=i+1:size(pq,:)
            pente=pente_point(pq(i,:),pq(j,:));
            if pente>=pentemax then
                pentemax=pente;
                jmax=j;
            end
        end

        if pentemax==pu then
            continue=%f;
        end
        i=jmax;
    end

//-----La mise de la série dans FMinMaxGD sous la forme s'=p'+m'r'* -----
    m1=pq1($,:);pq1($,:)=[];
    p1=pq1;

endfunction

```

La somme dans $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$

```

//////////-----Script SCILAB: Somme de deux séries périodiques dans FMinMaxgd-----//
//////////----- ps+msrs*=(p1+q1r1*)+(p2+q2r2*) -----//

function [ps,ms,rs]=SommeFMinMaxGD(p1,m1,r1,p2,m2,r2)

    //[ps,ms,rs]=SommeFMinMaxGD([0 0;1 2],[3 5;5 6],[3 3],[0 0;1 1;3 2;4 6],[5 7],[4 2])
    r=pente_max(r1,r2);
    [ps,ms,rs]=Forme_canoniqueFMinMaxGD([], [p1;p2;m1;m2],r);

endfunction

```

Le produit dans $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$

```

//////////-----Script SCILAB: Produit de deux séries périodiques dans FMinMaxgd-----//
//////////----- pp+mprp*=(p1+q1r1*)(p2+q2r2*) -----//

function [pp,mp,rp]=ProduitFMinMaxGD(p1,q1,r1,p2,q2,r2)

    //[pp,mp,rp]=ProduitFMinMaxGD([0 0;1 3],[2 5],[2 2],[2 0],[3 4],[3 1])

    //-----Calcul du produit (p1+q2)*(p2+q2) -----
    P=[];corde1=[p1;q1];corde2=[p2;q2];
    for i=1:size(corde1,:)
        for j=1:size(corde2,:)
            P=[P;(corde1(i,:)+corde2(j,:))];
        end
    end
    r=pente_max(r1,r2);
    //-----la mise sous forme canonique du produit Dans FMinMaxGD -----
    [pp,mp,rp]=Forme_canoniqueFMinMaxGD([],P,r);

endfunction

```

l'étoile d'une série périodique de $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$

```

//////////----- Script SCILAB: Étoile d'une série périodiques de FMinMaxgd-----//
//////////----- s'*=re*=(p+mr)*-----//

function [p1,m1,r1]=EtoileFMinMaxGD(p,m,r)

    //[p1,m1,r1]=EtoileFMinMaxGD([2 2;3 5],[4 6],[1 1])

    E=[p;m];
    pu=pente_point([0 0],r);
    //-----Calcul l'étoile de s=p+mr* dans FMinMaxGD -----

    for j=1:size(E,:)
        pente=pente_point([0 0],E(j,:));
        if pente>pu then
            r=E(j,:);
            pu=pente;
        end
    end
    //-----La mise de la pente ultime sous la forme irréductible -----
    r1=pgdc(r);
    p1=[];m1=[];

endfunction

```

Représentant maximal d'une classe de $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$

```
//----- Représentant maximal d'une classe de FMinMaxGD-----
//-----RMAX=pmax+qmax rmax*-----
function [pmax,qmax,rmax]=Representant_MaximalFMinMaxGD(p,m,r)

    //[pmax,qmax,rmax]=Representant_MaximalFMinMaxGD([], [2 9], [13 4])
    //-----la mise sous forme canonique du s=p+qr* Dans FMinMaxGD-----

    [p1,m1,rmax]=Forme_canoniqueFMinMaxGD(p,q,r);
    pq=[p1;m1];
    pmax=[];
    for j=1:size(pq, :)-1
        pc=appro_seg(pq(j, :),pq(j+1, :));
        pmax=[pmax;pc];
    end
    if pmax<>[]
        pmax($, :)=[]
    end

    i=1;
    while i<=size(pmax, :)-1
        if pmax(i,2)==pmax(i+1,2)
            pmax(i+1, :)=[];
        else
            i=i+1;
        end
    end

    qmax=appro_seg(m1,m1+rmax);
    j=1;
    while j<=size(qmax, :)-1
        if qmax(j,2)==qmax(j+1,2)
            qmax(j+1, :)=[];
        else
            j=j+1;
        end
    end

end
endfunction
```

L'inf dans $\mathcal{F}_{min}^{max}[\gamma, \delta]$

```
//////////-----Script SCILAB: Inf de deux séries de FMinMaxgd-----//////////
//////////----- inf=pinf+minf rinf*=inf(p1+q1r1*,p2+q2r2*) -----//////////

function [pinf,minf,rinf]=InfFMinMaxGD(p1,q1,r1,p2,q2,r2)

    //[pinf,minf,rinf]=InfFMinMaxGD([], [0 0], [6 7], [], [2 9], [13 4])

    //-----la mise sous forme canonique de s1 et s2 -----
    [p11,m11,r11]=Forme_canoniqueFMinMaxGD(p1,q1,r1);
    [p22,m22,r22]=Forme_canoniqueFMinMaxGD(p2,q2,r2);

    //-----point d'intersection entre les deux séries à l'infini-----
```

```

[m1,m2,PI_inf]=infini(m11,r11,m22,r22);
corde1=[p11;m11;m1];
corde2=[p22;m22;m2];

a=max(corde1(1,1),corde2(1,1));
b=min(corde1($,1),corde2($,1));

sup1=[];sup2=[];ff=[];kk=[];ff1=[];kk1=[];
//-----représentant maximal de corde1-----
for i=1:size(corde1,:)-1
    sup1=[sup1;appro_seg(corde1(i,:),corde1(i+1,:))];
    sup1($,:)=[];
end
sup1=[sup1;corde1($,:)];
//-----représentant maximal de corde2-----
for i=1:size(corde2,:)-1
    sup2=[sup2;appro_seg(corde2(i,:),corde2(i+1,:))];
    sup2($,:)=[];
end
sup2=[sup2;corde2($,:)];
//-----
if sup1(1,1)==sup1(2,1)|sup2(1,1)==sup2(2,1) ;
    sup1(1,:)=[];sup2(1,:)=[];
end
//-----les monômes de sup1 entre a et b appartenant à l'inf-----

for i=1:size(sup1,:)
    if (sup1(i,1)>=a & sup1(i,1)<=b) then
        ff=[ff ;sup1(i,:)];
    else
        if sup1(i,1)>a
            ff1=[ff1;sup1(i,:)];
        end
    end
end
//-----les monômes de sup2 entre a et b appartenant à l'inf-----
for i=1:size(sup2,:)
    if (sup2(i,1)>=a & sup2(i,1)<=b) then
        kk=[kk;sup2(i,:)];
    else
        if sup2(i,1)>a
            kk1=[kk1;sup2(i,:)];
        end
    end
end
//-----les monômes entre a et b appartenant à l'inf-----
inf=[min(ff,kk)];

//-----la pente ultime de l'inf penete=max(r1,r2)-----
pente_inf=pente_min(r1,r2);
if (pente_inf==r1)then
    dm=corde1($,:);
else
    dm=corde2($,:);
end
//-----monômes de sup1 supérieurs à b appartient à l'inf-----
for j=1:size(ff1,:)

```

```

        p=pente_point(dm,ff1(j,:));
        if p <=pente_point([0 0],pente_inf)
            inff=[inf;ff1(j,:)];
        end
    end
//-----monômes de sup2 supérieurs à b appartenant à l'inf-----
    for j=1:size(kk1,:)
        p=pente_point(dm,kk1(j,:));
        if p <=pente_point([0 0],pente_inf)
            inf=[inf;kk1(j,:)];
        end
    end
//-----la mise sous forme canonique de l'inf: inf=p'+q'r'*-----
    q=inf($,:);inf($,:)=[];
    p=inf;
    r=pente_inf;
    [pinf,minf,rinf]=Forme_canoniqueFMinMaxGD(p,q,r);
endfunction

```

Bibliographie

- [Baccelli, 1992] Baccelli (1992). Synchronization and linearity : An algebra for discrete event systems. *Wiley and Sons*.
- [Cohen,] Cohen, G. Convexité et optimisation. cours dispensé à l'école nationale des ponts et chaussées., [http\protect\relax\unskip\penalty\@M\protect\kern+.1667em\relax:\@beginparpenalty=\@M\relax/www.prism.uvsq.fr/~wynter/COURS/dea/2000/convex-opt_Cohen.pdf](http://protect\relax\unskip\penalty\@M\protect\kern+.1667em\relax:\@beginparpenalty=\@M\relax/www.prism.uvsq.fr/~wynter/COURS/dea/2000/convex-opt_Cohen.pdf).
- [Cohen, 1995] Cohen, G. (1995). Théorie algébrique des systèmes à événements discrets. *Cours dispensé à l'École des Mines de Paris, Université de Fontainebleau*.
- [Cottenceau, 1999] Cottenceau, B. (1999). Contribution à la commande de systèmes à événements discrets : synthèse de correcteurs pour les graphes d'événements temporisés dans les dioïdes. *Thèse, LISA - Université d'Angers*.
- [Cunninghame-Green, 1979] Cunninghame-Green, R. (1979). Minimax algebra. in lecture notes in economics and mathematical systems. *Springer-Verlag*.
- [Gaubert, 1992] Gaubert, S. (1992). Introduction aux systèmes dynamiques à événements discrets. *Polycopié de cours donné à l'ENSTA*.
- [MaxPlus, 1991] MaxPlus (1991). A linear system theory for systems subject to synchronization and saturation constraints. *Proceedings of the first European Control Conference Grenoble*.
- [Menguy, 1997] Menguy, E. (1997). Contribution à la commande des systèmes linéaires dans les dioïdes. *LISA - Université d'Angers*.
- [Quadrat, 1990] Quadrat, J. P. (1990). Théorèmes asymptotiques en programmation dynamique. *Compte Rendus à l'académie des sciences*, (311):745–748.

Utilisation de la transformée de Fenchel pour représenter la dynamique des systèmes $(\max,+)$ linéaires

ABEKA ABDERREZAK

Résumé

Les Systèmes à Événements Discrets (SED) mettant en jeu des phénomènes de synchronisation peuvent être décrits par des équations linéaires dans l'algèbre des dioïdes. La dynamique de ces systèmes s'écrit par des séries formelles périodiques dans l'algèbre $(\max,+)$. Certaines opérations sur ces séries peuvent générer des phénomènes transitoires de grande taille. En utilisant la transformée de Fenchel, une nouvelle représentation des séries périodiques caractérisant la dynamique des systèmes $(\max,+)$ linéaires est proposée.

Mots-clés: SED, GET, algèbre $(\max,+)$, transformée de Fenchel.

Abstract

The Discrete Event Systems (DES) involving synchronization phenomena can be described by linear equations in dioids. It is pointed out that the dynamic of these systems is described by periodic formal series in some dioid algebra. Some operations on periodic series can generate some important transitory phenomena. By using Fenchel transform, a new representation of these series is proposed.

Key words: DES, TEG, $(\max,+)$ algebra, Fenchel transform.