

Table des matières

Introduction	5
1 Modèle graphique et algébrique	7
1.1 Définitions et propriétés des dioïdes	8
1.1.1 Monoïde [1]	8
1.1.2 Dioïde [1]	8
1.2 L'ordre naturel dans les dioïdes	10
1.2.1 Définitions [1][15]	10
1.3 Résolution d'équations	12
1.3.1 Équation implicite linéaire dans les dioïdes complets	12
1.4 Réseaux de Petri	14
1.4.1 Définition des réseaux de Petri	14
1.4.2 Présentation des réseaux de Petri [6][19]	15
1.5 Graphes d'Événements Temporisés	16
1.5.1 Propriétés des graphes d'événements	17
1.5.2 Temporalisation des graphes d'événements	17
1.6 Équations d'états	18
1.6.1 Équations aux dateurs	18
1.6.2 Équations aux compteurs	20
2 Théorie des graphes et matrices	23
2.1 Comportement du graphe d'événements temporisés	23
2.2 Graphe de précedence et taux de production	25
2.2.1 Fonctionnement autonome [3]	25
2.2.2 Graphe de précedence associé au GET	25
2.2.3 Taux de production	26
2.2.4 Valeurs et vecteurs propres	27
2.3 Périodicité, cyclicité et comportement transitoire	29
2.3.1 Comportement périodique et cyclicité	29

3	Problématique des régimes périodiques et transitoires	33
3.1	régimes périodiques	33
3.1.1	Régime k-périodique	33
3.1.2	Régime 1-périodique	35
3.2	Élimination du régime transitoire	37
3.2.1	Présentation et formulation du problème	37
3.2.2	Le critère à optimiser dans le problème	38
3.2.3	modèle mathématique du problème	38
3.3	Interprétation d'une étude de régime permanent	39
3.4	Évaluation des bornes inférieure et supérieure du Makespan	39
3.4.1	Notations et hypothèses	39
3.4.2	Paramètres et critères de performance	40
3.4.3	Évaluation d'une borne inférieure pour le Makespan	40
3.4.4	Évaluation d'une borne supérieure pour le Makespan	40
3.5	Évaluation des bornes inférieure et supérieure du transitoire	41
3.5.1	Calcul d'une borne supérieure pour le Pré-production	41
3.5.2	Calcul d'une borne inférieure pour le Pré-production	42
4	Interprétation algébrique et réduction du régime transitoire	43
4.1	interprétation graphique du régime transitoire	43
4.1.1	Généralités	43
4.1.2	Régimes transitoires	45
4.2	Décomposition et réalisation des séries périodiques	47
4.3	Problématique de réduction du régime transitoire	48
4.3.1	Position du problème	48
4.3.2	Préalable	49
4.4	Etude	49
4.4.1	Chemin va d'un sommet du graphe critique à lui même	50
4.4.2	Chemin va d'un sommet du graphe critique à un sommet quelconque	50
4.4.3	Chemin va d'un sommet n'appartient pas au graphe critique à un sommet quelconque	53
	Conclusion	57
	A Annexe	59
A.1	Résiduation	59
A.1.1	Résiduation des applications du type : $x \rightarrow a \otimes x$ et $x \rightarrow x \otimes a$	59
A.1.2	Résiduation dans le cas matriciel :	60
	Bibliographie	61

Introduction

La modélisation des propriétés que présentent les systèmes dynamiques, en particulier les systèmes dynamiques à événements discrets (SDED) peut être réalisée grâce à la variété et la diversité des outils et d'approches existants actuellement (réseaux de Petri, automates, simulation, ...).

Cependant, si on considère le problème des régimes transitoires et périodiques, l'étude de tels phénomènes devient complexe vis à vis des résultats que l'on cherche. L'ampleur de cette complexité peut être traitée grâce à l'utilisation de moyens modernes. Il s'agit donc de l'algèbre des dioïdes (algèbre de $(\max, +)$) et d'une sous classe des réseaux de Petri appelée Graphes d'Événements Temporisés (GET).

Dans le LISA ou dans d'autres laboratoires, ce type de problème a attiré l'attention d'une communauté de chercheurs. Ces derniers sont arrivés à donner des solutions pour certains problèmes. La qualité et l'importance des résultats trouvés montrent l'efficacité de ces techniques.

L'objectif principal de ce travail est d'encadrer le problème relatif aux régimes périodiques et transitoires et de définir les problèmes liés à cette problématique. Il est aussi de présenter et interpréter quelques résultats déjà trouvés à l'aide d'autres approches (ordonnancement). On expose à la fin un problème de réduction de la longueur du régime transitoire avec une solution possible.

Les lignes directrices des chapitres de ce mémoire ainsi que son organisation sont présentées de la manière suivante :

Dans le premier chapitre, on fait une étude de l'outil algébrique. On donne les définitions et les propriétés de quelques éléments utiles dans cette étude. On donne ainsi une présentation générale sur le modèle graphique (réseaux de Petri) et en particulier les Graphes d'Événements Temporisés (GET). Grâce à ces derniers, on aboutit à la forme d'état explicite et implicite qui est la modélisation du système.

L'étude du régime périodique est faite dans le troisième chapitre. On expose les régimes k -périodique et 1-périodique ainsi que les conditions de leurs réalisations. Cette étude permet donc de répondre au problème d'élimination d'un certain régime transitoire dès le départ. On

expose et on interprète les résultats de l'optimisation des régimes permanents trouvés par Korbaa [12][13] à travers notre approche basée les GET et l'algèbre $(\max, +)$.

Le quatrième chapitre concerne l'étude des régimes transitoires. Dans la première partie on donne un moyen de représenter graphiquement l'évolution du régime transitoire basé sur une étude faite par Mairesse [17][18]. Dans une deuxième partie, on étudie un problème de réduction du longueur du régime transitoire en agissant sur les temporisations.

Chapitre 1

Modèle graphique et algébrique

Les systèmes qui peuvent être considérés comme des Systèmes Dynamiques à Événements Discrets (SDED) (systèmes de production manufacturiés...), posent des problèmes de spécifications, de modélisation et d'évaluation de leurs performances. Leurs comportements seront représentés avec les réseaux de Petri (RdP). Ces derniers, possèdent des propriétés analytiques qui vont nous permettre dans plusieurs cas de conclure sur des propriétés cherchées relatives à certains systèmes.

Ainsi, dans l'algèbre usuelle, on a l'habitude d'utiliser des opérations mathématiques, telles que l'addition de grandeurs physiques de même natures notée "+". Pour décrire des phénomènes tels que l'assemblage, le mélange, le rendez-vous ... et la synchronisation, dans le cadre de cette étude on aura besoin d'une nouvelle structure algébrique, dite algèbre exotique, qui se base sur les opérateurs suivants : Min ou Max ainsi que le "+" habituel.

L'objet de ce premier chapitre dans une première partie est d'aborder les principales définitions et propriétés que présentent les dioïdes. On parle également d'algèbre exotique. Le lecteur pourra trouver de plus amples d'informations dans [1][3][5] et [21]. Dans un premier temps, la deuxième partie expose la définition et le rappel de certaines caractéristiques générales de (RdP) [19][9][6]. D'autre part, après la définition des graphes d'événements qui sont une sous classe des (RdP) , on va exploiter leurs caractéristiques pour modéliser des systèmes à fonctionnement cyclique. L'articulation entre l'aspect mathématique et graphique des Graphes d'Événements Temporisés(GET), sera mise en évidence après une modélisation des (GET) sous forme d'équations. On travaille soit dans l'espace des événements ou dans l'espace des temps. On aboutit aux équations cherchées à l'aide des techniques mathématiques définies dans l'algèbre linéaire ainsi que dans l'algèbre des dioïdes [3][4][9].

1.1 Définitions et propriétés des dioïdes

1.1.1 Monoïde [1]

Définition : Un monoïde est un ensemble muni d'une certaine loi de composition interne associative, et possédant un élément neutre. Si cette loi est commutative, ce monoïde est dit commutatif .

1.1.2 Dioïde [1]

Dioïde : Un dioïde est un ensemble \mathcal{D} , muni de deux opérations notées : \oplus et \otimes , appelées respectivement somme et produit. Ce dioïde qui est noté $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ est un semi-anneau idempotent. Nous présentons de manière plus détaillée les propriétés du semi-anneau et du dioïde .

Par rapport à la loi \oplus , (\mathcal{D}, \oplus) est un monoïde commutatif présentant les axiomes suivants : $\forall a, b$ et c dans un dioïde \mathcal{D}

- La somme est associative :

$$(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) \quad (1.1)$$

- La somme est commutative :

$$a \oplus b = b \oplus a \quad (1.2)$$

- L'existence d'un élément neutre noté ϵ pour la somme, appelé zéro :

$$\exists \epsilon \in \mathcal{D} \quad a \oplus \epsilon = a \quad (1.3)$$

Par rapport à la loi \otimes , le monoïde (\mathcal{D}, \otimes) présente les propriétés suivantes :

- Le produit est associatif :

$$(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c) \quad (1.4)$$

- L'existence d'un élément neutre noté e pour le produit, appelé identité :

$$\exists e \in \mathcal{D} \quad a \otimes e = e \otimes a = a \quad (1.5)$$

De plus le dioïde $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ doit satisfaire les axiomes suivants :

- Le produit est distributif par rapport à la somme :

$$a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c) \quad (1.6)$$

- Le zéro est absorbant pour le produit :

$$\epsilon \otimes a = a \otimes \epsilon = \epsilon \quad (1.7)$$

- La somme est idempotente :

$$a \oplus a = a \quad (1.8)$$

Le dioïde $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ est commutatif si (\mathcal{D}, \otimes) est commutatif.

Exemples :

1) L'ensemble $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$, muni de \oplus qui correspond au max et \otimes qui correspond à " + " est un dioïde, noté \mathbb{R}_{\max} , avec $e = 0$ et $\epsilon = -\infty$. On l'appelle aussi algèbre $(\max, +)$.

2) L'ensemble $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ muni de \oplus équivalent à min et \otimes équivalent à " + " est un dioïde, noté \mathbb{R}_{\min} , avec $\epsilon = +\infty$ et $e = 0$.

Les deux structures algébriques citées ci-dessus $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$, $(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$ sont commutatives.

3) Dioïdes matricielles $\mathcal{D}^{n \times n}$ est l'ensemble des matrices carrées de dimension n . $(\mathcal{D}^{n \times n}, \oplus, \otimes)$ est un dioïde matriciel, avec l'élément neutre (nul) pour \oplus sous forme d'une matrice $A_{ij} = \epsilon$. Également le produit \otimes a pour élément neutre (identité) une matrice composée de la manière suivante :

$$A_{ij} = \begin{cases} e & \text{si } i = j, \\ \epsilon & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Ces deux dernières matrices sont formulées respectivement de la manière suivante :

$$\epsilon = \begin{pmatrix} \epsilon & \cdots & \epsilon \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \epsilon & \cdots & \epsilon \end{pmatrix}$$

$$I_d = \begin{pmatrix} e & \epsilon & \cdots & \epsilon \\ \epsilon & e & \cdots & \epsilon \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \epsilon & \epsilon & \cdots & e \end{pmatrix}$$

La structure $(\mathcal{D}^{n \times n}, \oplus, \otimes)$ obéit bien aux axiomes que doivent vérifier les dioïdes.

La somme et le produit des matrices dans un dioïde $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ se présente de la manière suivante :

$\forall A, B$ dans $\mathcal{D}^{n \times n}$:

$$(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$$

$$(A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n A_{ik} \otimes B_{kj}$$

Exemple de somme et de produit de deux matrices dans l'algèbre $(\max,+)$:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A \oplus B = \begin{pmatrix} \max[3, 1] & \max[7, 6] \\ \max[4, 2] & \max[5, 8] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} \max[3+1, 7+2] & \max[3+6, 7+8] \\ \max[4+1, 5+2] & \max[4+6, 5+8] \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 15 \\ 7 & 13 \end{pmatrix}$$

On peut définir la multiplication d'une matrice A par une constante α :

$$(\alpha \otimes A)_{ij} = \alpha \otimes A_{ij} = \alpha + A_{ij}$$

Étant donné aussi que l'on travaille sur un dioïde matriciel, la multiplication de la matrice identité par une autre matrice A est évidente :

$$A \otimes I_d = I_d \otimes A = A$$

En général, la multiplication des matrices dans $\mathcal{D}^{n \times n}$ n'est pas commutative, même si $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ est commutatif. Outre, pour les matrices de dimensions appropriées non carrées, on doit les compléter par des lignes ou/et des colonnes formées par l'élément neutre ϵ , pour que ces matrices puissent être manipulées comme des éléments d'un dioïde matriciel.

1.2 L'ordre naturel dans les dioïdes

1.2.1 Définitions [1][15]

• **Semi treillis** : Un ensemble \mathcal{D} muni d'une loi d'ordre \succeq , (\mathcal{D}, \succeq) est un sup-semi-treillis, si toute partie a deux éléments de \mathcal{D} admet une borne-sup :

$$\forall x \in \mathcal{D}, \quad \forall a, b \in \mathcal{D}^2; \exists c \in \mathcal{D}$$

$$(x \succeq a \text{ et } x \succeq b) \Leftrightarrow x \succeq c \text{ noté } c = a \vee b$$

c est le plus petit majorant de a, b

(\mathcal{D}, \preceq) est un inf-semi-treillis, si toute partie a deux éléments de \mathcal{D} admet une borne-inf

$$\exists c \in \mathcal{D} : (x \preceq a \text{ et } x \preceq b) \Leftrightarrow x \preceq c \text{ noté } c = a \wedge b$$

c est le plus grand minorant de a, b

• **Treillis** : un ensemble \mathcal{D} , doté des deux opérateurs \vee et \wedge est un treillis. Ces opérations présentent donc les propriétés d'associativité et de commutativité et ainsi on

peut dire que ce treillis est distributif si \vee est distributif par rapport à \wedge et réciproquement. pour a, b, c dans \mathcal{D} :

$$a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$$

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$$

• **Treillis complet** : Un semi-treillis \mathcal{D} (respectivement treillis) est dit complet, si toute partie A finie ou infinie de \mathcal{D} admet une borne supérieure (respectivement borne supérieure et inférieure) noté : $\bigvee A$ ou $\bigvee_{a \in A} a$

Un dioïde \mathcal{D} doté d'une telle loi d'ordre \succeq , est un semi-treillis dans lequel la notation \vee correspond à \oplus . L'élément nul ϵ coïncide avec le plus petit élément du dioïde \mathcal{D} .

• **Relation d'ordre dans un dioïde** : La relation d'ordre naturel \succeq dans un dioïde $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ est définie grâce à l'idempotence de l'opérateur \oplus , elle est donnée par :

$$\forall a, b \in \mathcal{D} : a \succeq b \Leftrightarrow a = a \oplus b$$

Cette relation est compatible avec les lois de composition interne de \mathcal{D} , $\forall c \in \mathcal{D}$

$$a \succeq b \Rightarrow a \oplus c \succeq b \oplus c$$

$$a \succeq b \Rightarrow a \otimes c \succeq b \otimes c$$

Aussi la loi \succeq présente les propriétés de réflexivité, d'antisymétrie et de transitivité.

• **Dioïde complet** : un dioïde \mathcal{D} est complet, si dans ce dernier toute somme infinie d'éléments est définie, et que la loi \otimes est distributive à gauche et à droite par rapport à \oplus , en rappelant que pour alléger l'écriture, on admet que (\cdot) remplace \otimes .

$$\forall A \subset \mathcal{D} \quad \left(\bigoplus_{a \in A} a \right) \cdot b = \bigoplus_{a \in A} a \cdot b \quad \Rightarrow \quad \left(\bigoplus_{a \in A} a \right) \cdot \left(\bigoplus_{b \in B} b \right) = \bigoplus_{(a,b) \in A \times B} a \cdot b$$

$$\forall B \subset \mathcal{D} \quad b \cdot \left(\bigoplus_{a \in A} a \right) = \bigoplus_{a \in A} b \cdot a$$

Exemple :

- Dans le dioïde \mathbb{R}_{\max} , l'ordre naturel \succeq coïncide avec l'ordre usuel \geq . En revanche dans \mathbb{R}_{\min} , \succeq coïncide avec \leq (dans \mathbb{R}_{\min} $1 \succeq 2$)

Remarque :

- $\mathbb{R} \cup \pm\infty$, muni du max et du + usuel, est un dioïde complet. On le notera désormais $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$.

Soit un dioïde complet $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$, la construction de la borne inférieure pour toute paire d'éléments (a, b) pour n'importe quel sous-ensemble du même dioïde est :

$$a \wedge b = \bigoplus_{x/x \preceq a, x \preceq b} x$$

Si X est un sous ensemble de \mathcal{D} , $X \subset \mathcal{D}$, la borne inférieure de X est donnée par : $\bigwedge X = \bigvee y \in \mathcal{D} / \forall x \in X, y \preceq x$. Outre, on a l'équivalence suivante :

$$a \succeq b \Rightarrow a = a \oplus b \Leftrightarrow b = a \wedge b$$

Un dioïde \mathcal{D} complet admet un plus grand élément, noté T qui correspond à la somme de tous les éléments de \mathcal{D} . Autrement dit, T est une borne supérieure de \mathcal{D} .

$$T = \bigoplus_{x \in \mathcal{D}} x$$

T est absorbant pour la loi \oplus : $\forall a \in \mathcal{D} \quad a \oplus T = T$, et vérifie : $T \otimes \epsilon = \epsilon \otimes T = \epsilon$

1.3 Résolution d'équations

La résolution de quelques équations ou d'applications dans l'algèbre usuelle, est réalisée grâce au fait qu'elles soient bijectives, ou plus simplement inversibles. En effet, si f est une application définie sur $\mathbb{R}(\mathbb{Z}, \mathbb{N}, \dots)$, on peut trouver l'application inverse notée f^{-1} .

Cependant, cette propriété risque d'être perdue lorsque on considère les dioïdes complets comme domaine de travail, car les opérateurs \oplus, \otimes ne sont pas inversibles directement. C'est pour cela, que l'on fait appel à une nouvelle théorie qui s'appelle la résiduation (voir annexe), qui va nous aider pourtant, à trouver des pseudo-inverses pour certaines applications, et par conséquent, résoudre des équations ou des inéquations du type $ax \preceq b$. Le but est d'établir l'existence de solutions extrémales.

1.3.1 Équation implicite linéaire dans les dioïdes complets

Dans la suite de ce paragraphe on va étudier des inéquations de type $x \succeq ax \oplus b$. les résultats fournis par la théorie de la résiduation et aussi les techniques de calculs qui seront basées sur un nouvel opérateur $(*)$ qui sera défini par la suite, vont nous aider à montrer l'existence d'une solution pour ce type d'inéquations. Le lecteur pourra consulter [2] et [7] pour la démonstration complète. On va aussi explorer les résultats déjà trouvés pour la résolution des inéquations $a \otimes x \succeq b$

• **Théorème**[9] : L'inéquation $x \succeq ax \oplus b$ définie sur un dioïde complet, admet une plus petite solution égale à a^*b où a^* est défini par : $a^* = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} a^n$.

Le $(*)$ est un opérateur qui s'appelle étoile de Kleen. Les propriétés de l'étoile seront présentées ultérieurement. On reprend l'équation : $x = ax \oplus b$

On met maintenant en évidence la solution de cette équation qui s'écrit sous la forme :

$$a^*b = (e \oplus a \oplus a^2 \oplus a^3 \oplus \dots)b$$

Préalablement, on introduit un nouveau opérateur noté " + ", et qui est dérivé de " * ", est défini par :

$$a^* = e \oplus a^+ \quad \text{ou} \quad a^+ = a \cdot a^*$$

$$\Rightarrow a^+ = \bigoplus_{n \geq 1} a^n$$

Nous introduisons le phénomène naturel de l'opérateur(*)

$$\begin{aligned} x &= ax \oplus b \\ &= a(ax \oplus b) \oplus b \\ &= a^2x \oplus ab \oplus b \\ &= a^2x \oplus (a \oplus e)b \\ &= a^3x \oplus (a^2 \oplus a \oplus e)b \\ &\vdots \\ x &= a^{n+1}x \oplus (a^n \oplus a^{n-1} \oplus \dots \oplus a \oplus e)b \\ \Rightarrow a^* &= (a^n \oplus a^{n-1} \oplus \dots \oplus a \oplus e) \end{aligned}$$

Cette opération se fait sur deux étapes : au début on montre l'existence de a^* , puis dans deuxième temps on vérifie bien que a^*b est une solution en la remplaçant dans l'équation.

Vérification de l'existence de la solution a^*b

$$\begin{aligned} x = ax \oplus b &= a(e \oplus a \oplus a^2 \oplus a^3 \oplus \dots)b \oplus b \\ &= (a \oplus a^2 \oplus a^3 \oplus a^4 \oplus \dots)b \oplus b \\ &= (a^+)b \oplus b \\ &= (a^+ \oplus e)b \\ &= a^*b \end{aligned}$$

Vérifier que a^*b est la plus petite solution

On reprend l'équation :

$$\begin{aligned} x = ax \oplus b &\Rightarrow x \succeq ax \quad \text{et} \quad x \succeq b \\ x \succeq a \otimes x &\succeq a \otimes ax = a^2x \\ &\Rightarrow x \succeq a^n x \\ x &\succeq \bigoplus_{n \in \mathbf{N}} a^n x = a^*x \end{aligned}$$

Aussi,

$$x \succeq b \Rightarrow x \succeq a^*b$$

Ceci montre que toute solution de l'équation est supérieure ou égale a^*b . D'une manière générale, l'équation $g(x) \oplus b = x$ admet une petite solution sous la forme : $x = g^*(b)$.

L'application x^* dans l'algèbre de $(\max, +)$, correspond dans l'algèbre usuelle avec $(1-x)^{-1}$ pour tout $|x| < 1$.

La proposition suivante regroupe quelques propriétés de l'étoile dite de Kleen.

• **Proposition**[1] : Soit \mathcal{D} un dioïde complet, $a, b \in \mathcal{D}$, et c un entier strictement positif. On a

1. $(a^*)^* = a^*$
2. $(a^+)^* = a^*$
3. $a^* = (a^0 \oplus \dots \oplus a^{c-1})(a^c)^*$
4. $(a \oplus b)^* = (a^*b)^*a^*$
5. $(a \oplus b)^* = b^*(ab^*)^*$
6. $a^* = a^*a^*$
7. $(ab^+)^+ = a(a \oplus b)^*$
8. $(ab^*)^* = e \oplus a(a \oplus b)^*$
9. $(a \oplus b)^* = a^*b^*$, lorsque a et b commutent.

Le lecteur trouvera toutes les démonstrations de ces propriétés dans [7]

• **Théorème** : Soit $A \in \mathcal{D}^{n \times n}$ partitionnée en quatre blocs

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

La matrice A^* s'écrit alors :

$$\begin{pmatrix} a_{11}^* \oplus a_{11}^*a_{12}(a_{21}a_{11}^*a_{12} \oplus a_{22})^*a_{21}a_{11}^* & a_{11}^*a_{12}(a_{21}a_{11}^*a_{12} \oplus a_{22})^* \\ (a_{21}a_{11}^*a_{12} \oplus a_{22})^*a_{21}a_{11}^* & (a_{21}a_{11}^*a_{12} \oplus a_{22})^* \end{pmatrix}$$

Remarque : Le théorème précédent montre le calcul de l'étoile d'une matrice décomposée en 4 blocs. Les propriétés données par la proposition précédente reste valables dans le cas d'un dioïde matriciel .

1.4 Réseaux de Petri

1.4.1 Définition des réseaux de Petri

Un réseau de Petri (Rdp), est un graphe constitué de deux types de noeuds, appelés places et transitions. Par convention, chaque place est représentée par un cercle tandis qu'une transition est schématisée par un rectangle (dans d'autres cas par une barre épaisse). Les noeuds du (RdP) sont reliés entre eux par des arcs orientés. Chaque arc ne peut relier deux noeuds de même type. Tous les arcs sont pondérés, autrement dit, à chaque arc est associé un poids sous forme d'un entier positif non nul. Les places peuvent contenir chacune un nombre entier positif ou nul de marques (jetons), d'où la notion du

marquage d'un Rdp. Le marquage d'un (RdP) est donc un vecteur dont la dimension est égale au nombre de places que contient le (RdP), et chaque composante a la valeur du nombre de jetons que contient la place correspondante.

1.4.2 Présentation des réseaux de Petri [6][19]

D'une manière générale, un réseau de Petri est donné par $PN = (P, T, A, W, M_0)$ où :

- $P = \{P_1, P_2, \dots\}$ ensemble fini de places
- $T = \{t_1, t_2, \dots\}$ ensemble fini de transitions
- $A \subset (P \times T) \cup \{T \times P\}$ ensemble fini d'arcs
- $W : A \longrightarrow \{1, 2, \dots\}$ la fonction poids attachée aux arcs
- $M_0 : P \longrightarrow \{1, 2, \dots\}$ le marquage initial

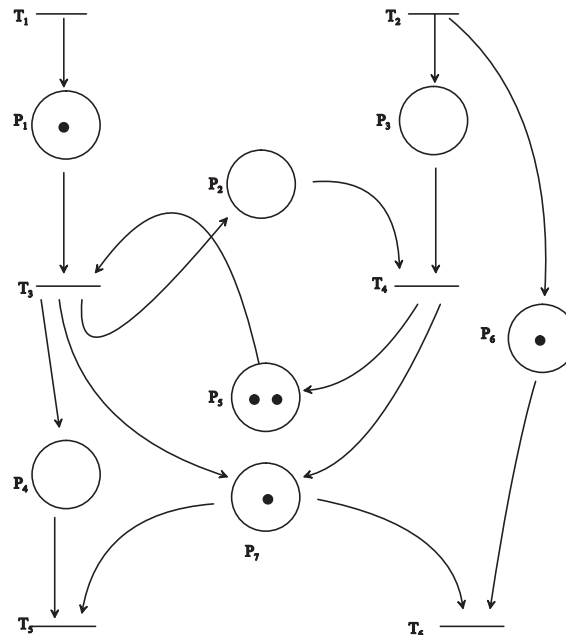


FIG. 1.1: exemple d'un (RdP) généralisé

La figure(1.1) montre bien un (RdP) généralisé, qui contient six transitions et sept places. t_1 et t_2 sont dites : transitions sources, t_5 et t_6 sont des transitions puits. Le vecteur $M_0^t = (1, 0, 0, 0, 2, 1, 1)$ représente le marquage initial du (RdP) ci-dessus, il représente aussi l'état initial du système. Pour définir sa dynamique on se base sur les règles d'évolution du marquage. En effet, dans cet exemple t_3 est validée (peut être franchie) car ces places en amont P_1 et P_5 contiennent chacune un nombre de jetons suffisant pour franchir t_3 . Ce franchissement va consister donc à prélever une marque de chacune des places P_1 et P_5 et ajouter une marque dans les places aval de t_3 qui sont P_4 , P_7 et P_2 puisque le poids de tous les arcs vaut 1. En revanche, dans le cas général, le franchissement

d'une telle transition consiste à prélever un nombre de marques de chacune de ses places en amont égale au poids de chaque arc qui les relie, et à ajouter à chacune de ses places aval un nombre de jetons égal au poids de chaque arcs qui les relie.

L'équation fondamentale qui caractérise l'évolution et le dynamique d'un (RdP) est :

$$M_k = M_0 + W.S$$

où :

M_k : un marquage qu'on l'atteint à partir de M_0 après une séquence de franchissements σ réalisable

S : un vecteur qui représente cette séquence σ . Sa dimension est égale au nombre de transitions que contient le (RdP). Chaque composante S_j vaut le nombre de fois où la transition correspondante t_j a été franchie pendant la séquence σ .

W : une matrice dite d'incidence du (RdP) définie de la façon suivante : $W = W^+ - W^-$

W^- : appelé matrice d'incidence avant tel que : $W^- = [w_{ij}^-]$

$w_{ij}^- = \text{Pré}(p_i, t_j)$: poids de l'arc qui relie une transition t_j à une place en amont p_i

W^+ : appelé matrice d'incidence arrière tel que $W^+ = [w_{ij}^+]$

$w_{ij}^+ = \text{Post}(p_i, t_j)$: poids de l'arc qui relie une transition t_j à une place en aval p_i

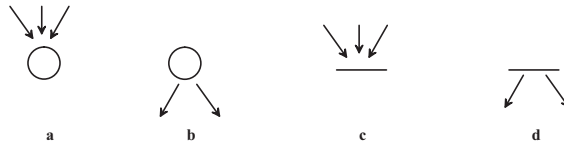


FIG. 1.2: phénomène de concurrence et de synchronisation

Dans l'étude des systèmes dynamiques à événements discrets (SDED), on retrouve fréquemment des problèmes de type concurrence, synchronisation et parallélisme. La figure ci-dessus(1.2) montre bien la modélisation de ces phénomènes par les RdP.

Le problème de concurrence à la fourniture de jetons dans une place est schématisé par (a) tandis que la concurrence de la consommation des jetons d'une place, autrement dit un conflit structurel est représenté par (b) .

Les figures (c) et (d) représente la synchronisation à la consommation et à la fourniture de jetons à plusieurs places.

1.5 Graphes d'Événements Temporisés

On a vu précédemment comment on peut modéliser des problèmes tels que la concurrence et la synchronisation par les RdP. Dans ce qui suit, on va aborder une sous classe

importante des RdP appelée Graphes d'Événements Temporisés (GET), avec laquelle on pourra étudier des phénomènes de synchronisation et de parallélisme et non de concurrence d'où la définition suivante :

Définition : Un graphe d'événements, est un RdP tel que toute place a exactement une transition en amont et une transition en aval, avec une pondération de tous les arcs à la valeur 1.

D'une manière analogue, on définit un graphe d'état comme une forme duale du graphe d'événements. C'est une sous classe des RdP tel que chaque transition a une seule place en amont et une seule place en aval.

Les graphes d'états nous permettent donc d'étudier et de modéliser des phénomènes de concurrences ou de conflit. Dans le cadre de notre étude, on se limitera à l'utilisation et l'exploitation des graphes d'événements temporisés.

1.5.1 Propriétés des graphes d'événements

• **Théorème**[19] : Soit $X = (x_1, \dots, x_n)$ un vecteur à composantes entières non négatives, où n est le nombre de places du graphe d'événements considéré. Soit γ un circuit élémentaire de ce graphe et $P = \{p_1, \dots, p_n\}$ l'ensemble des places du graphe. Alors si, pour $i = 0 \dots n$

$$x_i = \begin{cases} 1 & \text{si } p_i \in \gamma \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

X est un P-invariant. Autrement dit, le nombre de jetons du circuit élémentaire γ est invariant quelque soit l'évolution du système.

Le formalisme mathématique qui nous permet de chercher tous les P-invariants est donné par :

W : matrice d'incidence

$$X.W = 0$$

X : vecteur ligne

• **Théorème** : Soit un graphe d'événements avec m transitions. Le vecteur à m composantes toutes égales à 1 est l'unique T-invariant. Une autre manière d'exprimer cette proposition est de dire que l'on retrouve le même marquage initial après avoir franchi une seule fois chaque transition. L'équation mathématique qui génère cette propriété est :

$$W.X^t = 0$$

1.5.2 Temporisation des graphes d'événements

L'introduction d'un nouveau paramètre qui est le temps sur les graphes d'événements va nous permettre de définir les graphes d'événements temporisés (**GET**). Deux façons

se présentent :

- On peut associer à chaque transition t une durée minimale de tir $\theta(t)$ qui représente le temps de réservation d'un jeton dans une place amont avant d'être disponible à nouveau dans une place aval (GET T-temporisés).

- On peut associer à chaque place une durée minimale $\theta(p)$ qui représente le temps d'indisponibilité d'une marque après son arrivée à cette place avant d'être utile pour un nouveau franchissement (GET P-temporisés).

Dans les deux cas, la temporisation est associée soit aux places, soit aux transitions. On peut montrer l'existence d'une équivalence entre les GET P-temporisés et T-temporisés, du fait qu'on a la possibilité de transformer une place temporisée en une transition temporisée et vice-versa .

Dans le cadre de notre étude, on considère des durées constantes et donc des GET déterministes. Néanmoins, il existe d'autres GET dans lesquels la temporisation n'est pas constante car elle est générée par des variables aléatoires : on est dans le cas des GET stochastiques. Ces derniers permettent de modéliser des tâches avec des temps d'exécution non déterministes (modélisation des pannes par exemple).

1.6 Équations d'états

Jusqu'à présent, on s'est intéressé uniquement à l'aspect graphique des GET pour la modélisation des SDED. Ainsi l'évolution de tels systèmes était décrit par les équations d'état liées aux marquages des places. Désormais on va introduire des nouvelles variables d'état liées aux transitions. Après la mise en équations on se retrouve avec différents modèles linéaires dans les deux types de diodes ($\max, +$) et ($\min, +$).

Pour des raisons d'éclaircissement et de simplification, on adopte les représentations suivantes dans ce qui suit :

- | : Un bâtonnet signifie une unité de temps minimale de séjour dans une place.
- : Une marque ou jeton représente le marquage initial.

1.6.1 Équations aux dateurs

On considère l'exemple suivant :

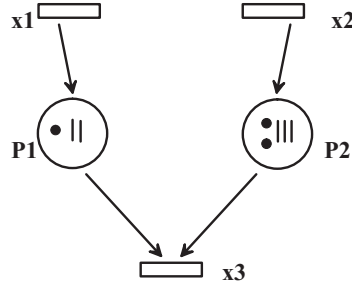


FIG. 1.3: exemple d'un graphe d'événement temporisé

Pour la transition x_3 , et à partir d'un marquage initial $M_0 = (1, 2)^t$ à un instant initial t_0 (on suppose $t_0 = 0$), on va commencer à numéroter tous les événements (un événement correspond au tir d'une transition) en les initialisant avec une valeur k qui est un nombre entier qui peut être négatif et qui est le même pour x_1 et x_2 . De ce fait, notre domaine de travail est l'espace des événements appelé domaine événementiel. Sur ce dernier on définit la fonction $x_3(k)$ par :

$x_3(k)$: date à laquelle l'événement numéroté k (tir) associé à x_3 a lieu.

D'une manière générale $x_i(k)$ est une fonction monotone (croissante) du fait qu'on avance dans le temps lorsque les événements se succèdent, donc :

$$x_i(k+1) \geq x_i(k)$$

Comportement au plus tôt d'un GET : On appelle fonctionnement au plus tôt, le mode de fonctionnement suivant d'un GET :

- Si toutes les transitions internes et puits sont franchies dès qu'elles sont franchissables, et que les transitions sources sont en permanence franchissables, mais ne sont franchies que sur l'occurrence d'événements externes associés à ces transitions.

Mise en équations :

On reprend l'exemple de la figure (1.3), on cherche à mettre en relation les fonctions $x_1(k)$, $x_2(k)$ et $x_3(k)$. Le calcul se fera sur deux étapes :

Dans un premier temps : entre x_3 et x_1 il existe la place p_1 temporisée à deux unités de temps, et contenant déjà un jeton. L'activation de x_3 pour la $k^{\text{ième}}$ fois se fait après la date d'activation de x_1 pour la $(k-1)^{\text{ième}}$ fois qui a fourni le jeton existant à p_1 à cet instant. De plus, ce jeton doit séjourner deux unités de temps dans p_1 avant d'être disponible pour franchir x_3 . On peut donc écrire l'inéquation suivante :

$$x_3(k) \geq x_1(k-1) + 2$$

Dans un deuxième temps, on se base sur le même raisonnement pour établir une inéquation entre x_3 et x_2 :

$$x_3(k) \geq x_2(k-2) + 3$$

$$\Rightarrow x_3 \geq \max(x_1(k-1) + 2, x_2(k-2) + 3) \quad (1.9)$$

Cette dernière inéquation montre bien le phénomène de synchronisation que présente le GET de la figure (1.3).

On rappelle que dans le dioïde $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$ on a :

$$a \oplus b = \max(a, b) \quad a \otimes b = a + b$$

Ceci, va nous permettre de réécrire l'inéquation (2.1) sous la forme :

$$x_3(k) \succeq 2 \otimes x_1(k-1) \oplus 3 \otimes x_2(k-2)$$

Dans le cas limite du comportement du GET sous l'hypothèse du fonctionnement au plus tôt, on a :

$$x_3(k) = 2x_1(k-1) \oplus 3x_2(k-2)$$

On obtient donc le système suivant :

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(k) = x_1(k) \\ x_2(k) = x_2(k) \\ x_3(k) = 2x_1(k-1) \oplus 3x_2(k-2) \end{cases}$$

On transforme le dernier système en une équation d'état sous forme matricielle qui décrit le comportement du GET :

$$\begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & e & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ 2 & \epsilon & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k-1) \\ x_2(k-1) \\ x_3(k-1) \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & 3 & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(k-2) \\ x_2(k-2) \\ x_3(k-2) \end{pmatrix}$$

1.6.2 Équations aux compteurs

Pour traiter le cas des équations aux compteurs, on procède d'une manière duale à la méthode avec laquelle on a traité le problème précédent

On reprend l'exemple de la figure (1.3), pour la transition x_3 , et à partir des mêmes conditions initiales déjà énoncées dans le paragraphe précédent, on cherche donc la dernière date d'activation de la transition x_3 avant ou à l'instant t . En effet, on associe donc à x_3 la fonction suivante :

$x_3(t)$: nombre de tirs de la transition x_3 ayant eu lieu jusqu'à la date t .

Cependant, notre domaine de travail est l'espace de temps, appelé domaine temporel. De même, pour la fonction $x_i(t)$ elle est monotone (croissante), on peut écrire :

$$x_i(t + \Delta t) \geq x_i(t), \quad \Delta t \geq 0$$

Mise en équations

On reprend l'exemple de la figure (1.3), notre but maintenant est de chercher une relation entre $x_1(t)$, $x_2(t)$ et $x_3(t)$ associées respectivement aux transitions x_1 , x_2 et x_3 . Le raisonnement est similaire au cas de la mise en équations pour les dateurs, donc : Le compteur $x_3(t)$ ne peut excéder le compteur $x_2(t - 3)$ car tous les jetons doivent séjourner dans P_1 au moins trois unités de temps, et par conséquent il ne peut pas aussi excéder $x_1(t - 3) + 2$ qui provient de l'existence de deux jetons en réserve venant du franchissement de x_2 antérieurement. On déduit donc :

$$x_3(t) \leq x_2(t - 3) + 2$$

De la même manière on arrive au résultat suivant :

$$\begin{aligned} x_3(t) &\leq x_1(t - 2) + 1 \\ \Rightarrow x_3(t) &\leq \min(x_1(t - 2) + 1, x_2(t - 3) + 2) \end{aligned}$$

Cette dernière inéquation montre bien un phénomène de synchronisation, traduit ici par l'opérateur min.

On rappelle que dans le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$, nous avons

$$a \oplus b = \min(a, b) \text{ et } a \otimes b = a + b$$

aussi

$$a \oplus b = a \Leftrightarrow a \succeq b \Leftrightarrow a \leq b$$

On rapporte la dernière inéquation dans $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$, on obtient :

$$x_3(t) \succeq 1 \otimes x_1(t - 2) \oplus 2 \otimes x_2(t - 3)$$

Et on tient compte du fonctionnement au plus tôt du GET :

$$x_3(t) = 1x_1(t - 2) \oplus 2x_2(t - 3)$$

On arrive donc au système suivant :

$$\Rightarrow \begin{cases} x_1(t) = x_1(t) \\ x_2(t) = x_2(t) \\ x_3(t) = 1x_1(t - 2) \oplus 2x_2(t - 3) \end{cases}$$

Du dernier système, on va donner une représentation d'état du GET sous forme matricielle :

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & e & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ 1 & \epsilon & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t-2) \\ x_2(t-2) \\ x_3(t-2) \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & \epsilon & \epsilon \\ \epsilon & 2 & \epsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t-3) \\ x_2(t-3) \\ x_3(t-3) \end{pmatrix}$$

Chapitre 2

Théorie des graphes et matrices

Pour l'étude des Systèmes Dynamiques à Événements Discrets (SDED), on s'est basé sur deux approches l'une algébrique ($(\max,+)$), l'autre graphique (graphes d'événements temporisés). qui va nous permettre d'étudier le régime permanent ou périodique des GET. Parmi les critères importants qui permettent d'analyser les SDED, on cite fréquemment le taux de production. Le régime périodique est cependant atteint après un transitoire qui peut être extrêmement long ce qui peut limiter la représentativité de ce critère.

On propose dans ce chapitre de rappeler quelques propriétés des GET qui vont nous aider à mettre en évidence le phénomène de périodicité. On fait appel aussi à la théorie spectrale et asymptotique des matrices pour la recherche des valeurs et vecteurs propres. Ces derniers formalisent le critère dit taux de production.

Le but de cette partie est aussi de tisser des liens entre valeur propre, vecteur propre et taux de production, ainsi qu'entre les GET et leurs graphes de précédences associés. L'objectif est d'aboutir à une synthèse d'outils à la fois mathématiques et graphiques qui peuvent constituer une méthodologie d'analyse des comportements périodiques et transitoires dans les SDED.

2.1 Comportement du graphe d'événements temporisés

On rappelle qu'un GET est un RdP dans lequel chaque place à une seule transition en amont et une seule en aval. On suppose aussi que la temporisation est liée aux places. Ces GET sont un outil puissant de modélisation des SED qui ont un fonctionnement cyclique.

En outre, le régime périodique d'un RdP P-temporisé est réalisé lorsque ce dernier a un fonctionnement à vitesse maximale, c'est-à-dire lorsque chaque jeton ne reste dans une place que pendant sa durée d'indisponibilité.

• **Propriété** : Soit un RdP dont les temporisations sont des rationnels. Le fonctionnement à vitesse maximale conduit à un fonctionnement périodique de période λ , au bout

d'un temps fini, pour tout marquage initial tel que le réseau soit borné. λ est aussi appelé temps de cycle du RdP.

• **Théorème : Période minimale [19]**

Une borne inférieure du temps de cycle est une fonction de la matrice des temporisations D , de la matrice d'incidence arrière W^+ , du marquage initial M_0 et des invariants. λ_{\min} est donnée par :

$$\lambda_{\min} = \frac{V^t \cdot D \cdot W^+ \cdot X}{V^t \cdot M_0}$$

W^+ : matrice d'incidence arrière

V : ensemble des P-invariants minimaux

X : un T-invariant

D : une matrice diagonale telle que $d_{ii} = d(P_i)$

M_0 : marquage initial du RdP

Définition : **temps de cycle d'un circuit [9]**

Dans un GET, on considère un circuit γ . Désignons par $M(\gamma)$ le nombre de jetons contenus dans γ . D'autre part $\mu(\gamma)$ la somme des temps attachés aux places appartenant à γ . On appelle temps de cycle de γ le rapport :

$$c(\gamma) = \frac{\mu(\gamma)}{M(\gamma)}$$

Remarque : $C(\gamma)$ est invariant car $M(\gamma)$ le nombre de jetons dans un circuit d'un GET est constant quelque soit l'évolution du GET. Également $\mu(\gamma)$ est constant puisque on considère que des GET déterministes.

Définition : **temps de cycle d'un GET [9]**

Considérons un graphe d'événements temporisés fortement connexe (il existe un chemin orienté d'un noeud i à un noeud j du graphe pour tout couple (i, j)). On définit le temps de cycle du GET de la façon suivante :

$$C^* = \max_{\gamma \in \Gamma} C(\gamma)$$

Γ : ensemble des circuits élémentaires du GET .

Le circuit élémentaire γ qui réalise $C(\gamma) = C^*$ est appelé circuit critique.

Définition : **fréquence de franchissement**

La fréquence de franchissement λ_i d'une transition t_i est le nombre moyen de franchissement de t_i par unité de temps lorsque le régime périodique est établi.

• **Théorème[19]** : La fréquence moyenne de passage des jetons en n'importe quel point d'un graphe d'événements fortement connexe, sachant que les transitions sont franchissables aussitôt qu'elles sont tirables est :

$$\lambda = \frac{1}{C^*}$$

Dans un GET fortement connexe, toutes les transitions sont franchies avec la même fréquence, et une borne maximale de cette fréquence est donnée par :

$$\lambda_{\max} = \min_{\gamma \in \Gamma} \frac{1}{C(\gamma)} = \min_{\gamma \in \Gamma} \frac{M(\gamma)}{\mu(\gamma)}$$

Remarque : On remarque que d'après les relations précédentes, la fréquence de passage (vitesse) dans tout le graphe est déterminée par les circuits critiques. Donc si on veut augmenter cette fréquence, un moyen est d'ajouter des jetons dans ces derniers.

2.2 Graphe de précedence et taux de production

2.2.1 Fonctionnement autonome [3]

On a vu que la modélisation des SDED par des GET dans l'algèbre $(\max,+)$, peut se mettre sous une forme récurrente explicite dans un dioïde complet. Elle a pour équation d'état :

$$\begin{cases} X(k) = A.X(k-1) \oplus B.U(k) \\ Y(k) = C.X(k) \end{cases} \quad (2.1)$$

On suppose que les entrées de ce système sont $U(k) = (\epsilon, \dots, \epsilon)^t$, ce qui revient pratiquement à tirer toutes les transitions d'entrée une infinité de fois à la date $-\infty$. L'évolution de l'état du GET ne dépend pas d'une entrée contraignante. Donc le fonctionnement du GET pour ce type d'entrée est appelé "régime autonome".

Si, de plus, le système représenté par GET n'a pas de sortie on obtient la forme markovienne suivante :

$$X(k) = A \otimes X(k-1) \quad (2.2)$$

A : matrice d'évolution.

2.2.2 Graphe de précedence associé au GET

Tout système donné par une telle équation de récurrence donnée par (2.1), correspond à un retard unique au niveau de l'évolution de son état. Ceci se traduit au niveau des

GET par l'obligation d'avoir un jeton au plus à chaque place à l'état initial. Dans le cas où chaque place contient plus d'un jeton, on a besoin d'introduire de nouvelles variables d'état supplémentaires, pour respecter la formule (2.2). Ce qui augmente la taille de la matrice d'évolution.

Ce paragraphe permet d'illustrer cette notion de transformation que doit subir le GET pour qu'il respecte toujours la forme d'état markovienne. On associe de plus au dernier GET transformé un graphe de précedence qui sera défini dans la partie suivante.

A partir du graphe d'événements, on construit le réseau de Petri normalisé suivant :

- Le modèle doit être sous sa forme autonome : on retirera donc les transitions du type source et puits.
- Chaque place doit contenir exactement un jeton.

Deux cas se présentent :

- Chaque place contenant n jetons avec n strictement supérieur à 1 sera développée sous forme d'une chaîne de n places contenant chacun un jeton
- Chaque place vide sera supprimée avec les arcs correspondants. Les transitions en amont et en aval seront donc fusionnées. La temporisation associée sera reportée sur les places entrantes ou sortantes. On répétera cette transformation jusqu'à la suppression totale des places sans jeton.

Pour obtenir le graphe G associé au réseau de Petri normalisé, on fait correspondre un sommet à chaque transition. On relie ces sommets en remplaçant chaque place par un arc qui est pondéré par la valeur de temporisation de la place. On en déduit la matrice A associée au graphe G .

- A_{ij} : est le poids (la durée) de l'arc allant de j à i
- $(A_{ij})^k$: est le poids maximum de tous les chemins allant de j vers i de longueur k

2.2.3 Taux de production

On donne $G(A)$ le graphe de précedence associé à la matrice A . Le temps moyen de production que l'on notera λ , est la moyenne arithmétique maximale des poids des circuits du graphe. Le taux de production est l'inverse de λ .

Autrement dit, dans la pratique, le temps moyen de production est la durée moyenne mise pour produire une seule pièce. Le taux de production est la quantité de pièces produites par unité de temps.

2.2.4 Valeurs et vecteurs propres

Soit A une matrice associée à un graphe. Les valeurs propres correspondants aux vecteurs propres V vérifient l'équation :

$$A \otimes v = \lambda \otimes v \quad (2.3)$$

avec $v \neq (\epsilon \cdots \epsilon)^t$

Cette équation se transforme dans l'algèbre $(\max, +)$ sous forme :

$$\max_{1 \leq j \leq n} (a_{ij} + x_j) = \lambda + x_i \quad , \quad 1 \leq i \leq n$$

Obtention de la valeur propre de A

Parmi les méthodes de calcul de tous les valeurs propres d'une matrice d'évolution A d'un graphe, on donne l'algorithme de Karp :

$$\lambda = \max_{i=1..n} \min_{k=0..(n-1)} \frac{(A^n)_{ij} - (A^k)_{ij}}{n - k} \quad \forall j$$

A^n et A^k sont calculés dans \mathbb{R}_{max} de la même façon :

$$A^p = \underbrace{A \otimes A \otimes \cdots \otimes A}_{p \text{ fois}}$$

On interprète en matière graphique l'élément $(A^p)_{ij}$, comme le poids maximum de tous les chemins de j à i de longueur p .

Définition : matrice irréductible

Soit une matrice $A \in \mathcal{D}^{n \times n}$. A est dite irréductible si pour toute paire (i, j) , il existe un entier m tel que $(A^m)_{ij} \neq \epsilon$.

Cette définition d'irréductibilité de A , montre que pour toute paire de sommets (i, j) de $G(A)$, il existe au moins un chemin orienté qui les relie. Aussi on tire de cette définition que $G(A)$ est fortement connexe. D'où le théorème suivant :

• **Théorème[9]** : Une matrice $A \in \mathcal{D}^{n \times n}$ est irréductible, si et seulement si, $G(A)$ est fortement connexe.

On reprend l'équation (2.3) en notation habituelle :

$$\max_{1 \leq j \leq n} (a_{ij} + x_j) = \lambda + x_i \quad , \quad 1 \leq i \leq n$$

Pour $j = k$

$$(a_{ik} + x_k) = \lambda + x_i \quad , \quad 1 \leq i \leq n$$

qui s'écrit aussi en écriture $(\max, +)$:

$$a_{ik} . x_k = \lambda . x_i$$

$$a_{21}x_1 = \lambda x_2, a_{32}x_2 = \lambda x_3, \dots, a_{1p}x_p = \lambda x_1 \quad , \quad x_i \neq \epsilon \quad \forall i$$

Les p équations sont multipliés membre à membre entre elles, et en simplifiant par x_i on obtient :

$$\lambda^p = a_{1p} \otimes \dots a_{32} \otimes a_{21} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{1}{p}(a_{1p} + \dots + a_{32} + a_{21})$$

Ceci nous amène à annoncer la propriété suivante

- **Propriété** : Toute valeur propre non nulle est le poids moyen d'un circuit.

• **Théorème** : L'unique valeur propre λ d'une matrice A irréductible dans le dioïde $\mathbb{R}_{max}^{n \times n}$, est égale au poids moyen maximum des circuits de $G(A)$:

$$\lambda = \max_{\gamma \in \Gamma} \frac{|\gamma|_\omega}{|\gamma|_l}$$

$|\gamma|_\omega$: poids du circuit γ

$|\gamma|_l$: longueur (nombre d'arcs) du circuit γ

Remarque : On revient à l'expression déjà trouvée dans le cas des GET $C^* = \max_{\gamma \in \Gamma} C(\gamma) = \max_{\gamma \in \Gamma} \frac{\mu(\gamma)}{M(\gamma)}$. On conclut que ce temps de cycle du GET est la valeur propre λ de la matrice d'évolution du GET. On rappelle que le poids maximum des circuits de $G(A)$ de longueur k qui passe par le sommet i est $(A^k)_{ii}$. Puisque la matrice A est irréductible, il représente donc un $G(A)$ fortement connexe .

$$tr A^k = \bigoplus_{i=1}^n (A^k)_{ii}$$

$(tr A^k)$ correspond au poids maximum de tous les circuits de longueur k du graphe $G(A)$. Pour définir le poids moyen, il faut diviser la valeur du poids par la longueur du circuit. Ce qui revient à diviser $(tr A^k)$ par k pour obtenir le poids moyen maximum dans notre cas. Ce qui montre le théorème suivant

• **Théorème** : Une matrice $A \in \mathcal{D}^{n \times n}$ irréductible admet une unique valeur propre dans \mathcal{D} qui est donnée par :

$$\lambda = \bigoplus_{k=1}^n (tr A^k)^{1/k}$$

où $tr A^k = \bigoplus_{i=1}^n (A^k)_{ii}$

Obtention des vecteurs propres

• **Théorème** : Si $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ est irréductible, un vecteur propre v de A a toutes ses composantes différentes de ϵ .

On a montré ci-dessus l'existence de la valeur propre. On montre maintenant l'existence et on recherche la ou les vecteurs propres associés à la valeur propre. On procède de la façon suivante : on associe à la matrice A une matrice B dite normalisée qui est définie comme suit :

$$B = A_\lambda = \lambda^{-1} \otimes A \Leftrightarrow B_{ij} = (A_\lambda)_{ij} = (A)_{ij} - \lambda$$

Ce qui consiste à soustraire aux poids de chaque arc la valeur propre qui est le poids moyen maximum de tous les circuits. En d'autres termes, tous les circuits du graphe de A_λ ont un poids inférieur ou égal à e (élément neutre pour \otimes dans l'algèbre $(\max,+)$) . aussi on peut écrire :

$$A_\lambda \otimes v = B \otimes v = v$$

Si, en plus un sommet i appartient à un circuit de poids maximal e de B , alors $(B^+)_{ii} = e$, puisque il est le poids maximum de tous les circuits qui passent par i .

• **Théorème** : Si i appartient à un circuit de poids maximal e de B , la colonne $(B^+)_i$ est un vecteur propre de A .

La preuve de ce théorème se trouve dans [2].

Le théorème suivant permet de savoir si les colonnes de A_λ^+ sont des vecteurs propres.

• **Théorème** : Soit $A \in D^{n \times n}$ une matrice irréductible de valeur propre λ la i^{eme} colonne de la matrice $A_\lambda^+(B^+)$ notée $(B^+)_i$, est un vecteur propre de A si elle satisfait l'égalité suivante :

$$B \otimes (B^+)_i = (B^+)_i \quad \text{ou} \quad A_\lambda \otimes (A_\lambda^+)_i = (A_\lambda^+)_i$$

2.3 Périodicité, cyclicité et comportement transitoire

Dans cette partie, on utilise les résultats déjà trouvés concernant les valeurs et les vecteurs propres. On abordera aussi la cyclicité des matrices en particulier, les matrices irréductibles. Notre but est d'aboutir à la mise en évidence du phénomène périodique (régime permanent). Ainsi, on va exposer le problème du régime transitoire (phénomène indésirable).

2.3.1 Comportement périodique et cyclicité

• **Théorème[3]** : Si $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ est une matrice irréductible de valeur propre λ , alors il existe deux entiers N et c tels que : pour tout $n \geq N$

$$A^{n+c} = \lambda^c A^n$$

Le plus petit entier c est appelé cyclicité de A .

Notre but est maintenant de donner une méthode qui nous permet de chercher la cyclicité

c.

Définition : cyclicité d'une matrice

Soit $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$, la cyclicité de A est définie comme suit :

- La cyclicité d'une composante connexe du graphe critique est égale au pgcd des longueurs des circuits de cette composante.

- La cyclicité de la matrice A est égale au ppcm des cyclicités des composantes connexes du graphe critique.

On peut représenter l'état d'un GET sous une forme explicite markovienne dans l'algèbre $(\max, +)$, quand il évolue dans un régime autonome :

$$X(k) = A.X(k-1) \text{ ou bien } X(k+1) = A.X(k)$$

Premier cas : $X(0)$ est vecteur propre

A est la matrice d'évolution du système. Si λ est valeur propre de A et $X(0)$ vecteur d'état initial et en même temps vecteur propre de A alors :

$$\begin{aligned} X(1) = A.X(0) = \lambda X(0) & \Rightarrow X(k) = A^k.X(0) = \lambda^k.X(0) \\ \Rightarrow x_i(k) = \lambda + x_i(k-1) = \lambda k + x_i(0) & \quad (2.4) \end{aligned}$$

avec les éléments $x_i(k)$ du vecteur propre $X(k)$ qui sont les dates de franchissement des transitions.

En d'autres termes, si la forme d'état initial $X(0)$ est donnée comme un vecteur propre de A associé à λ , alors, on constate que deux tirs successifs d'une transition sont séparés par une période λ . Ainsi le GET fonctionnant en régime autonome, va évoluer d'une manière périodique avec un temps de cycle λ (c'est la valeur propre de la matrice d'évolution du GET) dès l'instant de l'amorçage de fonctionnement du système.

Deuxième cas : $X(0)$ n'est pas un vecteur propre

On prend l'hypothèse que A est irréductible. Il nous reste à décrire l'évolution du système, lorsque l'état initial $X(0)$ ne représente pas un vecteur propre de la matrice d'évolution A . On rappelle la propriété de cyclicité de la matrice A , qui dit qu'après un certain rang très grand N , $A^{n+c} = \lambda^c A^n$ avec $n \geq N$.

$$X(k+1) = A \otimes X(k) = \lambda \otimes X(k) \Rightarrow X(k+c) = A^c X(k) = \lambda^c X(k), \quad k \geq N \quad (2.5)$$

Cela s'écrit dans l'algèbre usuelle :

$$x_i(k+c) = \lambda c + x_i(k)$$

$$X(k + n + c) = A^{n+c}X(k) = \lambda^c A^n X(k) = \lambda^c X(k + n)$$

Ce résultat montre qu'en moyenne, on observe les mêmes c événements après λc unités de temps (temps moyen de production de c pièces) sous l'hypothèse que la matrice A est irréductible. Ce régime périodique est atteint après un transitoire fini.

Chapitre 3

Problématique des régimes périodiques et transitoires

Les problèmes de fonctionnement périodique et transitoire des systèmes dynamiques à événements discrets sont connus pour être complexes. Le principal objectif souvent, est d'atteindre un fonctionnement cyclique au plus vite en terme de temps et de nombre de tirs de transitions. Autrement dit, réduire ou bien éventuellement éliminer le régime transitoire. Les critères sont le temps de cycle moyen (taux de production) et les ressources utilisées.

Dans ce chapitre on interprète les régimes k -périodique et 1-périodique ainsi que les conditions de leur mise en évidence. Notre but aussi, est d'interpréter les résultats trouvés par Korbaa [12][13] qu'il a effectué dans le cadre de l'ordonnancement, sous un autre point de vue qui utilise les graphes d'événements temporisés et l'algèbre $(\max, +)$ comme support.

On décrit aussi le contexte des problèmes relatif au régime transitoire.

3.1 régimes périodiques

On aborde le problème des régimes périodiques. C'est une étude préalable pour aboutir au problématique des régimes transitoires.

3.1.1 Régime k -périodique

Nous rappelons qu'un fonctionnement au plus tôt d'un GET suppose que toutes les transitions sont franchies dès qu'elles sont tirables. Ce dernier conduit à un fonctionnement permanent (cyclique). Néanmoins, cette périodicité ne s'établit pas directement

après qu'on ai franchi les transitions une seule fois mais elle s'établit sur k franchissements successifs de toutes les transitions. D'où la définition du régime k -périodique. Ceci se traduit dans un atelier flexible par exemple, par le fait que chaque machine reprend exactement le même état et le même fonctionnement à chaque k cycles.

On rappelle les résultats établis par Cretienne, Laftit et Hillion dans [2][14][11].

• **Théorème** : Le comportement asymptotique d'un graphe d'événements temporisés fonctionnant au plus tôt est k -périodique avec une fréquence de franchissement des transitions égale $\frac{1}{\lambda}$. Autrement dit, il existe n_0 et k tels que, pour tout $n \geq n_0$, et pour toute transition, les dates de débuts de tir vérifient :

$$x_i(n+k) = x_i(n) + k\lambda$$

avec $x_i(n)$ est la date de franchissement de la transition t_i pour la $n^{\text{ième}}$ fois
 $\frac{1}{\lambda}$ est le taux de production du système

Remarques :

• Le facteur k est égal au nombre des marques que contient le circuit critique. Dans le cas d'existence de plusieurs circuits critiques, le facteur k est inférieur ou égal au produit de nombres de marques que contient chaque circuit critique.

• L'état du graphe redevient identique à lui même pour la première fois après un temps $k\lambda$

Exemple Dans cet exemple on présente un GET avec la temporisation liée aux transitions qui est mentionnée entre parenthèses

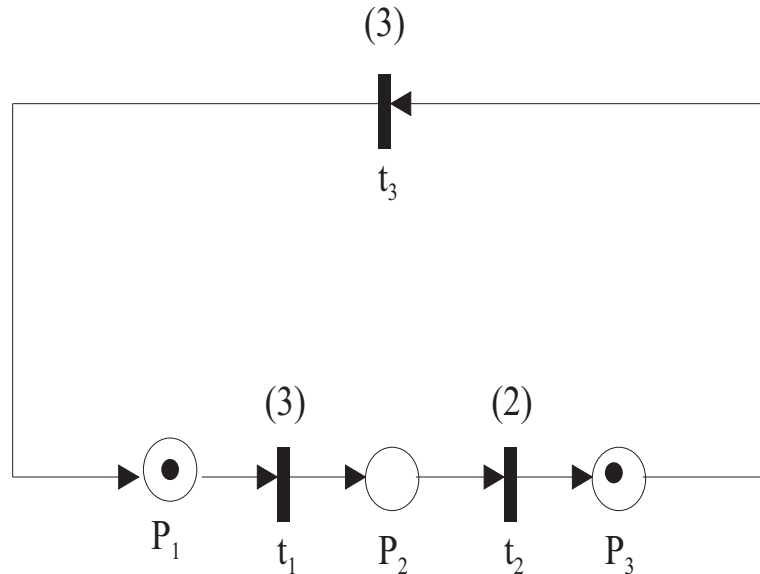


FIG. 3.1: fonctionnement 2-périodique d'un GET

En tenant compte de la propriété de non réentrante des transitions, le calcul donc du temps moyen de cycle est :

$$C^* = \max_{\gamma \in \Gamma} C(\gamma) = \max\left(\frac{8}{2}, 3, 2, 3\right) = 4$$

Γ est l'ensemble des circuits du GET ($\{t_3, P_1, t_1, P_2, t_2, P_3, t_3\}, \{t_1\}, \{t_2\}, \{t_3\}$)

$\{t_3, P_1, t_1, P_2, t_2, P_3, t_3\}$ est le circuit critique du graphe, il contient deux jetons donc $k = 2$. On peut dire que le fonctionnement est 2-périodique. l'équation qui engendre l'évolution de ce système est :

$$x_i(n+2) = x_i(n) + 2.4 \quad i = \{1, 2, 3\}, n \in \mathbb{N}$$

3.1.2 Régime 1-périodique

On travaille toujours sous l'hypothèse de fonctionnement au plus tôt. Dans le cas de régime 1-périodique, une périodicité est retrouvée après qu'on ait franchi toutes les transitions une seule fois. Pour l'exemple de l'atelier flexible, la propriété de 1-périodicité se traduit par le fait que chaque machine se retrouve dans le même état avec le même fonctionnement après 1 coup ou λ unités de temps.

Toutes les propriétés déjà trouvées pour le régime k-périodique restent valables dans le cas de 1-périodique. On reprend l'équation $x_i(n+k) = x_i(n) + k\lambda$, pour $k = 1$

$$x_i(n+1) = x_i(n) + \lambda$$

$$\Rightarrow x_i(n) = x_i(0) + n.\lambda \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

D'après la dernière équation, on voit que le tir d'une transition se fait d'une manière cyclique. Le temps qui sépare deux tirs successifs d'une même transition est égale à λ (λ est la période) unités de temps, c'est pour cela que l'on dit que le fonctionnement est 1-périodique.

Conditions d'obtention d'un fonctionnement périodique

Chretienne.P [2] et Hillion.H [11] citent le théorème suivant de Ramchandani :

• **Théorème[2]** : Le mode de fonctionnement périodique est réalisable pour un GET, si et seulement si, la condition suivante est vérifiée :

$$x_i(0) + \theta_{i+1} \leq x_{i+1}(0) + C.M_0(P_i)$$

$x_i(k)$ date de fin de franchissement de la transition t_i au $k^{\text{ième}}$ tir

θ_i temporisation liée à la transition t_i

M_0 marquage initial du GET

C temps de cycle désiré

On considère un circuit γ d'un graphe qui contient n places et n transitions.

$$\Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} x_1(0) + \theta_2 \leq x_2(0) + C.M_0(P_1) \\ x_2(0) + \theta_3 \leq x_3(0) + C.M_0(P_2) \\ \vdots \\ x_{n-1}(0) + \theta_n \leq x_n(0) + C.M_0(P_{n-1}) \\ x_n(0) + \theta_1 \leq x_1(0) + C.M_0(P_n) \end{array} \right.$$

En fait une sommation sur toutes ces dernières inégalités, et en simplifiant par les $x_i(0)$ pour i varie de 1 à n , on trouve :

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \theta_i &\leq \sum_{i=1}^n C.M_0(P_i) \\ \Rightarrow \sum_{i=1}^n \theta_i &\leq C \sum_{i=1}^n M_0(P_i) \\ \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^n \theta_i}{\sum_{i=1}^n M_0(P_i)} &\leq C \end{aligned}$$

Or $\frac{\sum_{i=1}^n \theta_i}{\sum_{i=1}^n M_0(P_i)} = C(\gamma)$. Ce résultat est donc vérifié pour tout circuit γ du graphe, ce qui nous permet d'annoncer le théorème suivant :

• **Théorème[11]** :

Une condition nécessaire de faisabilité d'un régime périodique est que la période de fonctionnement C vérifie :

$$C \geq C^*$$

où C^* est le maximum des temps de cycle pris parmi tous les circuits élémentaires du graphe :

$$C^* = \max_{\gamma \in \Gamma} (C(\gamma))$$

3.2 Elimination du régime transitoire

Définition : Marquage réalisable[14]

Soit un graphe d'événements temporisé fortement connexe, et soit C_0 un réel positif donné. Le marquage M_0 est dit réalisable pour C_0 si le temps de cycle $C(M_0)$ atteint avec M_0 en régime périodique est inférieur ou égal à C_0

3.2.1 Présentation et formulation du problème

Le marquage initial d'un graphe d'événements temporisés est primordial, puisque la longueur du régime transitoire va dépendre de la distribution des jetons sur les places à l'état initial. C'est dans ce contexte qu'on achemine notre étude sur les régimes périodiques et transitoires dans ce paragraphe. Nous rappelons des résultats établis par Chretienne[2] hillion[11] laftit[14] et on donne une formulation du problème des régimes transitoires.

Comme nous l'avons dit, la répartition des jetons dans un réseau de Petri à l'état initial est déterminante, en effet, un placement judicieux des marques peut nous conduire à une élimination totale de la partie transitoire. Le système, dès son amorçage fonctionne périodiquement.

L'objectif de cette partie est de chercher un marquage initial M_0 (réalisable). Ce dernier donne naissance à un fonctionnement périodique avec un temps de cycle (taux de production) déterminé éventuellement, en minimisant le nombre de jetons (minimisation de ressources). En plus de ce dernier critère, on ajoute les conditions (contraintes) de fonctionnement périodique déjà démontrées antérieurement et on aboutit enfin à une formulation de l'ensemble du problème.

3.2.2 Le critère à optimiser dans le problème

En raison du changement de marquage au cours de l'évolution du graphe d'événements temporisé, le nombre total de jetons change aussi. Ce dernier qui est considéré comme critère (fonction objectif) à minimiser, change de valeur en passant d'un marquage à un autre. On fait donc appel à une des propriétés des GET qui sont les P-invariants.

On sait que :
$$X^t.M_0 = X^t.M$$

X^t : est un vecteur P-invariant de dimension le nombre de places dans le GET.

M_0, M sont deux marquages pour deux états différents

On peut prendre donc comme critère à minimiser la fonction objective suivante :

$$f_X(M_0) = X^t.M_0$$

Cette fonction présente une somme pondérée des jetons.

3.2.3 modèle mathématique du problème

La minimisation du $X^t.M_0$ se fait sous les conditions de fonctionnement périodique, c'est-à-dire que M_0 doit être réalisable pour un temps de cycle déterminé C_0 .

Le problème est modélisé par le système suivant :

$$\Rightarrow P_0 : \begin{cases} \min f_X(M_0) & \text{optimisation des ressources} \\ \text{S.C} & M_0 \in E_{C_0} \quad \text{marquage réalisable} \end{cases}$$

avec E_{C_0} est l'ensemble des marquages réalisables pour C_0 .

D'une autre manière

$$M_0 \in E_{C_0} \Rightarrow \frac{\sum_{i=1}^n \theta_i}{\sum_{i=1}^n M_0(P_i)} \leq C_0$$

ou

$$M_0 \in E_{C_0} \Rightarrow x_i(0) + \theta_{i+1} \leq x_{i+1}(0) + C_0.M_0(P_i)$$

Le problème (P_0) est assimilé donc à un problème de programmation linéaire entière dans lequel on relève deux variables principales :

- Vecteur marquage initial ($M_0(P_1), \dots, M_0(P_n)$)
- Vecteur des instants initiaux de franchissement des transitions ($x_1(0), \dots, x_m(0)$)

Une perspective est d'analyser les différents algorithmes [14] permettant de résoudre ce problème.

3.3 Interprétation d'une étude de régime permanent

Position du problème

On définit la durée totale de production que Korbaa [12] appelle MAKESPAN, comme la somme de deux durées : durée du transitoire et durée du périodique. Le but de cet étude est donc de minimiser le Makespan afin d'optimiser le régime transitoire, tout en optimisant les ressources utilisées. Certes, on a toujours besoin de connaître les dates de tirs des transitions de sorties, c'est pour cela, que l'on implante dans le système un modèle de supervision.

L'étude et la maîtrise des transitoires s'avère donc primordiale, puisque elle va nous aider à une bonne utilisation de la flexibilité d'un système de production. Toutefois, il est nécessaire de limiter l'importance et la durée du régime transitoire pour établir rapidement le régime périodique.

Cet étude est basée sur des travaux déjà réalisés que le lecteur peut trouver dans [12] et [13].

3.4 Évaluation des bornes inférieure et supérieure du Makespan

3.4.1 Notations et hypothèses

On distingue trois types différents de régimes transitoires [12] :

- Le régime transitoire de lancement de la production à partir d'un système initialement à l'arrêt et vide appelé Pré-production. Il a pour mission de lancer la production et d'atteindre le plus vite possible un fonctionnement cyclique.

- Le régime transitoire de fin de production qui se charge de vider le système des pièces manufacturées et d'arrêter la production appelé Post-production. Il a pour mission de vider le système le plus vite possible, en terminant la dernière production.

- Le régime transitoire se situant entre deux régimes permanents gère la fin de la production et, en même temps le début de la suivante. Il est appelé Inter-productions. Aucune pièce n'est produite dans le transitoire pré-production. On a donc :

$$y_i(1) \geq \text{pré-production pour tout } i \quad (\text{notation}(\max, +))$$

3.4.2 Paramètres et critères de performance

Cet étude sera basée sur un critère de performance principal qui est la minimisation du temps global de production (Makespan). Il sera donc pertinent d'optimiser les régimes transitoires. Dans le cas d'existence de plusieurs solutions admettant le même Makespan minimal, on propose de choisir la solution qui maximise la durée du régime permanent selon une commande périodique. Par suite, on se retrouve avec un régime transitoire plus réduit sachant que :

$$\text{Makespan} = \text{durée des transitoires} + \text{durée des permanents}$$

Définition issue du problème d'ordonnancement.

$$\text{Makespan} = \max_i \{y_i(k)\}$$

cette notation est issue des des GET et l'algèbre $(\max, +)$ avec $y_i(k)$ représentant la date de sortie de la dernière pièce de toutes les gammes

Aussi, la date de début du régime permanent est primordiale dans cette étude puisqu'elle n'est pas imposée (fixée). C'est un paramètre libre, qui a un rôle important dans l'optimisation du Makespan.

3.4.3 Évaluation d'une borne inférieure pour le Makespan

Le calcul de cette borne est basé sur la connaissance du temps de cycle qui est noté dans les travaux de Korbaa [12][13] CT . Durant chaque cycle (CT unités de temps) on demande la production d'une pièce de chaque gamme. La notion de cycle a donc un sens différent de celui de l'algèbre des diodes. Si on veut produire N pièces d'une série de gammes, il nous faudra donc N cycles pour réaliser cette commande.

$$\text{Borne-Inf du Makespan} = N \times CT$$

3.4.4 Évaluation d'une borne supérieure pour le Makespan

On propose maintenant un calcul de la borne supérieure du Makespan. On sait que pour produire une pièce pour chaque gamme il nous faut une période. Donc, pour produire les N pièces il faut N cycles auxquels il convient d'ajouter le temps suffisant au lancement de la première pièce pour chacune des gammes. En effet, la production de N produits d'une gamme i , nécessite au plus $n_{t \max}$ cycles pour sortir la première pièce. Par conséquent, une borne-Sup du Makespan est donnée par :

$$\text{Borne-Sup} = (N + \max_i \{n_{t \max}(i)\}) \times CT$$

$n_p(i, t)$: nombre de palettes utilisées par une gamme i à la date t

$n_{t \max}(i) = \max_t(n_p(i, t))$: nombre maximal de palettes que la gamme i utilise

Outre, cette borne supérieure peut être améliorée ou bien optimisée. En effet, on fixe une date t_0 comme date de début du régime permanent pour une gamme.

Avec $n_{p \max}(t_0) = \min_t\{n_{p \max}(t)\}$ est le nombre de palettes minimale utilisées par une gamme i à t_0

La borne-Sup du Makespan est égale à $N \times CT$ plus $n_{p \max}(t_0) \times CT$ pour lancer les $n_{p \max}(t_0)$ palettes utilisées.

$$\text{Borne-Sup optimale} = (N + \min_t\{n_{p \max}(t)\}) \times CT$$

$$\text{Borne inférieure} < \text{Makespan} < \text{Borne supérieure optimale}$$

Cet encadrement va nous permettre de déduire une marge d'optimisation de la durée totale de production.

3.5 Évaluation des bornes inférieure et supérieure du transitoire

Dans cette partie on limite la présentation à l'étude sur le régime transitoire dite Pré-production. L'hypothèse principale que nous allons utiliser consiste à supposer que durant le transitoire de Pré-production, aucune pièce n'est entièrement terminée. Le régime Pré-production ne contient donc aucune réalisation d'aucune gamme.

3.5.1 Calcul d'une borne supérieure pour le Pré-production

On rappelle que la date de début du régime permanent qui est la date de fin de Pré-production constitue un paramètre pour cette étude. On le note DP

$$DP < \min_i(y_i(1)) \quad y_i \text{ étant défini en notation}(\max, +)$$

Autrement dit, la date de fin du régime transitoire (Pré-production) est strictement inférieure à la date de début de la gamme linéaire i .

L'estimation d'une borne supérieure du régime Pré-production est basée sur une méthode dite de MUNIER. Elle effectue une duplication des opérations du régime permanent en amont, dans le régime transitoire en éliminant les opérations inutiles.

$$\text{borne Sup-Pré-production}(DP) = \max_i\{CT \times n_p(i, DP) - DG(i, DP)\}$$

$n_p(i, DP)$ est le nombre de palettes utilisées par la gamme i à la date DP . Il est interprété dans l'approche des graphes d'événements temporisés comme la somme de tous les jetons existant dans le circuit de fabrication de la gamme i .

$DG(i, DP)$ est la date de début de la gamme linéaire

3.5.2 Calcul d'une borne inférieure pour le Pré-production

Pour l'évaluation de la borne inférieure du régime Pré-production, on duplique pour chaque palette p_j les opérations $O(p_j)_{DP}$ à réaliser durant le transitoire. Ensuite, on relève pour chaque palette j la somme des charges de $O(p_j)_{DP}$ notée $Z(O(p_j)_{DP})$

$$\text{Borne Inf-Pré-production}(DP) = \max_j \{Z(O(p_j)_{DP})\}$$

Un encadrement de la durée de Pré-production va nous permettre d'estimer cette durée, et de voir si éventuellement elle peut être significative. Dans les travaux de Korbaa [12][13], ré-ordonnancer les opérations est un moyen pertinent pour optimiser le transitoire dans le cas possible.

Chapitre 4

Interprétation algébrique et réduction du régime transitoire

Un des buts de ce chapitre est d'effectuer la représentation graphique du régime transitoire. On représente donc les vecteurs propres d'une matrice d'évolution d'un système afin de faire une description de leur comportement spectral. Cette représentation se fera dans un domaine qui est l'espace projectif où on pourra donc interpréter les régimes transitoires dans l'algèbre $(\max, +)$ [17][18].

Dans un deuxième temps, on aborde la réduction du régime transitoire afin de donner plus de signification et de représentativité pour le taux de production dans les SDED.

4.1 interprétation graphique du régime transitoire

Position du problème

On rappelle que la théorie spectrale des matrices dans $(\max, +)$ expose un aspect particulier par rapport à la théorie classique. Cet aspect diffère par le fait qu'une matrice irréductible a une seule valeur propre. Cependant, un problème qui se pose fréquemment est la difficulté de chercher les vecteurs propres associés. Mairesse [17][18] propose une description spectrale des matrices. Il consiste à faire une représentation graphique des régimes asymptotiques dans l'espace projectif. L'étude qu'on a fait ici traite des matrices de dimensions 2 sachant qu'elle peut être étendue à d'autres dimensions.

4.1.1 Généralités

Définition [17] : Une solution périodique pour $A \otimes X = \lambda \otimes X$ de période d est l'ensemble des vecteurs $\{x_1, x_2, \dots, x_d\}$ de \mathbb{R}^n qui vérifient :

$$Ax_i = \lambda x_{i+1} \quad i = 1, \dots, d-1, \quad Ax_d = \lambda x_1$$

Remarque : Cette solution périodique de période d pour A , implique l'existence de d vecteurs propres pour A^d . En effet, pour x_1 :

$$\left\{ \begin{array}{l} Ax_1 = \lambda x_2 \\ Ax_2 = \lambda x_3 \\ \vdots \\ Ax_{d-1} = \lambda x_d \\ Ax_d = \lambda x_1 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} Ax_1 = \lambda x_2 \\ A^2 x_1 = \lambda A x_2 = \lambda^2 x_3 \\ \vdots \\ A^{d-1} x_1 = \lambda^{d-1} x_d \\ A^d x_1 = \lambda^d x_1 \end{array} \right.$$

En tenant le même raisonnement, on montre que pour cette solution périodique, les d vecteurs x_i sont des vecteurs propres pour A^d

$$A^d x_i = \lambda^d x_i$$

Dans $\mathbb{P}_{\max}^{n \times n}$, une combinaison linéaire de deux vecteurs est un vecteur propre, c'est à dire , si u_1 et u_2 sont deux vecteurs propres et $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ alors :

$$V = (\alpha_1 \otimes u_1) \oplus (\alpha_2 \otimes u_2)$$

est aussi un vecteur propre.

En particulier, si u est un vecteur propre et $\alpha \in \mathbb{R}$ alors $\alpha \otimes u$ est aussi vecteur propre. Cette dernière propriété va nous permettre de définir l'espace projectif.

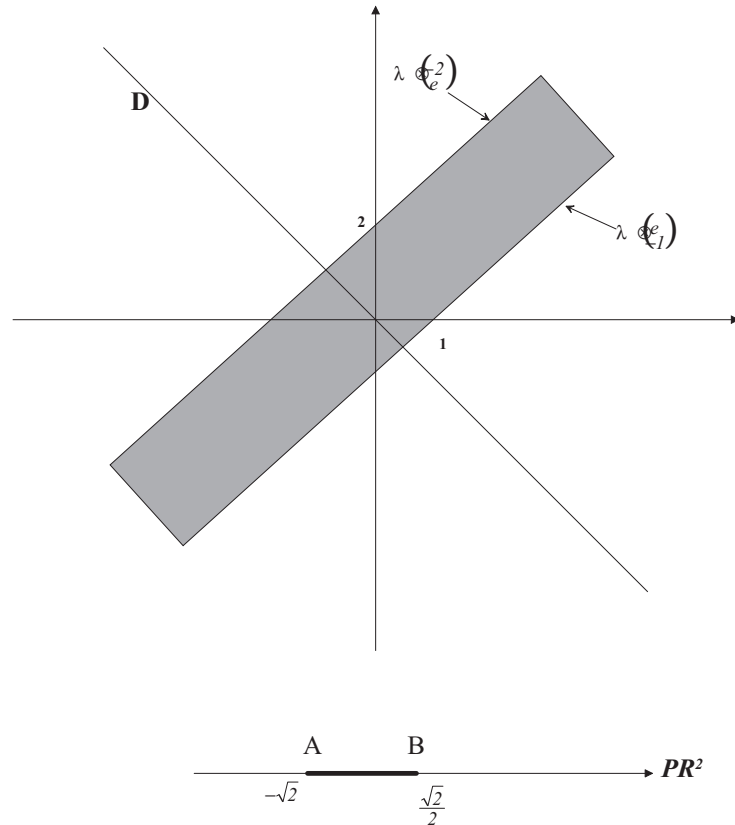
Définition[18] : L'espace projectif $\mathbb{P}\mathbb{R}_{\max}^n$ est défini comme le quotient de \mathbb{R}_{\max} par la relation de parallélisme :

$$u, v \in \mathbb{R}^n \quad u \simeq v \Leftrightarrow \exists a \in \mathbb{R}_{\max} \setminus \{\epsilon\} \text{ tel que } u = a \otimes v$$

La projection canonique Π de \mathbb{R}^n dans $\mathbb{P}\mathbb{R}^n$ peut être interprété d'une façon géométrique. C'est une projection orthogonale sur le hyperspace orthogonal au vecteur $(1 \cdots 1)$. Pour illustrer ces idées, on prend un exemple d'une matrice de dimension 2×2 . Dans $\mathbb{R} \simeq \mathbb{P}\mathbb{R}^2$ on va représenter les vecteurs propres et leur espace d'attraction de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} e & -2 \\ -1 & e \end{pmatrix}$$

On constate facilement que $A^+ = A$, aussi, on peut vérifier que e est la seule valeur propre associée à A . Les vecteurs propres associés sont $X_1 = (e, -1)$ et $X_2 = (-2, e)$ (puisque $A_{11}^+ = A_{22}^+ = e$)

FIG. 4.1: Vecteurs propres de A dans \mathbb{R}^2 et $\mathbb{P}\mathbb{R}^2$

Le segment $[A \ B]$ représente la projection orthogonale sur la droite D (projection canonique) des vecteurs propres X_1, X_2 et de toutes combinaisons linéaires susceptibles des deux vecteurs propres. Dans la figure (4.1), la zone ombrée décrit bien cette combinaison linéaire. Cette nouvelle vision qui introduit l'espace projectif a pour but d'interpréter certains phénomènes, tels les régimes périodiques et les régimes transitoires. Ces derniers seront traités ultérieurement. En effet, dans un cas pratique, on a défini autant de trajectoires différents périodiques que de vecteurs propres et leurs combinaisons linéaires possibles. Le problème de commande d'un système pour aboutir à un tel fonctionnement sera moins contraignant du fait d'avoir une multitude de vecteurs propres et que l'un peut répondre aux contraintes. Cependant, ce choix reste borné entre des limites. Ce dernier critère se manifeste dans notre cas par l'intervalle $[-\sqrt{2} \ \frac{\sqrt{2}}{2}] = [A \ B]$. A et B représentent respectivement la projection de des vecteurs propres extrêmes X_1 et X_2

4.1.2 Régimes transitoires

On focalise notre étude maintenant sur les régimes transitoires des matrices. Ces dernières présentent des propriétés différentes, soit elles sont stationnaires ou bien elles ont des régimes transitoires qui peuvent être longs ou courts. Aussi, la durée du transitoire

peut être extrêmement longue en raison de la nature de la matrice considérée.

On considère l'exemple suivant :

$$A = \begin{pmatrix} e & -1 \\ -1 & n \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad 0 < n \ll 1$$

$$A^2 = \begin{pmatrix} e & -1 \\ -1 & \max(-2, -2 \times n) \end{pmatrix} \quad A^k = \begin{pmatrix} e & -1 \\ -1 & \max(-2, -k \times n) \end{pmatrix}$$

cas 1 : $k < \lfloor \frac{2}{n} \rfloor + 1$

$$A^k = \begin{pmatrix} e & -1 \\ -1 & -k \times n \end{pmatrix}$$

cas 2 : $k \geq \lfloor \frac{2}{n} \rfloor + 1$

$$A^k = \begin{pmatrix} e & -1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$$

On rappelle que pour une matrice irréductible A , après un certain rang M ($m \geq M$) on atteint un fonctionnement périodique qui se traduit par :

$$A^{m+d} = \lambda^d \otimes A^m \quad \text{avec} \quad \lambda \text{ est une valeur propre}$$

Si on considère u un vecteur d'état initial quelconque, on peut donc écrire :

$$A^{m+d} \otimes u = \lambda^d \otimes A^m \otimes u$$

$$A^d \otimes \underbrace{A^m \otimes u}_X = \lambda^d \otimes \underbrace{A^m \otimes u}_X$$

X est donc un vecteur propre pour la matrice A^d pour la valeur propre λ^d . Autrement dit, $A^m \otimes u$ converge vers un vecteur propre (à une constante près) après un certain rang (temps fini).

On peut conclure que $\lim_m \prod(A^m u) \rightarrow \prod(X)$ dans un cas général.

Cas particulier :

Reprenons notre exemple. $V = (e, -1)^t$ est le vecteur propre associé à la matrice A , considérons donc un vecteur d'état initial u (par exemple $u = (e, 1)^t$) différent du vecteur propre v . Nous avons $\prod(A(e, 1)^t) = \prod(1, 1 - n)^t$, $\prod(A^2(e, 1)^t) = \prod(e, 1 - 2 \times n)^t, \dots$ jusqu'à ce que $\prod(A^m(e, 1)^t) = \prod(e, -1)^t$. Ceci va nous permettre de visualiser graphiquement l'évolution du système dans un fonctionnement transitoire avant d'atteindre un régime périodique comme le montre la figure (4.2). L'évolution est représentée le long du droite au lieu d'un espace à deux dimensions.



FIG. 4.2: Évolution d'un état du système dans le transitoire pour atteindre un régime périodique

Cette représentation montre que la durée du régime transitoire est à l'ordre de $\lceil \frac{2}{n} \rceil$ puisque après cette valeur ($m \geq \lceil \frac{2}{n} \rceil$) $A^m u$ converge vers un vecteur propre et par la suite le système entame son fonctionnement 1-cyclique. Le fonctionnement périodique et transitoire peuvent donc être simplement visualisés.

4.2 Décomposition et réalisation des séries périodiques

Objectif : représentation d'un système d'événements par une série rationnelle dans un dioïde complet. Décomposition de cette dernière afin d'aboutir à une présentation plus réduite [20]. On remarque que l'auteur ne choisit pas de manière spécifique l'hypothèse de non décroissance des séries temporelles.

Préliminaires :

$\overline{\mathbb{R}}_{max}$ est dioïde complet muni des opérateurs max et +.

$\overline{\mathbb{R}}[X]$ est le dioïde des polynômes à une indéterminée X . $\overline{\mathbb{R}}[[X]]$ est le dioïde des séries formelles à une indéterminée X .

Définition[20] : Une série $s(X) \in \overline{\mathbb{R}}[[X]]$ est dite périodique s'il existe deux entiers N, c (avec $c > 0$) et $\lambda \neq \epsilon$ tels que :

$$s_{j+c} = \lambda s_j, \forall j \geq N$$

Proposition [20] : Une série $s(X)$ est périodique si et seulement s'il existe deux polynômes t, q dans $\overline{\mathbb{R}}[X]$ et deux entiers N, c tels que :

$$s(X) = t(X) \oplus X^N q(X) (\lambda X^c)^* \quad \text{deg}(q) < c$$

La dernière proposition montre que toute série périodique peut se mettre sous la forme d'une somme (au sens de l'algèbre des dioïdes) de deux parties, une transitoire ($t(X)$) et l'autre stationnaire ($X^N q(X) (\lambda X^c)^*$)

Décomposition d'une série périodique

Définition Soit $s(X)$ une série périodique avec $N = val(s)$, on appellera rang de $s(X)$

le plus petit entier c tel que :

$$\lambda R_{N+1}(X) = R_{N+c+1}(X) \quad \text{avec} \quad \lambda \neq \epsilon$$

Définition [20] Soit une série stationnaire $s(X) = X^N q(X)(\lambda X^c)^*$, on appelle alors régime stationnaire le nombre $\lambda^{1/c}$.

Le but de ce paragraphe est de décomposer la partie transitoire de la série de départ en séries périodiques.

Mathématiquement, cela se traduit par la possibilité de trouver les deux polynômes : $v(X), u(X)$ avec un entier $\nu (0 < \nu < N)$ et $\mu \neq \epsilon$ tels que :

$$t(X) \oplus X^N q(X)(\lambda X^c)^* = v(X) \oplus X^{N-\nu-1} u(X)(\mu X^\nu)^* \oplus X^N q(X)(\lambda X^c)^*$$

Le degré du transitoire $v(X)$ sera toujours inférieure à $N - \nu - 1$. Le régime stationnaire des ces nouvelles sous systèmes (nouvelles séries périodiques) est inférieur au régime stationnaire de la série du départ.

La décomposition est basée normalement sur des procédures que nous nous aborderons pas ici. Le but est de chercher des nouvelles séries où N et c seront minimaux, donc le système aura écriture plus courte avec un régime transitoire réduit par rapport à la série initiale.

Réalisation d'une série périodique [20]

Après une décomposition de la série $s(X)$ en une somme de séries périodiques, l'objectif sera de la réaliser grâce aux matrices A, B, C . $s(X)$ aura la forme suivante :

$$s(X) = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} C A^k B X^k$$

Les matrices A, B, C auront toutes une forme appelé "forme normale" ou forme de "Jordan". Chaque matrice est composée de n matrices sur sa diagonale. Chacune de ces dernières engendre la partie stationnaire du sous système correspondant.

4.3 Problématique de réduction du régime transitoire

4.3.1 Position du problème

Nous avons défini précédemment le taux de production, et rappelé son importance pour la caractérisation de la moyenne de la production des systèmes industriels. Plusieurs approches et méthodes ont été développé afin d'augmenter ce critère. Parmi ces techniques, on trouve celles qui utilisent les GET comme modèle, qui est à la fois graphique et mathématique. Cependant, ces dernières risquent de limiter la représentativité de ce taux de production car leur mise en service ou en marche passe par un transitoire.

Le but dans cette partie, est de donner une solution à cet objectif. Le problème est de réduire le comportement transitoire tout en gardant le taux de production.

4.3.2 Préalable

Nous rappelons l'effet Bezout bien connu [7].

• **Théorème : Effet Bezout.** Pour n_1 et n_2 premiers entre eux, il existe un entier positif m tel que tout entier $n \geq m$ soit obtenu comme combinaison de multiples entiers positifs de n_1 et n_2

$$\exists c_1, c_2 \text{ dans } \mathbb{N}, \forall n \geq m \quad n = c_1 n_1 + c_2 n_2$$

C'est l'effet Bezout.

Notations On définit A_λ par $A_{ij,\lambda} = A_{ij} - \lambda$ avec λ la valeur propre de A .

4.4 Etude

Hypothèses de la suite de l'étude

- On ne peut pas commander toutes les transitions du GET
- Cette étude est limitée au cas d'une cyclicité de valeur unité ($c = 1$)

Notre objectif est donc réduire le comportement transitoire, en tenant compte des hypothèses citées ci-dessus.

Dans un premier temps il faut calculer d'abord la durée du transitoire. Pour réaliser cette première étape on s'appuie sur les résultats importants suivants :

- **Propriété :** Tout circuit du graphe critique est critique

• **Théorème[7] :** Pour une cyclicité unité, le poids $A_{ij,\lambda}^k$ du chemin de longueur k allant de j à i est constant à partir d'un certain rang.

Dire que $A_{ij,\lambda}^k$ est constant à partir d'un certain rang r_{ij} va nous permettre d'estimer la longueur du transitoire relative au couple de sommets i et j . Le but est de chercher ce rang r_{ij} pour chaque couple de sommets (i, j) du graphe.

On distingue trois cas possibles :

4.4.1 Chemin va d'un sommet du graphe critique à lui même

• **Proposition 1** : La durée du chemin allant de j critique à $i = j$ est égale à 0 (e dans $(\max, +)$) à partir d'un certain rang r_{jj} . Ce rang est de l'ordre du nombre de transitions (sommets) du graphe critique associé auquel il faut ajouter l'effet Bezout.

• **Preuve** :

On a déjà supposé que la cyclicité $C = 1$ (les $\text{card}(c_i)$ sont premiers entre eux) qui est le PGCD des longueurs des circuits critiques puisque la structure est fortement connexe.

Soit un sommet i du graphe critique, on peut trouver un circuit α (chemin de j à j) qui passe par j et rencontre tous les circuits critiques. Et grâce à l'effet de Bezout :

pour tout $n \geq m$ assez grand
$$n = \text{card}(\alpha) + n_1 \text{card}(c_1) + \dots + n_k \text{card}(c_k)$$

Le circuit qui passe par j de longueur n est critique puisqu'il appartient au graphe critique. Son poids est égal à 0 (e) pour une longueur égale au moins $\text{card}(\alpha) + m$. m traduit l'effet Bezout.

On déduit que le rang r_{jj} est :

$$r_{jj} = \text{card}(\alpha) + \text{"effet Bezout"}$$

\Rightarrow Le nombre d'événements du transitoire relatif à $j \leq r_{jj}$

$$\Rightarrow \forall n \geq r_{jj}, \quad A_{jj,\lambda}^n = 0$$

4.4.2 Chemin va d'un sommet du graphe critique à un sommet quelconque

• **Proposition 2** : La durée du chemin allant de j critique à i quelconque est égale au maximum des durées des chemins de longueurs quelconque à partir d'un certain rang r_{ij} . Ce rang est égal au plus, à la somme de la longueur du chemin de j à i de poids maximal et de la longueur minimale, et d'autre part du rang r_{jj} du sommet j .

• **Preuve** :

Soit k_0 tel que :

$$A_{ij,\lambda}^{k_0} = \max_k A_{ij,\lambda}^k = \bigoplus_k A_{ij,\lambda}^k$$

k_0 est pris comme la longueur minimal du chemin de j à i tel que le poids de ce chemin est égal au maximum des poids des chemins de j à i de longueur quelconque.

Le poids du chemin de j à i de longueur $k_0 + k$ est supérieur ou égal à la somme de poids du chemin de j à i de longueur k_0 et du poids du chemin de j à j de longueur k car on impose un chemin particulier dans l'ensemble des chemins possibles. De plus pour k assez grand, le poids du chemin de j à j de longueur k est nul.

Et par conséquent, le poids du chemin de j à i de longueur $k + k_0$ est supérieur ou égal à $A_{ij,\lambda}^{k_0}$ qui est égal au maximum des poids des chemins de j à i de longueur quelconque.

En revanche, le poids d'un chemin particulier de longueur $k + k_0$ est inférieur ou égale au maximum des poids des chemin de longueur quelconque.

On déduit que le poids du chemin de longueur $k + k_0$ est égale au maximum des poids des chemins de longueur quelconque pour k supérieur ou égal à $k_0 + r_{jj}$

On déduit que le rang r_{ij} est :

$$r_{ij} = r_{jj} + k_0 \quad \text{avec} \quad k_0 = \min_{\gamma \in \Gamma} \{ |\gamma|_l / |\gamma|_\omega = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} A_{ij,\lambda}^k \}$$

- Γ ensemble des chemins allants de j à i
- $|\gamma|_l$ longueur du chemin γ
- $|\gamma|_\omega$ poids du chemin γ

$$\begin{aligned} & \text{le nombre d'événements du transitoire} \\ \Rightarrow & \leq k_0 + r_{jj} \\ & \text{relatif au couple de sommets}(i, j) \end{aligned}$$

Proposition d'une solution pour réduire le transitoire pour les deux cas précédents

Dans les deux cas précédents, on relève une estimation de la longueur du transitoire. Elle dépend du nombre de sommets du graphe critique associé au point j et du critère "effet Bezout". En réduisant ce dernier paramètre on aboutit à une réduction du régime transitoire. Pour réaliser cette opération, on implante des boucles sur le graphe critique puisque l'effet Bezout est lié aux circuits attachés au graphe critique. La démarche de cette solution est illustrée à travers l'exemple suivant :

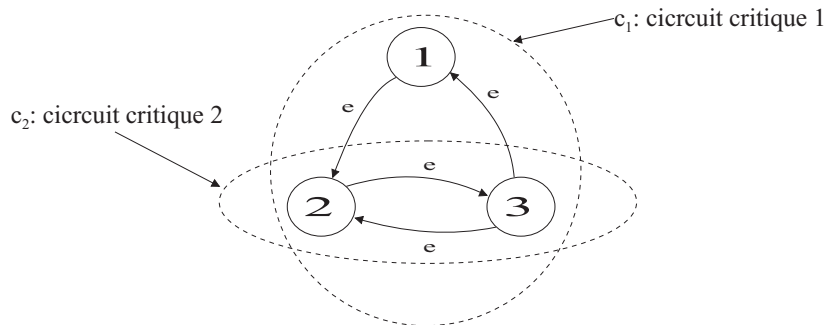


FIG. 4.3: graphe initial

Estimation du r_{ij} pour tous les sommets :

On commence par le chemin allant de 1 à 1, dans ce cas le circuit α est : (1, 2, 3) qu'on le note $\alpha_1 \Rightarrow \text{card}(\alpha_1) = 3$

et puisque $\text{card}(C_1)$ et $\text{card}(C_2)$ sont premiers entre eux \Rightarrow effet Bezout

$\exists n_1, n_2$ deux entiers tels que : $\text{card}(\alpha_1) + n_1 \text{card}(C_1) + n_2 \text{card}(C_2)$ représente la longueur d'un chemin dont le poids est nul (chemin critique)

On constate aisément que cette propriété est vérifiée pour un chemin de longueur 5
 $\Rightarrow r_{11} = 5$

Pour le chemin allant de 2 à 2 : le circuit α_2 est : (2, 3), on le note $\alpha_2 \Rightarrow r_{22} = \text{card}(\alpha_2) + n_1 \text{card}(C_1) + n_2 \text{card}(C_2) = 2$ ce qu'on peut constater facilement sur le graphe.

De même pour $r_{33} = 2$

Chemin de 1 à 2 : $r_{21} = r_{11} + k_0 = 5 + 1 = 6$ on conclut donc la matrice qui

Chemin de 2 à 1 : $r_{12} = r_{22} + k_0 = 2 + 2 = 4$ représente les r_{ij} initiales.

Chemin de 1 à 3 : $r_{31} = r_{11} + k_0 = 5 + 2 = 7$ théoriques

Chemin de 3 à 1 : $r_{13} = r_{33} + k_0 = 2 + 1 = 3 \Rightarrow B_{th} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 6 & 2 & 3 \\ 7 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Chemin de 2 à 3 : $r_{32} = r_{22} + k_0 = 2 + 1 = 3$

Chemin de 3 à 2 : $r_{23} = r_{33} + k_0 = 2 + 1 = 3$

Les r_{ij} qu'on vient de calculer représentent une estimation de l'ordre de la longueur du transitoire relative à chaque couple de sommet.

Or une simulation pratique a donné les résultats qui sont regroupés dans la matrice suivante :

$$\Rightarrow B_{si} = \begin{pmatrix} 5 & 4 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 4 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

Implantation des boucles sur le graphe critique :

On ajoute une boucle sur le sommet 2 de durée nul (e). Le graphe devient donc :

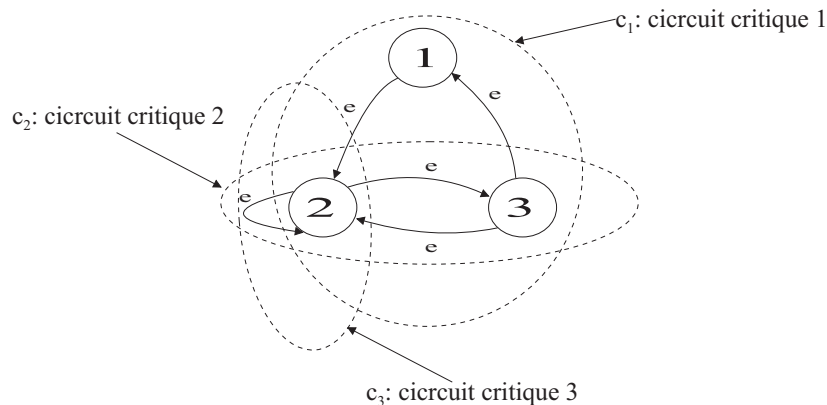


FIG. 4.4: graphe modifié

En réévaluant les r_{ij} en suivant le même principe utilisé précédemment, on trouve :

chemin de 1 à 1 $r_{11} = \text{card}(\alpha_1) + n_1 \text{card}(C_1) + n_2 \text{card}(C_2) + n_3 \text{card}(C_3) = 3 + 0 + 0 + 0 = 3$

Chemin de 2 à 2, dans ce cas il existe un chemin $\alpha_3 = (2) \Rightarrow r_{22} = \text{card}(\alpha_3) + n_1 \text{card}(C_1) + n_2 \text{card}(C_2) + n_3 \text{card}(C_3) = 1 + 0 + 0 + 0 = 1$

Chemin de 3 à 3 $r_{33} = \text{card}(\alpha_2) + n_1 \text{card}(C_1) + n_2 \text{card}(C_2) + n_3 \text{card}(C_3) = 2 + 0 + 0 + 0 = 2$

Chemin de 1 à 2 : $r_{21} = r_{11} + k_0 = 3 + 1 = 4$

Chemin de 2 à 1 : $r_{12} = r_{22} + k_0 = 1 + 2 = 3$ on conclut donc la matrice qui

Chemin de 1 à 3 : $r_{31} = r_{11} + k_0 = 3 + 2 = 5$ représente les r_{ij} après

Chemin de 3 à 1 : $r_{13} = r_{33} + k_0 = 2 + 1 = 3$ modification du graphe

Chemin de 2 à 3 : $r_{32} = r_{22} + k_0 = 1 + 1 = 3 \Rightarrow D_{th} = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 \\ 4 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \end{pmatrix}$

Chemin de 3 à 2 : $r_{23} = r_{33} + k_0 = 2 + 1 = 3$

En faisant une comparaison avec les résultats trouvés avant l'implantation de la boucle, on voit bien la réduction de nombres d'événements de transitoire. En effet, la matrice suivante décrit la différence entre les r_{ij} avant et après l'implantation de la boucle dans

le graphe $\Rightarrow E_{th} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

La simulation pratique a donné le résultat suivant :

$$\Rightarrow D_{si} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad E_{si} = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

On constate que la simulation montre une amélioration du transitoire, et que sur cet exemple le résultat pratique est supérieure à celui théorique. Dire que ce constat peut être généralisé reste une perspective à travailler.

La dernière étape est donc de revenir au réseau de petri normalisé.

4.4.3 Chemin va d'un sommet n'appartient pas au graphe critique à un sommet quelconque

• **Proposition 3** : La durée du chemin allant de j non critique à i quelconque est égale à une constante à partir d'un certain rang r_{ij} . La durée finale du chemin est la durée du chemin de poids maximal et de longueur minimale passant par un circuit du graphe critique.

• **Preuve** :

Pour cette preuve, on laisse le soin au lecteur de consulter les grandes lignes de la démonstration au [7]

Outre, l'ordre de grandeur de la dimension du régime transitoire r_{ij} est fonction de la valeur relative entre

- les chemins de j à i passant par les circuits du graphe critique
- les chemins de j à i n'utilisant pas les circuits du graphe critique

Remarque :

Cette deuxième composante peut être à l'origine d'une valeur élevée du transitoire même pour un système de dimensions réduite.

Proposition d'une solution pour réduire le transitoire pour ce dernier cas

Dans ce cas, les circuits non critiques jouent un rôle déterminant car ils sont à l'origine des transitions importants. C'est pour cela que la solution doit les prendre en compte. On a donc deux possibilités :

- soit transformer les circuits non critiques en des circuits critiques par une simple augmentation des valeurs des temporisation
- soit réduire le temps moyen de production des circuits non critiques en réduisant les valeurs des temporisations.

L'exemple suivant nous montre bien la démarche de cette solution :

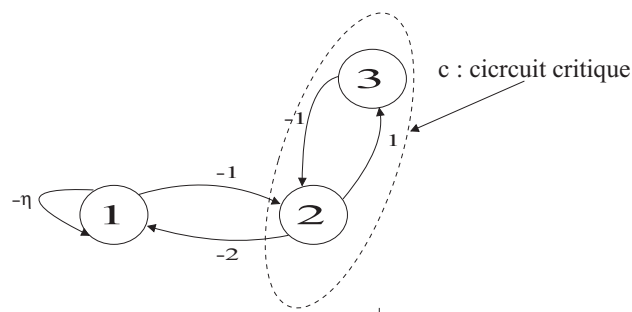


FIG. 4.5: Graphe

Chemin de 1 vers 1, deux cas se présentent :

Cas 1 : utilisant un chemin passant par le circuit critique C

Cas 2 : utilisant un chemin qui ne passe pas par le circuit critique C

Les résultats de calcul du chemin de poids maximum et de longueur quelconque sont présentés dans le tableau suivant :

L	chemin ne passe pas par C	chemin passe par C	poids maximum
1	$-\eta$	ϵ	
2	$-2\eta \oplus (-3)$	(-3)	
3	$-3\eta \oplus (-3) - \eta$	ϵ	
4	$-4\eta \oplus (-6) \oplus (-3 - 2\eta)$	$(-6) \oplus (-3)$	$-4\eta \oplus (-3)$
5	$-5\eta \oplus (-6 - \eta) \oplus (-3 - 3\eta)$	$-3 - \eta$	$-5\eta \oplus (-3 - \eta)$

L est la longueur du chemin.

On continue notre raisonnement de la même manière pour des valeurs de L plus élevées. Pour une valeur petite de η , et en comparant les valeurs de poids des chemins dans les deux cas :

$$\Rightarrow \frac{3}{\eta} \leq L$$

Pour $\eta = 0.1 \Rightarrow L = 30$ le régime périodique début à 30

Si on prend $\eta = 1 \Rightarrow L = 4$ le régime périodique début à 4, on a réalisé une réduction de l'ordre de longueur du transitoire grâce à une diminution de la valeur de temporisation du circuit non critique.

Si on prend $\eta = 0 \Rightarrow L = 1$ le régime périodique début à 1, on a réalisé une réduction de l'ordre de longueur du transitoire grâce à une augmentation de la valeur de temporisation du circuit non critique (transformer les circuits non critiques en des circuits critiques).

Conclusion

Les trois dernières propositions nous ont permis de démontrer le résultat énoncé dans le dernier théorème. Il nous illustre que le poids d'un chemin de longueur k est constant à partir d'un certain rang. Aussi, on a pu relevé des trois dernières propositions une estimation d'une borne supérieure du régime transitoire pour chaque couple de sommets. Ainsi que présenter une solution dans chaque cas.

Conclusion

Le travail présenté dans le cadre de ce mémoire s'intéresse à l'étude des régimes périodiques et transitoires par l'algèbre $(\max, +)$ et les GET. Un premier travail était de faire une synthèse bibliographique. En effet, on a apporté un ensemble cohérent de définitions et de propriétés relatives à l'algèbre des dioïdes et les réseaux de Petri. Parler aussi de la théorie des graphes et des matrices était important, puisque elle était utilisée comme support ce qui nous a facilité la tâche d'analyse des GET qui modélisent certains SDED.

Connaître l'état initial du système et avoir un contrôle sur toutes les transitions peut aider à résoudre le problème d'imposer un fonctionnement périodique depuis l'état initial. Dans le chapitre trois on a pu reformuler ce problème basé sur un travail fait par Laftit [14].

Dans le chapitre quatre, la réduction de l'ordre de longueur du régime transitoire est considéré dès le départ comme un objectif principal. Nous avons donc pu proposer des solutions à ce problème. Cette approche est basée sur une analyse du théorème fondamental sur le fonctionnement cyclique après un transitoire fini des SDED.

Cette étude est une première ouverture sur une problématique nécessitant de plus amples travaux. Une première perspective peut être d'améliorer les algorithmes existants répondant au problème de fonctionnement cyclique avec un taux de production donné (paragraphe 3.2.3). Une deuxième perspective peut être d'affiner la détermination de la longueur du transitoire au sens $(\max, +)$ ou au sens de l'ordonnancement (Korbaa). Enfin, plus généralement répondre à des spécifications que doivent remplir le système en modifiant par exemple la structure, est également une suite intéressante à cette étude.

Annexe A

Annexe

A.1 Résiduation

Dans cette partie, on étudie la résiduation de certaines applications dans un cas linéaire, puis dans un cas matriciel. On exploite donc les résultats déjà cités pour trouver ou caractériser leurs applications résiduées.

A.1.1 Résiduation des applications du type : $x \rightarrow a \otimes x$ et $x \rightarrow x \otimes a$

On considère donc les applications L_a et R_a , définies sur un dioïde complet $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ par :

$$L_a : x \rightarrow a \otimes x \quad ; \quad R_a : x \rightarrow x \otimes a$$

Notre but est de déterminer L_a^\sharp et R_a^\sharp , donc elles doivent vérifier les conditions de résiduation :

- L_a^\sharp et R_a^\sharp sont semi-continues inférieure, en effet elles sont définies sur un dioïde complet, et de plus, puisque \otimes est distributive à gauche par rapport à \oplus , on voit aisément que pour tout $B \subseteq \mathcal{D}$

$$L_a\left(\bigoplus_{x \in B} x\right) = a \otimes \left(\bigoplus_{x \in B} x\right) = \bigoplus_{x \in B} (a \otimes x) = \bigoplus_{x \in B} L_a(x)$$

de même pour R_a :

$$R_a\left(\bigoplus_{x \in B} x\right) = \left(\bigoplus_{x \in B} x\right) \otimes a = \bigoplus_{x \in B} (x \otimes a) = \bigoplus_{x \in B} R_a(x)$$

- $L_a(\epsilon) = R_a(\epsilon) = \epsilon$. On peut le constater facilement du fait que ϵ est absorbant pour \otimes .

De suite L_a et R_a sont résiduables, on leur attribue chacune son application résiduée, notées respectivement de la manière suivante :

$$L_a^\sharp(x) = a \setminus x = \frac{x}{a} \qquad R_a^\sharp(x) = x / a = \frac{x}{a}$$

A.1.2 Résiduation dans le cas matriciel :

Dans le cas où on travaille sur des diodes matriciels, toutes les propriétés des applications L_a , R_a restent valables, en prenant en considération les définitions suivantes :

$$\begin{array}{ll} L_A : \mathcal{D}^{n \times n} \rightarrow \mathcal{D}^{n \times n} & R_A : \mathcal{D}^{n \times n} \rightarrow \mathcal{D}^{n \times n} \\ X \rightarrow AX & X \rightarrow XA \end{array}$$

•**Théorème** : Soit \mathcal{D} complet et $\mathcal{D}^{n \times n}$ le diode des matrices à valeurs dans \mathcal{D} . Soit $B \in \mathcal{D}^{n \times n}$, la plus grande solution de $AX \preceq B$ est la matrice $L_A^\sharp(B) \in \mathcal{D}^{n \times n}$, notée également $\frac{B}{A} = A \setminus B$. Les valeurs de cette matrice sont données par la relation

$$(A \setminus B)_{ij} = \bigwedge_{l=1}^n A_{li} \setminus B_{lj}.$$

On applique le même raisonnement dans le cas où $XA' \preceq B'$ avec une plus grande solution qui est la matrice $R_{A'}^\sharp(B')$, notée aussi $\frac{B'}{A'} = B' \not\! / A'$. Les éléments de cette matrice sont donnés par :

$$(B' \not\! / A')_{ij} = \bigwedge_{l=1}^n B'_{il} \not\! / A'_{jl}$$

Bibliographie

- [1] Baccelli.F, Cohen.G, Olsder.G.j, and Quadrat.j.p (1992). *Synchronisation and Lineariry : An Algebrea for Discrete Event Systems*. Wiley and Sons.
- [2] Chretienne.P (1984). *Les réseaux de Petri temporisés*. Thèse d'état, Université P. et M.Curie Paris VI.
- [3] Cohen.G (1995). *Théorie algébrique des systèmes à événements discrets*. Polycopié de cours. INRIA, Rocquencourt.
- [4] Cohen.G (1998). *Residuation and Applications*. 26^{eme} école de printemps d'informatique théorique : *Algèbres Max-Plus et Applications en Informatique et Automatique*.
- [5] Cottenceau.B (1999). *Contribution à la commande de systèmes à événements discrets : synthèse de correcteurs pour les graphes d'événements temporisés dans les dioïdes* . Thèse de doctorat, Université d'Angers.
- [6] David.R, and Alla.H (1989). *Du grafcet aux réseaux de petri*. Hermès, Paris.
- [7] Declerck.P, and Guihur.R (1999). *Transitoires et comportements périodiques*. MSR.
- [8] Ferrier.J.L (2001). *Modèles et systèmes*. Polycopie de cours DEA AIA. Ecole centrale de Nantes.
- [9] Gaubert.S (1999). *Introduction aux systèmes dynamiques à événements discrets*. Policopié de cours. INRIA, Rocquencourt.

- [10] Gondran.M, and Minoux.M (1979). *Graphes et algorithmes*. Eyrolles, Paris. Engl. transl. *Graphs and Algorithms*, Wiley, (1984).
- [11] Hillion.H (1989). *Modélisation et analyse des systèmes de production discrets par les réseaux de Petri temporisés*. Thèse de doctorat, Université P et M.curie Paris VI.
- [12] Korbaa.O (1998). *Commande cyclique des systèmes flexibles de production manufacturière à l'aide des réseaux de Petri : De la planification à l'ordonnancement des régimes transitoires*. Thèse de doctorat, Université de Lille.
- [13] Korbaa.O, Camus.H, Gentina.J.C (1997). *Transient state study for cyclic schedules : Bounds and optimisation*. Proceedings of ISATP (IEEE), Marona del Rég, USA.
- [14] Laftit.S (1991). *Graphes d'événements déterministes et stochastiques : application aux systèmes de production*. Thèse de doctorat, Université Dauphine Paris IX.
- [15] Lahaye.S (2000). *Contribution à l'étude des systèmes linéaires non stationnaires dans l'algèbre des dioïdes*. Thèse de doctorat, Université d'Angers.
- [16] Mihaela.M, and Ferrier.J.L (1994). *Réseaux de petri et algèbre $(max, +)$: deux approches pour l'étude des systèmes à événements discrets*. RAIRO APII, Vol 28, n°4.
- [17] Mairesse.J (1993). *A Graphical representation for matrices in the $(max, +)$ algebra*, Projet Mistral. INRIA, Sophia Antipolis.
- [18] Mairesse.J (1995). *A Graphical approach of the spectral theory in the $(max, +)$ algebra* . IEEE Transaction on automatic control. Vol 40, n°10, October 1995.
- [19] Proth.J.M, and Xie.X (1994). *Les réseaux de petri pour la conception et la gestion des systèmes de production*. Masson.
- [20] Prou.J.M (1997). *Etude de quelques propriétés des semimodules sur \mathbb{R}_{max} , et applications à la théorie de la commande des systèmes à événements discrets*.

Thèse de doctorat, Université de Nantes.

- [21] Wagneur.E (1996). *Algèbre Max-Plus : une introduction pour piétons*. Séminaire du LAN.