



Université d'Angers

**I.S.T.I.A.**  
**Institut des Sciences et Techniques de  
l'Ingénieur d'Angers**



**Ecole Centrale de  
Nantes**

**D.E.A. Automatique et Informatique Appliquée**

**Rapport bibliographique**  
**sur l'études des systèmes fluides (Continus)**

**Sous la direction de :**  
**Jean-Louis BOIMOND**

**Présenté par :**  
**Badie GHORAB**

**Laboratoire d'Ingénierie des  
Systèmes Automatisés**

**Mai 2002**



## REMERCIEMENTS

Je tiens à remercier Monsieur le Professeur Jean-Luis FERRIER, Directeur du laboratoire LISA, de m'avoir accueilli dans son Laboratoire pour le stage de DEA.

Je remercie Monsieur Jean-Louis BOIMOND, pour m'avoir accepté au sein de son équipe de recherche et qui m'a permis de suivre le DEA AIA, et pour sa disponibilité et son soutien pour la réalisation de ce travail.

Je remercie les thésards, M.K. DIDI, M. LHOMMEAU, H. BEKKOUCHE, M. ABDELILAH et le Dr A. YAHYA, pour leur conseils et pour l'aide qu'ils m'apportent, ainsi que mes collègues de DEA du LISA pour leurs soutient et l'ambiance qu'ils font régner dans le bureau qui permet de travailler dans un cadre agréable.

## Table des matières

<b>Introduction générale</b> .....	1
<b>Chapitre 1 Réseaux de Petri</b>	
1.1. Introduction.....	2
1.2. Définitions.....	2
1.3. Approche des RdPC selon R.David et H.Alla.....	3
1.3.1. Réseaux de Petri continus temporisés.....	3
1.3.1.1. Modélisation d'un système continu par un RdPC.....	3
1.3.1.2. Approximation d'un système discret par un RdPC.....	4
1.3.1.3. Vitesse de franchissement d'une transition.....	5
1.3.1.4. Calcul des vitesses de franchissement des transitions validées à l'instant $t$ .....	7
<b>Chapitre 2 Outils algébriques</b>	
2.1. Introduction aux dioïdes et moduloïdes.....	11
2.1.1. Définitions.....	11
2.1.2. Structures ordonnées d'un dioïde.....	12
2.2. Résolution d'équations dans un dioïde.....	14
2.2.1. Application isotones et continues.....	14
2.2.2. Etude de l'équation $f(x) = b$ .....	15
2.2.3. Etude de l'équation $f(x) = x$ .....	16
2.3. Propriétés spectrales et asymptotiques des matrices.....	16
<b>Chapitre 3 Théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes</b>	
3.1. Signaux et systèmes.....	18
3.2. Représentation entrée-sortie des systèmes linéaires.....	20
3.2.1. Réponse impulsionnelle.....	21
3.2.1.1. Représentation des systèmes.....	21
3.2.2. Les fonctions monotones non-décroissantes.....	22
3.2.3. Fonction de transfert des systèmes stationnaires.....	23
3.2.3.2. Transformées particulières ( $\gamma$ et $\delta$ ).....	24
3.2.3.3. Cas des systèmes multi-variables.....	25
3.2.4. Représentation d'état.....	26
3.2.4.1. Equations fondamentales.....	26
3.2.4.2. Solution de l'équation d'état.....	27
3.2.4.3. Relation entrée-sortie, expression de la réponse impulsionnelle.....	28
3.2.5. Compositions de systèmes linéaires.....	28
3.2.5.2. Composition parallèle et série.....	28
3.2.5.3. Mise en feedback.....	30
<b>Chapitre 4 Classe des systèmes (min,+) linéaires :</b>	
4.1. Un système continu et son analogue discret.....	31
4.1.1. Equations dynamiques.....	31
4.1.2. Analogue discret.....	32
4.1.3. Mélangeur.....	33
4.2. Systèmes élémentaires.....	33
4.2.1. Stock $\gamma^c$ .....	33
4.2.2. Opération de retard $\delta^d$ .....	34
4.2.3. Limitateur de débit $\omega_\beta$ .....	34

## Introduction

Pour l'étude des *réseaux de Petri continus* (RdPC) et notamment les RdPC à *vitesses constantes*, deux approches sont présentées dans ce qui suit, une première introduite par R. David et H. Alla , et une deuxième introduite par G. Cohen.

Le premier chapitre, présente l'approche introduite par R. David et H. Alla [2] . Quelques définitions élémentaires sont données, ainsi que la représentation d'un système continu, l'approximation d'un système discret et l'algorithme dit du *point fixe* pour le calcul des *vitesses instantanées* d'un RdPC à *vitesses constantes* (RdPCC) [3] et [7].

Dans le deuxième chapitre introduit les quelques éléments de la théorie des *dioides* et de la théorie de la résiduation nécessaire pour la présentation de la deuxième approche, introduite par G. Cohen , et qui utilise les algèbres  $(min,+)$ , ou  $(max,+)$  (correspondant respectivement à une représentation de type *compteurs*, ou *dateurs*).

Le troisième chapitre qui présente les éléments de la théorie des *système linéaires* dans un *diode*, aborde la représentation des systèmes linéaire, d'un point de vue entrée-sortie, par leur *réponses impulsionnelle* ou par leur *fonctions de transfert*.

Dans chapitre 4, on trouvera un exemple ([5], [9]) d'un système continu représenté par des équations  $(min,+)$ , et son analogue discret, ainsi que les systèmes élémentaires qui le composent.

# Chapitre 1

## Réseaux de Petri

### 1.1. Introduction

Dans l'approche introduite par R. David et H. Alla [2], les RdPC sont présentés comme des réseaux de Petri possédant un *marquage* dans  $\square$  et non plus dans  $\square$ . Ce passage de  $\square$  à  $\square$  est réalisé par découpage de toutes les *marques* contenues dans les *places* en  $K$  jetons ( $K$  peut tendre vers l'infini). Le *franchissement* s'effectue comme un flot continu.

### 1.2. Définitions :

Nous rappelons ici quelques brèves définitions, nous supposons connu les outils algébriques utilisés.

**Définition 1.1. (Réseaux de Petri) [4]** Un réseau de Petri généralisé marqué est un quintuplet  $Q = (P, T, F, W, M_0)$  où :

$P$  est un ensemble fini (non nul) d'éléments appelés *places*,

$T$  est un ensemble fini (non nul) d'éléments appelés *transitions*,

$F \subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$  est l'ensemble des *arcs* liant une place à une *transition*, et réciproquement.

$W : F \rightarrow \square^*$  est une fonction de *poids* appliquée aux *arcs*,

$M_0 : P \rightarrow \square$  est le *vecteur de marquage initial*.

Un RdP est un *graphe* biparti orienté composé de deux types de *nœuds* : les *places* et les *transitions*, où il y a alternance des *places* et des *transitions* sur un chemin formé d'*arcs* consécutifs (tout arc ayant un nœud à chacune de ses extrémités).

**Définition 1.2. (Graphe d'événement)** Un RdP est un *graphe d'événement* (GE) si, et seulement si, toute *place* a exactement une *transition* d'entrée et une *transition* de sortie. Un GE est parfois appelé *graphe de transition*, ou *graphe marqué*.

Dans ce qui suit, nous ne considérons que des RdP de type GE.

**Définition 1.3. (Réseaux de Petri continus à vitesses constantes)** Un RdPC à vitesses constantes (RdPCC) est un sextuplet  $Q = \langle P, T, V, F, W, M_0 \rangle$ .

Les définitions de  $P$ ,  $T$ ,  $F$  et  $W$  sont similaires à celles des RdP généralisés, excepté que  $F$  et  $W$  peuvent correspondre à des nombres réels et que  $M_0$  est un vecteur de nombres réels positifs ou nuls. Ces nombres, appelés *marques*, sont aussi notés  $M_0 = M(0)$ , sachant que  $M(t)$  dénote le marquage à l'instant  $t$ .

$V$  est une application de l'ensemble des transitions  $T$  dans l'ensemble des nombres  $\square^+ \cup \{+\infty\}$ . La vitesse  $V(T_j) = V_j$  correspond à la vitesse maximale de franchissement de la transition  $T_j$ .

**Définition 1.4. (Place alimentée, transition validée) [2]** Une *place* ayant un marquage nul peut *valider* une *transition* en aval si la place est elle-même *alimentée* par une *transition* en amont.

Une place  $P_i$  est *alimentée* à un instant  $t$  si et seulement s'il y a au moins une *transition validée*  $\in \circ P_i$  (cf. Principales notations).

Une transition  $T$  est *validée* à un instant  $t$  si toute place  $P_i \in \circ T_j$  satisfait au moins une des deux conditions suivantes :

- 1)  $M_i(t) > 0$
- 2)  $P_i$  est alimentée.

La transition est *fortement validée* si toutes les places de  $\circ T_j$  satisfont la 1<sup>ère</sup> condition, elle est dite *faiblement validée* autrement.

### 1.3. Approche des RdPC selon R. David et H. Alla

Les RdP ordinaires s'avèrent très utiles pour la représentation et la modélisation de systèmes comportant des phénomènes de *synchronisation* ou de partage de ressources. Néanmoins, ces RdP atteignent leurs limites quand le marquage est très grand, du fait d'une explosion du nombre d'états accessibles, ce qui a amené R. David et H. Alla à introduire les RdPC (en appliquant un découpage des *marques* en  $K$  parties égales, les *jetons*). Ceci se ramène à définir une particularité de ces RdPC, à savoir un *marquage* en nombres réels (positifs), utilisé pour la modélisation des systèmes *continus*, ou l'approximation de certains systèmes *discrets*.

#### 1.3.1. Réseaux de Petri continus temporisés à vitesses constantes[7]

On présente d'abord deux exemples de RdPCC : l'un modélise un système de nature *continu*, l'autre modélise, de manière approché, un système *discret*.

##### 1.3.1.1. Modélisation d'un système continu par un RdPC

La figure (1.a.) présente un système *continu*. Un liquide s'écoule du réservoir 1 dans le réservoir 2 par gravité (3 litres/seconde). Il est remonté du réservoir 2 dans le réservoir 1 par un pompe (2 litres/seconde). On suppose que le volume de liquide dans les canalisations est négligeable et que, initialement, il y a 180 litres, soit  $0,180 \text{ m}^3$ , dans le réservoir 1 et 0 litre dans le réservoir 2. Le comportement de ce système est modélisé par le RdPC temporisé de la figure (1.b.), où les marquages dans les places  $P_1$  et  $P_2$  représentent les quantités de liquide dans les réservoirs 1 et 2, respectivement ; les vitesses  $V_1$  et  $V_2$  associées aux transitions  $T_1$  et  $T_2$  correspondent à celle des flux présentés ci-dessus. Remarquons que l'unité utilisée pour une quantité de liquide est arbitraire : par exemple, l'unité sur les figures (1.b.) et (1.c) sont en  $\text{m}^3$ .

Considérons le modèle de la figure (1.b.) Quand  $m_1 > 0$ , la transition  $T_1$  est franchie à la vitesse  $V_1 = 0,003 \text{ m}^3/\text{s}$ . Quand  $m_2 > 0$  (pour tout  $t > 0$  puisque  $V_2 < V_1$ ), la transition  $T_2$  est franchie à la vitesse  $V_2 = 0,002 \text{ m}^3/\text{s}$ . On en déduit,  $\forall t \geq 0$  :

$$m_1(t+dt) = m_1(t) + (0,002 - 0,003) dt \quad 1.1$$

$$m_2(t+dt) = m_2(t) + (0,003 - 0,002) dt \quad 1.2$$

puisque  $m_1(0) = 0,180 \text{ m}^3/\text{s}$  et  $m_2(0) = 0$ , on déduit de (1.1) et (1.2) :

$$m_1(t) = 0,180 - 0,001 t \quad 1.3$$

$$m_2(t) = 0,001 t \quad 1.4$$

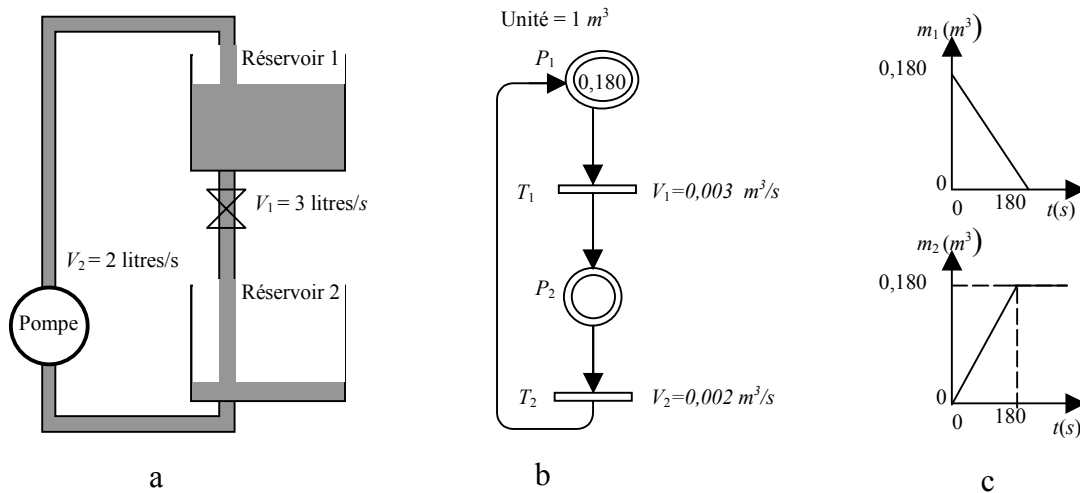


Figure 1. a) Un système continu, b) RdP continu modélisant le même système, c) Evolution du marquage du RdP continu.

Les équations (1.3) et (1.4) restent vérifiées tant que  $m_1 > 0$ .

Au temps  $t = 180$ ,  $m_1 = 0$  et  $m_2 = 0,180$ . La transition  $T_2$  peut encore être franchie à sa vitesse maximale puisque  $m_2 > 0$ , mais pas  $T_1$ . En effet,  $m_1 = 0$  (le réservoir 1 est vide). Cependant,  $m_1$  est alimentée à la vitesse  $V_2$  par franchissement de  $T_2$ , (le réservoir 1 est alimenté par le pompage). Donc, la transition  $T_1$  peut être franchie à la vitesse  $0,002 \text{ m}^3/\text{s}$  (vitesse du flux du réservoir 1 au réservoir 2), qui n'est plus la vitesse maximale.

Une vitesse maximale est notée par un  $V$  majuscule, une vitesse instantanée par un  $v$  minuscule. Donc,

$$\left. \begin{aligned} v_1(t) &= V_1 = 0,003 \text{ m}^3/\text{s} \\ v_2(t) &= V_2 = 0,002 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned} \right\} \text{ pour } 0 \leq t < 180$$

$$\left. \begin{aligned} v_1(t) &= V_2 = 0,002 \text{ m}^3/\text{s} \\ v_2(t) &= V_2 = 0,002 \text{ m}^3/\text{s} \end{aligned} \right\} \text{ pour } t \geq 180$$

les marquages correspondants sont illustrés sur la figure (1.c.) Pour  $t \geq 180$ , la transition  $T_2$  est *fortement validée* (sa place d'entrée n'est jamais vide), et la transition  $T_1$  est *faiblement validée* (en effet, sa place amont est vide, mais toutefois alimentée). Les modèles des figures (1.b.) et (1.c.) sont des RdPCC [DAV 87, 90a].

### 1.3.1.2. Approximation d'un système discret par un RdPC

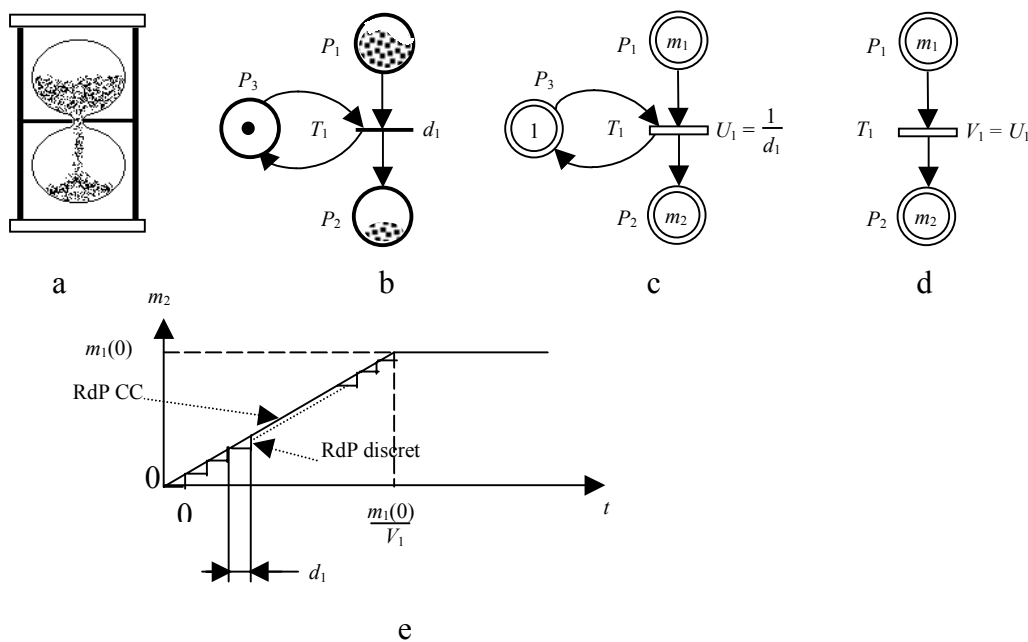
Le sablier de la figure (2.a.) peut être modélisé par le RdP discret temporisé de la figure (2.b.) Les jetons dans  $P_1$  et  $P_2$  représentent respectivement les grains situés dans les parties haute et basse du sablier. Le *jeton* dans la place  $P_3$  modélise le fait qu'il ne peut passer qu'un seul grain à la fois de la partie haute dans la partie basse. La durée du passage d'un grain est égale à  $d_1$  unités de temps.

Le RdPC correspondant est présenté sur la figure (2.c.), chaque nombre de *jeton* dans une *place* est transformé en un nombre éventuellement réel. La durée  $d_1$  associée à la *transition* est remplacée par le taux de franchissement  $U_1 = 1/d_1$  qui correspond à un *débit*, c'est-à-dire, une vitesse d'écoulement dans le contexte *continu*. Puisque  $m_3$  est

toujours égale à 1, la transition  $T_1$  est *fortement validée* (donc franchie à la vitesse maximale) si, et seulement si,  $m_1 > 0$ . Ainsi, nous pouvons utiliser le modèle de la figure (2.d.).

Sur la figure (2.d.), la vitesse de franchissement est notée  $V_1$  et l'unité de marquage est implicite (au sens où  $V_1 = U_1$  signifie qu'à vitesse maximale, 1 jeton met  $U_1$  unité de temps pour passer de  $P_1$  et  $P_2$ ), comme dans le modèle continu de la figure (1). Dans ce RdPCC, une transition  $T_j$  est franchie à vitesse maximale, c'est-à-dire  $v_j(t) = V_j$ , tant qu'elle est *fortement validée* [DAV 87,90a]. Notons que le comportement est similaire si tous les marquages et toutes les vitesses sont multipliés par une (même) valeur positive arbitraire.

Les comportements du RdP discret temporisé (qui est la référence) et de son approximation par le RdPCC sont illustrés sur la figure 2.e.



**Figure 2.** a) Sablier, b) Modélisation par RdP discret, c) Modélisation par RdP continu dans lequel l'unité est modélisée, d) Modélisation par RdP continu dans lequel l'unité est implicite, e) Illustration du fonctionnement.

### 1.3.1.3. Vitesse de franchissement d'une transition

Comme les RdPCC fonctionnent à vitesse maximale, cela permet de calculer les vitesses réelles de franchissement de transitions validées (ceci est à rapprocher de la propriété des RdP temporisés, au sens où, il est possible de calculer les séquences de franchissement des *transitions*, si le fonctionnement est au plus tôt).

**Propriété 1.5.** : La vitesse de franchissement d'une transition  $T_j$  *fortement validée* à un instant  $t$  est égale à sa vitesse maximale, soit  $v_j(t) = V_j$ .

**Propriété 1.6.** : La vitesse de franchissement d'une transition  $T_j$  *faiblement validée* à un instant  $t$ , est égale à

$$v_j = \min_j [V_j, \min_i (B_i(t) + v_j(t))]$$



où  $i$  est tel que  $P_i \in {}^\circ T_j$  et  $m_i(t) = 0$ ,

$B_i(t)$  est le *bilan dynamique* de la place  $P_i$ , c'est-à-dire, la *variation* (croissante ou décroissante) du marquage  $m_i(t)$  à l'instant  $t$  (on parle aussi de gradient du marquage), on a :

$$B_i(t) = \sum_{T_j \in {}^\circ P_i} Post(P_i, T_j) \cdot v_j(t) - \sum_{T_k \in P_i^\circ} Pré(P_i, T_k) \cdot v_k(t)$$

où  $Pré(P_i, T_k)$ ,  $Post(P_i, T_j)$  représentent respectivement les pondérations des *arcs* entrants et sortants liés à la place  $P_i$ .

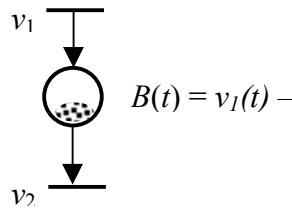


Figure 3. Bilan dynamique

Ce qui peut être interprété de la façon suivante : si toutes les places  $P_i$  en amont de  $T_j$  ont un *bilan dynamique* strictement positif ( $B_i > 0$ ), alors aucune de ces *places* ne peut rester vide ( $m_i(t) > 0$ ) et l'on a  $v_j(t) = V_j$ . Sinon, pour une place  $P_i$  dont le *bilan dynamique* est nul, on peut écrire  $B_i(t) = 0 = \sum_a v_a(t) - \sum_b v_b(t)$  avec  $T_a \in {}^\circ P_i$  et  $T_b \in P_i^\circ$ . Ainsi on a  $v_j(t) = \sum_a v_a(t) - \sum_b v_b(t) + v_j(t)$ . Ceci est vrai pour toute place  $P_i$  vide ( $m_i(t) > \phi$ ) d'où la fonction  $\min_i$ .

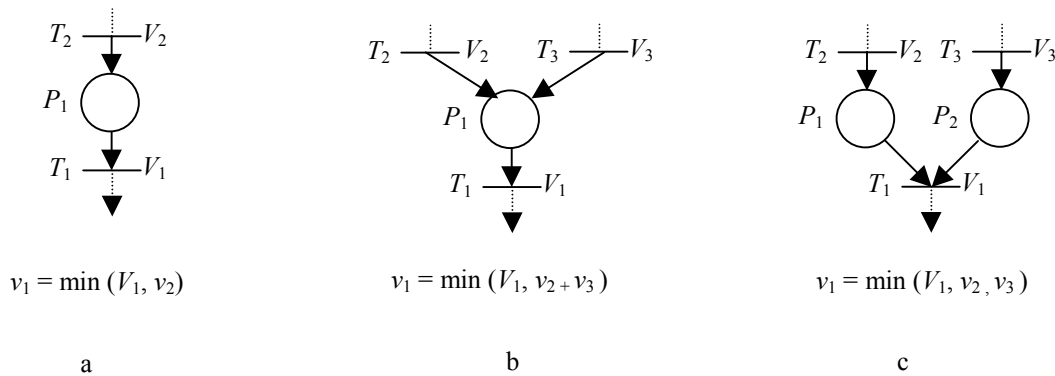


Figure 4. calcul de la vitesse de franchissement

La figure (4) donne des exemples de calcul de vitesses dans trois configurations différentes où les places d'entrées de la transition considérée ont un marquage nul (cf. propriété (1.6.)).

Le calcul des vitesses de franchissement se ramène à résoudre une équation au point fixe du type  $v = F(v)$ , où  $v$  est un vecteur de nombres réels de dimension égale à celle de l'ensemble des *transitions validées* à un instant  $t$ . Le vecteur  $v$  est la limite du mode d'itérations  $F$ . On note  $v_j^r$  la valeur de la vitesse  $v_j$  obtenue au pas d'itération numéro  $r$ . Soit  $Y = \{T_1, T_2, \dots, T_s\}$  l'ensemble des *transitions validées* à l'instant  $t$ . A chaque pas, on effectue le calcul suivant, où  $W_{ik}$  est un élément de la matrice d'incidence.

$$v_j^{r+1} = \begin{cases} V_j & \text{si } T_j \text{ est fortement validée} \\ \sinon \min \left[ V_j, \min_i \left( \sum_{k=1}^{j-1} W_{ik} \cdot v_k^{r+1} + \sum_{k=j}^s W_{ik} \cdot v_k^r + v_j^r \right) \right] \end{cases} \quad 1.5$$

où  $i$  est tel que  $P_i \in \circ T_j$  et  $m_i(t)=0$

l'expression  $\min[V_j, \dots]$  de la relation 1.5 correspond à l'équation de la propriété 1.6. en tenant compte du fait que certaines vitesses ont été mises à jour au pas  $r+1$ .

### 1.3.1.4. Calcul des vitesses de franchissement des transitions validées à l'instant $t$ .

Nous présentons dans ce paragraphe deux algorithmes utilisés pour calculer l'ensemble des *transitions validées* et leurs vitesses de franchissement à un instant  $t$ . Ces algorithmes, de type *point fixe*, sont appliqués sur un exemple proposé dans [2] (exercice 3.4.).

#### 1.3.1.4.1 Algorithme de calcul de l'ensemble des transitions validées

Une méthode pratique pour déterminer l'ensemble des *transitions validées* consiste à utiliser des variables booléennes définies par le système d'équations (1.6) et (1.7) ci-dessous, du type  $X=F(X)$  où  $X=(a_1, \dots, a_n, e_1, \dots, e_m)$  est un vecteur de booléens de dimension  $n + m$  ( $n$  et  $m$  représentent respectivement le nombre de *places* et de *transitions* du réseaux).

$$a_i = \begin{cases} 1 & \text{si } P_i \text{ est marqué} \\ \sinon \max \{e_j / T_j \in \circ P_i\} \end{cases} \quad 1.6$$

$$e_j = \begin{cases} 1 & \text{si } \circ T_j \text{ est vide} \\ \sinon \min \{a_i / P_i \in T_j \circ\} \end{cases} \quad 1.7$$

La fonction  $F$  définie ci-dessus correspond à le mode d'itérations parallèle :  $X^{r+1}=F(X^r)$ . Pour le calcul de l'ensemble des transitions validées, on pose  $X = (A, E)$  avec  $A = (a_1, \dots, a_n)$  et  $E = (e_1, \dots, e_m)$ . Un mode d'itération est défini de la façon suivante :

$$a_i^{r+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } P_i \text{ est marqué} \\ \sinon \max \{e_j^r / T_j \in \circ P_i\} \end{cases} \quad , \quad 1.8$$

i.e.,  $A^{r+1} = F(E^r)$ .

$$e_j^{r+1} = \begin{cases} 1 & \text{si } {}^\circ T_j \text{ est vide} \\ \text{sinon } \min \{a_i^{r+1} / P_i \in T_j \circ\} \end{cases}, \quad 1.7$$

i.e.,  $E^{r+1} = F(A^{r+1})$ .

Ainsi défini, le système précédant peut être décrit par l’algorithme suivant :

**Pas 1.** Initialisation  $X^0 = (A^0, E^0) = 0$  et  $r = 0$ .

**Pas 2.**  $A^{r+1} = F(E^r)$ ,  
 $E^{r+1} = F(A^{r+1})$ .

**Pas 3.** Si  $(A^{r+1}, E^{r+1}) \neq (A^r, E^r)$  alors  $r = r + 1$  et aller au Pas 2.

**Pas 4.** L’ensemble des *transitions validées* correspond aux composantes  $e_j = 1$ .

**Exemple :**

Soit le RdPCC suivant :

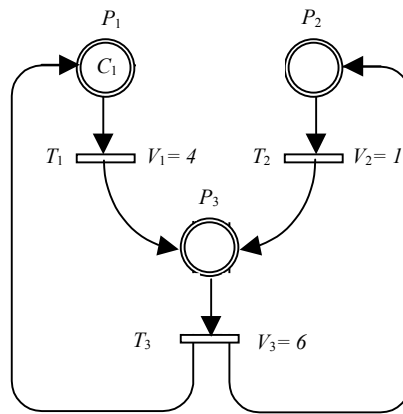


Figure 5 : RdPCC

Calculons les vitesses de franchissement des *transitions validées* :

Pas 1. :

établir  $X^0$ , soit  $X^0 = [0,0,0,0,0,0]$

Pas 2. :

$a_1^1 = 1$  puisque  $P$  est marquée.  
 $a_2^1 = e_3^0 = 0$ ;  $a_3^1 = \max(e_1^0, e_2^0) = 0$   
 $e_1^1 = a_1^1 = 1$ ;  $e_2^1 = 1$ ;  $e_3^1 = 1$   
 $X^1 = [1,0,0,1,1,1]$

Pas 3. :

$X^1 \neq X^0$  retour au Pas 2.

Pas 2. :

$a_1^2 = 1$  puisque  $P$  est marquée.  
 $a_2^2 = e_3^1 = 1$ ;  $a_3^2 = \max(e_1^1, e_2^1) = 1$

$$e_1^2 = a_1^2 = 1; \quad e_2^2 = 1; \quad e_3^2 = 1$$

$$X^2 = [1, 1, 1, 1, 1, 1]$$

Pas 3. :

$X^2 \neq X^1$  retour au Pas 2.

Pas 2. :

$a_1^3 = 1$  puisque  $P$  est marquée.

$$a_2^3 = e_3^2 = 1; \quad a_3^3 = \max(e_1^2, e_2^2) = 1$$

$$e_1^3 = a_1^3 = 1; \quad e_2^3 = 1; \quad e_3^3 = 1$$

$$X^3 = [1, 1, 1, 1, 1, 1]$$

Pas 3. :

$X^3 = X^2$ , on arrête, l'ensemble des *transitions validées* correspondent à  $e_1, e_2$  et  $e_3$ , soient  $T_1, T_2$  et  $T_3$  respectivement ..

### 1.3.1.4.2 Algorithme de calcul des vitesses de franchissement des transitions.

Après avoir déterminé l'ensemble des *transitions validées*, on applique l'algorithme suivant afin de calculer leurs vitesses de franchissement.

Notons que les transitions non validées ont des vitesses égales à 0 .

**Pas 1.** Initialisation  $v^0 = 0$  et  $r = 0$ .

**Pas 2.** Calcul de  $v^{r+1}$  par la relation (1.5).

**Pas 3.** Si  $v^{r+1} \neq v^r$  alors faire  $r = r + 1$  et aller au Pas 2.

#### Exemple :

Considérons le RdPCC de la figure (5), et calculons les vitesses instantanées pour les transitions  $T_1, T_2$  et  $T_3$ .

$$Y = \{ T_1, T_2, T_3 \} \quad \text{et} \quad v = \{ v_1, v_2, v_3 \}$$

On déduit du réseau la matrice d'incidence  $W$

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & +1 \\ 0 & -1 & +1 \\ +1 & +1 & -1 \end{bmatrix}$$

**Pas 1.** Etablir  $v^0 = (0, 0, 0)$

**Pas 2.** (1<sup>ère</sup> itération)

$v_1^1 = V_1 = 4$  car  $T_1$  est *fortement validée*.

$$\begin{aligned} v_2^1 &= \min(V_2, \min(w_{21}v_1^1 + w_{22}v_2^0 + w_{23}v_3^0 + v_2^0)) = \min(V_2, \min(0 - v_2^0 + v_3^0 + v_2^0)) \\ &= \min(V_2, v_3^0) = 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_3^1 &= \min(V_3, \min(w_{31}v_1^1 + w_{32}v_2^1 + w_{33}v_3^0 + v_3^0)) = \min(V_3, \min(v_1^1 + v_2^1 - v_3^0 + v_3^0)) \\ &= \min(V_3, v_1^1 + v_2^1) = 4 \end{aligned}$$

donc  $v^1 = (4, 0, 4)$ .

**Pas 3.**  $v^1 \neq v^0$ , on retourne au Pas 2.

**Pas 2.**

$v_1^2 = V_1 = 4$  car  $T_1$  est *fortement validée*.

$$v_2^2 = \min(V_2, v_3^1) = \min(1, 4) = 1$$

$$v_3^2 = \min(V_3, v_1^2 + v_2^2) = \min(6, 4+1) = 5$$

donc  $v^2 = (4, 1, 5)$ .

**Pas 3.**  $v^2 \neq v^1$ , on retourne au Pas 2.

**Pas 2.**

$$v_1^3 = V_1 = 4 \text{ car } T_1 \text{ est fortement validée.}$$

$$v_2^3 = \min(V_2, v_1^3) = \min(1, 5) = 1$$

$$v_3^3 = \min(V_3, v_1^3 + v_2^3) = \min(6, 4+1) = 5$$

donc  $v^3 = (4, 1, 5)$ .

**Pas 3.**  $v^2 = v^3$ , on arrête.

Avant d'expliciter la représentation des systèmes continus par des équations algébriques, il est nécessaire d'introduire les éléments utilisés par la suite. Dans ce qui suit, les démonstrations des théorèmes sont disponibles dans [6, chap. 1 et 2].

## 2.1. Introduction aux dioïdes et moduloïdes

Les *dioïdes* sont des structures algébriques que l'on peut munir d'un ordre naturel de par la loi additive. Le fait qu'un *dioïde* admette une structure ordonnée permet d'appliquer des résultats issus de la théorie de la *résiduation* pour proposer des solutions aux problèmes d'*inversion* d'applications.

### 2.1.1. Définitions :

**Définition 2.1. (Monoïde) :** Un *monoïde*  $(M, \oplus)$  est un ensemble  $M$  muni d'une loi de composition interne, notée  $\oplus$ , associative et possédant un élément *neutre*, noté  $\varepsilon$  ( $\forall m \in M, m \oplus \varepsilon = \varepsilon \oplus m = m$ ). Si la loi  $\oplus$  est commutative, le *monoïde* est dit commutatif.

**Définition 2.2. (Demi anneau, Dioïde) :** On appelle *demi-anneau* un ensemble  $D$  muni de deux lois internes  $\oplus$  et  $\otimes$ , telle que :

- $(D, \oplus)$  est un *monoïde* commutatif dont l'élément *neutre*,  $\varepsilon$ , est dit l'*élément nul*,
- $(D, \otimes)$  est un *monoïde*. Son élément *neutre*, noté  $e$  est appelé *unité*.
- La loi  $\otimes$  est distributive à droite, et à gauche, par rapport à la loi  $\oplus$ .
- L'élément *nul*  $\varepsilon$  est absorbant pour la loi  $\otimes$  ( $\forall a \in D, a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$ ).

En outre si la loi additive  $\oplus$  est idempotente ( $\forall a \in D, a \oplus a = a$ ), alors  $(D, \oplus, \otimes)$  est qualifié de *demi-anneau idempotent*, ou *dioïde*.

Un *dioïde* est dit commutatif si la loi multiplicative est commutative. Lorsque aucune confusion n'est possible, on omet le signe multiplicatif ' $\otimes$ '.

**Exemple 2.3.** (Algèbres  $(\max, +)$  et  $(\min, +)$ )

$(\square \cup \{-\infty\}, \max, +)$  est un *dioïde* commutatif pour lequel  $\varepsilon = -\infty$  et  $e = 0$ . Ce *dioïde* est noté  $\square_{\max}$  est traditionnellement appelé algèbre  $(\max, +)$ .

$\square_{\min} = (\square \cup \{+\infty\}, \min, +)$ , appelé algèbre  $(\min, +)$ , est un *dioïde* commutatif pour lequel  $\varepsilon = +\infty$  et  $e = 0$ .

D'autres exemples sont présentés dans [6, chap. 1].

**Définition 2.4. (Sous-dioïde) :** Soient  $(D, \oplus, \otimes)$  un *dioïde* et un ensemble  $C \subset D$ .  $(C, \oplus, \otimes)$  est un *sous-dioïde* de  $(D, \oplus, \otimes)$  si :

$\varepsilon \in C$  et  $e \in C$ ,

$C$  est fermé pour les lois  $\oplus$  et  $\otimes$ .

**Exemple 2.5. :**

$\square_{\max} = (\square \cup \{-\infty\}, \max, +)$  et  $\square_{\min} = (\square \cup \{+\infty\}, \min, +)$  sont respectivement des sous-dioïdes de  $\square_{\max}$  et  $\square_{\min}$ .

### 2.1.2. Structures ordonnées d'un dioïde

L'idempotence de la loi additive  $\oplus$  permet de définir naturellement une relation d'ordre dans un *dioïde*. Le théorème suivant affirme que cette relation d'ordre est compatible avec les lois du *dioïde*.

**Théorème 2.6.** [6, Page 2]

Dans un *dioïde*  $(D, \oplus, \otimes)$ , la relation  $\succeq$ , définie par

$$a \succeq b \Leftrightarrow a = a \oplus b,$$

est une relation d'ordre (partielle) compatible avec les lois  $\oplus$  et  $\otimes$ , c'est-à-dire,

$$\begin{aligned} a \succeq b \Rightarrow \forall c \in D, \quad & a \oplus c \succeq b \oplus c, \\ & a \otimes c \succeq b \otimes c, \\ & c \otimes a \succeq c \otimes b. \end{aligned}$$

**Exemple 2.7. :**

L'ordre  $\succeq$ , défini dans  $\square_{\max}$ , est total et coïncide avec l'ordre usuel  $\geq$ . En revanche, l'ordre total  $\succeq$ , défini dans  $\square_{\min}$ , est l'inverse de l'ordre usuel  $\geq$  (par exemple,  $1 \succeq 2$ ).

**Définition 2.8. (Dioïde complet) :** Un *dioïde*  $(D, \oplus, \otimes)$  est dit *complet* s'il est fermé pour les sommes infinies et si la loi  $\otimes$  distribue (à gauche et à droite) sur les sommes infinies, c'est-à-dire si pour tout  $c \in D$  et tout sous-ensemble  $B \subseteq D$ ,

$$c \otimes \left( \bigoplus_{x \in B} x \right) = \bigoplus_{x \in B} (c \otimes x) \quad \text{et} \quad \left( \bigoplus_{x \in B} x \right) \otimes c = \bigoplus_{x \in B} (x \otimes c).$$

Pour un *dioïde complet*  $(D, \oplus, \otimes)$ , il est possible de définir la *borne inférieure* de toute paire d'éléments  $(a, b)$ , notée  $\wedge$  :

$$a \wedge b = \bigoplus_{\{x \mid x \preceq a, x \preceq b\}} x.$$

La *borne inférieure*, ainsi définie, existe pour tout sous-ensemble d'un *dioïde complet*, et celui-ci a donc une structure de *treillis complet* (ensemble *ordonné* tel que toute partie finie possède une *borne supérieure* et une *borne inférieure*). On a de plus l'équivalence

$$a \succeq b \Leftrightarrow a = a \oplus b \Leftrightarrow a \wedge b = b.$$

Un *dioïde complet* admet un plus grand élément, noté  $T$ , qui correspond à la somme (autrement dit, à la *borne supérieure*) de tous les éléments de  $D$ , soit

$$T = \bigoplus_{x \in D} x,$$

cet élément est absorbant pour la loi additive,  $\forall a, a \oplus T = T$ . Notons que par définition de  $\varepsilon$ , on a :

$$T \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes T = \varepsilon.$$

**Exemple 2.9.** : Le dioïde  $\square_{\max}$ , complété de l'élément  $+\infty$ , est un dioïde complet, noté  $\overline{\square}_{\max}$ . De même, le dioïde  $\overline{\square}_{\min} = (\square \cup \{+\infty, -\infty\}, \min, +)$  est complet.

2.1.3. Moduloïde

**Définition 2.10.** : Soit  $(D, \oplus, \otimes)$  un dioïde, on appelle *moduloïde* sur  $D$ , un *monoïde* commutatif  $(M, \oplus)$  muni d'une loi de composition externe "·" :  $D \times M \rightarrow M$  vérifiant pour tout  $a_1, a_2 \in D, m_1, m_2 \in M$  :

- (i)  $(a_1 \oplus a_2) \cdot m_1 = a_1 \cdot m_1 \oplus a_2 \cdot m_1$
- (ii)  $(a_1 \otimes a_2) \cdot m_1 = a_1 \cdot (a_2 \cdot m_1)$
- (iii)  $a_1 \cdot (m_1 \oplus m_2) = a_1 \cdot m_1 \oplus a_1 \cdot m_2$
- (iv)  $\varepsilon \cdot m_1 = \varepsilon$
- (v)  $e \cdot m_1 = m_1$

L'addition d'un *moduloïde* est *idempotente*, en effet :

$$\forall m \in (M, \oplus, \cdot), m \oplus m = e \cdot m \oplus e \cdot m = (e \oplus e) \cdot m = e \cdot m = m,$$

comme pour un *dioïde*, l'idempotence de l'addition permet de doter un *moduloïde* d'une relation d'ordre  $\succeq$  définie par

$$m_1 \succeq m_2 \Leftrightarrow m_1 = m_1 \oplus m_2,$$

**Exemple 2.11.** (*Moduloïdes*  $\overline{\square}_{\max}$  et  $\overline{\square}_{\min}$ )

L'ensemble des applications de  $\square$  dans  $\square \cup \{-\infty, +\infty\}$  muni du max point-à-point est un *monoïde* noté  $(M, \oplus)$ . Ce *monoïde*, doté de plus de la loi de composition externe

$$\begin{aligned} \overline{\square}_{\max} \times M &\rightarrow M \\ (a, v) &\mapsto a \cdot v : t \in \square, (a \cdot v)(t) = a \otimes v(t) = a + v(t), \end{aligned}$$

est un *moduloïde* sur  $\overline{\square}_{\max}$ , traditionnellement noté  $\overline{\square}_{\max}$ .

On peut aussi définir le *moduloïde*  $\overline{\square}_{\min}$  en munissant l'ensemble des applications de  $\square$  dans  $\square \cup \{-\infty, +\infty\}$  muni du min point-à-point et de la "multiplication par un scalaire" comme précédemment.

**Définition 2.12. (Sous-moduloïde)** : On appelle *sous-moduloïde* d'un moduloïde  $(M, \oplus, \cdot)$  sur  $D$ , toute partie non vide  $N$  de  $M$ , stable pour la loi  $\oplus$  et la loi externe "·", et telle que  $(N, \oplus, \cdot)$  forme un *moduloïde* sur  $D$ .

**Exemple 2.13.** : L'ensemble des applications croissantes de  $\square$  dans  $\square \cup \{-\infty, +\infty\}$  muni des mêmes lois de composition que celle de  $\overline{\square}_{\max}^Z$  est un sous-moduloïde de  $\overline{\square}_{\max}$ .



## 2.2. Résolution d'équations dans un dioïde

On s'intéresse aux équations définies sur des dioïdes complets  $(D, \oplus, \otimes)$  et  $(C, \oplus, \otimes)$  soient :

$$f(x) = b \quad 2.1.$$

où  $f: D \rightarrow C, b \in C$  et  $x$  est l'inconnue dans le *dioïde*  $(D, \oplus, \otimes)$ ,

$$f(x) = x \quad 2.2.$$

où  $D \rightarrow D, b \in D$  et  $x$  est l'inconnue dans le *dioïde*.

La résolution de l'équation (2.1) pose le problème d'inversion d'une application  $f$  définie sur un dioïde. Dans un objectif de *commande*, il est toujours proposé d'inverser des modèles de systèmes à événements discrets. Les loi  $\oplus$  et  $\otimes$  n'étant pas inversible, il n'est en générale pas possible d'inverser les applications définies sous forme analytique dans un dioïde. La *théorie de la résiduation* permet néanmoins de définir des "pseudo-inverses" pour certaines de ces applications, et permet de déterminer les plus grandes sous-solutions de (2.1) (c'est-à-dire les plus grandes solutions de  $f(x) \preceq b$ ), ainsi que les plus petite solutions de cette même équation (les plus petites solutions de  $f(x) \succeq b$ ). Les applications considérées sont en générale croissantes (où *isotones*) et définies sur des ensembles ordonnés. La spécification aux applications définies sur des *dioïdes* découle de l'ordre naturel dont on peut munir ces structures algébriques.

L'ensemble des solutions des équations au *point fixe* définies sur des *dioïdes complets*, telles que l'équation (2.2), est ordonné (sous certaine hypothèses de "continuité" de l'application  $f$ ). On s'intéressera aux solutions extrémales (les plus petites, ou les plus grandes) de telles équations.

### 2.2.1. Application isotones et continues

Une application est dite *isotone* si elle est définie sur des ensembles ordonnées.

**Définition 2.14. (Isotonie):** Une application  $f$  d'un *dioïde*  $(D, \oplus, \otimes)$  dans un *dioïde*  $(C, \oplus, \otimes)$  est dite *isotone* si, pour tout  $a, b \in D$ ,

$$a \succeq b \Rightarrow f(a) \succeq f(b).$$

La notion de *continuité* pour les applications définies sur des *dioïdes* correspond à celle d'*homomorphisme*<sup>1</sup> complet dans la théorie des *treillis* [Birkhoff, 1940]. Elle caractérise en effet les applications pour lesquelles les bornes supérieure et inférieure sont "conservées".

**Définition 2.15. (Continuité):** Soient  $(D, \oplus, \otimes)$  et  $(C, \oplus, \otimes)$  deux *dioïdes complets*. Une application  $f$  de  $D$  dans  $C$  est dite *semi-continue inférieurement* (*s.c.i.*),

respectivement *semi-continue supérieurement* (s.c.s.), si, pour tout sous-ensemble  $B \subseteq D$ ,

$$f\left(\bigoplus_{x \in B} x\right) = \bigoplus_{x \in B} f(x),$$

respectivement,

$$f\left(\bigwedge_{x \in B} x\right) = \bigwedge_{x \in B} f(x).$$

Notons qu'une application s.c.i. est *isotone* puisque

$$a \succeq b \Leftrightarrow a \oplus b = a \Rightarrow f(a) = f(a \oplus b) = f(a) \oplus f(b) \succeq f(b)$$

(idem pour une application s.c.s.).

### 2.2.2. Etude de l'équation $f(x) = b$

Pour l'étude de l'équation (2.1.), on prend en particulier les cas où  $f(x) = a \otimes x$  et  $f(x) = x \otimes a$ , qui admettent une "pseudo-inverse" (*résiduée*). Ces résultats sont des applications de la *théorie de la résiduation* aux *dioides*, qui traite de façon générale les problèmes d'inversion d'applications définies sur des ensembles ordonnés.

**Définition 2.16. (Application résiduable)** : Soient  $(D, \oplus, \otimes)$  et  $(C, \oplus, \otimes)$  deux *dioides complets*. Une application *isotone*  $f$  de  $D$  dans  $C$  est dite *résiduable* si l'inéquation  $f(x) \preceq b$  admet une plus grande solution dans  $D$ , ceci pour tout  $b \in C$ .

Une caractérisation des applications *résiduables* est fournie par le théorème qui suit.

**Théorème 2.17.** [6., page 12] : Soient  $(D, \oplus, \otimes)$  et  $(C, \oplus, \otimes)$  deux *dioides complets* et une application  $f : D \rightarrow C$  *isotone*.

Sont équivalents :

- (i)  $f$  est *résiduable*.
- (ii) Il existe une application  $g : C \rightarrow D$  *isotone* telle que

$$f \circ g \sqsubseteq Id_C \tag{2.3.}$$

$$g \circ f \sqsubseteq Id_D \tag{2.4.}$$

L'application  $g$  satisfaisant (2.3.) et (2.4.) est appelée *résiduée* de  $f$ , et est traditionnellement notée  $f^\#$ . Une condition nécessaire et suffisante d'existence de cette

<sup>1</sup> Voir annexe pour la définition,

**Théorème 2.18** [6., page 13]: Soient  $(D, \oplus, \otimes)$  et  $(C, \oplus, \otimes)$  deux *dioides complets* et  $f : D \rightarrow C$  *isotone*.

L'application  $f$  est *résiduable* si, et seulement si,  $f$  est s.c.i. et une application  $f(\varepsilon_D) = \varepsilon_C$ .

### 2.2.3. Etude de l'équation $f(x) = x$

On étudie dans ce qui suit deux formes particulières de l'équation (2.2.), à savoir :

$$g(x) \oplus b = x \tag{2.5.}$$

$$g(x) \wedge b = x \tag{2.6.}$$

où l'application  $g : D \rightarrow D$  considérée dans (2.5.) (respectivement (2.6.)) est s.c.i. (respectivement s.c.s.). Les deux théorèmes suivant donnent l'expression de la plus petite solution de (2.5.) et de la plus grande solution de (2.6.).

**Théorème 2.19.** : Soient  $(D, \oplus, \otimes)$  un *dioides complet* et  $g : D \rightarrow D$  une application s.c.i., on note

$$g^0 = Id, \quad g^n = \underbrace{g \circ g \circ \dots \circ g}_{n \text{ fois}} \text{ et } g^* = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} g^n$$

la plus petite solution de (2.5.) est  $g^*(b)$ .

**Théorème 2.20.** : Soient  $(D, \oplus, \otimes)$  un *dioides complet* et  $g : D \rightarrow D$  une application s.c.s. La plus grande solution de (2.6.) est  $g_*(b)$  avec  $g_* = \bigwedge_{n \in \mathbb{N}} g^n$ .

**Notation 2.21.** : L'opérateur '\*' est couramment appelé *étoile de Kleene* dans la littérature. On note '+' l'opérateur défini dans un dioides complet  $(D, \oplus, \otimes)$  par

$$a \in D, \quad a^+ = \bigoplus_{n \geq 1} a^n.$$

On a

$$a^* = e \oplus a^+ \text{ et } a^+ = a \otimes a^*.$$

### 2.3. Propriétés spectrales et asymptotiques des matrices

**Définition 2.22. (Matrice irréductible)** : Une matrice  $A \in D^{n \times n}$  est dite *irréductible* si pour toute paire  $(i, j)$ , il existe un entier  $m$  tel que  $(A^m)_{ij} \neq \varepsilon$ .

On entend par *valeurs propres* et *vecteurs propres* d'une matrice  $A \in D^{n \times n}$ , les scalaires  $\lambda \in D$  et les vecteurs  $v \in D \setminus \{\varepsilon\}$  tels que

$$A \otimes v = \lambda \otimes v.$$

Un résultat concernant les matrices *irréductibles* est énoncé par le théorème suivant [Gondran & Minoux, 1977].

**Théorème 2.23.** : Une matrice  $A \in D^{n \times n}$  *irréductible* admet une unique valeur propre, notée  $\lambda \in D$ , donnée par

$$\lambda = \bigoplus_{k=1}^n (\text{tr } A^k)^{1/k}$$

où

$$\text{tr } A^k = \bigoplus_{i=1}^n (A^k)_{ii}.$$

Il existe plusieurs algorithmes de calcul de cette valeur propre, le plus connu est l'algorithme de Karp [Gondran & Minoux, 1979 ; Cochet-Terrasson *et al.* 1998 ; Olsder *et al.*, 1999].

Une matrice *irréductible* peut admettre plusieurs vecteurs propres associés à la valeur propre  $\lambda$ . Afin de déterminer ces vecteurs propres, la matrice  $A_\lambda$  est définie comme suit.

**Définition 2.24. (La matrice  $A_\lambda$ ) :** Soit  $A \in D^{n \times n}$  une matrice *irréductible* de valeur propre  $\lambda \in D$ . On définit la matrice, notée  $A_\lambda$ , par

$$A_\lambda = \lambda^{-1} \otimes A.$$

Une condition permettant de tester si une colonne de la matrice  $A_\lambda^+$  est un vecteur propre de  $A$ , est fournie par le théorème qui suit.

**Théorème 2.25. :** Soit  $A \in D^{n \times n}$  une matrice *irréductible* de valeur propre  $\lambda$ . La  $j$ -ième colonne de la matrice  $A_\lambda^+$ , notée  $(A_\lambda^+)_{\cdot j}$ , est un vecteur propre de  $A$  si elle satisfait l'égalité

$$(A_\lambda^+)_{\cdot j} = A_\lambda \otimes (A_\lambda^+)_{\cdot j}$$

Le théorème qui suit énonce la cyclicité des matrices *irréductibles*.

**Théorème 2.26. :** Si est une matrice *irréductible* de valeur propre  $\lambda$ , alors il existe deux entiers  $N$  et  $c$  tels que

$$A^{n+c} = \lambda^c A^n \text{ pour tout } n \geq N.$$

Le plus petit entier  $c$  est appelé cyclicité de  $A$ .

## Chapitre 3

### Théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes

Les systèmes à événements discrets, où interviennent des phénomènes de *synchronisation*, peuvent être modélisés de façon exacte par des équations linéaires dans certaines structures algébriques, appelées *dioïdes*. De ce fait, une nouvelle théorie des

systèmes linéaires a été élaborée, dans laquelle on retrouve certains concepts et résultats inspirés de la *théorie des systèmes linéaires* conventionnels.

Pour introduire cette théorie, il est nécessaire d'en définir quelques éléments.

### 3.1. Signaux et systèmes

De manière générale, un *signal* est une grandeur physique dépendant d'un paramètre (communément le temps), servant de support à une information ; un *système* est une application d'un ensemble de signaux d'entrée vers un ensemble de signaux de sortie.

**Définition 3.1. (Signal) :** On appelle *signal* une application de  $\square$  dans  $(D, \oplus, \otimes)$ . En *théorie des systèmes*, l'ensemble des signaux est doté d'une structure d'espace vectoriel.

Dans le contexte des *dioïdes*, l'ensemble des signaux  $D^\square$  est muni d'une structure de *moduloïde*. Pour cela, on définit deux opérations :

- Une loi interne qui joue le rôle de l'addition, notée ' $\oplus$ ', et définie par

$$\forall u, v \in D^\square, \forall t \in \square ; (u \oplus v)(t) = u(t) \oplus v(t)$$

- Une loi externe qui joue le rôle du produit d'un *signal* par un scalaire, notée ' $\cdot$ ', et qui est définie par

$$\forall a \in D, \forall v \in D^\square, \forall t \in \square ; (a \cdot v)(t) = a \otimes v(t).$$

**Notation 3.2. :** On notera  $\mathcal{E}$ , l'ensemble des signaux  $D^\square$  ainsi muni d'une structure de *moduloïde*, nous distinguerons également :

- Le sous-moduloïde  $\mathcal{E}_{\text{dec}}$  de  $\mathcal{E}$ , composé des signaux décroissants. Un signal  $v \in \mathcal{E}_{\text{dec}}$  satisfait

$$\forall t \in \square, \forall \tau \in \square ; v(t + \tau) \preceq v(t).$$

- Le sous-moduloïde  $\mathcal{E}_{\text{cr}}$  de  $\mathcal{E}$ , composé des signaux croissants. Un signal  $v \in \mathcal{E}_{\text{cr}}$  satisfait

$$\forall t \in \square, \forall \tau \in \square ; v(t + \tau) \succeq v(t).$$

#### Exemple 3.3. (Dateurs et compteurs) :

Les moduloïdes  $\overline{\square}_{\text{ma}}$  et  $\overline{\square}_{\text{mi}}$  constituent des ensembles de signaux. Pour l'étude des Systèmes à Événements Discrets, deux types de signaux sont particulièrement appropriés [Cohen *et al.*, 1986].

**Définition 3.4. (Dateurs) :** On appelle *dateur* une variable  $d(k)$ ,  $k \in \bullet$ , qui désigne la date de la  $k$ -ième occurrence de l'événement référencé par la lettre  $d$ . On considère généralement qu'un dateur prend ses valeurs dans le dioïde  $\overline{\square}_{\text{ma}}$  (ou  $\overline{\square}_{\text{ma}}$ ), et donc qu'il constitue un *signal* croissant de  $\overline{\square}_{\text{ma}}^z$  (ou  $\overline{\square}_{\text{ma}}^z$ ).

**Définition 3.5. (Compteurs)** : on appelle *compteur* une fonction du temps  $c(t)$ ,  $t \in \bullet$ , qui désigne le nombre cumulé d'occurrences de l'événement "c" ayant lieu jusqu'à la date  $t$ . En se rappelant que l'ordre défini sur  $\overline{\square}_{\min}$  est l'inverse de l'ordre usuel  $\geq$ . Un compteur constitue un *signal* décroissant de  $\overline{\square}_{\min}^z$  (ou  $\overline{\square}_{\min}^z$ ).

**Définition 3.6. (Produit de convolution)** : Le *produit de convolution* de deux signaux est noté  $\otimes$  et est défini par

$$\forall u, v \in \mathcal{E}, \forall t \in \bullet; (u \otimes v)(t) = \bigoplus_{s \in Z} u(s) \otimes v(t - s) = \bigoplus_{s \in Z} u(t-s) \otimes v(s).$$

Le *produit de convolution*, défini sur  $\mathcal{E}$ , est commutatif si le *dioïde*  $(D, \oplus, \otimes)$  est commutatif.

L'ensemble  $D$ , muni de la somme point-à-point  $\oplus$  comme loi additive et du produit de convolution  $\otimes$  en tant que loi multiplicative, est un dioïde complet, dont les éléments nul et unité sont définis respectivement par :

$$\begin{aligned} \varepsilon(t) &= \varepsilon, \forall t \in \bullet \\ e(t) &= \begin{cases} e & \text{pour } t = 0, \\ \varepsilon & \text{sinon} \end{cases} \end{aligned}$$

**Exemple 3.7.** : Le *produit de convolution* de deux signaux de  $\overline{\square}_{\max}$  donne

$$\forall u, v \in \overline{\square}_{\max}, \forall t \in \bullet; (u \otimes v)(t) = \bigoplus_{s \in Z} u(s) \otimes v(t - s) = \max_{s \in Z} \{u(s) + v(t - s)\}.$$

On parle dans ce cas de *produit de sup-convolution*.

De manière duale, le *produit de convolution* de deux signaux de  $\overline{\square}_{\min}$  donne

$$\forall u, v \in \overline{\square}_{\min}, \forall t \in \bullet; (u \otimes v)(t) = \min_{s \in Z} \{u(s) + v(t - s)\}.$$

On parle alors de produit d'*inf-convolution*.

**Définition 3.8. (Système linéaire)** : Un système est une application  $\mathcal{S} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$ ,  $u \mapsto v$  linéaire. Il est dit *linéaire* sur le *dioïde*  $(D, \oplus, \otimes)$  si

$$\forall u, v \in \mathcal{E}; \quad \mathcal{S}(u \oplus v) = \mathcal{S}(u) \oplus \mathcal{S}(v),$$

et

$$\begin{aligned} \forall u \in \mathcal{E}, \forall a \in D; \quad \mathcal{S}(a \cdot u) &= a \cdot \mathcal{S}(u), \\ [\mathcal{S}(a \cdot u)](t) &= a \otimes [\mathcal{S}(u)](t), \forall t \in \bullet. \end{aligned}$$

**Exemple 3.9.** : Un *système linéaire* élémentaire est le système noté  $\square^s$ , dont la sortie  $y$  est égale à l'entrée  $u$  retardée de  $s$  ( $s \in \bullet$ ) :

$$\forall t \in \bullet; y(t) = [\square^s (u)](t) = u(t - s).$$

Comme il est usuel en *théorie des systèmes linéaires*, on fait une hypothèse de continuité qui se formule comme suite .

**Définition 3.10. (Système continu) :** Un système  $\mathcal{S}$  est dit *continu* si pour tout sous-ensemble fini  $(u_i)_{i \in I}$  d'éléments de  $\mathcal{E}$ , on a

$$\mathcal{S}\left(\bigoplus_{i \in I} u_i\right) = \bigoplus_{i \in I} \mathcal{S}(u_i)$$

Cette définition n'est valide que si le *dioid*  $(D, \oplus, \otimes)$  est complet.

**Convention 3.11. :** Dans ce qui suit, les *systèmes linéaires* seront systématiquement supposés satisfaire l'hypothèse de continuité. Le qualificatif *continu* sera donc omis (mais toujours sous-entendu) lorsque l'on désignera un *système linéaire*.

**Définition 3.12. (Système causal) :** Un système  $\mathcal{S}$  est dit *causal* si pour toutes entrées  $u_1$  et  $u_2$ , on a

$$\forall \tau \in \square, u_1(t) = u_2(t) \text{ pour } t \leq \tau \Rightarrow [\mathcal{S}(u_1)](t) = [\mathcal{S}(u_2)](t) \text{ pour } t \leq \tau.$$

**Définition 3.13. (Système stationnaire) :** Un système  $\mathcal{S}$  est dit *stationnaire* (ou invariant dans le temps) si

$$\forall u \in \mathcal{E}, \forall s \in \square; \mathcal{S}(\square^s (u)) = \square^s \mathcal{S}(u),$$

où le système élémentaire  $\square^s$  a été défini à l'exemple ci-dessus.

## 3.2. Représentation entrée-sortie des systèmes linéaires

Comme en théorie conventionnelle, tout *système linéaire* sur un *dioid* peut être représenté par sa *réponse impulsionnelle*. Dans le cas de *systèmes linéaires stationnaires*, la relation entrée-sortie peut aussi être définie par une *fonction de transfert*.

### 3.2.1. Réponse impulsionnelle

Un *système linéaire* définie sur  $\mathcal{E}$  peut être décrit par une application unique appelée *réponse impulsionnelle*. Tout *signal* peut s'exprimer comme une somme pondérée d'*impulsions*. En appliquant le principe de superposition, toute réponse d'un système linéaire peut en particulier s'écrire comme la somme des réponses aux différentes composantes impulsionnelles du *signal* d'entrée. La seule connaissance de la *réponse impulsionnelle* d'un système linéaire suffit à caractériser complètement le comportement entrée-sortie de ce système.

Pour un système stationnaire, la *réponse impulsionnelle* peut s'apparenter à un simple signal, la relation entrée-sortie se réduit alors à un produit de convolution de ce signal et de l'entrée.

**Définition 3.14. (Impulsion) :** On appelle *impulsion*, le signal

$$\begin{cases} e & \text{pour } t = 0, \\ \varepsilon & \text{sinon} \end{cases}$$

$$e: t \mapsto e(t) =$$

$\delta^s$  est l'application qui représente l'impulsion de Dirac retardée en  $s$ , et qui s'exprime par

$$\forall t \in \square, \delta^s(t) = \square^s(e(t)) = e(t-s)$$

alors

$$\forall u \in \mathcal{E}, \forall t \in \square; u(t) = \bigoplus_{s \in Z} u(s)e(t-s) = \bigoplus_{s \in Z} u(s) \delta^s(t).$$

### 3.2.1.1. Représentation des systèmes

**Théorème 3.15.** : Soit  $\mathcal{S}$  un système linéaire. Il existe une unique application  $h: \square^2 \mapsto D$ , appelée *réponse impulsionnelle*, telle que :

$$\forall u \in \mathcal{E}, \forall t \in \square; y(t) = [\mathcal{S}(u)](t) = \bigoplus_{s \in Z} h(t,s) u(s).$$

avec  $h(t,s) \stackrel{\Delta}{=} [\mathcal{S}(\delta^s)](t)$ , (cf. preuve [6], §2.2.1.2 - Page 24).

**Théorème 3.16.** : Un système  $\mathcal{S}$  est *causal* si, et seulement si, sa *réponse impulsionnelle* est telle que

$$h(t,s) = \varepsilon \text{ pour } t < s.$$

C'est-à-dire que si une *impulsion* est appliquée à l'instant  $s$  en entrée d'un système *causal*, alors sa sortie est nulle (égale à  $\varepsilon$ ) avant cet instant ; ce qui, de façon plus générale, traduit le fait qu'un système *causal* est "non-anticipatif".

**Théorème 3.17.** : Un système linéaire  $\mathcal{S}$  est *stationnaire* si, et seulement si, sa *réponse impulsionnelle*  $h$  est telle que

$$\forall t, s, \tau \in \square, h(t + \tau, s + \tau) = h(t,s).$$

En choisissant  $\tau = -s$  dans l'équation ci-dessus, on obtient :

$$\forall t, s \in \square, h(t,s) = h(t-s, 0).$$

Ce qui signifie que la réponse à l'instant  $t$  à une *impulsion* appliquée à l'instant  $s$ , dépend dans ce cas uniquement du "laps de temps écoulé", à savoir,  $t - s$ . Ainsi, la *réponse impulsionnelle* d'un système stationnaire est fonction d'une seule variable, et, par abus de notation, il est couramment posé

$$h(t-s, 0) = h(t-s).$$

La sortie d'un système stationnaire peut alors s'exprimer sous la forme d'un *produit de convolution* de l'entrée et de la *réponse impulsionnelle* :

$$\begin{aligned} y(t) &= \bigoplus_{s \in Z} h(t-s) u(s). \\ &= (h \otimes u)(t). \end{aligned}$$



### 3.2.2. Les fonctions monotones non-décroissantes

La fonction  $u(t)$  est *non-décroissante* pour l'ordre usuel (décroissant pour l'ordre  $\preceq$ ), c'est-à-dire avec l'ordre  $\square_{\min}$ ,

$$u(t) \square u(t+\theta), \forall t, \forall \theta \geq 0 \tag{3.1}$$

pour éviter toute ambiguïté en dit *monotone* pour exprimer la (3.1) on va voir pour la suite que le sous-ensemble de  $\mathcal{S}$  des fonctions *monotones* est un genre de 'idéal' ce qui est également un *dioid*, et que les sorties et les *réponses impulsionnelles* des systèmes linéaires stationnaires peuvent également être naturellement contraintes pour se situer dans cet *idéal*.

Soit

$$\bar{e} = \inf_{\theta \geq 0} \delta^{-\theta}$$

**Lemme 3.18. :**

1- On a

$$\bar{e} \otimes \bar{e} = \bar{e} \tag{3.2}$$

2- Un élément  $u \in \mathcal{S}$  est *monotone* si et seulement si, il satisfait :

$$u = \bar{e} \otimes u$$

3- Soit  $u \in \mathcal{S}$ , alors  $\bar{u} \stackrel{\Delta}{=} \bar{e}$  est le plus petit élément *monotone* qui est plus grand que  $u$  (dans le sens  $\preceq$ ).

4- On défini la relation d'équivalence suivante :

$$u \equiv v \Leftrightarrow \bar{e} \otimes u = \bar{e} \otimes v$$

En effet, on peut vérifier que le point 4 du lemme, et les considérations qui suivent, peuvent s'étendre à n'importe qu'elle situation où  $\bar{e}$  (qui ne sont pas nécessairement reliaer au fonctions *non-décroissantes*) satisfait (3.2).

En fait, si on considère tout système linéaire stationnaire par sa *réponse impulsionnelle*  $h$  et une entrée *monotone*  $u$ , on a

$$y = h \otimes u = h \otimes \bar{e} \otimes u = (\bar{e} \otimes h) \otimes u = \bar{e} \otimes y,$$

ce qui montre que  $y$  est *monotone* et que  $h$  peut être remplacée par sa version *monotone*, c'est-à-dire,  $\bar{e} \otimes h$ .

### 3.2.3. Fonction de transfert des systèmes stationnaires.

Dans la représentation de système (stationnaire) proposée dans cette section, le *produit de convolution* de deux signaux est transformé en un produit de séries formelles correspondantes. En particulier, le *produit de convolution* d'un signal d'entrée et de la *réponse impulsionnelle*, qui permet de calculer la sortie de tout système stationnaire, est transformé en un produit de la série du *signal* d'entrée et de la série, ou *fonction de transfert*, du système. Les signaux et système ainsi représentés par des séries formelles sont manipulés comme des éléments d'un *diïde* de série formelles.

**Définition 3.19. (Diïde de séries formelles) :** Soit  $(D, \oplus, \otimes)$  un *diïde* et  $f$  une application de  $\square$  dans  $D$ . On définit la série formelle  $F(z)$  en l'indéterminée  $z$  à coefficients dans  $D$  par :

$$F(z) = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} f(t) z^t .$$

Nous désignerons par  $\langle F(z), z^t \rangle$  le coefficient  $f(t)$  de  $F(z)$  pour  $z^t$ .

L'ensemble des séries formelles en l'indéterminée  $z$  et à coefficients dans  $D$ , muni des opérations  $\oplus$  et  $\otimes$ , définies par :

$$\begin{aligned} F(z) \oplus G(z) &: \langle F(z) \oplus G(z), z^t \rangle = \langle F(z), z^t \rangle \oplus \langle G(z), z^t \rangle \\ F(z) \otimes G(z) &: \langle F(z) \otimes G(z), z^t \rangle = \bigoplus_{i+j=t} \langle F(z), z^i \rangle \otimes \langle G(z), z^j \rangle, \end{aligned}$$

est un *diïde* noté  $D \square z \square$ .

La transformée consiste à représenter un *signal*  $v \in \mathcal{E}$  par une série formelle en l'indéterminée  $z$ , notée  $V(z)$ , et est donnée par :

$$V(z) = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} v(t) z^t .$$

Développons le *produit de convolution* de deux signaux :

$$\begin{aligned} \forall u, v \in \mathcal{E}, \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} (u \otimes v)(t) z^t &= \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} u(t-s) v(s) z^t . \\ &= \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} u(t') v(s) z^{t'+s} \quad (t' = t - s) . \\ &= \bigoplus_{t' \in \mathbb{Z}} u(t') z^{t'} \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} v(s) z^s \\ &= U(z) V(z), \end{aligned}$$

ce qui correspond à un produit de séries formelles.

Rappelons que la sortie d'un système (stationnaire) est donnée par le *produit de convolution* de la *réponse impulsionnelle* du système et du *signal* d'entrée, soit

$$y(t) = (h \otimes u)(t) = \bigoplus_{s \in \mathbb{Z}} h(t-s) u(s).$$

La transformée de cette relation entrée-sortie est donnée par le produit

$$Y(z) = H(z) U(z),$$

où  $H(z)$  est la série, ou fonction, de transfert du système et  $U(z)$  est la série d'entrée.

### 3.2.3.2. Transformées particulières ( $\gamma$ et $\delta$ )

(Les notions de *dateurs* et *compteurs* utilisées dans cette partie sont introduites dans l'exemple de la section 3.1. Signaux et systèmes)

**Définition 3.20. (Transformée en  $\gamma$ ) :** La transformée en  $\gamma$  d'un *dateur*  $d$  est définie comme la série formelle

$$D(\gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} d(k) \gamma^k,$$

La structure algébrique qui convient d'utiliser avec cette représentation est le *diïde complet* de séries formelles  $\overline{\mathbb{I}}^{\text{ma}}[\gamma]$ . Étant que signal croissant, un *dateur*  $d$  vérifie

$$k \in \bullet, d(k) = \bigoplus_{\tau \in \mathbb{N}} d(k - \tau),$$

sa transformée en  $\gamma$  doit par conséquent satisfaire

$$\begin{aligned} D(\gamma) &= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} d(k) \gamma^k \\ &= \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \bigoplus_{\tau \in \mathbb{N}} d(k - \tau) \gamma^k \\ &= \bigoplus_{\tau \in \mathbb{N}} \gamma^\tau \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} d(k - \tau) \gamma^{k-\tau} \\ &= \gamma^* D(\gamma) \end{aligned}$$

Ainsi seules les séries formelles invariantes par le produit  $\gamma^*$  avec, parmi les éléments de  $\overline{\mathbb{I}}^{\text{ma}}[\gamma]$ , seront susceptibles de représenter la transformée en  $\gamma$  de *dateurs*. Il a été montré [Cohen 1993] que ce sous-ensemble des "séries croissantes" peut également être muni d'une structure de *diïde*, et constitue, par la même, la structure appropriée pour manipuler les transformées en  $\gamma$  des *dateurs*.

**Définition 3.21. (Transformée en  $\delta$ ) :** De la même manière, on peut introduire une transformée pour les *compteurs*. Un *compteur* est ici défini comme une application décroissante de  $\bullet$  dans le diïde complet  $\overline{\mathbb{I}}^{\text{min}}$ . La transformée en  $\delta$  d'un *compteur*  $c$  est la série formelle

$$C(\delta) = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} c(t) \delta^t.$$

Les séries formelles associées aux *compteurs* peuvent être manipulées comme des éléments du *diïde complet*  $\overline{\mathbb{I}}^{\text{min}}[\delta]$ . Néanmoins, en tant que signal décroissant, un compteur  $c$  vérifie

$$k \in \bullet, c(t) = \bigoplus_{\tau \in N} c(t + \tau),$$

et sa transformée en  $\delta$  doit satisfaire

$$C(\delta) = \bigoplus_{i \in Z} \bigoplus_{\tau \in N} c(t + \tau) \delta^i = \bigoplus_{\tau \in N} \delta^{-\tau} \bigoplus_{i \in Z} c(t + \tau) \delta^{i+\tau} = (\delta^{-1})^* C(\delta).$$

La structure algébrique appropriée pour manipuler les transformées en  $\delta$  des compteurs correspond au dioïde composé des séries de  $\min_n \delta$  invariantes par le produit avec  $(\delta^{-1})^*$ .

### 3.2.3.3. Cas des systèmes multi-variables

De façon naturelle, les résultats avancés ci-dessus se généralisent aux systèmes multi-variables. Soit  $S$  un système linéaire comportant  $p$  entrées et  $q$  sorties, on note les signaux d'entrée et de sortie

$$u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix}$$

avec  $u_i \in \mathcal{E}$ ,  $i = 1, \dots, p$ , et  $y_j \in \mathcal{E}$ ,  $j = 1, \dots, q$ .

**Théorème 3.22** : Soit  $S : \mathcal{E}^p \rightarrow \mathcal{E}^q$  un système linéaire. Il existe une unique application  $H$ , appelée *réponse impulsionnelle*, telle que

$$\forall u \in \mathcal{E}^p, \forall t \in \bullet, [S(u)](t) = \bigoplus_{s \in Z} H(t, s) u(s),$$

où  $H(t, s) \in D^{q \times p}$ .

De la même manière, on généralise les résultats concernant la causalité et la stationnarité des systèmes multi-variables. Ainsi, la relation entrée-sortie s'écrit comme suit :

$$y(t) = \bigoplus_{s \in Z} H(t - s) u(s) = (H \otimes u)(t),$$

la transformée de cette relation entrée-sortie est donnée par le produit

$$Y(z) = H(z) U(z),$$

où  $H(z)$  est la matrice de transfert composée de séries formelles en l'indéterminée  $z$ .

### 3.2.4. Représentation d'état

Les systèmes à événement discrets sont souvent étudiés *via* une description interne sachant que leurs complexités nécessitent en effet de décomposer leur analyse. En particulier, pour les applications de la théorie des systèmes linéaires sur les *dioides*, l'étape de modélisation des Systèmes à Evénements Discrets consiste quasi-systématiquement à définir des variables internes au système, puis établir les équations liant les variables les unes aux autres. Ainsi la connaissance de ces variables à l'instant initial, associée à la connaissance de l'évolution des entrée du système, suffit à prévoir l'évolution du système, on parle de variables d'état.

#### 3.2.4.1. Equations fondamentales

Un système est linéaire et causal si son évolution peut être décrite par les équations suivantes :

$$x(t) = A(t-1)x(t-1) \oplus B(t)u(t) \quad (3.3)$$

$$y(t) = C(t)x(t) \quad (3.4)$$

où pour  $t \in \bullet$

$u(t) \in D^p$  est le vecteur des signaux d'entrée ;  
 $x(t) \in D^n$  est le vecteur des signaux d'état ;  
 $y(t) \in D^q$  est le vecteur des signaux de sortie ;  
 $A(t) \in D^{n \times n}$ ,  $B(t) \in D^{n \times p}$  et  $C(t) \in D^{q \times n}$ .

Les équations (3.3) et (3.4) forment la représentation d'état standard d'un système. Les matrices  $(A(t), B(t), C(t))$ ,  $t \in \bullet$ , constituent une réalisation d'état du système. Le modèle est dit stationnaire si les matrices  $(A(t), B(t), C(t))$  ne dépendent pas explicitement de  $t$ , c'est-à-dire, si  $\forall t \in \bullet, A(t) = A, B(t) = B, C(t) = C$ .

#### 3.2.4.2. Solution de l'équation d'état

Partant de l'équation (3.3) et en supposant que le système est dans l'état  $x(t_0)$  à l'instant initiale  $t_0$ , on s'applique à calculer son état pour un instant postérieur  $t$ .

**Définition 3.23. (Système libre et matrice de transition) :** On dit qu'un système est libre si l'entrée est nulle, c'est-à-dire, si

$$\forall t \in \bullet, x(t) = A(t-1)x(t-1).$$

La solution s'obtient par simple récurrence :

$$\begin{aligned} t > t_0, \quad x(t) &= A(t-1)A(t-2) \otimes \dots \otimes A(t_0)x(t_0) \\ &= \Phi(t, t_0)x(t_0) \end{aligned}$$

où la matrice de transition  $\Phi$  est défini par

$$\Phi(t, i) = \begin{cases} \text{non définie} & \text{pour } i > t, \\ \text{Id}_n & \text{pour } i = t, \\ = A(t-1) A(t-2) \otimes \dots \otimes A(t_0) & \text{pour } i < t, \end{cases} \quad (3.5)$$

la désignation de matrice de transition provient du fait que l'état à tout instant  $t$  est déduit de l'état initial  $x(t_0)$  multiplié par cette matrice ( $\Phi(t, t_0)$ ).

**Définition 3.24. (Système commandé) :** L'équation (3.3) correspond à un système *commandé*, dans le cas où l'entrée  $u$  est non nulle. Le développement de la récurrence donne

$$\begin{aligned} x(t) &= A(t-1) x(t-1) \oplus B(t) u(t) \\ &= A(t-1) A(t-2) x(t-2) \oplus A(t-1) B(t-1) u(t-1) \oplus B(t) u(t) \\ &\bullet \\ &= \Phi(t, t-\tau) x(t-\tau) \oplus \bigoplus_{j=t-\tau+1}^t \Phi(t, j) B(j) u(j), \end{aligned}$$

en développant jusqu'à  $t_0 = t - \tau$ , on obtient la solution de l'équation d'état :

$$t > t_0, x(t) = \Phi(t, t_0) x(t_0) \oplus \bigoplus_{j=t_0+1}^t \Phi(t, j) B(j) u(j). \quad 3.6$$

L'équation (3.6) met en évidence que si l'état est connu à l'instant  $t_0$ , le calcul de l'état pour tout instant  $t$  postérieur ne nécessite que la connaissance de l'entrée et des paramètres du système entre  $t_0$  et  $t$  (la représentation (3.3) satisfait la propriété markovienne).

On dira que :

- Le terme  $\Phi(t, t_0)x(t_0)$ , correspondant à la solution de l'équation d'état du système libre, représente le régime libre de l'état,
- Le terme  $\bigoplus_{j=t_0+1}^t \Phi(t, j) B(j) u(j)$  représente le régime forcé de l'état.

**Définition 3.25. (Système relaxé) :** Un système est dit *relaxé* à l'instant  $t_0$  si

$$x(t_0) = \bigoplus_{j \leq t_0} \Phi(t_0, j) B(j) u(j).$$

en d'autre termes, un système est dit *relaxé* à l'instant  $t_0$  si l'état  $x(t_0)$  provient d'un fonctionnement passé du système pour lequel seul le régime forcé intervenait.

### 3.2.4.3. Relation entrée-sortie, expression de la réponse impulsionnelle

La relation entrée-sortie d'un système décrit par sa représentation d'état (3.3) et (3.4) permet d'identifier l'expression de sa *réponse impulsionnelle*.

Le calcul se déduit de l'équation de sortie du système (3.4) et de la solution de son équation d'état (3.6) :

$$t > t_0, y(t) = C(t)\Phi(t, t_0) x(t_0) \oplus \bigoplus_{j=t_0+1}^t C(t)\Phi(t, j) B(j) u(j), \quad (3.7)$$

Si le système est relaxé à l'instant  $t_0$ , on obtient la relation

$$t > t_0, y(t) = \bigoplus_{j \leq t} C(t)\Phi(t, j) B(j) u(j),$$

posons,

$$j \leq t, h(t, j) = C(t)\Phi(t, j) B(j),$$

on obtient,

$$t > t_0, y(t) = \bigoplus_{j \leq t} h(t, j) u(j).$$

L'application  $h$  est la *réponse impulsionnelle* du système considéré.

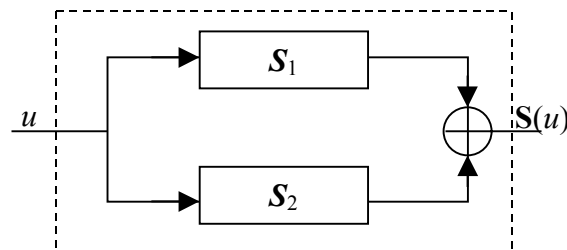
### 3.2.5. Compositions de systèmes linéaires.

Le système résultant de la mise en *série*, en *parallèle* ou en *feedback* (contre-réaction), de systèmes linéaire est également un système linéaire. De façon analogue les systèmes linéaires sur un *dioid*e peuvent être composés entre eux pour former un *système linéaire*.

**Notation 3.26.** : On note  $L(\mathcal{E})$  l'ensemble des systèmes linéaire sur  $\mathcal{E}$ .

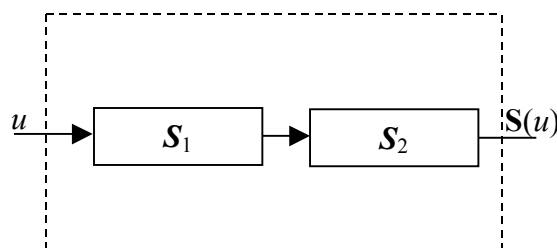
#### 3.2.5.2. Compositions parallèle et série

On muni  $L(\mathcal{E})$  de deux opération internes appelées composition *parallèle* et *série* notées respectivement  $\oplus$  et  $\otimes$ .



Le système  $S = S_1 \oplus S_2$  est la compositions *parallèle* de  $S_1$  et  $S_2$ , définie par

$$\forall t \in \bullet, [S(u)](t) = [S_1(u)](t) \oplus [S_2(u)](t).$$



La composition série de  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  s'écrit  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2$ , et est définie par

$$\forall t \in \bullet, [\mathcal{S}(u)](t) = [\mathcal{S}_1(\mathcal{S}_2(u))](t).$$

**Théorème 3.27.** : Soient deux systèmes linéaires de réponses impulsionnelles respectives  $h_1$  et  $h_2$ .

La réponse impulsionnelle  $h$  de  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$  est donnée par :

$$t, s \in \bullet, h(t,s) = h_1(t,s) \oplus h_2(t,s)$$

La réponse impulsionnelle  $h$  de  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2$  est donnée par :

$$t, s \in \bullet, h(t,s) = \bigoplus_{\tau \in \mathbb{Z}} h_1(t,\tau) h_2(\tau, s)$$

**Théorème 3.28.** : Soient  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  deux systèmes linéaires de réalisations d'état respectives  $(A_1(t), B_1(t), C_1(t))$  et  $(A_2(t), B_2(t), C_2(t))$ ,  $t \in \bullet$ .

Une réalisation  $(A(t), B(t), C(t))$  de  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \oplus \mathcal{S}_2$  est donnée par :

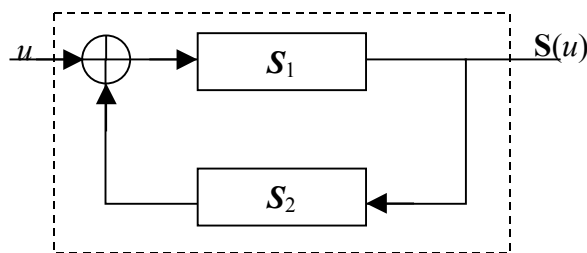
$$t \in \bullet, A(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) & \varepsilon \\ \varepsilon & A_2(t) \end{pmatrix} B(t) = \begin{pmatrix} B_1(t) \\ B_2(t) \end{pmatrix} C(t) = (C_1(t) \ C_2(t)).$$

Une réalisation  $(A(t), B(t), C(t))$  de  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_1 \otimes \mathcal{S}_2$  est donnée par :

$$t \in \bullet, A(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) & B_1(t)C_2(t) \\ B_2(t)C_1(t) & A_2(t) \end{pmatrix} B(t) = \begin{pmatrix} B_1(t) \\ \varepsilon \end{pmatrix} C(t) = (C_1(t) \ \varepsilon).$$

### 3.2.5.3. Mise en feedback

Soit  $\mathcal{S}$  le système résultant de la mise en *feedback* de  $\mathcal{S}_2$  sur  $\mathcal{S}_1$ .



La relation entrée-sortie de  $\mathcal{S}$  s'écrit :

$$\begin{aligned} y &= \mathcal{S}(u) \\ &= \mathcal{S}_1(\mathcal{S}_2(y) \oplus u) \\ &= \mathcal{S}_1(\mathcal{S}_2(y)) \oplus \mathcal{S}_1(u) \\ &= \mathbf{H}(y) \oplus \mathcal{S}_1(u) \end{aligned}$$

en ayant défini l'application  $\mathbf{H}$  comme suit

$$\mathbf{H} : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{E}$$

$$x \mapsto \mathbf{H}(x) = \mathcal{S}_1(\mathcal{S}_2(x)).$$



**Théorème 3.29 :** Soient  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  deux système linéaires de réponses impulsionnelles respectives  $h_1$  et  $h_2$ . La réponse impulsionnelle du système  $\mathcal{S}$ , issu de la mise en feedback de  $\mathcal{S}_1$  sur  $\mathcal{S}_2$ , est donnée par :

$$h(t,s)=[(h_1 \hat{\otimes} h_2)^{(*)} \hat{\otimes} h](t,s),$$

où

$$[h_1 \hat{\otimes} h_2](t,s) = \bigoplus_{\tau \in Z} h_1(t,\tau) h_2(\tau,s),$$

$$(h_1 \hat{\otimes} h_2)^{(*)} = \bigotimes_{n \in N} (h_1 \hat{\otimes} h_2)^{(n)},$$

$$(h_1 \hat{\otimes} h_2)^{(*)} = \underbrace{(h_1 \hat{\otimes} h_2) \hat{\otimes} \dots \hat{\otimes} (h_1 \hat{\otimes} h_2)}_{n \text{ fois}}$$

**Théorème 3.30 :** Soient  $\mathcal{S}_1$  et  $\mathcal{S}_2$  deux systèmes linéaires de réalisations d'état respectives  $(A_1(t), B_1(t), C_1(t))$  et  $(A_2(t), B_2(t), C_2(t))$ ,  $t \in \bullet$ . Une réalisation  $(A(t), B(t), C(t))$  de  $\mathcal{S}$ , issue de la mise en feedback de  $\mathcal{S}_1$  sur  $\mathcal{S}_2$ , est donnée par :

$$t \in \bullet, A(t) = \begin{pmatrix} A_1(t) & B_1(t)C_2(t) \\ B_2(t)C_1(t) & A_2(t) \end{pmatrix} B(t) = \begin{pmatrix} B_1(t) \\ \varepsilon \end{pmatrix} C(t) = (C_1(t)\varepsilon).$$

## Chapitre 4

### Classe des systèmes (min,+) linéaires :

Dans cette partie, on reprend un exemple proposé par G. Cohen [5], à savoir un système continu représenté par des équations (min,+) linéaires.

#### 4.1. Un système continu et son analogue discret

Considérons le système mono-entrée, mono-sortie  $S : u \mapsto y$  représenté à gauche de la figure (6.) Un fluide circule à travers un long tuyau vers un premier réservoir (vide à l'instant 0). L'entrée  $u(t)$  représente la quantité cumulée de liquide entrée dans le tuyau jusqu'à l'instant  $t$  (la fonction  $t \mapsto u(t)$  est donc croissante et l'on a  $u(t) = 0$  pour  $t \leq 0$ ). Le liquide met un temps  $d$  à parcourir le tuyau. Le liquide passe du premier au second réservoir à travers une ouverture qui limite le débit instantané à la valeur maximale  $\beta$  ( $\beta > 0$ ). On note  $y(t)$  le volume du fluide dans le second réservoir à l'instant  $t$ . On a une quantité initiale  $y(0) = c$ .

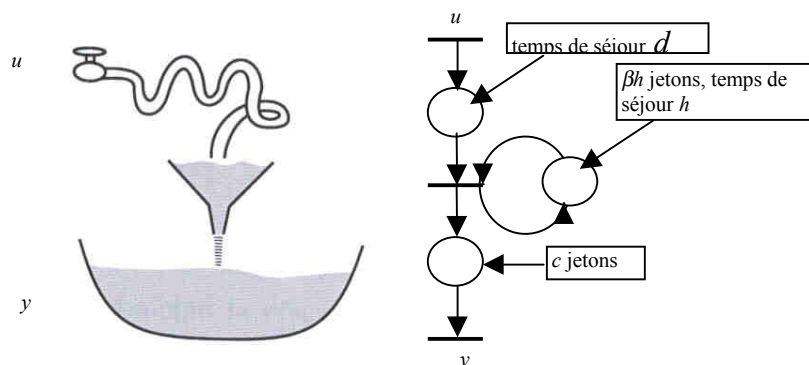


Figure 6 : Système continu et analogue discret

### 4.1.1. Equations dynamiques

Le débit d'entrée dans le second réservoir étant limité à  $\beta$ , on a :

$$\forall t, \forall \theta \geq 0, y(t) \leq y(t - \theta) + \beta\theta \quad 4.1$$

d'autre part,

$$\forall t, y(t) \leq u(t - d) + c \quad 4.2$$

il en résulte que  $\forall t, \forall \theta \geq 0$ ,

$$y(t) \leq u(t - d - \theta) + c + \beta\theta,$$

d'où pour tout  $t$ ,

$$y(t) \leq \inf_{\theta \geq 0} [u(t - d - \theta) + c + \beta\theta],$$

ainsi, en posant  $\tau = d + \theta$ , on a :

$$y(t) = \inf_{\tau \geq d} [u(t - \tau) + c + \beta(\tau - d)]. \quad 4.3$$

Soit

$$k(t) = \begin{cases} c & \text{pour } t \leq d; \\ c + \beta(t - d) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Définissons  $\bar{y}$  par :

$$\bar{y}(t) \stackrel{def}{=} \inf_{\tau \in \mathfrak{R}} [u(t - \tau) + k(\tau)] \quad 4.4$$

toute sortie  $y$  vérifie  $y \leq \bar{y}$ . En outre :

$$\begin{aligned} \bar{y}(t + \theta) &= \inf_{\tau \in \mathfrak{R}} [u(t + \theta - \tau) + k(\tau)] \\ &= \inf_{s \in \mathfrak{R}} [u(t - s) + k(s + \theta)] \quad s = (\tau - \theta) \\ &\leq \inf_{s \in \mathfrak{R}} [u(t - s) + k(s)] + \beta\theta \quad (\forall s, \forall \theta \geq 0, k(s + \theta) \leq k(s) + \beta\theta) \\ &= \bar{y}(t) + \beta\theta \end{aligned}$$

d'où il résulte que  $\bar{y}$  est la solution maximale de (4.1) et (4.2). C'est cette solution  $\bar{y}$  qui décrira le comportement physique du système si l'on suppose que le liquide s'écoule aussi rapidement que possible. Il est ainsi montré que la sortie au plus tôt du système est représentée par une *inf-convolution* de l'entrée avec la fonction  $k$ . De cela, il résulte

immédiatement que le système  $u \mapsto S(u)$  est  $(\min,+)$  linéaire, i.e., vérifie les deux propriétés suivantes :

$$\text{min-superposition } \forall u, u' \in \overline{R} \quad S(\min(u, v)) = \min(S(u), S(v)),$$

$$\text{invariance additive } \forall \lambda \in \overline{R} \quad S(\lambda + u) = \lambda + S(u).$$

### 4.1.2. Analogie discret

On peut voir le système précédant comme la version continue d'un système à événements discrets.

Considérons la version discrétisée suivante de  $S$  :

$$S_h : \sup y \text{ tel que } \begin{cases} y(t+h) - y(t) \leq \beta h, \\ y(t) \leq c + u(t-d), \end{cases} \quad 4.5$$

où  $t \in h\mathbb{Z}$ . La solution maximale de (4.5) vérifie clairement la récurrence suivante:

$$\overline{y}(t) = \min(\overline{y}(t-h) + \beta h, c + u(t-d)). \quad 4.6$$

si  $c, \beta h$  et  $d/h$  sont entiers, (4.6) n'est autre que l'équation dynamique du graphe d'événements temporisé représenté à droite de la figure (6.) Un tel graphe correspondrait par exemple au système de production suivant : les pièces rentrent dans un atelier, au bout d'un temps de préparation de  $d$  unités de temps, elle sont placées dans un stock en attente devant un groupe de  $\beta h$  machines identiques capable de travailler en parallèle. Chaque pièce reste  $h$  unités de temps dans une machine.

On montre en raisonnant comme précédemment que la sortie est donnée par l'*inf-convolution* discrète :

$$\forall t \in h\mathbb{Z}, \overline{y}(t) = \inf_{\tau \in \mathbb{Z}} [k(\tau) + u(t-\tau)] \quad 4.7$$

où la fonction  $k$  est comparable à celle exprimée dans le cas continu.

### 4.1.3. Mélangeur

Soient deux systèmes du type de celui de la figure (6), le premier traitant un liquide de couleur rouge, le second traitant un liquide de couleur blanche, et un mélangeur produisant du rose à partir de ces deux liquides en proportion égale. Soient  $u_r, u_b$  les quantités cumulées de liquide rouge, respectivement blanc, entré jusqu'à l'instant  $t$ . Si le mélange est instantané, la quantité du rose produit est

$$y(t) = \min(u_r(t), u_b(t)).$$

Le système  $(u_r, u_b) \mapsto y$  est clairement  $(\min,+)$ -linéaire. L'analogie discret du mélange est l'opération d'assemblage de deux types de pièces ce qui traduit en terme GET par une transition confluyente (cf. figure 7).

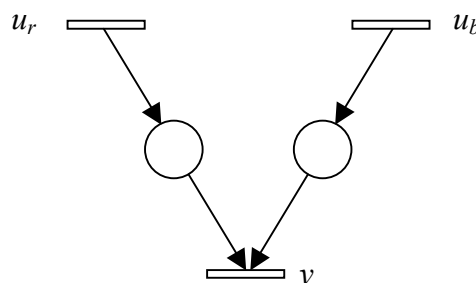


Figure 7 : Mélangeur

## 4.2. Systèmes élémentaires

Après avoir vu comment on peut combiner des systèmes en *série*, en *parallèle* et en *feedback*.

Nous allons définir ici trois systèmes élémentaires, qui sont fondamentaux avec lesquels on peut réaliser des systèmes plus complexes, L'exemple de la figure 6 est composé de 3 systèmes élémentaires mise en *série*.

**4.2.1. Stock  $\gamma^c$**  : il s'agit du système  $\gamma^c$  défini par :

$$\forall t \in \square, \quad \gamma^c u(t) = c \otimes u(t)$$

L'interprétation physique de l'opérateur  $\gamma^c$  se ramène à un *stock* initial de  $c$  unités (mètres cubes dans un réservoir) qui induit un décalage sur les quantités en entrée et en sortie. La notation exponentielle  $\gamma^c$  est justifiée par le fait que  $\gamma^c \gamma^{c'} = \gamma^{c+c'}$ . En particulier,  $\gamma^0 = \text{Id}$  et  $\gamma^1$  peut être noté  $\gamma$ . On a, en outre,

$$(\gamma^c \oplus \gamma^{c'}) u(t) = \min(\gamma^c u(t), \gamma^{c'} u(t)) = \min(c+u(t), c'+u(t)) = \min(c, c') + u(t) = \gamma^{\min(c, c')} u(t),$$

d'où la règle de simplification :

$$\gamma^c \oplus \gamma^{c'} = \gamma^{\min(c, c')} = \gamma^{c \oplus c'}.$$

**4.2.2. Opération de retard  $\delta^d$**  : Il s'agit du système  $\delta^d$  défini par

$$\forall t, \quad \delta^d u(t) = u(t-d).$$

D'un point de vue physique, c'est le temps de passage ou de séjour (pour filtrage, chauffage, ...etc) qui cause des retard. Pour les graphes d'événements temporisés,  $\delta^d$  est l'opérateur associé à une place avec un temps de séjour de  $d$ .

La notation exponentielle  $\delta^d$  est justifiée aussi par le fait que

$$\delta^d \otimes \delta^{d'} = \delta^{d+d'},$$

on note  $\delta$  pour  $\delta^1$ . Pour la somme  $\delta^d \oplus \delta^{d'}$ , il n'y a en général pas de règle de simplification.

Cependant, si l'on se restreint aux signaux croissants, on a

$$(\delta^d \oplus \delta^{d'})u(t) = \min(u(t-d), u(t-d')) = u(t - \max(d, d')),$$

d'où la règle

$$\delta^d \oplus \delta^{d'} = \delta^{\max(d, d')}.$$

**4.2.3. Limitateur de débit  $\omega_\beta$**  : Le système représenté sur la Figure (6) est constitué de trois blocs élémentaires, deux d'entre eux étant les opérateurs "stock"  $\gamma^c$  et "retard"  $\delta^d$ . Nous reprenons cet exemple avec  $c = 0$  et  $d = 0$ . On obtient alors le "limitateur de débit",  $y = \omega_\beta(u)$ , qui pour l'entrée  $u(\cdot)$ , associe la solution maximale (au sens usuel)  $y(\cdot)$  solution du système (4.1) et (4.2) avec  $c = d = 0$  (et  $\beta \geq 0$ ). Dans la section (4.1), il est montré que  $\omega_\beta$  se présente comme suite :

$$\omega_\beta u(t) = \inf_{\tau} [k(t-\tau) + u(\tau)]$$

où

$$k(s) = \begin{cases} \beta s & \text{si } s \geq 0 \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$\omega_\beta \otimes \omega_{\beta'} = \omega_{\min(\beta, \beta')},$$

Physiquement, deux limiteurs de débit placés en série se comportent comme un seul (en fait le plus contraignant des deux). De même, pour la mise en parallèle, on a :

$$\omega_\beta \oplus \omega_{\beta'} = \omega_{\min(\beta, \beta')},$$

il faut bien voir ici que la mise en parallèle correspond au mélange des flux en proportion égale, et non à leur l'addition au sens usuel.

## Annexe

### Marquage d'un RdP

Soit  $\square$  un RdP à  $n$  places  $\{P_i / i \in \{1, \dots, n\}\}$ , le marquage de  $\square$  est un vecteur de dimension  $n$  associant à chaque place  $P_i$  le nombre de jetons  $M(P_i)$  ou  $m_i \in \square+$  présents sur cette place, c'est-à-dire que chaque place contient un nombre entier (positif ou nul) de marques ou jetons. Dans un RdP, chaque place contient un nombre le marquage à un instant donné définit l'état du RdP.





### Règle de franchissement d'une transition :

Une transition  $t$  est dite franchissable ou validée si toutes ses places d'entrée  $P_i$  ( ${}^\circ T_j$ ) comportent au moins un nombre de jetons égal au nombre d'arcs orientés de  $P_i$  vers  $T$ . le franchissement ou le tir d'une transition  $T_j$  consiste à retirer une marque dans chacune des places en amont de la transition  $T_j$  et à ajouter une marque dans chacune des places en aval de la transition  $T_j$ .

**Définition (homomorphisme) [8]** : une application  $f$  définie d'un dioïde  $D$  dans un autre dioïde  $C$  est un *homomorphisme* si

$$\forall a, b \in D, \quad f(a \oplus b) = f(a) \oplus f(b) \text{ et } f(\varepsilon) = \varepsilon, \\ f(a \otimes b) = f(a) \otimes f(b) \text{ et } f(e) = e.$$

## Principales Notations

<b>RdP</b>	réseau de Petri
<b>RdPC</b>	réseau de Petri continu
<b>RdPCC</b>	réseau de Petri continu à vitesses constantes
<b>GE</b>	graphe d'événement
<b>GET</b>	graphe d'événement temporisé
$P_i$	place numéro $i$ d'un RdP
<b>P</b>	ensemble des places
$T_j$	transition numéro $j$ d'un RdP
<b>T</b>	ensemble des transitions
<b>M</b>	marquage d'un RdP
$M_0$	marquage initiale d'un RdP
$V_j$	vitesse maximale associé à la transition $T_j$
$v_j(t)$ ou $v_j$	vitesse instantanée de franchissement associée à la transition $T_j$
${}^\circ T_j$	ensemble des places d'entrée de $T_j$
$T_j^\circ$	ensemble des places de sortie de $T_j$
${}^\circ P_j$	ensemble des transitions d'entrée de $P_j$
$P_j^\circ$	ensemble des transitions de sortie de $P_j$
	place d'un RdP
	transition d'un RdP
	
	

place d'un RdPC

transition d'un RdPC

## Bibliographie

- [1] R. David et H. Alla, "*A modelling and analysis tool for discrete events systems : continuous Petri net*". *Performance Evaluation* 33 (1998) 175-199.
- [2] R. David et H. Alla "*Du Grafcet aux réseaux de Petri*" 2<sup>e</sup> édition.
- [3] R. David et H. Alla, "*On Hybrid Petri Nets*". *Discret Event Dynamic Systems : Theory and Applications*, 11, 9-40, 2001.
- [4] Jean-Louis Ferrier, cours de RdP du DEA AIA 2000-2001.
- [5] Max Plus. "*A linear system theory for systems subject to synchronization and saturation constraints*". In *Proceedings of the first European Control Conference*, Grenoble, july 1991.
- [6] Sébastien Lahaye, "*Contribution à l'étude de systèmes linéaires non stationnaires dans l'algèbre des dioïdes*" Thèse de doctorat, Ecole Doctorale Sciences pour l'Ingénieur de Nantes.
- [7] Janan Zaytoon, "*Systèmes dynamiques hybrides*". HERMES Science Europe Ltd, 2001, (§6. Réseaux de Petri hybrides – par R. David et H. Alla).



[8] F. Baccelli, G. Cohen, G. Olsder, and J.P. Quadrat. "Synchronization and Linearity". Wiley, 1992.

[9] S. Gaubert 1992, "Théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes". Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris.

## Index

	<b>A</b>		<b>F</b>
Alimentée, 3, 4		Feedback, 28, 30, 33	
	<b>C</b>	Fonction de transfert, 20, 23	
Causal, 20, 21, 26		Franchissement, 2, 4, 5, 6, 7, 8, 9	
Commandé, 27		<b>G</b>	
Compteur, 19, 25		Graphe, 2, 32	
Continu, 2, 3, 5, 20, 31, 33		Graphe d'événement, 2	
	<b>D</b>		<b>H</b>
Dateur, 19, 24		Homomorphisme, 15	
Débit, 5, 31, 34			<b>I</b>
Décroissant, 19, 22, 25		Idéal, 22	
Demi-anneau, 11		Impulsion, 21, 22	
Dioïdes, 11		Inf-convolution, 19, 32, 33	
	<b>E</b>	Inversion, 11, 14, 15	
Etoile de Kleene, 16		Irréductible, 16, 17	

<b>J</b>	Produit de convolution, 19, 21, 22, 23, 24
Jetons, 2, 3, 4	
<b>M</b>	<b>R</b>
Marquage, 2, 3, 5, 6, 7	Relaxé, 28
Marques, 2, 3	Réponse impulsionnelle, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 28, 29, 30
Moduloïde, 11, 13, 14, 18	Résiduation, 11, 14, 15
Monotone, 22, 23	
<b>N</b>	<b>S</b>
Non-décroissante, 22	Série, 23, 24, 25, 28, 29, 33, 34
	Signal, 18
<b>O</b>	Sous-dioïde, 11
Ordre, 11, 12, 13, 14, 19, 22	Sup-convolution, 19
	Synchronisation, 3, 18
<b>P</b>	<b>T</b>
Parallèle, 7, 28, 29, 32, 33, 34, 35	Transition, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 27, 33
Petri, 2, 3	Treillis, 12, 15
Places, 2, 3, 6, 7	
Poids, 2	<b>V</b>
Point fixe, 7, 14	Validée, 3, 4, 5, 6
	Vecteur, 2