



ECOLE CENTRALE DE NANTES



UNIVERSITE D'ANGERS

DEA Automatique et Informatique Appliquée

Rapport de recherche

Sur l'étude des systèmes à événements discrets
dans l'algèbre des dioides,
Applications aux systèmes de transport

LAURENT HOUSSIN

Responsable de stage: Sébastien Lahaye

Juillet 2003

Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés
FRE 2656, Angers

Remerciements

Je tiens à remercier tous ceux que j'ai pu omettre dans ce qui suit.

Je voudrais tout d'abord remercier Jean-Louis Ferrier pour son accueil en stage de DEA au sein du Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés (LISA).

Mes remerciements vont également à Sébastien Lahaye, pour son aide, sa disponibilité et son soutien pour la réalisation de ce travail.

Je remercie en général tous les membres du LISA, et en particulier les doctorants, avec qui travailler est très agréable. Je les remercie tous pour leur disponibilité, leurs conseils et pour l'aide qu'ils m'apportent tout au long de ce stage.

Table des matières

Introduction	5
1 Algèbre des Dioïdes	7
1.1 Dioïdes	7
1.1.1 Axiomatique	7
1.1.2 Dioïdes matriciels	9
1.2 Résolution d'équations dans un dioïde	9
1.2.1 Résolution de l'équation $x = Ax \oplus b$ dans les dioïdes complets	10
1.2.2 Théorie de la résiduation	11
1.2.3 Application de la résiduation au produit dans un dioïde	13
1.3 Comportement asymptotique des matrices $(\max,+)$	14
1.3.1 Rappels	15
1.3.2 Interprétations des manipulations matricielles	15
1.3.3 Propriétés spectrales et asymptotiques des matrices $(\max,+)$	16
2 Graphes d'événements temporisés	19
2.1 Introduction aux GET	19
2.2 Mise en équations des GET	19
2.2.1 Dateurs et domaine événementiel	19
2.2.2 Compteurs et domaine temporel	20
2.2.3 Transformée en γ et δ	22
2.2.4 Matrice de transfert	22
2.3 Trajectoires de tir d'un GET	23
2.4 Représentation bi-dimensionnelle	25
2.5 Propriétés des séries formelles dans l'espace bi-dimensionnel	26
2.6 Éléments d'évaluation de performance et de commande	27
2.6.1 Périodicité des systèmes autonomes $(\max,+)$ linéaires	27
2.6.2 Commande en juste-à-temps	28
3 Applications de l'algèbre max-plus aux systèmes de transport ferroviaire	33
3.1 Modélisation d'un système de transport	33
3.1.1 Évolution du système sans planification	33
3.1.2 Prise en compte de la planification	37
3.2 Analyse	38
3.2.1 Conditions initiales	39
3.2.2 Stabilité	40
3.3 Commande	41

4	Contribution à l'étude des réseaux de transport urbain	47
4.1	Pratiques d'exploitation des réseaux de bus urbains	47
4.1.1	Définition d'un tableau de marche	48
4.1.2	Actions de régulation	48
4.2	Modélisation du tableau de marche	48
4.3	Étude de la stabilité	52
4.4	Génération de tables d'horaires	53
4.4.1	Description du problème	53
4.4.2	Formalisation du problème	55
4.4.3	Résolution du problème	56
4.4.4	Mise en oeuvre de la génération de tables d'horaires	61
4.4.5	Exemple d'application	63
	Conclusion	69

Introduction

La théorie des "systèmes à événements discrets", bien qu'elle soit relativement récente, fait l'objet de nombreuses recherches. Par opposition à la théorie dite "classique" de l'Automatique, l'étude des systèmes à événements discrets s'intéresse uniquement au début et à la fin de certains événements. Cette théorie est utilisée pour modéliser des phénomènes de synchronisation ou de concurrence, elle trouve ses applications dans des systèmes de conception humaine comme les systèmes de production, les réseaux informatiques, les réseaux de transport...

La classe des systèmes à événements discrets qui met en jeu des phénomènes de synchronisation ne peut pas être décrit dans l'algèbre usuelle par des équations linéaires à cause de la non linéarité du *max*, cependant elle est modélisable par des équations linéaires dans une algèbre particulière: l'algèbre des dioïdes.

Les systèmes de transport appartiennent à cette classe, c'est pourquoi notre intérêt s'est porté sur leur étude.

Au delà de la phase dite de modélisation, les problèmes qui nous préoccupent sont essentiellement des problèmes d'analyse du système (stabilité, évaluation de performance, comportement asymptotique) et des problèmes d'optimisation (par exemple, minimiser le nombre de retards qui se répercutent dans un réseau suite à une panne).

Ce rapport est organisé de la façon suivante:

- Les outils algébriques sont décrits dans le premier chapitre. Des rappels sont effectués sur la théorie des dioïdes, puis le principe de la résiduation est abordé. Certaines propriétés des matrices à coefficients dans un dioïde sont illustrées par la théorie des graphes.
- Le second chapitre est consacré à l'étude des graphes d'événements temporisés. Ces graphes qui sont en fait une sous classe de réseau de Petri sont parfaitement adaptés pour représenter graphiquement les systèmes (*max,+*) linéaires.
- Dans le chapitre 3, on présente une application de l'algèbre des dioïdes à un système ferroviaire élémentaire. On s'attaque au problème de la modélisation du système, puis une ébauche d'évaluation de performance est effectuée. Enfin, on tente de résoudre un problème d'optimisation du système à savoir la maximisation du nombre de correspondances et minimisation du nombre de retards suite à un retard dans le système. Ce chapitre repose sur les articles [Schutter et al., 1998] et [Goverde et al., 1998].

- On s'efforce dans une quatrième partie d'appliquer la théorie des diodes à l'étude des réseaux de bus urbains. Les problèmes de modélisation, ainsi que de stabilité du réseau sont abordés. On propose également une solution au problème de génération des tables d'horaires.

Chapitre 1

Algèbre des Dioïdes

Dans ce premier chapitre, nous nous efforçons de présenter la théorie des dioïdes. On soulignera notamment les liens avec l'étude des ensembles ordonnés. Des outils algébriques utilisés pour la manipulation des ensembles ordonnés sont présentés. La possibilité de résoudre des équations malgré les problèmes d'inversion d'application est introduite. Enfin, nous concluons ce chapitre par un rappel des propriétés asymptotiques des matrices à coefficients dans un dioïde en effectuant le lien avec la théorie des graphes.

1.1 Dioïdes

1.1.1 Axiomatique

Définition 1 *Un dioïde est un ensemble \mathcal{D} muni de deux lois de compositions internes notées \oplus et \otimes , appelées respectivement "addition" et "multiplication", telles que les axiomes suivants sont respectés:*

l'addition est associative : $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$;

l'addition est commutative : $a \oplus b = b \oplus a$;

l'addition admet un élément neutre noté ε et appelé "zéro" : $a \oplus \varepsilon = a$;

la multiplication est associative : $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$;

la multiplication admet un élément neutre noté e et appelé "identité" : $a \otimes e = a = e \otimes a$;

la multiplication est distributive par rapport à l'addition : $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$;

le zéro est absorbant pour la multiplication : $\varepsilon \otimes a = a \otimes \varepsilon = \varepsilon$;

l'addition est idempotente : $a \oplus a = a$.

Comme en algèbre usuelle, le signe multiplicatif sera parfois omis.

Définition 2 (dioïde commutatif) *Un dioïde est dit **commutatif** si la multiplication est commutative.*

Exemple 1 \mathbb{R}_{max} est le dioïde commutatif $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, max, +)$ muni du max (loi additive \oplus) et de l'addition usuelle $+$ (loi multiplicative \otimes). Cette structure est appelée algèbre $(max, +)$.

Définition 3 (dioïde complet) *Un dioïde est dit complet s'il est fermé pour les sommes infinies et si la loi \otimes distribue sur les sommes infinies, c'est-à-dire si pour tout $c \in \mathcal{D}$ et tout sous-ensemble $A \subseteq \mathcal{D}$,*

$$c \otimes \left(\bigoplus_{x \in A} x \right) = \bigoplus_{x \in A} c \otimes x.$$

La borne supérieure d'un dioïde complet \mathcal{D} existe et sera notée " \top ". Il correspond à la somme des éléments du dioïde

$$\top = \bigoplus_{x \in \mathcal{D}} x.$$

L'élément \top est donc absorbant pour l'addition : $\top \oplus a = \top$.

Rappelons néanmoins que, puisque ε est absorbant pour la loi \otimes , on a : $\top \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes \top = \varepsilon$.

Exemple 2 *\mathbb{R}_{max} n'est pas complet. Nous devons ajouter la borne supérieure $\top = +\infty$ avec la convention $(\top \otimes \varepsilon) = +\infty + (-\infty) = -\infty = \varepsilon$. Ce nouveau dioïde complet est noté $\overline{\mathbb{R}}_{max} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}, max, +)$.*

L'idempotence de la loi additive \oplus permet de définir naturellement une relation d'ordre dans un dioïde. Le théorème suivant affirme de plus que cette relation d'ordre est compatible avec les lois du dioïde.

Théorème 1 (relation d'ordre) *Dans un dioïde $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$, la relation \succeq définie par*

$$a \succeq b \Leftrightarrow a = a \oplus b$$

est une relation d'ordre compatible avec les lois additive \oplus et multiplicative \otimes , c'est-à-dire,

$$a \succeq b \Rightarrow \forall c \in \mathcal{D}, \quad a \oplus c \succeq b \oplus c,$$

$$a \succeq b \Rightarrow \forall c \in \mathcal{D}, \quad a \otimes c \succeq b \otimes c,$$

$$c \otimes a \succeq c \otimes b.$$

La relation d'ordre est dite *totale* si

$$\forall a, b \in \mathcal{D}, \quad a \succeq b \text{ ou } b \succeq a.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que l'ordre d'un dioïde soit total, s'écrit de la façon suivante

$$\forall a, b \in \mathcal{D}, \quad a \oplus b = a \text{ ou } b.$$

Le dioïde est alors dit *totalement ordonné*.

Un dioïde \mathcal{D} muni de la relation d'ordre définie dans le théorème 1 est un demi-treillis supérieur [Birkhoff, 1940] car tout couple (a, b) admet $a \oplus b$ comme plus petit majorant (ou borne supérieure).

1. pour "Top", le terme consacré en anglais

Sur un dioïde complet $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$, il est possible de définir la borne inférieure de toute paire d'éléments (a, b) . Cette borne, notée \wedge , est définie de la manière suivante:

$$a \wedge b = \bigoplus_{\{x|x \preceq a, x \preceq b\}} x.$$

La borne inférieure existe pour tout sous ensemble d'un dioïde complet, et celui-ci a donc une structure de treillis complet. On a de plus l'équivalence

$$a \succeq b \Leftrightarrow a = a \oplus b \Leftrightarrow b = a \wedge b.$$

L'opération \wedge est associative, commutative, idempotente et possède également un élément neutre T ($T \wedge a = a, \forall a$).

Remarque 1 *La loi additive \oplus distribue généralement sur \wedge , mais la distributivité de \otimes par rapport à \wedge est rarement assurée en dehors des cas les plus simples (dioïde totalement ordonné). De plus, on a la relation:*

$$a \otimes (b \wedge c) \preceq ab \wedge ac.$$

En outre, la relation suivante, dite d'*absorption*, est vérifiée dans tout dioïde complet:

$$a \vee (b \wedge a) = a.$$

1.1.2 Dioïdes matriciels

Soit $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ un dioïde, on note $\mathcal{D}^{n \times n}$ l'ensemble des matrices carrées de dimension n à coefficients dans \mathcal{D} . La somme et le produit de matrice sont définies de façon classique par:

$$\begin{aligned} A \oplus B &: (A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij} \\ A \otimes B &: (A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n A_{ik} \otimes B_{kj}. \end{aligned}$$

L'ensemble $\mathcal{D}^{n \times n}$ muni de ces deux opérations est un dioïde. L'élément nul d'un dioïde matriciel est la matrice composée exclusivement de ε et est noté également ε . L'élément unité est la matrice notée Id_n qui est composée de e sur la diagonale et de ε partout ailleurs. Cette structure algébrique obéit aux axiomes d'un dioïde.

Remarque 2 *Même si la relation d'ordre est totale dans le dioïde \mathcal{D} , l'ordre dans le dioïde matriciel $\mathcal{D}^{n \times n}$ ($n > 1$) est partiel.*

1.2 Résolution d'équations dans un dioïde

L'utilisation de l'algèbre des dioïdes nous amènera à résoudre certaines équations. On peut discerner deux types d'équations définies dans les dioïdes:

l'équation $x = Ax \oplus b$ où x est l'inconnue,

l'équation $f(x) = b$ où x est l'inconnue et f satisfait les propriétés d'isotonie et de continuité.

Définition 4 (Isotonie) Une application f d'un dioïde $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ dans un dioïde $(\mathcal{C}, \oplus, \otimes)$ est dite isotone si

$$\forall a, b \in \mathcal{D}, a \succeq b \implies f(a) \succeq f(b),$$

autrement dit si pour tout $a, b \in \mathcal{D}$, on a

$$f(a \oplus b) \succeq f(a) \oplus f(b).$$

Définition 5 (Continuité) Soient $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ et $(\mathcal{C}, \oplus, \otimes)$ deux dioïdes complets. Une application f de \mathcal{D} dans \mathcal{C} est dite semi-continue inférieurement (s.c.i. en abrégé), respectivement semi-continue supérieurement (s.c.s.) si, pour tout sous-ensemble $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{D}$,

$$f\left(\bigoplus_{x \in \mathcal{B}} x\right) = \bigoplus_{x \in \mathcal{B}} f(x)$$

respectivement,

$$f\left(\bigwedge_{x \in \mathcal{B}} x\right) = \bigwedge_{x \in \mathcal{B}} f(x).$$

1.2.1 Résolution de l'équation $x = Ax \oplus b$ dans les dioïdes complets

Par la suite, on sera amené à résoudre l'équation linéaire (en x) suivante:

$$x = ax \oplus b.$$

Définition 6 (Etoile de Kleene) Soit \mathcal{D} un dioïde complet et $a \in \mathcal{D}$, l'opérateur étoile est défini par:

$$a^* = \bigoplus_{i=0}^{+\infty} a^i \quad (\text{avec } a^0 = e)$$

On notera également:

$$a^+ = a \oplus a^2 \oplus \dots \oplus a^n = \bigoplus_{i=1}^{+\infty} a^i.$$

Les égalités suivantes sont facilement vérifiées: $a^* = e \oplus a^+$, $a^+ = aa^*$. Cette définition s'applique également aux éléments des dioïdes matriciels.

Théorème 2 (Théorème de l'étoile) Soit \mathcal{D} un dioïde complet, l'équation

$$x = ax \oplus b \tag{1.1}$$

définie dans \mathcal{D} admet $x = a^*b$ comme plus petite solution.

Preuve : On montre d'abord que a^*b est une solution de 1.1:

$$a(a^*b) \oplus b = a^+b \oplus b = (a^+ \oplus e)b = a^*b.$$

On montre maintenant que a^*b est le minorant des solutions de 1.1:

$$\begin{aligned} x = ax \oplus b = a(ax \oplus b) \oplus b &= a^2x \oplus ab \oplus b \\ &= a^3x \oplus a^2b \oplus ab \oplus b \\ &\vdots \\ &= a^n x \oplus (a^{n-1}b \oplus \dots \oplus ab \oplus b) \\ &\succeq a^{n-1}b \oplus \dots \oplus ab \oplus b, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

On en déduit que toute solution de 1.1 est supérieure ou égale à a^*b .

□

Corollaire 1 *De la même façon que précédemment, il est possible de montrer que l'équation $x = xa \oplus b$ admet comme plus petite solution ba^* .*

Théorème 3 *Soit \mathcal{D} un dioïde complet. $\forall a, b \in \mathcal{D}$*

$$a^* \succeq a^+ \tag{1.2}$$

$$(a^*)^* = a^* \tag{1.3}$$

$$(a^+)^* = a^* \tag{1.4}$$

$$a(ba)^* = (ab)^*a \tag{1.5}$$

$$a^*a^* = a^* \tag{1.6}$$

En outre, lorsque \mathcal{D} est commutatif, on a

$$(a \oplus b)^* = a^*b^* \tag{1.7}$$

Pour (1.2), (1.3), (1.4), (1.7) preuves dans [Gaubert, 1999, Chapitre 2, p30], et pour (1.5), (1.6) preuves dans [Cottenceau, 1999, Chapitre 1, p43].

1.2.2 Théorie de la résiduation

On s'intéresse maintenant à l'équation

$$f(x) = b \tag{1.8}$$

avec $f : \mathcal{D} \longrightarrow \mathcal{C}$, $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ et $(\mathcal{C}, \oplus, \otimes)$ deux dioïdes complets.

Définition 7 (Application injective) *Soit f une application de \mathcal{D} dans \mathcal{C} , elle est injective si elle vérifie la propriété suivante:*

$$\forall a, b \in \mathcal{D}, f(a) = f(b) \implies a = b.$$

Définition 8 (Application surjective) *Soit f une application de \mathcal{D} dans \mathcal{C} , f est surjective, si elle vérifie*

$$\forall c \in \mathcal{C}, \exists a \in \mathcal{D} \text{ tel que } c = f(a).$$

La résolution de l'équation (1.8) pose un problème d'inversion de l'application f . Généralement, les lois \oplus et \otimes ne sont pas inversibles, on en déduit qu'il n'est en général pas possible d'inverser les applications définies dans un dioïde. En particulier, si l'application f n'est pas surjective, il n'existe pas nécessairement d'antécédent dans \mathcal{D} à $b \in \mathcal{C}$. Si f n'est pas injective, l'équation (1.8) peut présenter plusieurs solutions dans \mathcal{D} .

Néanmoins, la théorie de la résiduation permet de définir des "pseudo-inverses" pour des applications définies sur des treillis, et plus particulièrement sur des dioïdes. Plus précisément, la théorie de la résiduation permet d'établir, lorsqu'elle existe, la plus grande solution de l'inéquation

$$f(x) \preceq b. \quad (1.9)$$

A l'équation initiale (1.8), la théorie de la résiduation fournit donc la plus grande "sous-solution". Cette solution est en fait la borne supérieure du sous ensemble $\{x \in \mathcal{D} \mid f(x) \preceq b\}$. Lorsqu'il existe pour tout b , cet élément sera noté $f^\sharp(b)$. f^\sharp est appelée application résiduée de f .

$$f^\sharp(b) = \bigoplus_{\{x \mid f(x) \preceq b\}} x.$$

De la même façon que précédemment, on peut considérer la borne inférieure de l'ensemble des "sur-solutions". La borne inférieure de cet ensemble, lorsqu'elle existe sera notée $f^\flat(b)$. f^\flat est appelée application résiduée duale de f .

$$f^\flat(b) = \bigwedge_{\{x \mid f(x) \succeq b\}} x.$$

Théorème 4 [Baccelli et al., 1992, p174-175]

Soit f une application isotone d'un dioïde complet \mathcal{D} vers un dioïde complet \mathcal{C} . Sont équivalents

- (i) Pour tout $b \in \mathcal{C}$, il existe une plus grande sous solution à l'équation $f(x) = b$.
- (ii) f est s.c.i. et $f(\varepsilon_{\mathcal{D}}) = \varepsilon_{\mathcal{C}}$.
- (iii) Il existe une application f^\sharp de \mathcal{C} dans \mathcal{D} qui est isotone et semi-continue supérieurement, telle que

$$f \circ f^\sharp \preceq Id_{\mathcal{C}} \quad (1.10)$$

$$f^\sharp \circ f \succeq Id_{\mathcal{D}}. \quad (1.11)$$

Quand f satisfait ces propriétés, elle est dite résiduable et f^\sharp est appelée la résiduée de f . Cette résiduée est unique.

De manière équivalente au théorème 4, un théorème peut être énoncé dans le cadre de la résiduée duale, il est détaillé dans [Baccelli et al., 1992, Théorème 4.52].

Théorème 5

- Si f est une application résiduable de \mathcal{D} dans \mathcal{C} , on a alors les égalités suivantes:

$$f \circ f^\sharp \circ f = f \quad (1.12)$$

$$f^\sharp \circ f \circ f^\sharp = f^\sharp. \quad (1.13)$$

- Si $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$ et $g : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}$ sont des applications résiduables, alors $g \circ f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{B}$ est également résiduable et

$$(g \circ f)^\sharp = f^\sharp \circ g^\sharp. \quad (1.14)$$

Preuve:

(1.12) L'équation (1.10) nous permet d'obtenir

$$f \circ f^\# \circ f = (f \circ f^\#) \circ f \preceq f,$$

tandis que l'équation (1.11) donne

$$f \circ f^\# \circ f = f \circ (f^\# \circ f) \succeq f.$$

La relation (1.12) apparaît ensuite naturellement.

(1.13) L'équation (1.13) se prouve de façon similaire à l'équation (1.12).

(1.14) f et g sont des applications résiduables donc $f, g, f^\#, g^\#$ sont isotones. L'isotonie est conservée par composition d'où $g \circ f$ et $f^\# \circ g^\#$ sont isotones. À l'aide de (1.10) et (1.11), les inéquations suivantes peuvent être posées:

$$(g \circ f) \circ (f^\# \circ g^\#) = g \circ (f \circ f^\#) \circ g^\# \preceq g \circ g^\# \preceq I_{\mathcal{B}}$$

$$(f^\# \circ g^\#) \circ (g \circ f) = f^\# \circ (g^\# \circ g) \circ f \succeq f^\# \circ f \succeq I_{\mathcal{D}}.$$

D'après le point trois du théorème 4 (unicité de la résiduée), l'application $f^\# \circ g^\#$ est la résiduée de $g \circ f$.

1.2.3 Application de la résiduation au produit dans un dioïde

Dans cette sous-section, on considère les applications suivantes définies sur un dioïde complet $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$:

$$L_a : x \longmapsto a \otimes x \text{ (multiplication à gauche par } a)$$

$$R_a : x \longmapsto x \otimes a \text{ (multiplication à droite par } a)$$

La multiplication est distributive par rapport aux sommes infinies, on a

$$L_a\left(\bigoplus_{x \in \mathcal{D}} x\right) = \bigoplus_{x \in \mathcal{D}} L_a(x).$$

idem pour R_a .

L_a et R_a sont donc semi-continues inférieurement. Comme de plus, on a $L_a(\varepsilon) = \varepsilon$ et $R_a(\varepsilon) = \varepsilon$, le point deux du théorème 4 permet d'affirmer que les applications L_a et R_a sont résiduables et leurs applications résiduées sont notées respectivement $L_a^\#$ et $R_a^\#$.

$$L_a^\#(x) = a \backslash x = \frac{x}{a}$$

$$R_a^\#(x) = a / x = \frac{x}{a}$$

Théorème 6 Les applications $L_a^\#$ et $R_a^\#$ vérifient les propriétés suivantes:

$$\frac{x \wedge y}{a} = \frac{x}{a} \wedge \frac{y}{a} \qquad \frac{x \wedge y}{a} = \frac{x}{a} \wedge \frac{y}{a} \quad (1.15)$$

$$\frac{x \oplus y}{a} \vDash \frac{x}{a} \oplus \frac{y}{a} \qquad \frac{x \oplus y}{a} \vDash \frac{x}{a} \oplus \frac{y}{a} \quad (1.16)$$

$$a \frac{x}{a} \vDash x \qquad \frac{x}{a} a \vDash x \quad (1.17)$$

$$\frac{ax}{a} \vDash x \qquad \frac{xa}{a} \vDash x \quad (1.18)$$

$$a \frac{ax}{a} = ax \qquad \frac{xa}{a} a = xa \quad (1.19)$$

$$\frac{a(a \setminus x)}{a} = \frac{x}{a} \qquad \frac{(x \not\! / a)a}{a} = \frac{x}{a} \quad (1.20)$$

$$\frac{x}{a} \wedge \frac{x}{b} = \frac{x}{a \oplus b} \qquad \frac{x}{a} \wedge \frac{x}{b} = \frac{x}{a \oplus b} \quad (1.21)$$

Ces propriétés sont démontrées dans [Baccelli et al., 1992, p182-185] et [Cottenceau, 1999, p46-47]. D'autres propriétés sont également démontrées dans ces ouvrages.

Extension de la résiduation au cas matriciel

Considérons maintenant les applications L_A et $R_{A'}$ définies sur les ensembles de matrices à coefficients dans le dioïde complet $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$.

$$\begin{aligned} L_A : \mathcal{D}^{p \times q} &\longrightarrow \mathcal{D}^{n \times q} & R_{A'} : \mathcal{D}^{q \times p} &\longrightarrow \mathcal{D}^{q \times n} \\ X &\longmapsto AX \quad (A \in \mathcal{D}^{n \times p}) & X &\longmapsto XA' \quad (A \in \mathcal{D}^{p \times n}) \end{aligned}$$

Les équations $AX = B$ (où $B \in \mathcal{D}^{n \times q}$) et $XA' = B'$ (où $B' \in \mathcal{D}^{q \times n}$) admettent comme plus grandes sous-solutions respectivement:

$$L_A^\#(B) = A \setminus B \quad \text{et} \quad R_{A'}^\#(B') = B' \not\! / A'.$$

Les coefficients de ces matrices se calculent de la façon suivante:

$$(A \setminus B)_{ij} = \bigwedge_{l=1}^n A_{li} \setminus B_{lj}, \quad i = 1, \dots, p, \quad j = 1, \dots, q$$

et

$$(B' \not\! / A')_{ij} = \bigwedge_{l=1}^n B'_{il} \not\! / A'_{jl}, \quad i = 1, \dots, q, \quad j = 1, \dots, p.$$

1.3 Comportement asymptotique des matrices $(\max, +)$

Les matrices carrées à coefficients dans un dioïde présentent certaines propriétés spectrales. Ces propriétés peuvent être illustrées par la théorie des graphes. Il existe en effet une correspondance directe entre les manipulations combinatoires de matrices définies dans \mathbb{R}_{\max} et le cheminement dans leurs graphes associés. Quelques rappels classiques sur ce sujet sont effectués. Des explications suffisantes sont disponibles dans [Cohen, 1995] mais le lecteur pourra trouver l'essentiel de la théorie dans [Gondran and Minoux, 1979] et [Gaubert, 1992].

1.3.1 Rappels

Définition 9 (Graphe orienté) Un graphe orienté est défini par un ensemble de noeuds \mathcal{N} et un ensemble d'arcs \mathcal{A} ayant une origine et une extrémité dans \mathcal{N} . L'arc d'origine $i \in \mathcal{N}$ et d'extrémité $j \in \mathcal{N}$ sera noté arc (i,j) .

Définition 10 (Chemin, circuit) Un chemin est une suite de noeuds que l'on peut parcourir séquentiellement en empruntant des arcs de \mathcal{A} . La longueur d'un chemin est égal à son nombre d'arcs. Un circuit est un chemin dont l'origine est confondue avec l'extrémité.

Définition 11 (Graphe valué) Un graphe valué est un graphe pour lequel chaque arc (i,j) porte un poids a_{ji} . Le poids d'un chemin est défini par la somme des poids des arcs qui le composent. Le poids moyen d'un chemin est le résultat de la division du poids du chemin par sa longueur.

Définition 12 (Prédécesseurs, successeurs) L'ensemble des prédécesseurs immédiats d'un noeud i , noté $\pi(i)$, est l'ensemble des noeuds j tels que les arcs $(i,j) \in \mathcal{A}$. On définit alors les éléments de l'ensemble

$$\pi^+(i) = \pi(i) \cup \pi^2(i) \cup \dots$$

que l'on appelle les prédécesseurs de i . On pose également

$$\pi^*(i) = \{i\} \cup \pi^+(i).$$

De la même façon, on définit l'ensemble $\sigma(i)$ des successeurs immédiats d'un noeud i , l'ensemble $\sigma^+(i)$ des successeurs de i , et enfin l'ensemble $\sigma^*(i) = \{i\} \cup \sigma^+(i)$.

1.3.2 Interprétations des manipulations matricielles

Définition 13 (Graphe de précedence) Pour une matrice carrée $A \in \mathcal{D}^{n \times n}$, il existe un graphe nommé graphe de précedence, noté $\mathcal{G}(A)$ et composé de n noeuds. L'arc (j,i) de ce graphe est pondéré par l'élément A_{ij} si $A_{ij} \neq \varepsilon$, sinon l'arc (j,i) n'existe pas. Inversement à tout graphe composé de n noeuds, on peut associer une matrice de précedence de dimension $n \times n$.

- Composition parallèle de graphes et addition de matrices.

L'addition de deux matrices A et B n'est possible que pour des matrices de mêmes dimensions (*i.e.* leurs graphes de précedence possèdent le même nombre de noeuds). L'addition $A \oplus B$ correspond à la composition parallèle des graphes: l'élément $(A \oplus B)_{ij}$ correspond au poids maximum des arcs parallèles (*i.e.* ayant même origine et même extrémité). Il se peut que l'arc (j,i) n'existe ni dans le graphe associé de A ni dans celui de B ($a_{ij} = b_{ij} = \varepsilon$), dans ce cas l'arc (j,i) n'existera pas non plus dans le graphe de précedence de la matrice $A \oplus B$ (l'élément $(A \oplus B)_{ij} = \varepsilon$).

- A l'instar de l'addition matricielle, les puissances des matrices carrées peuvent également faire l'objet de corrélation avec la théorie des graphes.

Théorème 7 [Gaubert, 1999] Soit A une matrice carrée à coefficients dans $\overline{\mathbb{R}}_{max}$. Dans le graphe de précedence associé à la matrice A , $(A^k)_{ij}$ est égal à la somme (*i.e.* au max dans l'algèbre usuelle) des poids des chemins de longueur k allant de j à i .

1.3.3 Propriétés spectrales et asymptotiques des matrices $(\max,+)$

On rappelle ici un ensemble de résultats permettant de caractériser le spectre, c'est-à-dire l'ensemble des valeurs propres, des matrices carrées à coefficients dans un dioïde.

On mentionne ensuite la propriété de "cyclicité" de telles matrices. Nous verrons au paragraphe 2.6.1 que cette propriété est utile pour caractériser le comportement asymptotique des systèmes $(\max,+)$ linéaires, en permettant précisément de mettre à jour l'existence d'un régime périodique.

Définition 14 (Graphe fortement connexe) Soit la relation d'équivalence \mathcal{R} définie par

$$i, j \in \mathcal{N}, i\mathcal{R}j \Leftrightarrow \text{il existe un chemin allant de } i \text{ vers } j \text{ et inversement.}$$

L'ensemble quotient \mathcal{N}/\mathcal{R} représente un graphe appelé graphe réduit où un noeud représente une classe d'équivalence $[i]$ appelée composante fortement connexe. Un graphe est dit fortement connexe s'il y a une seule classe d'équivalence pour la relation \mathcal{R} . Son graphe réduit consiste en un noeud unique.

Définition 15 (Matrice irréductible) Une matrice $A \in \mathcal{D}^{n \times n}$ est dite irréductible si pour toute paire (i, j) , il existe un entier m tel que $(A^m)_{ij} \neq \varepsilon$.

En se référant au théorème 7, l'irréductibilité d'une matrice peut être interprétée en affirmant que, pour toute paire de noeuds (i, j) de son graphe de précédence, il existe un chemin de j à i .

Théorème 8 Soit A une matrice carrée à coefficients dans \mathbb{R}_{\max} . Les deux affirmations suivantes sont équivalentes.

- (i) La matrice A est irréductible.
- (ii) Le graphe de précédence associé à la matrice A est fortement connexe.

On entend par valeur propres et vecteurs propres d'une matrice $A \in \mathcal{D}^{n \times n}$, les scalaires $\lambda \in \mathcal{D}$ et les vecteurs $v \in \mathcal{D}^n \setminus \varepsilon$ tels que

$$A \otimes v = \lambda \otimes v.$$

Théorème 9 [Baccelli et al., 1992, théorème 3.23, p.111] Soit A une matrice carrée à coefficients dans \mathbb{R}_{\max} et $\mathcal{G}(A)$ le graphe de précédence qui lui est associé. Si A est irréductible, ou de façon équivalente si $\mathcal{G}(A)$ est fortement connexe, alors il existe une unique valeur propre notée λ . Cette valeur propre est égale au poids moyen maximum du graphe, c'est-à-dire le maximum des poids moyens des circuits du graphe.

Notons qu'à l'unique valeur propre d'une matrice irréductible peuvent être associés plusieurs vecteurs propres.

Définition 16 (Circuit critique) Soit une matrice $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ irréductible de valeur propre λ et $\mathcal{G}(A)$ le graphe qui lui est associé. Le circuit ζ de $\mathcal{G}(A)$ est dit critique si son poids moyen est maximum, c'est-à-dire égale à λ .

Le théorème 9 laisse entrevoir une méthode pour calculer la valeur propre d'une matrice irréductible (à partir de son graphe de précédence). L'algorithme de Karp que l'on peut retrouver dans [Baccelli et al., 1992] permet ce calcul en s'inspirant du fait que l'élément $(A^j)_{ii}$ représente le poids maximal de tous les circuits de longueur j comprenant le noeud i . L'expression $\bigoplus_{i=1}^n (A^j)_{ii}$

nous donne le poids maximal des circuits de longueur j . Il n'est pas utile de faire varier j au delà de n , car cela équivaudrait en termes de graphes à parcourir des circuits déjà parcouru pour $j \leq n$. En adéquation avec le théorème 9, le poids moyen maximum d'un graphe peut donc s'exprimer de la façon suivante:

$$\lambda = \left(\bigoplus_{j=1}^n \left(\bigoplus_{i=1}^n (A^j)_{ii} \right) \right)^{1/j}.$$

Une méthode de calcul des vecteurs propres est énoncée ci-dessous.

Définition 17 Soit $A \in \mathcal{D}^{n \times n}$ une matrice irréductible de valeur propre $\lambda \in \mathcal{D}$. On définit la matrice notée A_λ par

$$A_\lambda = \lambda^{-1} \otimes A.$$

Théorème 10 [Gondran and Minoux, 1977] Soit $A \in \mathcal{D}^{n \times n}$ une matrice irréductible de valeur propre λ . La j -ième colonne de la matrice A_λ^+ , notée $(A_\lambda^+)_{.j}$, est un vecteur propre de A si elle satisfait l'égalité

$$(A_\lambda^+)_{.j} = A_\lambda \otimes (A_\lambda^+)_{.j}.$$

Le théorème suivant introduit la propriété de cyclicité des matrices à éléments dans un dioïde.

Théorème 11 (Cyclicité) [Cohen et al., 1983] Pour une matrice irréductible $A \in \mathcal{D}^{n \times n}$ de valeur propre λ , il existe deux entiers N et c tels que

$$\forall n \geq N, A^{n+c} = \lambda^c \otimes A^n.$$

L'entier c est appelé cyclicité de A .

Cas des matrices réductibles

On rappelle que toute matrice non irréductible B peut s'écrire sous une forme triangulaire par blocs (voir [Gaubert, 1992, chapitre 4]):

$$A = P^{-1}BP, \text{ avec } A = \begin{pmatrix} A_{11} & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ A_{21} & A_{22} & \dots & \varepsilon \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & \dots & A_{nn} \end{pmatrix} \quad (1.22)$$

où P est une matrice de permutation. Chacun des blocs sur la diagonale correspond à une composante fortement connexe du graphe $\mathcal{G}(A)$. Vis-à-vis du graphe de précedence associé à B , ce changement de base correspond à une renumérotation des noeuds.

Par la suite, on note $\rho(\mathcal{C}_i)$ le poids moyen maximum de la composante fortement connexe \mathcal{C}_i .

Théorème 12 [Gaubert, 1992, chapitre 4, corollaire 2.2.5] L'ensemble $\text{spec}(A)$ des valeurs propres d'une matrice réductible A est caractérisé par la condition suivante :

$$\lambda \in \text{spec}(A) \iff \lambda = \rho(\mathcal{C}_i) \text{ et } \forall \mathcal{C}_j \subset \sigma^*(\mathcal{C}_i), \rho(\mathcal{C}_j) \preceq \rho(\mathcal{C}_i)$$

On remarque que la classe d'équivalence \mathcal{C}_i de rayon spectral maximal (i.e. $\rho(\mathcal{C}_i) = \rho(A)$) vérifie toujours la condition ci dessus, et donc $\rho(A)$ est toujours valeur propre. Les classes finales (c'est-à-dire qui ne possèdent pas de successeurs) vérifie également toujours cette condition. Leurs

valeurs propres sont donc aussi valeurs propres de A . En outre, le nombre de valeurs propres de A ne peut excéder le nombre de composantes fortement connexes de graphe $\mathcal{G}(A)$

Théorème 13 (cyclicité d'une matrice réductible) [*Gaubert, 1997, paragraphe 3.7, théorème 17*]

Soit $A \in \mathcal{D}^{n \times n}$ une matrice réductible. Il existe deux entiers K_0 et c , et un ensemble de scalaires $\lambda_{ijl} \in \mathcal{D}$, $1 \leq i, j \leq n$, $0 \leq l \leq c - 1$ avec $c > 0$, tels que

$$\forall k \geq K_0, \quad k \equiv l \pmod{c} \implies A_{ij}^{k+c} = \lambda_{ijl}^c A_{ij}^k,$$

où λ_{ijl} appartient à l'ensemble des valeurs propres des classes de A . Plus précisément, lorsque A est sous une forme bloc-triangulaire (1.22), les scalaires λ_{ijl} appartiennent à l'ensemble formé par les valeurs propres associées à la composante \mathcal{C} et aux composantes fortement connexes situées en amont de celle-ci, en notant \mathcal{C} la composante fortement connexe à laquelle le noeud i appartient, i.e. :

$$\lambda_{ijl} \in \{\rho(\pi^*(\mathcal{C}))\}.$$

De plus, si i et j appartiennent à la même composante fortement connexe \mathcal{C} , c'est-à-dire si i et j appartiennent au même bloc diagonale, alors $\lambda_{ijl} = \rho(\mathcal{C})$ quel que soit l . Soit

$$\{i, j\} \in \mathcal{C} \implies A_{ij}^{k+c} = \lambda^c A_{ij}^k \text{ où } \lambda = \rho(\mathcal{C}).$$

Chapitre 2

Graphes d'événements temporisés

Certains systèmes à événements discrets qui mettent en jeu des phénomènes de synchronisation peuvent être décrits de façon linéaire dans l'algèbre des dioïdes. Ces systèmes peuvent également être représentés par un modèle graphique appelé graphe d'événements temporisé (GET). Cette représentation découle directement de la théorie des réseaux de Petri.

Les rappels sur les réseaux de Petri ne seront pas effectués, un grand nombre d'ouvrages didactiques sur cet outil graphique est présent dans la littérature, on renvoie notamment le lecteur à [David and Alla, 1989].

2.1 Introduction aux GET

Les GET sont une sous classe de réseaux de Petri. Dans un graphe d'événements, chaque place possède en amont une transition et en aval une transition, les conflits n'apparaissent donc jamais. Autrement dit, les graphes d'événements peuvent modéliser la synchronisation mais pas la concurrence (les phénomènes de concurrences se modélisent par des graphes d'état). Dans un GET, on associe à chaque place un temps minimal de séjour des jetons. Tous les arcs d'un GET ont un poids unitaire. On suppose que les transitions sont franchies dès que toutes les places en amont sont marquées d'un jeton au moins (fonctionnement au plus tôt).

2.2 Mise en équations des GET

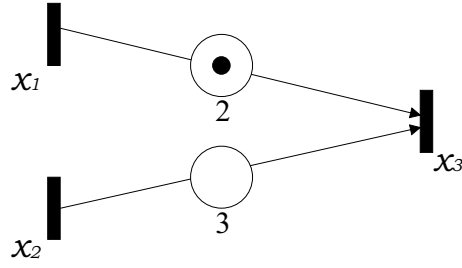
Pour l'étude des systèmes à événements discrets, les GET sont généralement utilisés comme outil de modélisation intermédiaire. Si la modélisation graphique constitue une première étape, la seconde étape est la mise en équations du modèle graphique, c'est-à-dire la définition d'une représentation algébrique du système.

Deux types d'équations sont possibles pour un même GET, elles correspondent à deux points de vue différents et à deux dioïdes différents.

2.2.1 Dateurs et domaine événementiel

On associe à chaque transition x une fonction appelée dateur $x(k)$ qui désigne la date du tir numérotée k de la transition x . Les dateurs sont définis sur le domaine événementiel car k est un numéro d'événement.

De façon générale, les dateurs sont des applications croissantes définies sur le domaine événementiel (ensemble \mathbb{Z}) vers le dioïde $\overline{\mathbb{R}}_{max}$ ou $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$.

FIG. 2.1 – Portion d'un graphe d'événements temporisés

Le GET présenté en figure 2.1 nous indique que la date du k -ième franchissement (au plus tôt) de la transition x_3 , notée $x_3(k)$, dépend alors:

- du $k - 1$ -ième franchissement (au plus tôt) de x_1 plus 2 unités de temps (soit $x_1(k - 1) + 2$)
- du k -ième franchissement (au plus tôt) de x_2 plus 3 unités de temps (soit $x_2(k) + 3$)

La mise en équation du GET de la figure 2.1 en termes d'équations aux dateurs donne:

$$x_3(k) = \max (x_1(k - 1) + 2, x_2(k) + 3).$$

Dans le dioïde $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$, l'équation devient

$$x_3(k) = 2x_1(k - 1) \oplus 3x_2(k).$$

2.2.2 Compteurs et domaine temporel

Pour l'étude d'un GET, on peut également se placer dans le domaine temporel en associant à chaque transition la variable $x(t)$, appelé compteur, qui recense le nombre d'activation de la transition x jusqu'à la date t .

Le GET de la figure 2.1 peut être décrit en termes de compteurs. L'équation obtenue est la suivante

$$x_3(t) = \min (x_1(t - 2) + 1, x_2(t - 3))$$

on peut également l'exprimer dans l'algèbre $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$

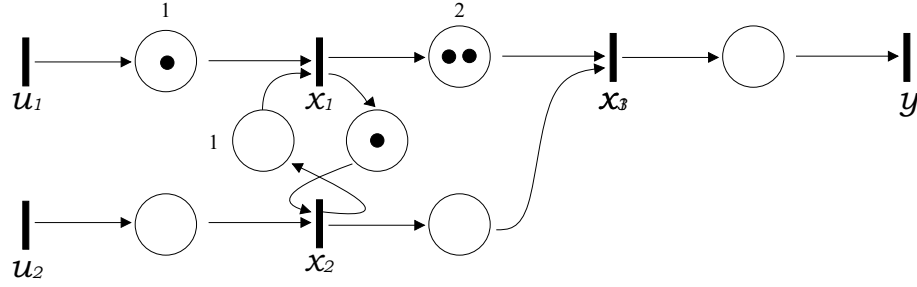
$$x_3(t) = 1x_1(t - 2) \oplus x_2(t - 3).$$

Les compteurs peuvent être vus comme des applications définies sur le domaine temporel de \mathbb{R} ou \mathbb{Z} vers $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$.

Exemple d'étude d'un GET

Les équations aux dateurs qui décrivent le GET de la figure 2.2 sont les suivantes:

$$\begin{aligned} x_1(k) &= 1u_1(k - 1) \oplus 1x_2(k) \\ x_2(k) &= u_2(k) \oplus x_1(k - 1) \\ x_3(k) &= 2x_1(k - 2) \oplus x_2(k) \\ y(k) &= x_3(k) \end{aligned}$$

FIG. 2.2 – Un graphe d'événements temporisés

Sous forme matricielle:

$$x(k) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \end{pmatrix} x(k) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} x(k-1) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} x(k-2) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} u(k) \oplus \begin{pmatrix} 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} u(k-1)$$

$$y(k) = (\varepsilon \quad \varepsilon \quad e) x(k)$$

D'une manière générale, les équations modélisant le fonctionnement des GET ont la forme:

$$x(k) = \bigoplus_{i=0}^a A_i x(k-i) \oplus \bigoplus_{j=0}^b B_j u(k-j) \quad (2.1)$$

$$y(k) = \bigoplus_{l=0}^c C_l x(k-l) \quad (2.2)$$

On remarque que l'équation 2.1 est une équation implicite. L'application du théorème 2 permet d'exprimer 2.1 dans une forme ARMA (des rappels sur la forme ARMA sont mentionnés dans [Cohen, 1995, chapitre 6]).

$$x(k) = \bigoplus_{i=1}^a \bar{A}_i x(k-i) \oplus \bigoplus_{j=0}^b \bar{B}_j u(k-j) \quad (2.3)$$

Par la suite, une extension du vecteur d'état permettra de passer à une représentation d'état, ce qui correspond à une forme où le retard est exactement de 1 sur la partie AR et de 0 sur la partie MA, ainsi que pour l'équation de sortie. On se ramène à une forme standard

$$x(k) = Ax(k-1) \oplus Bu(k), \quad (2.4)$$

$$y(k) = Cx(k). \quad (2.5)$$

tout comme avec les équations aux dateurs, il est possible d'obtenir une forme d'état pour les équations aux compteurs

$$x(t) = A'x(t-1) \oplus B'u(t), \quad (2.6)$$

$$y(t) = C'x(t). \quad (2.7)$$

2.2.3 Transformée en γ et δ

Tout comme il existe la transformée en z pour les systèmes classiques échantillonnés, les systèmes à événements discrets disposent des transformées en γ et δ .

La transformée en γ d'un dateur d est définie comme la série formelle

$$D(\gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} d(k) \gamma^k. \quad (2.8)$$

Exemple 3 Soient deux dateurs reliés par l'égalité $x_1(k) = x_2(k-1)$, leurs transformées en dateurs se ramènent à

$$X_1(\gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x_1(k) \gamma^k = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x_2(k-1) \gamma^k = \gamma \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x_2(k-1) \gamma^{k-1} = \gamma X_2(\gamma).$$

On peut interpréter γ comme un opérateur de décalage événementiel. De façon formelle, on écrira $x(k-1) = \gamma x(k)$.

De manière analogue aux dateurs, la série suivante correspond à la transformée en δ d'un compteur:

$$C(\delta) = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} c(t) \delta^t.$$

On peut interpréter δ comme un opérateur de décalage événementiel. De façon formelle, on écrira $x(t-1) = \delta x(t)$.

2.2.4 Matrice de transfert

Tout comme en automatique classique, il est possible de déduire une matrice de transfert à partir des équations d'état. On a vu que les équations d'un GET peuvent être mises sous les formes (2.4) et (2.5),

$$\begin{aligned} x(k) &= Ax(k-1) \oplus Bu(k) \Rightarrow X(\gamma) = A\gamma X(\gamma) \oplus BU(\gamma) \Rightarrow X(\gamma) = (A\gamma)^* BU(\gamma) \\ y(k) &= Cx(k) \Rightarrow Y(\gamma) = CX(\gamma) \end{aligned}$$

La matrice de transfert apparaît alors naturellement dans l'équation suivante

$$Y(\gamma) = C(A\gamma)^* BU(\gamma).$$

On peut également écrire $Y(\gamma) = H(\gamma)U(\gamma)$ avec $H(\gamma) = C(A\gamma)^* B$.

La transformée en γ des équations aux dateurs de la figure 2.2 s'écrit sous la forme matricielle:

$$X(\gamma) = \begin{pmatrix} \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \gamma & \varepsilon & \varepsilon \\ 2\gamma^2 & e & \varepsilon \end{pmatrix} X(\gamma) \oplus \begin{pmatrix} 1\gamma & \varepsilon \\ \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} U(\gamma)$$

b

$$Y(\gamma) = (\varepsilon \quad \varepsilon \quad e) X(\gamma)$$

Le calcul de la fonction de transfert du GET de la figure 2.2 donne:

$$H(\gamma) = (1\gamma^2 \oplus 3\gamma^3(1\gamma)^* \quad e \oplus 1\gamma \oplus 3\gamma^2(1\gamma)^*). \quad (2.9)$$

2.3 Trajectoires de tir d'un GET

On s'intéresse maintenant au codage des trajectoires de tir de GET par des séries formelles. La sortie d'un GET est considérée comme la série formelle correspondant au produit de l'entrée codée en une série formelle, et du transfert également représenté en série formelle. La structure algébrique adéquate pour manipuler les séries formelles est le dioïde des séries formelles (une définition est disponible dans [Lahaye, 2000, Exemple 1.5 p 6-7]).

Le dioïde complet des séries formelles en γ (à coefficients dans $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$) est noté $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]$, celui des séries formelles en δ (à coefficients dans $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$) est noté $\overline{\mathbb{Z}}_{min}[[\delta]]$.

Soit $d(k)_{k \in \mathbb{Z}}$ un dateur, il s'agit d'une application non décroissante de \mathbb{Z} dans $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ (la définition de cette application est donnée en 2.8).

Les variables dateurs et les variables compteurs sont monotones non décroissantes donc elles vérifient respectivement sur $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ et $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$

$$\begin{aligned} d(k) &= d(k) \oplus d(k-1) \\ c(t) &= c(t+1) \oplus c(t) \end{aligned}$$

Les transformées, respectivement en γ et en δ , de ces égalités conduisent aux relations suivantes:

$$D(\gamma) = \gamma D(\gamma) \oplus D(\gamma) \implies D(\gamma) = \gamma^* D(\gamma)$$

$$C(\delta) = \delta^{-1} C(\delta) \oplus C(\delta) \implies C(\delta) = (\delta^{-1})^* C(\delta)$$

Autrement dit, pour pouvoir prendre en compte les propriétés de monotonie des dateurs (respectivement des compteurs), il faut considérer seulement les séries invariantes par rapport à la multiplication de γ^* (respectivement $(\delta^{-1})^*$).

Théorème 14

1. Le sous ensemble $\gamma^* \overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]$, composé des éléments de la forme $\gamma^* D(\gamma)$ est un dioïde d'élément nul $\varepsilon(\gamma)$ et d'élément unité γ^* . Ce dioïde sera noté $\mathcal{D}[[\gamma]]$.
2. Soit la congruence \mathcal{R}_γ définie sur $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]$ par

$$\{D_1(\gamma) \mathcal{R}_\gamma D_2(\gamma)\} \iff \{\gamma^* D_1(\gamma) = \gamma^* D_2(\gamma)\}$$

Chaque classe du dioïde quotient $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]/\mathcal{R}_\gamma$ contient un plus grand élément qui appartient à $\mathcal{D}[[\gamma]]$.

Exemple 4 Soient $D_1(\gamma)$ et $D_2(\gamma)$, deux séries formelles définies ci-dessous

$$D_1(\gamma) = 2\gamma \oplus 1\gamma^2 \oplus 4\gamma^3$$

$$D_2(\gamma) = 2\gamma \oplus 0\gamma^2 \oplus 4\gamma^3$$

On peut remarquer que ces deux séries ne sont pas monotones. Par conséquent, elles ne peuvent pas représenter la transformée en γ d'un dateur. Ceci se traduit, d'autre part, par le fait

que $\gamma^*D_1(\gamma)$ est différent de $D_1(\gamma)$ et que $\gamma^*D_2(\gamma)$ est différent de $D_2(\gamma)$. Le calcul de $\gamma^*D_1(\gamma)$ est détaillé ci-dessous et les séries $D_1(\gamma)$ et $\gamma^*D_1(\gamma)$ sont représentées en figure 2.3.

$$\begin{aligned}
\gamma^*D_1 &= \gamma^*(2\gamma \oplus 1\gamma^2 \oplus 4\gamma^3) \\
&= (2\gamma \oplus 2\gamma^2 \oplus \dots) \oplus (1\gamma^2 \oplus 1\gamma^3 \oplus \dots) \oplus (4\gamma^3 \oplus 4\gamma^4 \oplus \dots) \\
&= 2\gamma \oplus (2 \oplus 1)\gamma^2 \oplus (2 \oplus 1 \oplus 4)\gamma^3 \oplus (2 \oplus 1 \oplus 4)\gamma^4 \oplus \dots \\
&= 2\gamma \oplus 2\gamma^2 \oplus 4\gamma^3 \oplus 4\gamma^4 \oplus \dots
\end{aligned}$$

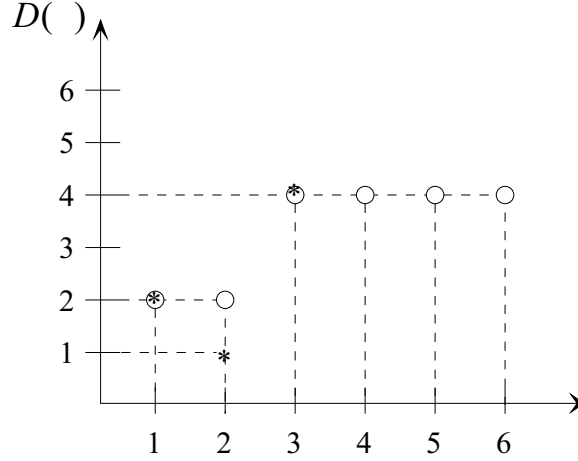


FIG. 2.3 - *: $D_1(\gamma)$, o: $\gamma^*D_1(\gamma)$

Le calcul de $\gamma^*D_2(\gamma)$ conduit à $\gamma^*D_2(\gamma) = \gamma^*D_1(\gamma)$ donc les séries $D_1(\gamma)$ et $D_2(\gamma)$ appartiennent à la même classe d'équivalence dans $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]/\mathcal{R}_\gamma$. De plus, le plus grand élément de cette classe est $\gamma^*D_2(\gamma) = \gamma^*D_1(\gamma)$.

Au vu du théorème 14, le véritable dioïde des transformées en γ de dateurs est le dioïde $\mathcal{D}[[\gamma]]$ et non $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]$. On rappelle que le dioïde $\mathcal{D}[[\gamma]]$ correspond à l'ensemble des séries formelles monotones sur $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]$, on parle alors de "filtrage" des trajectoires monotones pour la multiplication par γ^* .

Il est également possible de formuler des résultats équivalents pour la transformée en δ des compteurs.

Règle de simplification

Le "filtrage" conduit à la règle de simplification suivante dans $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]$

$$\gamma^*(\gamma^n \oplus \gamma^{n'}) = \gamma^*\gamma^{\min(n,n')}.$$

Dans une même classe de $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]/\mathcal{R}_\gamma$, la règle de simplification devient

$$\gamma^n \oplus \gamma^{n'} = \gamma^{\min(n,n')}.$$

Avec une démonstration identique sur $\overline{\mathbb{Z}}_{min}[[\delta]]$, on obtient la règle de simplification suivante sur $\overline{\mathbb{Z}}_{min}[[\delta]]/\mathcal{R}_{\delta^{-1}}$:

$$\delta^t \oplus \delta^{t'} = \delta^{\max(t,t')}$$

2.4 Représentation bi-dimensionnelle

Dans les sections précédentes, il a été question de deux représentations linéaires (mais dans deux dioïdes différents) de GET. La représentation bi-dimensionnelle permet de prendre en compte le domaine événementiel et le domaine temporel.

Le principe de la représentation bi-dimensionnelle est de coder les trajectoires de tir de GET non plus par des séries formelles en une variable (γ ou δ) mais par des séries formelles en deux variables γ et δ à exposants dans $\overline{\mathbb{Z}}$ et à coefficients booléens, ce dioïde sera noté $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$.

Rappel

Le dioïde de Boole est composé de deux éléments ε et e , $\mathbb{B} = (\{\varepsilon, e\}, \oplus, \otimes)$.

Afin de prendre en compte la monotonie des trajectoires de tir de GET, il ne faut considérer que les séries qui sont invariantes par rapport à la multiplication par γ^* (monotonie des dateurs) et la multiplication par $(\delta^{-1})^*$ (monotonie des compteurs). Dans cet objectif, seul ce sous-ensemble de $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$, noté $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$, sera considéré.

Théorème 15

1. Le sous ensemble $\gamma^*(\delta^{-1})^*\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$, composé des éléments $\gamma^*(\delta^{-1})^*X(\gamma, \delta)$, est un dioïde d'élément nul $\varepsilon(\gamma, \delta)$ (qui correspond à la série dont tous les coefficients sont égaux à ε) et d'élément unité $\gamma^*(\delta^{-1})^*$. Ce dioïde sera noté $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$.
2. Soit la relation d'ordre $\mathcal{R}_{(\gamma, \delta)}$ définie sur $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]$

$$\{X_1(\gamma, \delta)\mathcal{R}_{(\gamma, \delta)}X_2(\gamma, \delta)\} \iff \{\gamma^*(\delta^{-1})^*X_1(\gamma, \delta) = \gamma^*(\delta^{-1})^*X_2(\gamma, \delta)\}$$

Chaque classe du dioïde quotient $\mathbb{B}[[\gamma, \delta]]/\mathcal{R}_{(\gamma, \delta)}$ contient un plus grand élément qui appartient à $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$.

Le dioïde des séries formelles en deux indéterminées γ et δ qui représentent les trajectoires de tir d'une transition d'un GET est donc le dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$. Graphiquement, pour le monôme $\gamma^n\delta^t$, on ne considère plus le point de coordonnées (n, t) mais le "cône Sud-Est" de sommet (n, t) .

Remarque 3

$$\gamma^*(\delta^{-1})^* = (\gamma \oplus \delta^{-1})^*$$

Cette égalité est prouvée par la relation 1.7.

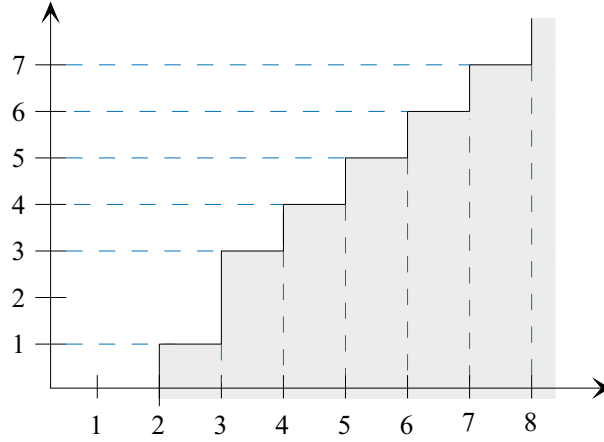
Règles de simplification

La représentation des séquences de tirs d'un GET dans le dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ induit les règles de simplification suivantes:

$$\gamma^n\delta^t \oplus \gamma^{n'}\delta^t = \gamma^{\min(n, n')}\delta^t$$

$$\gamma^n\delta^t \oplus \gamma^n\delta^{t'} = \gamma^n\delta^{\max(t, t')}$$

L'exemple de la figure 2.2 peut illustrer ce qui a été énoncé précédemment. En s'aidant de la fonction de transfert calculée en (2.9), on peut obtenir la trajectoire de tir de la transition puits $Y(\gamma, \delta)$ en fonction de la séquence de tir des entrées $U_1(\gamma, \delta)$ et $U_2(\gamma, \delta)$

FIG. 2.4 – Représentation graphique de H_1

$$Y(\gamma, \delta) = (\delta\gamma^2 \oplus \delta^3\gamma^3(\delta\gamma)^* \quad e \oplus \delta\gamma \oplus \delta^3\gamma^2(\delta\gamma)^*) \begin{pmatrix} U_1(\gamma, \delta) \\ U_2(\gamma, \delta) \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

Il est possible de décomposer l'équation 2.10 dans les termes suivants (on considérera désormais Y pour $Y(\gamma, \delta)$) :

$$Y = Y_1 \oplus Y_2$$

avec

$$Y_1 = (\delta\gamma^2 \oplus \delta^3\gamma^3(\delta\gamma)^*)U_1 = H_1U_1$$

et

$$Y_2 = (e \oplus \delta\gamma \oplus \delta^3\gamma^2(\delta\gamma)^*)U_2 = H_2U_2.$$

A titre d'exemple, la représentation en deux dimensions de la fonction de transfert H_1 est présentée en figure 2.4.

Interprétation

Les séries formelles en (γ, δ) doivent être vues comme une suite d'informations élémentaires, chaque monôme de la série correspondant à une information élémentaire. Le monôme $\delta^{t_i}\gamma^{n_i}$ de la série $X(\gamma, \delta)$ correspond à l'information :

le tir numéro n_i de la transition x a lieu au plus tôt à l'instant t_i .

2.5 Propriétés des séries formelles dans l'espace bi-dimensionnel

La représentation bi-dimensionnelle permet de caractériser un système à partir de sa matrice de transfert. De façon analogue aux systèmes linéaires classiques, l'étude de la matrice de transfert fournit les caractéristiques du système. Dans un GET, les éléments de cette matrices sont en fait des séries formelles en (γ, δ) . Il est possible de mettre en avant certaines propriétés de ces séries.

Définition 18 (causalité) Une série $s \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ est dite causale si $s = \varepsilon$ (tous les coefficients de la séries sont égaux à ε) ou si chacun des monômes est à exposants dans \mathbb{N} . Une matrice est dite causale si ces éléments sont causaux

Définition 19 (rationalité) Un élément de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ est dit rationnel si son représentant minimal (obtenu après simplification) peut être obtenu par un nombre fini d'opérations \oplus, \otimes et $*$ à partir de l'ensemble $\{\varepsilon, e, \gamma, \delta\}$. Une matrice est rationnelle si ces éléments sont rationnels.

Définition 20 (périodicité) Une série s de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$ est dite périodique si elle peut s'écrire sous la forme $s = p \oplus qr^*$ où p et q sont des polynômes en (γ, δ) et r^* un monôme en (γ, δ) .

Prenons par exemple la série $s_1 = p_1 \oplus q_1 r_1^*$ où $r_1 = \delta^\tau \gamma^\nu$ et q_1 a pour monôme de plus grand degré $\delta^t \gamma^n$. Comme le montre la figure 2.5, une série périodique présente un motif périodique (dont la période est donnée par le monôme r) qui débute à la fin du régime transitoire.

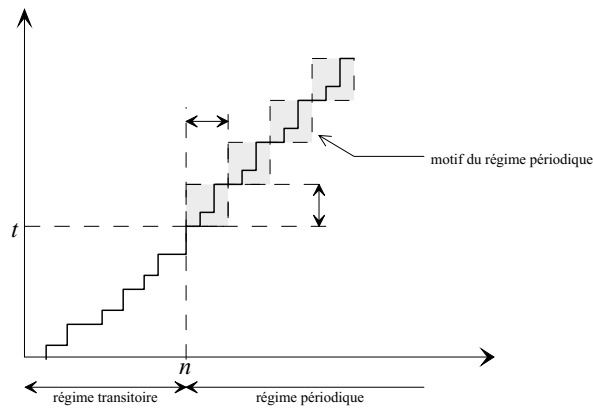


FIG. 2.5 – Représentation graphique de s_1 dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta]$

2.6 Éléments d'évaluation de performance et de commande

2.6.1 Périodicité des systèmes autonomes $(\max, +)$ linéaires

Certains systèmes $(\max, +)$, dit autonomes, ne présentent pas d'entrée (*i.e.*, $\forall k, u(k) = \varepsilon$ dans l'équation (2.4)), leur évolution est donc décrite uniquement à partir des conditions initiales et de la matrice d'évolution. La représentation d'état de ces systèmes prend la forme suivante :

$$x(k) = Ax(k-1). \quad (2.11)$$

En effectuant les itérations successives de la relation (2.11), on obtient

$$\begin{aligned} x(k) &= Ax(k-1) \\ &= A^2x(k-2) \\ &= \vdots \\ &= A^kx(0). \end{aligned}$$

Soit

$$x(k+c) = A^{k+c}x(0).$$

Les systèmes $(\max, +)$ linéaires autonomes entrent dans un régime périodique après un certain nombre d'événements. On distingue deux cas suivant la matrice d'évolution. Si celle-ci est

irréductible, après un régime transitoire le vecteur d'état en entier entre dans un régime périodique. Pour les matrices d'évolution réductibles, il est seulement possible d'obtenir une inégalité bornant supérieurement l'évolution de chacune des composantes du vecteur d'état quand le régime stationnaire est atteint.

matrice d'évolution irréductible

La périodicité de ces systèmes est directement déduite de la propriété de cyclicité des matrices $(\max,+)$ irréductibles (énoncée dans le théorème 11). Pour tout k suffisamment grand, on a en effet

$$\begin{aligned} x(k+c) &= A^{k+c}x(0) \\ &= \lambda^c A^k x(0) \\ &= \lambda^c x(k). \end{aligned}$$

Autrement dit, on a c événements en $c \times \lambda$ unités de temps, où λ est la valeur propre de A et c sa cyclicité. Le scalaire λ correspond par conséquent au temps de cycle moyen (l'inverse du taux de production).

matrice d'évolution réductible

C'est la propriété de cyclicité de la matrice d'évolution réductible (énoncée dans le théorème 13) qui permet de caractériser l'évolution d'un dateur $x_i(k)$ donnée par l'équation (2.11). On suppose sans perte de généralités que, la matrice A est sous la forme bloc-triangulaire inférieur. Pour tout $k \geq K_0$, on a alors

$$\begin{aligned} x_i(k+c) &= \bigoplus_{j=1}^i A_{ij}^{k+c} x_j(0) \\ &= \bigoplus_{j=1}^i \lambda_{ijl}^c A_{ij}^k x_j(0) \end{aligned}$$

où λ_{ijl} est un scalaire. En notant \mathcal{C} la composante fortement connexe à laquelle le noeud i appartient, λ_{ijl} appartient à l'ensemble formé par les valeurs propres associées à la composante \mathcal{C} et aux composantes en amont de la composante de \mathcal{C} , soit

$$\lambda_{ijl} \in \{\rho(\pi^*(\mathcal{C}))\}.$$

On pose

$$\forall i \in \mathcal{C}, \Lambda_i = \max\{\rho(\pi^*(\mathcal{C}))\},$$

ce qui nous permet de borner supérieurement l'évolution du dateur de la façon suivante :

$$\begin{aligned} x_i(k+c) &\leq \Lambda_i^c \left[\bigoplus_{j=1}^i A_{ij}^k x_j(0) \right] \\ x_i(k+c) &\leq \Lambda_i^c x_i(k) \end{aligned} \tag{2.12}$$

2.6.2 Commande en juste-à-temps

Nous nous sommes intéressés jusque là, à la caractérisation de la sortie d'un G.E.T. en fonction de son entrée. On peut également se pencher sur le problème "inverse" qui correspond en fait à trouver une entrée engendrant une sortie satisfaisant une consigne donnée.

Le principe de la commande en juste-à-temps consiste dans le fait de trouver la plus grande entrée u du système telle que la sortie y ne dépasse pas une certaine consigne z donnée. C'est en fait un problème de poursuite de trajectoire.

Nous avons vu au paragraphe 2.2.4 que la représentation entrée-sortie d'un G.E.T. peut s'écrire dans $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]$ sous la forme

$$y = H \otimes u ,$$

où $H = C(\gamma A)^* B$ est sa matrice de transfert. De façon équivalente, on peut écrire

$$y = L_H(u)$$

avec

$$L_H : x \longmapsto H \otimes x .$$

Le problème de poursuite de trajectoire considéré consiste à rechercher la plus grande commande u telle que $L_H(u) \preceq z$, où z est la trajectoire de consigne. La plus grande solution, notée u_{opt} , s'écrit formellement :

$$u_{opt} = \bigoplus_{\{u \in \mathcal{D} \mid L_H(u) \preceq z\}} u .$$

La résolution de ce problème se résume à un problème d'inversion de l'application L_H , la théorie de la résiduation joue donc un rôle prépondérant dans la synthèse de la commande u_{opt} .

Théorème 16 u_{opt} existe et est donnée par $u_{opt} = \frac{z}{H}$.

Preuve : L'existence et la caractérisation de u_{opt} se déduisent directement de la résiduabilité de l'application L_H (voir paragraphe 1.2.3). □

Théorème 17 u_{opt} est la plus grande solution de :

$$\begin{cases} \xi &= \frac{\xi}{\gamma A} \wedge \frac{z}{C} \\ u &= \frac{\xi}{B} \end{cases} \quad (2.13)$$

Preuve :

1 Vérifions que u_{opt} est solution de (2.13). Posons

$$\xi = \frac{z}{C(\gamma A)^*} ,$$

on a

$$u_{opt} = \frac{z}{H} = \frac{z}{C(\gamma A)^* B} = \frac{\xi}{B} .$$

Montrons que $\xi = \frac{z}{C(\gamma A)^*}$ est solution de la première équation de (2.13).

$$\xi = \frac{\frac{z}{C(\gamma A)^*}}{\gamma A} \wedge \frac{z}{C}$$

$$\xi = \frac{z}{C(\gamma A)^+} \wedge \frac{z}{C}$$

car $L_B^\# \circ L_A^\# = (L_A \circ L_B)^\# = L_{AB}^\#$. La formule (1.21) du théorème 6 nous permet d'écrire

$$\xi = \frac{z}{C(\gamma A)^+ \oplus C} = \frac{z}{C(\gamma A)^*}.$$

On vérifie bien que u_{opt} est solution de (2.13).

2 Il faut désormais montrer que toute solution est plus petite que u_{opt} .

Soit x une solution de la première équation de (2.13)

$$\begin{aligned} x &= \frac{x}{\gamma A} \wedge \frac{z}{C} = \frac{\frac{x}{\gamma A} \wedge \frac{z}{C}}{\gamma A} \wedge \frac{z}{C}, && \text{d'après la formule (1.15)} \\ &= \frac{\frac{x}{(\gamma A)^2} \wedge \frac{z}{C}}{\gamma A} \wedge \frac{z}{C}, && \\ &\vdots && \\ &= \frac{x}{(\gamma A)^n} \wedge \frac{z}{C(\gamma A)^{n-1}} \wedge \dots \wedge \frac{z}{C} \\ &\preceq \frac{\frac{z}{C(\gamma A)^{n-1}} \wedge \dots \wedge \frac{z}{C}}{\gamma A}, \quad n \geq 1 \\ &\preceq \frac{z}{C(\gamma A)^{n-1} \oplus \dots \oplus C}, \quad n \geq 1 && \text{d'après la formule (1.21)} \\ &\preceq \frac{z}{C(\gamma A)^*} \end{aligned}$$

En utilisant le résultat précédent dans la dernière équation de (2.13), on obtient

$$u = \frac{x}{B} \preceq \frac{z}{C(\gamma A)^* B} = u_{opt}.$$

□

Remarque 4 L'intérêt des équations (2.13) réside dans le fait que leur réécriture dans $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ fournit un algorithme de calcul de la commande sous la forme d'une récurrence inverse.

$$\begin{aligned} \xi = \frac{\xi}{\gamma A} \wedge \frac{z}{C} &\Leftrightarrow \gamma \xi = \frac{\xi}{A} \wedge \frac{\gamma z}{C} \Leftrightarrow \xi(k) = \frac{\xi(k+1)}{A} \wedge \frac{z(k)}{C} \\ u = \frac{\xi}{B} &\Leftrightarrow u(k) = \frac{\xi(k)}{B} \end{aligned}$$

Ce dernier système d'équations permet de calculer u_{opt} par une récurrence inverse.

Pour la mise en oeuvre de ce calcul, le problème des conditions finales se posent alors. Des détails plus importants sont donnés dans [Baccelli et al., 1992, p257], mais il faut retenir que l'idée consiste à considérer que la consigne est finie, c'est-à-dire que l'on souhaite piloter le système uniquement pour un nombre finie d'événements, noté k_f , en sortie. Vis-à-vis de la trajectoire de consigne, on considère donc que les événements au delà de k_f doivent avoir lieu à la date $+\infty$, i.e. $\forall k > k_f, z(k) = \top$. Pour initialiser la récurrence, on suppose donc les conditions suivantes :

$$k > k_f, z(k) = \top, \xi(k) = \top.$$

La commande u_{opt} s'interprète aisément dans le cadre d'un système de production. Elle correspond aux dates les plus tardives auxquelles la mise en production des pièces peut se faire, de telle sorte que les produits finis soient disponibles en sortie au plus tard avant les dates de consigne. Cette commande est également qualifiée de commande optimale vis-à-vis du critère "juste-à-temps".

Chapitre 3

Applications de l'algèbre max-plus aux systèmes de transport ferroviaire

De nombreux systèmes de transport peuvent être considérés comme des systèmes à événements discrets (SED). L'évolution de ces systèmes est conditionnée par l'apparition de certains événements, en l'occurrence, dans les systèmes de transport ferroviaire ces événements peuvent correspondre aux départs et arrivées des trains dans les gares.

Sous certaines hypothèses (simplificatrices), une description linéaire dans l'algèbre $(max,+)$ peut être réalisée pour décrire ces systèmes qui mettent en jeu des phénomènes de synchronisation et de parallélisme. Cette approche de modélisation, inspirée des travaux de Braker [Braker, 1993], a été proposée par [Goverde et al., 1998].

3.1 Modélisation d'un système de transport

3.1.1 Évolution du système sans planification

Au même titre que de nombreux SDED, le comportement de certains systèmes de transport peut être modélisé par un graphe d'événements temporisé (GET).

Considérons un exemple élémentaire de réseau ferroviaire composé de deux gares notées S_1 et S_2 et de quatre voies:

la voie $S_1 \rightarrow S_2$ comporte un train avec un temps de trajet de 2 unités de temps,

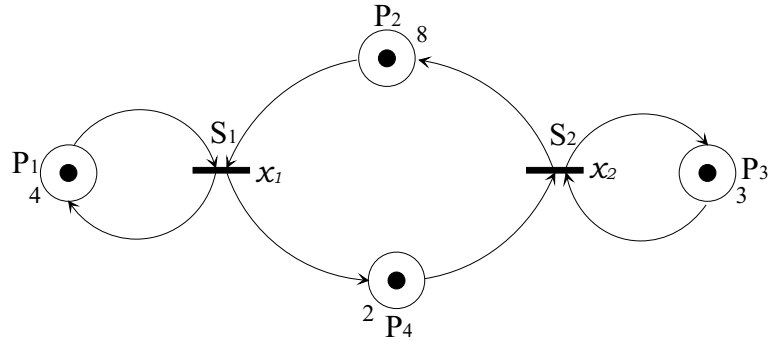
$S_2 \rightarrow S_1$ comporte un train avec un temps de trajet de 8 unités de temps,

$S_1 \rightarrow S_1$ comporte un train avec un temps de trajet de 4 unités de temps,

$S_2 \rightarrow S_2$ comporte un train avec un temps de trajet de 3 unités de temps.

La figure 3.1 représente le graphe d'événements temporisé correspondant à ce système. Les tirs de la transition x_1 (respectivement x_2) représentent les départs des trains de la stations S_1 (respectivement S_2). Les trains atteignent leur gare d'arrivée (qui parfois se trouve être la même que celle de départ) après un certain temps de voyage qui correspond aux temporisations des places dans le GET.

La politique de correspondances entre les trains est la suivante: chaque train à l'arrivée dans une gare attend tous les autres trains à l'arrivée avant de repartir. Ainsi, tous les trains sont en correspondance et partent simultanément d'une même gare. Le temps de transfert des passagers est ici négligé. Les événements du système correspondront aux départs des trains.

FIG. 3.1 – Un système de transport ferroviaire à deux gares et quatre trains

De façon classique, il est possible de modéliser dans l'algèbre $(\max, +)$ l'évolution d'un tel GET. La première étape consiste à associer à chaque transition x_i une fonction dateur $x_i(k)$ dénotant la date du $k + 1$ -ème tir de la transition x_i . Vis-à-vis du système modélisé, la variable $x_1(k)$ (resp. $x_2(k)$) traduit la date de départ du $k + 1$ -ème train depuis la gare S_1 (resp. S_2). La deuxième étape consiste à remarquer que pour qu'une transition puisse être tirée, il faut au moins un jeton disponible dans chacune de ses places en amont. Vis à vis du réseau ferroviaire, cela traduit le fait, d'une part, qu'un train doit être arrivé en gare pour pouvoir repartir. Pour les trains des lignes $S_1 \rightarrow S_1$ et $S_2 \rightarrow S_2$, cela se traduit par les inégalités suivantes :

$$x_1(k + 1) \geq x_1(k) + 4$$

$$x_2(k + 1) \geq x_2(k) + 3$$

D'autre part, ces trains doivent attendre l'arrivée des trains des lignes $S_1 \rightarrow S_2$ et $S_2 \rightarrow S_1$ en vue d'assurer les correspondances.

$$x_1(k + 1) \geq x_2(k) + 8$$

$$x_2(k + 1) \geq x_1(k) + 2$$

En considérant qu'un train part dès que chacune des conditions est satisfaite, on obtient les égalités:

$$x_1(k + 1) = \max(4 + x_1(k), 8 + x_2(k))$$

$$x_2(k + 1) = \max(2 + x_1(k), 3 + x_2(k))$$

Dans l'algèbre $(\max, +)$, ces équations peuvent également s'écrire:

$$x_1(k + 1) = 4x_1(k) \oplus 8x_2(k) \tag{3.1}$$

$$x_2(k+1) = 2x_1(k) \oplus 3x_2(k) \quad (3.2)$$

Si l'on considère $x(k)$ le vecteur d'état défini de la façon suivante:

$$x(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \end{pmatrix}$$

Les équations (3.1) et (3.2) sous la forme matricielle:

$$x(k+1) = A \otimes x(k) \quad (3.3)$$

où A est la matrice d'évolution du système, ces coefficients correspondent aux temporisations du système.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

Remarque 5 *En pratique, les coefficients de la matrice d'évolution A ne doivent pas seulement prendre en compte les temps de trajet, mais également les temps de transfert, c'est-à-dire le temps nécessaire aux passagers de quitter un train et prendre leur train en correspondance.*

Sous ces hypothèses, tout réseau ferroviaire peut être modélisé par un GET, et les équations d'évolution suivantes peuvent être posées :

$$x_i(k+1) = \max(a_{i1} + x_1(k), a_{i2} + x_2(k), \dots, a_{in} + x_n(k))$$

$$x_i(k+1) = \max_{j=1, \dots, n} (a_{ij} + x_j(k)), i = 1, \dots, n \quad (3.4)$$

$x_i(k)$ est la variable d'état qui représente le départ du $k+1$ -ème train de la station S_i

$$a_{ij} = \begin{cases} \text{temps de trajet de la gare } j \text{ à la gare } i, \text{ s'il existe une voie entre ces gares,} \\ -\infty, \text{ sinon.} \end{cases}$$

Remarque 6 *Les temps de trajet sont considérés comme déterministes et invariants par rapport au temps.*

Dans l'algèbre $(\max, +)$, 3.4 s'écrit :

$$x_i(k+1) = \bigoplus_{j=1}^n (a_{ij} \otimes x_j(k)) \quad , \quad i = 1, \dots, n$$

comme pour la relation (3.3), sous forme vectorielle on obtient une matrice A carrée de dimension $n \times n$ et qui possèdent pour coefficients les temps de trajet entre les stations ou ε si les trajets n'existent pas. On se ramène ici à une forme d'état (i.e. une récurrence d'ordre un sur les variables x).

On a jusqu'ici considéré qu'un (et un seul) train était initialement affecté à chaque voie du réseau de transport. Vis-à-vis du GET obtenu, cette hypothèse se traduit par la présence d'un unique jeton dans chacune des places. Cette hypothèse peut être relaxée. Dans ce qui suit on présente précisément la démarche de modélisation quand :

- sur certaines voies, aucun train n'est initialement affecté.
- plusieurs trains sont initialement affectés à une même voie.

Cas où il existe des voies pour lesquelles aucun train n'est initialement affecté

Le GET représenté sur la figure 3.1 comporte quatre places munies chacune d'un jeton. Considérons maintenant le cas où la place P_4 ne comporte pas de jetons, le jeton dans la place P_2 représente alors l'unique train en charge d'assurer les liaisons de la gare S_1 vers la gare S_2 , puis inversement. Les conditions de départ sont les mêmes que précédemment.

L'évolution du réseau satisfait alors l'équation suivante:

$$x(k) = A_0 x(k) \oplus A_1 x(k-1) \quad (3.5)$$

Avec $(A_0)_{ij} = \begin{cases} \text{temps de trajet de la gare } j \text{ à la gare } i, & \text{si la voie ne comporte pas de trains} \\ -\infty, & \text{sinon.} \end{cases}$
 et $(A_1)_{ij} = \begin{cases} \text{temps de trajet de la gare } j \text{ à la gare } i, & \text{si la voie comporte initialement un train} \\ -\infty, & \text{sinon.} \end{cases}$

Pour notre exemple, on obtient:

$$A_0 = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon \end{pmatrix} \text{ et } A_1 = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ \varepsilon & 3 \end{pmatrix}.$$

L'équation 3.5 est implicite, le théorème 2 permet d'établir la plus petite solution de cette équation, ce qui traduit le fonctionnement au plus tôt du système :

$$x(k) = Ax(k-1)$$

avec $A = A_0^* A_1$.

Numériquement, l'exemple fournit l'équation d'état suivante:

$$x(k) = Ax(k-1) \quad \text{avec } A = \begin{pmatrix} 4 & 8 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} \quad (3.6)$$

Remarque 7 *La simulation de ce nouveau modèle nous indique que le système obtenu est plus lent que le système initial (avec quatre trains), c'est-à-dire que les temps inter-départs à chaque gare sont plus importants.*

Cas où plusieurs trains sont affectés à une même voie

Le système satisfait alors l'équation d'évolution suivante:

$$x(k) = A_1x(k-1) \oplus \dots \oplus A_lx(k-l)$$

où $(A_l)_{ij} = \begin{cases} \text{le temps de trajet de la gare } j \text{ à la gare } i, \text{ si la voie comporte initialement } l \text{ train} \\ -\infty, \text{ sinon} \end{cases}$

Afin de se ramener à une récurrence d'ordre 1 (*i.e.* $l = 1$), on effectue des manipulations combinatoires tout-à-fait classique en théorie des systèmes, qui passent par une extension du vecteur d'état.

La figure 3.1 peut-être prise comme exemple en considérant maintenant la place pondérée par 8 comme possédant deux jetons. Le GET ainsi obtenu est le modèle d'un réseau ferroviaire comportant 5 trains (l'arc partant de la station 1 vers la station 2 possède 2 trains).

Les conditions de départ sont désormais données par

$$x_1(k) = 4x_1(k-1) \oplus 8x_2(k-2)$$

$$x_2(k) = 2x_1(k-1) \oplus 3x_2(k-1)$$

d'où $A_1 = \begin{pmatrix} 4 & \varepsilon \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $A_2 = \begin{pmatrix} \varepsilon & 8 \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$.

Posons $x'(k) = \begin{pmatrix} x_1(k) \\ x_2(k) \\ x_3(k) \end{pmatrix}$, avec $x_3(k) = x_2(k-1)$.

L'équation d'état du système devient:

$$x'(k) = A'x'(k-1)$$

où la matrice d'évolution A' est définie par

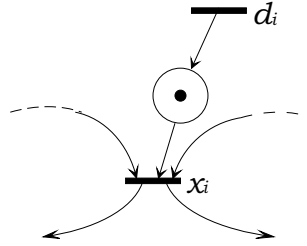
$$A' = \begin{pmatrix} 4 & \varepsilon & 8 \\ 2 & 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Remarque 8 *La simulation de ce nouveau modèle nous indique que le système obtenu est plus rapide que le système avec quatre trains, c'est-à-dire que les temps inter-départs à chaque gare sont moins importants.*

La modélisation d'un système de transport peut donc se ramener à une forme d'état standard.

3.1.2 Prise en compte de la planification

Dans la réalité, les systèmes de transport sont planifiés, c'est-à-dire qu'ils opèrent sur la base d'une table d'horaires prévisionnels. Cette table contient les horaires de départ des trains de toutes les stations. La prise en compte de cette table implique qu'un train ne pourra pas partir avant son horaire prévisionnel, même si les autres conditions sont réunies.

FIG. 3.2 – Introduction de la planification vis-à-vis d'une transition x_i

Condition de planification : Un train ne doit pas partir avant son horaire prévisionnel de départ

$$x_i(k) \geq d_i(k)$$

avec $d_i(k)$ l'horaire prévu pour le départ du $k + 1$ -ème train de la gare S_i .

Cette nouvelle condition permet de mettre en équation les conditions générales de départ d'un train:

$$x(k) = Ax(k-1) \oplus d(k) \quad (3.7)$$

$$\text{avec } d(k) = \begin{pmatrix} d_1(k) \\ d_2(k) \\ \vdots \\ d_n(k) \end{pmatrix}$$

Remarque 9 *Vis-à-vis d'un GET modélisant un système de transport (voir par exemple la figure 3.1), un dateur $d_i(k)$ peut être vu comme la variable associée à une transition source en amont de chaque transition x_i (voir figure 3.2)*

Afin que la planification des trains soit la plus régulière possible, c'est-à-dire que le temps inter-départ soit constant, elle doit satisfaire:

$$d(k+1) = \tau \otimes d(k). \quad (3.8)$$

avec τ la période de la planification.

Propriété 1 [Braker, 1993, p27] *Une table d'horaires est dite réaliste si pour tout $k \geq 0$, l'équation suivante est respectée:*

$$A \otimes d(k) \leq d(k+1).$$

Le système correspondant est appelé système réaliste.

La dynamique du système de transport doit être supérieure à celle de la planification.

3.2 Analyse

Certaines propriétés mises à jour pour les systèmes $(max,+)$ linéaires peuvent être appliquées pour l'analyse des réseaux de transport considérés.

3.2.1 Conditions initiales

On a vu précédemment que les systèmes de transport peuvent être modélisés par des équations d'état. Si la matrice d'évolution A est irréductible (définition 15), c'est à dire si son graphe associé est fortement connexe (définition 14), alors elle admet une unique valeur propre λ (théorème 9).

$$A \otimes v = \lambda \otimes v \quad (3.9)$$

où $v \in \mathcal{D}^n$ est un vecteur propre associé à la valeur propre λ de la matrice A .

La matrice A peut être considérée comme la matrice de précédence du système de transport, en effet, les éléments de A contiennent les temps de trajet entre deux gares, c'est-à-dire le poids des arcs entre deux noeuds dans le graphe de précédence de A . La forte connexité du graphe est assurée, car chaque gare doit faire partie d'un circuit (les trains ne peuvent pas s'accumuler indéfiniment dans une gare). Toute matrice d'évolution d'un réseau ferroviaire est donc irréductible et sa valeur propre peut être calculée car elle correspond au poids moyen du circuit critique du graphe (on renvoie le lecteur au paragraphe 1.3).

Proposition 1 *Afin que la planification des horaires soit régulière, il est intéressant de prendre comme conditions initiales:*

$$d(0) = x(0) = v.$$

En effet, si un vecteur propre est pris comme condition initiale, le vecteur d'état $x(k)$ atteint immédiatement un régime périodique, et satisfait l'équation

$$\begin{aligned} x(k) &= \lambda \otimes x(k-1) \\ x(k) &= \lambda^k \otimes x(0). \end{aligned} \quad (3.10)$$

On rappelle qu'une méthode de calcul des vecteurs propres est exposé à travers le théorème 10. Dans l'arithmétique usuelle, l'équation du vecteur d'état s'écrit:

$$x(k) = \lambda + x(k-1) = k \times \lambda + x(0)$$

La valeur propre λ est égale au temps de cycle du système, c'est-à-dire au temps inter-départs moyen dans le système de transport. Autrement dit, les départs des trains de chaque gare ont lieu toutes les λ unités de temps.

Pour le système de la figure 3.1, le vecteur propre est $v = (3 \ 0)^t$, et la valeur propre $\lambda = 5$.

La figure 3.3 représente les temps inter-départs de la station S_1 dans le cas où un vecteur propre est pris comme conditions initiales et dans le cas où les conditions initiales sont $d(0) = (0 \ 0)^t$. Le temps inter-départ est constant lorsque le vecteur propre est pris comme condition initiale. Dans le cas contraire, la régularité du temps inter-départ n'est pas garantie.

L'évolution du temps inter-départ (qui correspond au temps de cycle du système) traduit l'importance de choisir un vecteur propre comme condition initiale.

Connaissant la périodicité τ de la table des horaires (voir (3.8)), si la propriété 1 est vérifiée, on a:

$$A \otimes d(0) \leq \tau \otimes d(0)$$

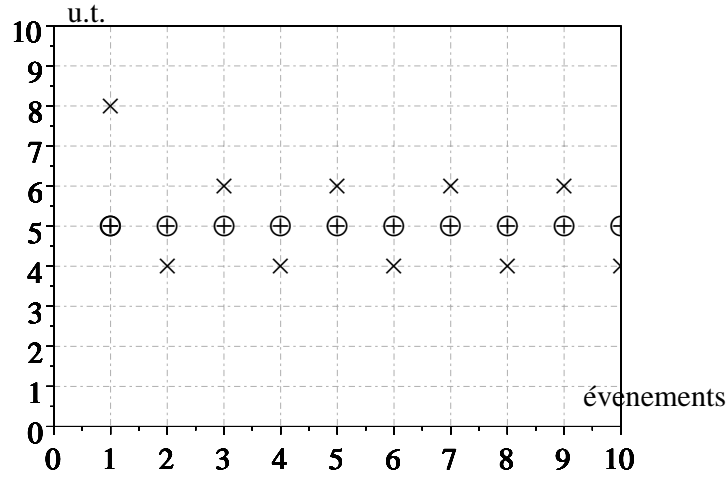


FIG. 3.3 - $\oplus : x_1(k+1) - x_1(k)$ avec $d(0) = v$, $\times : x_1(k+1) - x_1(k)$ avec $d(0) = (0,0)^t$

Or si les conditions initiales sont celles définies par la proposition 1 c'est-à-dire $d(0) = v$, alors on vérifie

$$\lambda < \tau$$

car $A \otimes d(0) = \lambda \otimes d(0)$.

Autrement dit, si on choisit comme conditions initiales un vecteur propre de la matrice d'évolution du système, la condition pour qu'une table d'horaires soit réaliste (propriété 1), se résume à choisir une période de planification plus grande que le temps de cycle du système.

3.2.2 Stabilité

Une question d'intérêt dans l'analyse d'un système de transport est de pouvoir évaluer sa propension à "absorber" d'éventuels retards (induits par des pannes, ou des accidents,...). Lorsqu'un retard est constaté, il est notamment crucial de pouvoir discerner si celui-ci va se propager ou bien disparaître. Cette propriété a été définie dans [Braker, 1993] comme la propriété de *stabilité* d'un système de transport. Plus précisément, on dira qu'un système de transport planifié est stable si tout retard vis-à-vis de la table d'horaires n'apparaît plus après un nombre fini de cycles.

Le théorème suivant permet de caractériser la stabilité d'un système .

Théorème 18 (stabilité) [Braker, 1993, Th 2.2.24] *Un système planifié est stable si et seulement si*

$$\lambda < \tau$$

où τ est le temps de cycle de la table des horaires et λ est le cycle moyen maximum du système.

La figure 3.4 représente le comportement du système représentée en figure 3.1 face à un retard de 10 u.t. lors du neuvième départ de train à la gare S_1 . Les conditions initiales sont prises telles que $x(0) = d(0) = v = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \end{pmatrix}$. La période de la planification est $\tau = 6$.

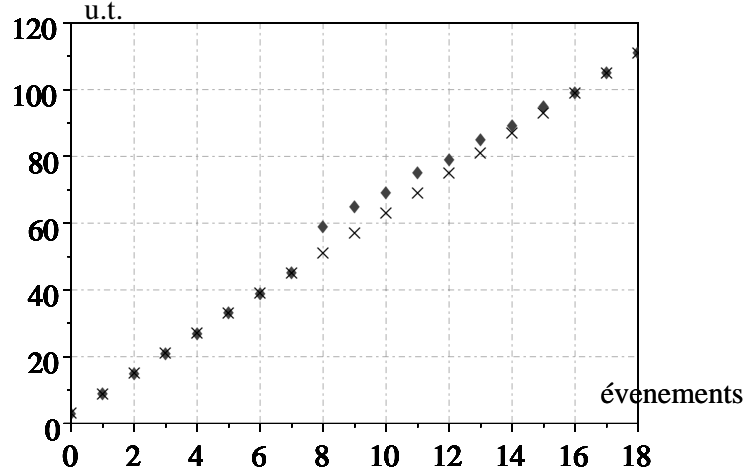


FIG. 3.4 – $\times : d_1(k+1)$, $\blacklozenge : x_1(k+1)$

A partir du dix-septième départ, le retard initialement introduit au septième événement, est complètement absorbé par le réseau.

Le théorème 18 permet d'affirmer que dans un système stable tous les retards disparaissent après un nombre fini de périodes. Cependant, il ne permet pas d'apprécier le degré de stabilité du système, c'est-à-dire la capacité du système à annihiler les retards le plus rapidement possible (en termes de périodes).

Pour évaluer la capacité du système à annuler les retards, Braker introduit la notion de marge de stabilité (voir [Braker, 1993, § 3.5.2 p69]).

3.3 Commande

Dans les réseaux de transport traités auparavant, la politique de départ des trains est conditionnée par les correspondances et la planification des horaires. Cependant, il apparaît bien évident que lors d'un retard important d'un train, toutes les correspondances ne pourront être respectées. Une solution introduite par [Schutter et al., 1998] est d'énoncer un critère permettant de choisir si certaines correspondances doivent être conservées ou non.

Une première solution est de fixer un temps limite M d'attente. Le $k+1$ -ème train part de la gare i à la date $d_i(k) \otimes M_{il}$ si le train en provenance de la gare l n'est toujours pas arrivé. Le modèle prend alors pour forme:

$$x_i(k+1) = a_{ij} \otimes x_j(k) \oplus d_i(k+1) \oplus \bigoplus_l (a_{il} \otimes x_l(k) \oplus' M_{il} \otimes d_i(k+1))$$

$$\text{avec } a \oplus' b = \min(a, b)$$

Cette méthode comporte un inconvénient apparent, il est possible que des trains attendent inutilement certaines correspondances. En effet, dans le cas où une correspondance attendue

arrive plus tard en gare i que la date $M_{il} + d_i(k+1)$, les trains qui attendent cette correspondance partiront à la date $M_{il} + d_i(k+1)$ et auront donc patienté M_{il} unités de temps inutilement.

Une solution pour minimiser la propagation des retards est de rendre les correspondances contrôlables. [Schutter et al., 1998] introduit une variable $u_{il}(k)$ permettant de décider d'éventuellement casser la correspondance avec le train partant de la gare l vers i .

Le modèle suivant est obtenu si l'on prend en compte cette variable décisionnelle:

$$x_i(k+1) = a_{ij} \otimes x_j(k) \oplus d_i(k+1) \oplus \bigoplus_l a_{il} \otimes x_l(k) \otimes u_{il}(k) \quad (3.11)$$

$$\text{où } u_{il}(k) = \begin{cases} 0 & \text{si la correspondance avec le train venant de la gare } l \text{ est maintenue,} \\ \varepsilon & \text{sinon.} \end{cases}$$

L'objectif de [Schutter et al., 1998] est de contrôler cette variable décisionnelle de sorte qu'un maximum de correspondances soient conservées sans que les retards soient trop importants.

Un premier critère de décision peut être énoncé comme suit: la correspondance sera conservée, si l'attente du train concerné ne dépasse pas une certaine durée.

$$a_{il} \otimes x_l(k) \leq d_i(k+1) \otimes M_{il} \quad (3.12)$$

Le temps d'attente M_{ij} peut être différent suivant les correspondances (en rapport avec l'importance de celles-ci).

La condition (3.12) permet de contrôler les correspondances, mais la propagation des retards n'est pas pris en compte.

La seconde approche de [Schutter et al., 1998] consiste à trouver les solutions qui minimisent le nombre de retard dans le réseau, tout en maximisant le nombre de correspondances. Cette approche nécessitera de "briser" certaines correspondances.

Pour un retard donné, le nombre total de retards engendrés dans le réseau lorsqu'on ne lui applique aucun contrôle (i.e. toutes les correspondances sont conservées) est caractérisé par:

$$\sum_k \sum_j z_j(k) \quad (3.13)$$

avec

$$z_j(k) = x_j(k) - d_j(k). \quad (3.14)$$

$z_j(k)$ est en fait le retard du $k+1$ -ème train à la station j .

L'un des objectifs est de minimiser la somme (3.13).

Le nombre de correspondances maintenues doit être maximal. On définit $u'_{il}(k)$ de la façon suivante:

$$u'_{il}(k) = \begin{cases} 1 & \text{si } u_{il}(k) = 0, \\ 0 & \text{si } u_{il}(k) = \varepsilon. \end{cases}$$

Le nombre de correspondances maintenues est donné par:

$$\sum_k \sum_{i,l} u'_{il}(k). \quad (3.15)$$

L'autre objectif du critère est de maximiser cette somme.

Toutes les correspondances ne possèdent pas la même importance, pour les différencier, le coefficient w_{il} de pondération est introduit tel que (3.15) devienne

$$\sum_k \sum_{i,l} w_{il} u'_{il}(k).$$

Plus la valeur de w_{il} est grande plus la correspondance est importante.

Dans [Schutter et al., 1998], on propose de minimiser le critère suivant, en faisant varier la variable décisionnelle $u_{il}(k)$:

$$J = \frac{(\sum_k \sum_j z_j(k))^\alpha}{1 + \sum_k \sum_{i,l} w_{il} u'_{il}(k)} \quad (3.16)$$

avec $\alpha > 0$ une variable indiquant la politique du réseau (*i.e.* privilégier la maximisation du nombre de correspondances vis-à-vis de la minimisation des retards dans le réseau, ou bien le contraire).

Pour la minimisation du critère J , seules les correspondances induisant une propagation du retard vont être contrôlées. Plus précisément, De Schutter propose dans un premier temps de simuler le comportement du système à partir de l'équation (3.11) en assurant toutes les correspondances et de détecter celles pour lesquelles l'inégalité suivante est vérifiée :

$$a_{il} \otimes x_j(k) \otimes u_{il}(k) > d_i(k+1) \oplus a_{ij} \otimes x_j(k) \quad (3.17)$$

avec $u_{il} = 0$.

La deuxième étape consiste à tester le critère J pour les combinaisons de décision ($u_{ij} = \varepsilon$ où 0) concernant ces correspondances induisant un retard. Précisément, la démarche consiste à évaluer le critère pour l'ensemble des combinaisons possibles de décisions.

On peut considérer l'exemple de la figure 3.1. Afin de modéliser ce système de la même façon que 3.11, il est essentiel de poser les conditions de départ pour chacun des trains en séparant les conditions de correspondance et les conditions physiques (c'est-à-dire les conditions qui permettent aux trains de partir après qu'ils soient arrivés). Voici les nouvelles variables d'état du système:

$x'_1(k)$ correspond à la date de départ du $k+1$ -ème train sur la voie $S_1 \rightarrow S_1$,
 $x'_2(k)$ correspond à la date de départ du $k+1$ -ème train sur la voie $S_1 \rightarrow S_2$,
 $x'_3(k)$ correspond à la date de départ du $k+1$ -ème train sur la voie $S_2 \rightarrow S_1$,
 $x'_4(k)$ correspond à la date de départ du $k+1$ -ème train sur la voie $S_2 \rightarrow S_2$.

Les conditions de départ des trains deviennent:

$$\begin{aligned} x'_1(k+1) &= 4x'_1(k) \oplus d'_1(k+1) \oplus 8x'_3(k) \\ x'_2(k+1) &= 8x'_3(k) \oplus d'_2(k+1) \oplus 4x'_1(k) \\ x'_3(k+1) &= 2x'_2(k) \oplus d'_3(k+1) \oplus 3x'_4(k) \\ x'_4(k+1) &= 3x'_4(k) \oplus d'_4(k+1) \oplus 2x'_2(k) \end{aligned}$$

Avec $d'(k) = (d'_1(k), d'_2(k), d'_3(k), d'_4(k))^t$, le vecteur contenant la table des horaires de chacun des trains.

Remarque 10 La nouvelle matrice A' définie de la façon suivante:

$$x(k+1) = A'x(k) \oplus d'(k)$$

avec

$$A' = \begin{pmatrix} 4 & \varepsilon & 8 & \varepsilon \\ 4 & \varepsilon & 8 & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & \varepsilon & 3 \\ \varepsilon & 2 & \varepsilon & 3 \end{pmatrix}$$

possèdent les mêmes propriétés spectrales (aux dimensions près) que la matrice A . Le vecteur propre de A' qui sera pris pour condition initiale est:

$$d'(0) = x'(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Afin de pouvoir contrôler le réseau, des variables décisionnelles sont insérées aux conditions de départ des trains. On obtient les équations dateurs suivantes :

$$\begin{aligned} x'_1(k+1) &= 4x'_1(k) \oplus d'_1(k+1) \oplus 8x'_3(k)u_{13}(k) \\ x'_2(k+1) &= 8x'_3(k) \oplus d'_2(k+1) \oplus 4x'_1(k)u_{21}(k) \\ x'_3(k+1) &= 2x'_2(k) \oplus d'_3(k+1) \oplus 3x'_4(k)u_{34}(k) \\ x'_4(k+1) &= 3x'_4(k) \oplus d'_4(k+1) \oplus 2x'_2(k)u_{42}(k) \end{aligned}$$

Pour illustrer la démarche de commande, on peut considérer qu'il existe initialement un retard au sein du réseau (en raison d'une panne par exemple).

Un retard de 4 u.t. est introduit à la troisième transition du système, c'est-à-dire que le train auquel est associé le dateur $x'_3(k)$ est en retard de 4 u.t. par rapport à son horaire de départ prévu par la planification (soit $x'_3(0) = 4 + d'_3(0)$ dans l'algèbre usuel).

$$\begin{aligned} d'(k) &= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{k=0} \longrightarrow \begin{pmatrix} 9 \\ 9 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}_{k=1} \longrightarrow \begin{pmatrix} 15 \\ 15 \\ 12 \\ 12 \end{pmatrix}_{k=2} \longrightarrow \begin{pmatrix} 21 \\ 21 \\ 18 \\ 18 \end{pmatrix}_{k=3} \longrightarrow \begin{pmatrix} 27 \\ 27 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix}_{k=4} \\ x'(k) &= \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ \emptyset 4 \\ 0 \end{pmatrix}_{k=0} \longrightarrow \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \\ 6 \\ 6 \end{pmatrix}_{k=1} \longrightarrow \begin{pmatrix} 16 \\ 16 \\ 14 \\ 14 \end{pmatrix}_{k=2} \longrightarrow \begin{pmatrix} 22 \\ 22 \\ 18 \\ 18 \end{pmatrix}_{k=3} \longrightarrow \begin{pmatrix} 27 \\ 27 \\ 24 \\ 24 \end{pmatrix}_{k=4} \\ z'(k) &= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}_{k=0} \longrightarrow \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{k=1} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}_{k=2} \longrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{k=3} \longrightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{k=4} \end{aligned}$$

A partir du cinquième départ, le retard initialement introduit n'apparaît plus dans le réseau. Le nombre total de retards engendrés dans le réseau par le retard initial est de 14 u.t. (ce calcul est donné par la relation (3.13)).

Les correspondances qu'il est jugé judicieux de contrôler sont données par (3.17). Elles correspondent aux variables décisionnelles suivantes: $u_{13}(1), u_{21}(2), u_{42}(2), u_{13}(3)$ et $u_{42}(3)$. Les autres variables décisionnelles prennent pour valeur 0.

Le critère atteint la valeur minimale $J=1,75$ pour la stratégie suivante: $u_{13}(1) = \varepsilon$, $u_{21}(2) = 0$, $u_{42}(2) = \varepsilon$, $u_{13}(3) = 0$ et $u_{42}(3) = 0$. Le nombre global de retards engendrés dans le réseau est de 7 u.t. Cependant, deux correspondances n'auront pas été respectées.

Dans l'exemple précédent, on a considéré $w_{il} = 1$ pour toutes les correspondances, c'est-à-dire qu'elles ont toute la même importance. De plus, on a choisi $\alpha = 1$. Un coefficient $\alpha < 1$ aurait amené des résultats différents (les correspondances auraient été privilégiées par rapport aux retards).

Notons que s'il existe n correspondances à contrôler, le nombre de stratégies possibles est de 2^n . Dans l'exemple simpliste de la figure 3.1, le nombre de stratégies différentes est de 32. L'algorithme de contrôle du réseau est de complexité $\mathcal{O}(2^n)$.

Cependant, [Schutter et al., 1998] introduit une méthode heuristique de contrôle du réseau avec une complexité polynômiale. Tout comme la méthode exacte, le système doit tout d'abord être simulé en assurant toute les correspondances. Puis, le principe est de "briser" la correspondance qui induit la plus grande diminution de J . On réitère la méthode jusqu'à ce que le critère J ne puisse plus être amélioré. L'inconvénient de cette méthode est qu'elle ne conduit pas en général à l'optimum puisque toutes les possibilités ne sont pas explorées.

Chapitre 4

Contribution à l'étude des réseaux de transport urbain

On a vu dans le chapitre précédent que le fonctionnement des systèmes ferroviaires pouvait faire l'objet d'une description et donc d'une étude *via* la théorie des systèmes sur les dioïdes. Dans ce chapitre, on explore les potentialités d'application de cette théorie pour l'analyse d'une autre classe de systèmes de transports : les réseaux de bus urbains.

On commence par énoncer les principes de fonctionnement des réseaux de bus urbains. Il s'agit là d'une synthèse de différents rapports décrivant les pratiques d'exploitation de tels réseaux. Nous verrons que celles-ci se répartissent en deux phases successives : une phase d'optimisation et de planification qui permet d'aboutir à un *tableau de marche*, puis une phase dite de *régulation*.

Se basant sur cette description, on propose ensuite une modélisation dans l'algèbre des dioïdes du tableau de marche d'un réseau de bus. On aboutit précisément à une description linéaire standard dans cette structure algébrique.

A partir de ce modèle, on propose dans la partie suivante une analyse de la stabilité des réseaux de bus. Plus explicitement, on met à jour une condition sur les fréquences de passage des bus pour chaque ligne qui garantit que le réseau puisse absorber les éventuels retards survenant dans le réseau.

Enfin, on met en avant que certains outils de la théorie des systèmes sur les dioïdes peuvent être utilisés pour la résolution d'un problème d'optimisation important dans la synthèse du tableau de marche : la génération des tables d'horaires.

4.1 Pratiques d'exploitation des réseaux de bus urbains

D'après [Hayat and Maouche, 1997] et [Soulhi, 2000], l'exploitation d'une ligne d'autobus se décompose en deux phases : le *tableau de marche* (TM) et la *régulation*. Le TM correspond à la phase de la conception et de l'élaboration du programme de production. Quant à la régulation, elle consiste à analyser les écarts existants entre le fonctionnement théorique défini par le TM et la réalité. Et elle met en œuvre des actions susceptibles de les combler.

4.1.1 Définition d'un tableau de marche

Le TM est établi dans l'objectif d'optimiser l'offre de service tout en satisfaisant les contraintes d'exploitation (le nombre de chauffeurs, leurs horaires de travail, la flotte de bus, *etc.*). Il est calculé pour des conditions moyennes d'exploitation, et concrètement, cette optimisation permet de définir notamment les points suivants :

1. le tracé des lignes, la localisation des arrêts et l'allocation des ressources par ligne (nombre de bus et chauffeurs),
2. le choix d'une qualité de l'offre de service, en définissant, en particulier, des fréquences de passage pour chaque ligne,
3. la synthèse des tables d'horaires qui définissent les heures théoriques de passage des bus à chaque arrêt.

4.1.2 Actions de régulation

La régulation consiste en des ajustements ou des adaptations du TM en réactions aux conditions réelles d'exploitations. Ces actions peuvent être décidées par les chauffeurs de bus et/ou un superviseur du réseau (visualisant l'évolution du réseau et pouvant communiquer avec les chauffeurs). On peut distinguer deux types de conditions amenant à des "manœuvres de régulation" :

- *réagir à des perturbations* (panne d'un bus, modifications des conditions de circulation, *etc.*). La régulation peut par exemple consister à dérouter un bus, "sauter" certains arrêts, transférer les passagers vers une autre ligne...
- *améliorer opportunément l'offre de service au sein du réseau.*

L'objectif peut, par exemple, être d'absorber un "pic de charge" prévisible au sein du réseau. La manœuvre consiste à retarder le départ du bus si l'arrivée d'un important contingent d'usagers est imminente (par ex., à proximité d'une usine à l'heure de débauche).

Il peut aussi s'agir d'assurer des correspondances "intermodales" à certains points du réseau. A des arrêts où différents modes de transport convergent (métro, tramway et/ou train...), l'idée est de minimiser les temps de correspondance en attendant les contingents d'usagers en provenance des autres modes de transport.

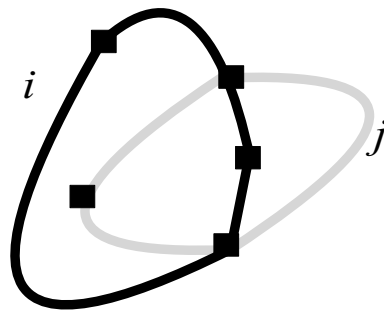
4.2 Modélisation du tableau de marche

Dans cette section, on propose une modélisation du fonctionnement d'un réseau de bus opérant selon son tableau de marche.

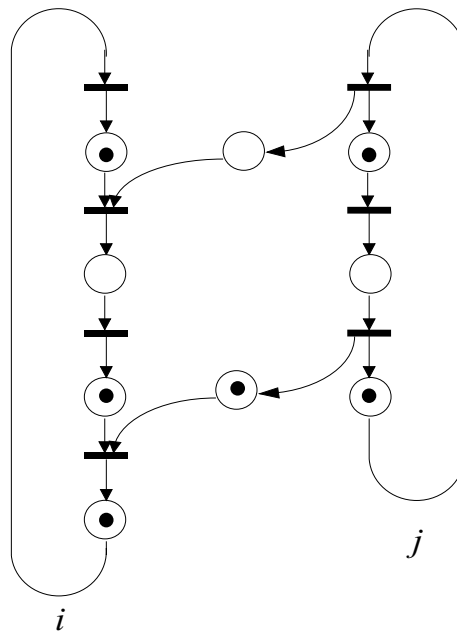
Le tracé des lignes, l'allocation des ressources, le nombre d'arrêts sont autant d'éléments du point 1 de la définition du tableau de marche (voir 4.1.1) qui peuvent être représentés par un graphe comme sur la figure 4.1.

Dans ce tracé, les deux lignes partagent certains arrêts. Ces arrêts communs ont pour but d'établir des correspondances entre les lignes. On prend pour hypothèse que les bus de la ligne i doivent attendre ceux de la ligne j pour quitter leur arrêt, autrement dit, les bus de la ligne i sont en correspondance avec ceux de la ligne j . Ce type de phénomène est qualifié de "synchronisation partielle".

La ligne j comporte deux bus et la ligne i comporte trois bus.

FIG. 4.1 – Représentation de deux lignes

Ce réseau élémentaire peut également se modéliser graphiquement par un GET.

FIG. 4.2 – Représentation de deux lignes de bus en GET

Le modèle graphique de ce type de système correspond à un GET non fortement connexe puisque les synchronisations entre les lignes sont partielles. Les dates de départ des trains sont régies par l'équation d'état

$$x(k) = Ax(k - 1).$$

La matrice d'évolution du système est donc réductible et peut s'écrire sous forme bloc-triangulaire (voir paragraphe 1.3.3, cas réductible).

$$A = \begin{pmatrix} A_{11} & \varepsilon & \dots & \varepsilon \\ A_{21} & A_{22} & \dots & \varepsilon \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \dots & \dots & A_{nn} \end{pmatrix}$$

Le bloc A_{ii} représente la composante fortement connexe \mathcal{C}_i et le bloc A_{ij} correspond au lien entre la composante \mathcal{C}_j et la composante \mathcal{C}_i .

En termes de réseaux de bus urbains, la composante \mathcal{C}_i peut être interprétée comme la ligne de bus i (on vérifie trivialement qu'une ligne de bus correspond à une composante fortement connexe). Le bloc A_{ij} représente les éventuelles synchronisations entre les lignes j et i , si $A_{ij} = \varepsilon$, il n'y a pas de synchronisations directes entre les lignes j et i .

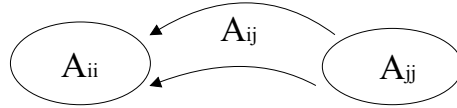


FIG. 4.3 – Graphe réduit de deux lignes de bus

On a introduit dans le point 3 de la définition du TM (voir paragraphe 4.1.1), l'existence d'une planification (tout comme les réseaux ferroviaires). On peut donc introduire une nouvelle condition de départ au modèle du système :

$$x(k) = Ax(k-1) \oplus Bd(k) , \quad (4.1)$$

avec $d_l(k)$ l'horaire prévu pour le $k+1$ départ de bus de l'arrêt l . On considère dans un premier temps que la planification est respectée à chacun des arrêts. Dans la modélisation, la prise en compte de cette hypothèse se traduit par $B = Id$.

Rappelons que dans le cas des réseaux ferroviaires, Braker prend pour hypothèse que la table d'horaire est périodique (voir paragraphe 3.1.2), c'est-à-dire

$$d(k+1) = \tau \otimes d(k) , \quad (4.2)$$

où τ est la période de planification commune à toutes les gares. Afin de se placer dans un cadre plus réaliste vis-à-vis des réseaux de bus urbains considérés (détail du point 2 de la définition du tableau de marche), on va dans ce qui suit "relaxer" cette hypothèse sur la planification.

- Tout d'abord, il apparaît que les fréquences de passage des bus ne sont généralement pas les mêmes sur les différentes lignes du réseau. En effet, en fonction du taux d'utilisation et/ou de la qualité de service désirée, la période planifiée entre deux passages de bus peut varier selon les lignes. Face à ce constat, nous allons être amenés à considérer des conditions de planification spécifiques à chaque ligne, c'est-à-dire une condition sur chaque ensemble d'éléments d_l où l'indice l traduit les différents noeuds d'une même composante fortement connexe \mathcal{C}_i ¹.
- D'autre part, plutôt que de chercher à imposer une période constante entre deux départs (situation considérée pour les trains avec la condition (4.2)), il est usuel pour les réseaux de bus [Lin et al., 1995][Strathman et al., 2001] de définir un intervalle de valeurs traduisant les "écarts temporels" possibles entre les départs successifs. Précisément, l'usage est de définir un "écart"² minimum et un "écart maximum" entre deux bus d'une même ligne :

$$\forall l \in \mathcal{C}_i, \quad d_l(k+1) \geq \Delta_i^{\min} d_l(k) \quad (4.3)$$

$$\Delta_i^{\max} d_l(k) \geq d_l(k+1) \quad (4.4)$$

1. Alors que Braker considère la condition (4.2) qui s'applique à la totalité du vecteur $d(k)$.

2. Le terme anglais consacré est "headway".

où Δ_i^{min} et Δ_i^{max} sont les écarts minimum et maximum à imposer sur la ligne i (c'est-à-dire la composante \mathcal{C}_i).

Soit de façon générale,

$$d(k+1) \geq \Delta^{min} d(k)$$

et

$$d(k+1) \leq \Delta^{max} d(k),$$

avec Δ^{min} et Δ^{max} deux matrices diagonales de la dimension de A .

$$\Delta^{min} = \begin{pmatrix} \Delta_1^{min} & \varepsilon & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \varepsilon \\ \varepsilon & \ddots & & & & & & \vdots \\ \vdots & & \Delta_i^{min} & & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \Delta_i^{min} & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & & \varepsilon \\ \varepsilon & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \varepsilon & \Delta_n^{min} \end{pmatrix}$$

$$\Delta^{max} = \begin{pmatrix} \Delta_1^{max} & \varepsilon & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \varepsilon \\ \varepsilon & \ddots & & & & & & \vdots \\ \vdots & & \Delta_i^{max} & & & & & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \Delta_i^{max} & & & \vdots \\ \vdots & & & & & \ddots & & \varepsilon \\ \varepsilon & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \varepsilon & \Delta_n^{max} \end{pmatrix}$$

On retrouve sur les diagonales de ces matrices, les écarts minimum Δ_i^{min} et maximum Δ_i^{max} attribués à chaque composante fortement connexe \mathcal{C}_i de $\mathcal{G}(A)$, c'est-à-dire à chaque ligne de bus du réseau.

Remarque 11 *L'objectif en imposant la contrainte de planification (4.2), c'est-à-dire en cherchant à fixer un écart minimum entre les bus, est d'éviter la formation d'accumulations de bus sur les lignes, autrement dit, des regroupements de plusieurs bus les uns à la suite des autres. Un tel scénario a tendance à se produire naturellement dès qu'un bus prend du retard ([Lin et al., 1995][Strathman et al., 2001]). En effet, un bus en retard a logiquement plus de passager à embarquer à chaque arrêt et son retard a donc tendance à augmenter. Au contraire, le bus qui le suit a moins de passagers à enlever, et il aura donc tendance à évoluer plus vite que prévu au sein du réseau et donc à rattraper le bus précédent. Lorsque l'accumulation est formée, on aboutit à une configuration "contre-productive" puisque généralement seul le bus en "tête de convoi" embarque des passagers et que les bus qui le suivent attendent inutilement. Du point de vue des passagers, ces dysfonctionnement provoquent des accroissements des temps de trajet et des non-respects des horaires prévisionnels.*

D'autre part, le choix d'un "écart maximum" dans la seconde contrainte de planification (4.4), traduit la volonté d'assurer une qualité de service en spécifiant une fréquence minimale de passage des bus aux arrêts.

Comme pour les systèmes ferroviaires, on considérera dans ce qui suit uniquement des tables d'horaires réalistes (voir propriété 1), c'est-à-dire telle que

$$\forall k \geq 0, A \otimes d(k) \leq d(k+1).$$

4.3 Étude de la stabilité

Un élément d'analyse important du comportement d'un réseau de bus urbain est la caractérisation de sa stabilité, *i.e.* de sa capacité à absorber d'éventuels retards dans le réseau. Une condition nécessaire et suffisante de stabilité pour les systèmes de transport a été introduite par Braker dans [Braker, 1993] (rappelée dans le théorème 18). Cette condition repose sur l'hypothèse d'une même période de planification à chaque noeud du réseau. Pour les réseaux de bus, on a vu qu'il était plus réaliste de définir des bornes sur la planification au niveau de chaque ligne (équations (4.3) et (4.4)). Dans ce contexte, et en s'inspirant du théorème de Braker, on propose une condition sur les écarts minimums Δ_i^{min} entre chaque bus d'une ligne i , suffisante à garantir la stabilité du réseau de bus.

Proposition 2 *Un système planifié est stable si pour toute composante fortement connexe \mathcal{C}_i (correspondant à la ligne i du réseau), on a*

$$\Lambda_i < \Delta_i^{min}.$$

On rappelle que Λ_i (introduit au paragraphe 2.6.1) est défini comme le plus grand élément de l'ensemble formé par la valeur propre de \mathcal{C}_i et celles des composantes en amont de \mathcal{C}_i .

Preuve :

On suppose qu'un retard a été initialement introduit dans le réseau et on montre, afin de prouver la stabilité du système, que ce retard décroît strictement au cours de son évolution.

Le fonctionnement de la planification est tel que pour une composante \mathcal{C}_i et pour tout noeud l de cette composante, on a

$$\forall k, (\Delta_i^{min})^m d_l(k) \leq d_l(k+m).$$

On peut en déduire l'inéquation suivante

$$\forall k, x_l(k+m) - (\Delta_i^{min})^m d_l(k) \geq x_l(k+m) - d_l(k+m).$$

Soit

$$\forall k, x_l(k+m) - (\Delta_i^{min})^m d_l(k) \geq z_l(k+m), \quad (4.5)$$

où la variable $z_l(k)$, traduisant le retard pour l'itéré k , est défini en (3.14), *i.e.* $z_l(k) = x_l(k) - d_l(k)$.

Or on a montré au paragraphe 2.6.1 (équation (2.12)) qu'il existe deux entiers K_0 et m tels que $\forall k \geq K_0$, l'inéquation $x_l(k+m) \leq \Lambda_i^m x_l(k)$ soit vérifiée.

L'équation (4.5) devient alors

$$\Lambda_i^m x_l(k) - (\Delta_i^{min})^m d_l(k) \geq z_l(k+m). \quad (4.6)$$

Comme par hypothèse $\Lambda_i < \Delta_i^{min}$, (4.6) permet d'écrire

$$\begin{aligned} \Lambda_i^m x_l(k) - \Lambda_i^m d_l(k) &> z_l(k+m) \\ x_l(k) - d_l(k) &> z_l(k+m) \\ z_l(k) &> z_l(k+m). \end{aligned}$$

Ce qui prouve que les retards décroissent strictement au fil des départs. D'autre part, compte tenu de l'expression de $x(k)$ dans l'équation (4.1), $x(k)$ est toujours supérieur ou égal à $d(k)^3$, le retard ne peut donc pas prendre une valeur négative. Finalement, on en déduit qu'il existe donc un entier k tel que $z(k) = 0$. □

4.4 Génération de tables d'horaires

4.4.1 Description du problème

Dans le modèle présenté précédemment, on a pris en compte les aspects suivants du "tableau de marche" d'un réseau de bus

1. le tracé du réseau (répartition et itinéraires des lignes traduits par un GET)
2. l'allocation des véhicules à chaque ligne (représentée par le nombre de jetons dans le G.E.T)
3. le choix d'une fréquence de service (prise en compte *via* les contraintes sur la planification)
4. les tables d'horaires

Dans cette partie, on cherche précisément à mettre en avant l'apport de notre approche pour cette optimisation. Plus précisément, étant donnés les trois premiers points du "tableau de marche" mentionnés ci-dessus, on cherche à répondre au problème de synthèse des tables d'horaires.

De nombreux travaux ont été menés sur ce sujet (voir [Palma and Lindsey, 2000] et [Ceder et al., 2000] ainsi que les références citées en introduction de ce dernier article). On traite dans ce qui suit une version très proche du problème d'optimisation posé dans [Ceder et al., 2000], à savoir⁴, générer la table d'horaires $d_n(k)$ de chaque noeud indexé n du réseau tout en optimisant

$$\sum_n \sum_k J_{nk} \quad (4.7)$$

tel que

•

$$J_{nk} = \max(1 - |(A_{nj} + d_j(k)) - (A_{nl} + d_l(k))|, 0) \quad (4.8)$$

où n est un noeud de correspondance au sein du réseau, et j, l sont les arrêts en amont de ce noeud (j, l appartiennent à deux lignes différentes).

•

$$\Delta_i^{min} \leq d_l(k+1) - d_l(k) \leq \Delta_i^{max} \quad (4.9)$$

où le noeud l appartient à la composante fortement connexe \mathcal{C}_i (soit la ligne i)

•

$$d_l(F_i) \leq \top \quad (4.10)$$

où F_i dénote le nombre de départs à planifier pendant l'intervalle $[0, t]$ sur la ligne i .

3. Ce qui s'interprète dans la réalité par le fait qu'un bus ne peut pas partir avant sa date prévisionnelle de départ.

4. Dans un souci de lisibilité, les notations ont été ici adaptées avec le reste du texte.

On peut dire que le problème posé revient à générer des tables d'horaires minimisant les différences entre les arrivées des bus en correspondance (maximisation du critère (4.7)-(4.8)), tout en satisfaisant les contraintes de planification (inéquation (4.9)) et les objectifs de services fixés par l'équation (4.10).

Les outils utilisés dans [Ceder et al., 2000] pour la résolution de ce problème sont essentiellement basés sur des méthodes de programmation linéaire. Tout proche de ce problème, et partant du modèle présenté au paragraphe 4.2, on tente ici de résoudre ce problème à l'aide des outils propres à la théorie des dioïdes. La formulation du problème de génération des tables d'horaires est tout d'abord retranscrite dans ce contexte.

On se donne un ensemble noté \tilde{N} de noeuds correspondant à des arrêts "stratégiques" au sein du réseau. Vis-à-vis du modèle obtenu, on note $y(k)$ le vecteur des dateurs associés à ces arrêts, et

$$y(k) = Cx(k),$$

où C est une matrice de dimension $q \times n$, n étant le nombre de station du réseau (et donc aussi la dimension du vecteur d'état x) et q est le nombre d'arrêt "stratégique" du réseau (soit $q = \text{card}(\tilde{N})$) et définie par

$$C_{ij} \begin{cases} e & \text{si } j \in \tilde{N} \text{ et } y_i = \sigma(x_j), \\ \varepsilon & \text{sinon.} \end{cases}$$

Cette matrice joue le rôle de filtre ne retenant de $x(k)$ que les dates de départs des arrêts appartenant à \tilde{N} . Chacune des lignes de C contient un élément égal à e représentant l'élément de x à conserver, les autres éléments de la ligne correspondent à ε .

En se donnant un vecteur de consigne $z(k)$, avec $z_i(k)$ la date à laquelle le k -ième bus doit partir de l'arrêt $i \in \tilde{N}$, l'inéquation (4.10) se traduit ici par l'inégalité

$$y(k) \leq z(k)$$

avec

$$\begin{cases} x(k) & = Ax(k-1) \oplus Bd(k) \\ y(k) & = Cx(k) \end{cases} \quad (4.11)$$

En utilisant la transformée en γ des équations (4.11), on aboutit à la représentation suivante

$$y = H \otimes d = L_H(d),$$

où $H = C(\gamma A)^* B$ est la matrice de transfert (voir paragraphe 2.2.4).

On va appliquer la commande en juste-à-temps présentée au paragraphe 2.6.2 pour calculer la plus grande trajectoire d (c'est-à-dire les dates de départ les plus tardives) tel que

$$\forall k, y = L_H(d) \preceq z, \quad (4.12)$$

On renvoie le lecteur à [Cohen et al., 1989] ou [Menguy, 1997] pour se convaincre que lorsqu'appliquée en entrée de système (4.11), cette trajectoire est telle qu'à chaque noeud n , on a :

$$k \geq 0, \forall j, l \in \pi(n), A_{nj}x_j(k-1) = A_{nl}x_l(k-1)$$

Autrement dit, la table d'horaires ainsi générée est telle qu'à chaque arrêt deux bus en correspondance arrivent simultanément, et optimise par conséquent le critère défini par (4.7).

Afin de tenir compte des contraintes de planification (définies par (4.3) et (4.4) et prises en compte dans le problème précédent sous la forme (4.9)), on va traiter la synthèse de la trajectoire $\{d(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ tout en imposant que les contraintes suivantes soient vérifiées :

$$d(k+1) \geq \Delta^{\min} d(k) \quad (4.13)$$

$$\Delta^{\max} d(k) \geq d(k+1) \quad (4.14)$$

4.4.2 Formalisation du problème

Le problème décrit précédemment se résume à un problème de *résiduation contrainte*⁵. En effet, en notant $A[[\gamma]]$ le sous-ensemble de $\mathbb{Z}_{\max}[[\gamma]]$ composé des séries respectant les contraintes de planification, le problème revient à chercher la plus grande solution du système suivant :

$$\begin{cases} L_H(d) \preceq z \\ d \in A[[\gamma]] \text{ (domaine admissible).} \end{cases} \quad (4.15)$$

On caractérisera $A[[\gamma]]$ par la suite.

Ce problème se formalise aussi sous la forme d'une inversion d'application dont on restreint le domaine de définition.

Des résultats classiques sur les problèmes de restrictions d'applications sont rappelés dans [Cottenceau, 1999, paragraphe 1.2.2].

On définit ci-dessous la notion de restriction d'applications à un domaine.

Définition 21 (Restriction d'une application à un domaine) Soit $f : E \longrightarrow F$ et $A \subseteq E$. On note $f|_A$ l'application de A dans F , vérifiant

$$f|_A = f \circ Id|_A$$

où $Id_A : x \longmapsto x$ représente l'injection canonique de A dans E . L'application $f|_A$ est appelée restriction de f au domaine A . Le diagramme suivant commute (i.e. deux applications différentes, qui à travers leur cheminement dans le diagramme ont une origine et une arrivée communes, sont égales).

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ Id|_A \uparrow & \nearrow & \\ A & & f|_A \end{array}$$

En tenant compte de la définition précédente, le problème contraint (4.15) se ramène à résoudre

$$L_{H|_A}(u) = L_H \circ Id|_A(u) \preceq z, \quad (4.16)$$

5. Cette dénomination provient de [Cohen, 1998, paragraphe 1.3] et a été reprise dans [Cottenceau, 1999].

où $Id_{|A}$ est l'injection canonique de $A[[\gamma]]$ dans $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]$. On a alors le diagramme commutatif suivant.

$$\begin{array}{ccc} \overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]] & \xrightarrow{L_H} & \overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]] \\ Id_{|A} \uparrow & \nearrow L_{H_{|A}} & \\ A[[\gamma]] & & \end{array}$$

Proposition 3 (d'après [Cottenceau, 1999, p.27][Cohen, 1998, paragraphe 1.3])

Si $Id_{|A}$ est résiduable, alors le problème de résiduation contrainte (4.15) admet une solution optimale et cette solution est $(L_{H_{|A}})^\#(z)$.

Preuve :

Si $Id_{|A}$ est résiduable, alors $L_{H_{|A}}$ est résiduable (théorème 5) et la plus grande solution de l'équation (4.16), solution optimale du problème contraint, est donnée par

$$(L_{H_{|A}})^\#(z) = (Id_{|A})^\# \circ L_H^\#(z). \quad (4.17)$$

□

La solution (4.17) s'interprète en deux étapes ([Cohen, 1998, paragraphe 1.3]) qui sont :

1. résolution du problème de résiduation non contraint.
2. recherche de la solution la plus proche dans le domaine admissible.

Dans le paragraphe suivant, on apporte la solution au problème contraint posé pour la génération des tables d'horaires. La démarche va consister dans un premier temps à caractériser le sous-ensemble $A[[\gamma]]$ de $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]$ (le domaine admissible), puis à prouver la résiduabilité de $Id_{|A}$ (cf. proposition 3).

4.4.3 Résolution du problème

Pour simplifier l'exposé, on considère dans un premier temps que les contraintes de planification se résument à la seule contrainte (4.13). On traitera le cas général à la fin de cette section.

Caractérisation de $A[[\gamma]]$

Ce sous-ensemble de $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]$ est composé des éléments dont les dateurs associés respectent la contrainte

$$d(k+1) \geq \Delta^{min} d(k).$$

De façon équivalente, on peut écrire :

$$\frac{d(k+1)}{\Delta^{min}} \geq d(k).$$

La transformée en γ de cette inéquation donne

$$\begin{aligned} \frac{D(\gamma)}{\gamma\Delta^{min}} &\geq D(\gamma) \\ \iff D(\gamma) &= D(\gamma) \wedge \frac{D(\gamma)}{\gamma\Delta^{min}} \\ \iff D(\gamma) &= \frac{D(\gamma)}{(\gamma\Delta^{min})^*}. \end{aligned}$$

La dernière égalité s'obtient en appliquant le résultat (voir par exemple [Baccelli et al., 1992, paragraphe 4.5]) qui énonce que la plus grande solution de l'équation $x = \frac{x}{a} \wedge b$ est $x = \frac{b}{a^*}$.

Le sous-ensemble $A[[\gamma]]$ contient l'ensemble des séries de $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]$ invariantes lorsqu'elles sont résiduées par $(\gamma\Delta^{min})^*$, soit

$$A[[\gamma]] = \{x \in \overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]] \mid x = \frac{x}{(\gamma\Delta^{min})^*}\}.$$

Résiduabilité de $Id|_A$

La seconde étape consiste à démontrer que l'application $L_{H|_A}$ est résiduable, ce qui d'après la proposition 3, repose simplement sur la démonstration de la résiduabilité de l'injection canonique $Id|_A$ de $A[[\gamma]]$ dans $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]$.

Pour cela, en s'inspirant de la construction de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ proposée par [Cohen, 1993, paragraphe 3.1], on énonce plusieurs propriétés de $A[[\gamma]]$ en étudiant de façon générale le quotientage d'un dioïde \mathcal{D} par la relation

$$\{x \mathcal{R}_p y\} \iff \left\{ \frac{x}{p^*} = \frac{y}{p^*} \right\}$$

où $p \in \mathcal{D}$ (dans le cas de $A[[\gamma]]$, $p = \gamma\Delta^{min}$).

Proposition 4 Soit Π_p l'application d'un dioïde \mathcal{D} dans lui même définie par

$$\Pi_p : x \mapsto \frac{x}{p^*}.$$

La relation \mathcal{R}_p définie sur \mathcal{D} par :

$$\{x \mathcal{R}_p y\} \iff \left\{ \frac{x}{p^*} = \frac{y}{p^*} \right\}$$

est une relation d'équivalence.

1. Chaque classe d'équivalence de $\mathcal{D}/\mathcal{R}_p$ contient un et un seul élément de l'ensemble $\frac{\mathcal{D}}{p^*}$ (également noté $\Pi_p(\mathcal{D})$). Pour la classe de x , cet élément est explicitement donné par $\frac{x}{p^*}$.
2. L'élément $\frac{x}{p^*}$ est le plus petit élément de la classe de x , et c'est de plus le plus grand élément de $\Pi_p(\mathcal{D})$ qui soit inférieur à x .

Preuve :

1. Remarquons que Π_p est un projecteur,

$$\Pi_p \circ \Pi_p(x) = \frac{\frac{x}{p^*}}{p^*} = \frac{x}{p^*}.$$

Ceci implique que $\Pi_p(x)$ reste dans la même classe d'équivalence que x . Supposons qu'il existe un autre élément y de $\Pi_p(\mathcal{D})$ appartenant à la même classe que x , c'est-à-dire $y = \frac{y'}{p^*}$

et $\frac{y}{p^*} = \frac{x}{p^*}$, alors $\frac{y}{p^*} = \frac{\frac{y'}{p^*}}{p^*} = \frac{y'}{p^*} = y$ et donc $y = \frac{x}{p^*}$.

2. Puisque $p^* \succeq e$, pour y appartenant à la classe de x , on a⁶ :

$$\frac{x}{p^*} = \frac{y}{p^*} \preceq y.$$

L'élément $\frac{x}{p^*}$ est donc bien le plus petit élément de la classe de x .

On montre maintenant que tout élément de $\Pi_p(\mathcal{D})$ inférieur à x est également inférieur à $\frac{x}{p^*}$. Soit z un élément de $\Pi_p(\mathcal{D})$ inférieur à x .

$$\begin{aligned} z = \frac{z'}{p^*} \preceq x &\implies \frac{z}{p^*} \preceq \frac{x}{p^*} && \text{(par isotonie de } \Pi_p) \\ &\implies \frac{z}{p^*} = \frac{\frac{z'}{p^*}}{p^*} = \frac{z'}{p^*} = z \preceq \frac{x}{p^*}. \end{aligned}$$

L'élément $\frac{x}{p^*}$ est donc plus grand que tout autre élément z de $\Pi_p(\mathcal{D})$ tel que $z \preceq x$. □

Dans notre contexte, les éléments de $A[[\gamma]]$ appartiennent à l'ensemble $\Pi_p(\mathcal{D})$ avec $p = \gamma \Delta^{min}$.

Le point 2 de la proposition 4 prouve donc l'existence d'une plus grande solution à l'inéquation $Id_{|A}(x) \preceq x'$ avec $x \in A[[\gamma]]$ et $x' \in \overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]$.

Corollaire 2 *L'injection canonique $Id_{|A}$ est résiduable et sa résiduée est*

$$(Id_{|A})^\sharp = \Pi_{\gamma \Delta^{min}}.$$

Autrement formulé, la plus grande solution de $Id_{|A}(x) \preceq x'$ est

$$(Id_{|A})^\sharp(x') = \bigoplus_{\{x \in A[[\gamma]] \mid x \preceq x'\}} x = \frac{x'}{(\gamma \Delta^{min})^*}.$$

Remarques sur la caractérisation de $A[[\gamma]]$ et la résiduabilité de $Id_{|A}$

Dans ce paragraphe, on discute la caractérisation du sous-ensemble de $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]$ dont les éléments satisfont la contrainte (4.13). On met notamment en évidence qu'il existe une définition alternative à $A[[\gamma]]$. On fait ensuite remarquer que la résiduabilité de $Id_{|A}$ peut être prouvée différemment.

On a vu que le sous-ensemble $A[[\gamma]]$ correspond aux éléments de $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]$ qui respecte la contrainte (4.13), soit

$$\begin{aligned} d(k+1) &\geq \Delta^{min} d(k) \\ \iff d(k) &= d(k) \oplus \Delta^{min} d(k-1). \end{aligned}$$

En utilisant la transformée en γ de la dernière équation, on obtient

$$\begin{aligned} D(\gamma) &= D(\gamma) \oplus \gamma \Delta^{min} D(\gamma) \\ &= (\gamma \Delta^{min})^* D(\gamma). \end{aligned}$$

6. L'application idempotente $\Pi_p(x) = \frac{x}{p^*}$ satisfait donc aussi $\Pi_p(x) \preceq x$. Ceci en fait une "fermeture duale" (voir par exemple [Cohen, 1998, paragraphe 2]).

Le sous-ensemble obtenu $(\gamma\Delta^{min})^*\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma]$ (également noté $A'[\gamma]$) contient en fait l'ensemble des séries de $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma]$ qui restent invariantes par la multiplication par $(\gamma\Delta^{min})^*$.

$$A'[\gamma] = \{x \in \overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma] \mid x = (\gamma\Delta^{min})^*x\}.$$

Proposition 5 *Les sous-ensembles $A[\gamma]$ et $A'[\gamma]$ sont égaux.*

Preuve :

1. Les éléments du sous-ensemble $A'[\gamma]$ sont caractérisés par leur invariance par rapport à la multiplication par $(\gamma\Delta^{min})^*$:

$$D(\gamma) = (\gamma\Delta^{min})^*D(\gamma),$$

or les éléments de $A'[\gamma]$ appartiennent également au dioïde complet $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma]$, on peut donc utiliser la formule suivante définie dans les dioïdes complets ([Cottenceau, 1999, théorème 1.101]) :

$$a^*x = \frac{a^*x}{a^*}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} D(\gamma) &= \frac{(\gamma\Delta^{min})^*D(\gamma)}{(\gamma\Delta^{min})^*} \\ &= \frac{D(\gamma)}{(\gamma\Delta^{min})^*}. \end{aligned}$$

Les éléments de $A'[\gamma]$ appartiennent donc aussi à $A[\gamma]$.

2. Dans le cas de $A[\gamma]$, on applique plutôt la formule ([Cottenceau, 1999, théorème 1.101]) :

$$\frac{x}{a^*} = a^* \frac{x}{a^*}.$$

Les éléments de $A[\gamma]$ respectent :

$$\begin{aligned} D(\gamma) &= \frac{D(\gamma)}{(\gamma\Delta^{min})^*} \\ &= (\gamma\Delta^{min})^* \frac{D(\gamma)}{(\gamma\Delta^{min})^*} \\ &= (\gamma\Delta^{min})^*D(\gamma). \end{aligned}$$

Les éléments de $A[\gamma]$ appartiennent donc aussi à $A'[\gamma]$.

D'après les deux points ci-dessus, on peut affirmer que les sous-ensembles $A'[\gamma]$ et $A[\gamma]$ sont égaux. □

Dans ce qui suit, on ne distingue plus les ensembles $A[\gamma]$ et $A'[\gamma]$ en notant indifféremment :

$$A[\gamma] = \{x \in \overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma] \mid x = \frac{x}{(\gamma\Delta^{min})^*}\} = \{x \in \overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma] \mid x = (\gamma\Delta^{min})^*x\}. \quad (4.18)$$

Proposition 6 *(d'après [Cohen, 1993, théorème 30])*

Le sous-ensemble $A[\gamma]$ est un dioïde complet d'élément nul $\varepsilon(\gamma)$ et d'élément unité $(\gamma\Delta^{min})^$ ⁷.*

7. Puisque son élément unité diffère, $A[\gamma]$ n'est pas un sous-dioïde de $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma]$.

Preuve :

De par sa définition (équation (4.18)), il apparaît aisément que $A[[\gamma]]$ est fermé pour la somme ainsi que pour le produit. Les autres axiomes se vérifient également facilement en prenant $\varepsilon(\gamma)$ et $(\gamma\Delta^{min})^*$ comme éléments nul et unité. \square

Remarque 12 De façon équivalente au corollaire 2, la résiduabilité de $(Id|_A)$ peut être montrée par le point 2 du théorème 4 puisque $A[[\gamma]]$ est un dioïde complet. Du fait que $A[[\gamma]]$ soit un dioïde complet, on vérifie en effet, facilement que $Id|_A$ est semi-continue inférieurement et que $Id|_A(\varepsilon) = \varepsilon$.

On présente ci-dessous une méthode plus "classique" pour trouver l'application résiduée de l'injection canonique $Id|_A$.

Pour tout $x' \in \overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]$, on a

$$(Id|_A)^\sharp(x') = \bigoplus_{\{x \in A[[\gamma]] \mid Id|_A(x) \leq x'\}} x = \bigoplus_{\{x \in A[[\gamma]] \mid x \leq x'\}} x$$

or $x \in A[[\gamma]] \iff x = (\gamma\Delta^{min})^*x$, donc

$$\begin{aligned} (Id|_A)^\sharp(x') &= \bigoplus_{\{x \in A[[\gamma]] \mid (\gamma\Delta^{min})^*x \leq x'\}} x \\ &= L_{(\gamma\Delta^{min})^*}^\sharp(x') \\ &= \frac{x'}{(\gamma\Delta^{min})^*}. \end{aligned}$$

Prise en compte des deux contraintes de planification

On prend maintenant en compte les deux contraintes de planification (*i.e.* contraintes (4.13) et (4.14)). La contrainte (4.14) peut s'exprimer de la manière suivante :

$$\iff \begin{aligned} d(k+1) &\leq \Delta^{max}d(k) \\ (\Delta^{max})^{-1}d(k+1) &\leq d(k) \end{aligned}$$

La dernière relation est possible car Δ^{max} est inversible puisque diagonale, en fait $(\Delta^{max})^{-1}$ dans $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]$ correspond à $-\Delta^{max}$ dans l'algèbre classique.

L'ensemble à caractériser est maintenant celui des trajectoires $\{d(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ qui respectent :

$$\begin{cases} \Delta^{min}d(k-1) \leq d(k) \\ (\Delta^{max})^{-1}d(k+1) \leq d(k), \end{cases}$$

ou de façon équivalente :

$$d(k) = \Delta^{min}d(k-1) \oplus (\Delta^{max})^{-1}d(k+1) \oplus d(k).$$

La transformation en γ de cette dernière égalité donne :

$$\begin{aligned} D(\gamma) &= \Delta^{min}\gamma D(\gamma) \oplus (\Delta^{max})^{-1}\gamma^{-1}D(\gamma) \oplus D(\gamma) \\ &= (\gamma\Delta^{min} \oplus \gamma^{-1}(\Delta^{max})^{-1})^* D(\gamma). \end{aligned}$$

Le sous-ensemble $A[\gamma]$ correspond à l'ensemble des séries de $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma]$ qui restent invariantes par la multiplication par $(\gamma\Delta^{min} \oplus \gamma^{-1}(\Delta^{max})^{-1})^*$. Ce sous-ensemble de $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[\gamma]$ est un dioïde complet d'élément nul $\varepsilon(\gamma)$ et d'élément unité $(\gamma\Delta^{min} \oplus \gamma^{-1}(\Delta^{max})^{-1})^*$ (voir proposition 6). Les séries de $A[\gamma]$ sont caractérisées par le fait qu'elles sont croissantes d'au moins Δ^{min} par événement et d'au plus Δ^{max} par événement.

En s'appuyant sur le corollaire 2, on peut affirmer que l'application $Id|_A$ est résiduable et sa résiduée est

$$(Id|_A)^\sharp = \Pi_{(\gamma\Delta^{min} \oplus \gamma^{-1}(\Delta^{max})^{-1})} .$$

On a vu précédemment que la synthèse optimale des tables d'horaires se fait en deux étapes (voir (4.17)). La première étape consiste à résoudre un problème classique de commande en juste-à-temps. La seconde étape a pour rôle de trouver la série de $A[\gamma]$ la plus proche du résultat d_{opt} donné par la première étape. La meilleure approximation par dessous, obtenue par résiduation par $(\gamma\Delta^{min} \oplus \gamma^{-1}(\Delta^{max})^{-1})^*$ de d_{opt} , fournit la meilleure solution compatible avec les contraintes de planification, tout en vérifiant $H \otimes (L_{H|_A})^\sharp(z) \preceq z$.

4.4.4 Mise en oeuvre de la génération de tables d'horaires

Les équations "backward" (c'est-à-dire sous forme d'une récurrence inverse) définies en remarque 4, fournissent un algorithme de calcul au problème de commande en juste-à-temps et donc permettent de calculer d_{opt} qui peut être considéré comme la solution du problème non contraint.

$$\begin{cases} \xi(k) &= \frac{\xi(k+1)}{A} \wedge \frac{z(k)}{C} \\ d_{opt}(k) &= \frac{\xi(k)}{B} \end{cases} \quad (4.19)$$

On a vu au paragraphe précédent que la solution, notée d_{opt_A} , du problème contraint est établie de la manière suivante :

$$d_{opt_A} = (Id|_A)^\sharp(d_{opt}) = \frac{d_{opt}}{(\gamma\Delta^{min} \oplus \gamma^{-1}(\Delta^{max})^{-1})^*}. \quad (4.20)$$

Les matrices diagonales présentent certaines propriétés particulières. Notamment, la multiplication de matrice diagonale est commutative. Pour s'en convaincre, un exemple de deux matrices diagonales A et B est présenté ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \varepsilon \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & \cdots & \varepsilon \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & \cdots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} a_{11}b_{11} & \cdots & \varepsilon \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & \cdots & a_{nn}b_{nn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}a_{11} & \cdots & \varepsilon \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \varepsilon & \cdots & b_{nn}a_{nn} \end{pmatrix} = B \otimes A$$

Les matrices Δ^{min} et Δ^{max} étant diagonales (et donc $(\Delta^{max})^{-1}$ aussi), leur multiplication est commutative et la propriété $(A \oplus B)^* = A^*B^*$ (voir théorème 3 équation (1.7)) est vérifiée.

De plus, γ et γ^{-1} sont des scalaires donc leur multiplication est toujours commutative. Il en résulte

$$(\gamma \Delta^{min} \oplus \gamma^{-1} (\Delta^{max})^{-1})^* = (\gamma \Delta^{min})^* (\gamma^{-1} (\Delta^{max})^{-1})^*.$$

L'expression (4.20) de d_{opt_A} peut également s'écrire sous la forme :

$$d_{opt_A} = \frac{d_{opt}}{(\gamma \Delta^{min})^* (\gamma^{-1} (\Delta^{max})^{-1})^*} = \frac{\frac{d_{opt}}{(\gamma \Delta^{min})^*}}{(\gamma^{-1} (\Delta^{max})^{-1})^*}. \quad (4.21)$$

On pose maintenant $d'_{opt} = \frac{d_{opt}}{(\gamma \Delta^{min})^*}$.

En faisant référence au paragraphe 4.5.2 de [Baccelli et al., 1992], on remarque que d'_{opt} est la plus grande solution de

$$d'_{opt} = \frac{d'_{opt}}{(\gamma \Delta^{min})} \wedge d_{opt}. \quad (4.22)$$

Le passage en dateur de cette dernière équation fournit directement l'équation récurrente (de type "backward") qui permet le calcul de $\{d'_{opt}(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$. L'équation (4.22) s'exprime dans $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ de la façon suivante

$$d'_{opt}(k) = \frac{d'_{opt}(k+1)}{\Delta^{min}} \wedge d_{opt}(k). \quad (4.23)$$

Cette dernière expression peut être considérée comme un résultat intermédiaire dans le sens où d'_{opt} est la meilleure approximation de la solution d_{opt} du problème non contraint, telle que l'inégalité (4.13) soit vérifiée.

La suite du raisonnement consiste à trouver la meilleure approximation de d'_{opt} telle que la contrainte (4.14) soit également respectée. Cette approximation fournira, en fait, la meilleure solution, notée d_{opt_A} , au problème contraint.

En tenant compte de d'_{opt} , l'égalité (4.21) se réécrit

$$d_{opt_A} = \frac{d'_{opt}}{(\gamma^{-1} (\Delta^{max})^{-1})^*}.$$

On remarque que d_{opt_A} est la plus grande solution de l'équation

$$d_{opt_A} = \frac{d_{opt_A}}{(\gamma^{-1} (\Delta^{max})^{-1})} \wedge d'_{opt}.$$

L'algorithme de calcul de d_{opt_A} est directement déduit de la représentation en dateur de cette dernière équation,

$$d_{opt_A}(k) = \frac{d_{opt_A}(k-1)}{(\Delta^{max})^{-1}} \wedge d'_{opt}(k). \quad (4.24)$$

Comme l'explique Cohen dans [Cohen, 1998, paragraphe 1.3], la résolution d'un problème de résiduation contrainte se décompose en plusieurs phases. Dans le cas considéré ici, la synthèse optimale des tables d'horaires s'effectue en trois étapes.

1. La résolution du problème non contraint qui conduit au calcul de d_{opt} via la récurrence (4.19).

2. La recherche de la meilleure approximation de d_{opt} respectant la contrainte (4.13), ce qui correspond à l'évaluation de d'_{opt} (grâce à la récurrence (4.23)) .
3. La recherche de la meilleure approximation de d'_{opt} qui satisfait la contrainte (4.14). Cette dernière approximation fournit d_{opt_A} , solution optimale du problème contraint (récurrence (4.24)).

Les étapes 2 et 3 correspondent à la recherche de la solution la plus proche dans le domaine admissible.

Remarque 13 *La première étape correspond à résoudre le problème "relaxé", i.e. sans prendre en considération les contraintes. Chaque étape suivante correspond à l'ajout d'une contrainte au problème et à la recherche de la solution optimale à ce nouveau problème. On peut remarquer l'analogie avec l'exploration en profondeur dans le cadre d'un programme linéaire en nombres entiers car à chaque étape on obtient une solution intermédiaire moins bonne que la précédente.*

Remarque 14 *Les étapes 2 et 3 commutent car*

$$(\gamma \Delta^{min})^* (\gamma^{-1} (\Delta^{max})^{-1})^* = (\gamma^{-1} (\Delta^{max})^{-1})^* (\gamma \Delta^{min})^*,$$

et donc on aurait pu prendre $d'_{opt} = \frac{d_{opt}}{(\gamma^{-1} (\Delta^{max})^{-1})^*}$, au niveau de l'équation (4.21).

Initialisations des équations récurrentes

Comme on a pu l'expliquer au paragraphe 2.6.2, pour l'application de la commande optimale en juste-à-temps, on fait l'hypothèse que la trajectoire de consigne $\{z(k)\}_{z \in \mathbb{Z}}$ est "finie", i.e., $\exists k_f$, tel que $z(k) = \top, \forall k > k_f$. Ceci signifie que :

- on ne désire piloter la sortie que jusqu'à l'événement indexé k_f , ou bien,
- au delà de l'événement k_f , on ne dispose pas d'information sur la consigne à appliquer. On suppose alors la consigne la moins contraignante pour la synthèse de la commande, c.-à-d. $z(k) = \top, \forall k > k_f$.

Dans notre contexte, en supposant de plus que $\forall k > k_f, \xi(k) = \top$, cette hypothèse permet d'initialiser la première récurrence inverse (4.19) à $\xi(k_f) = \frac{z(k_f)}{C}$.

De même, pour la deuxième récurrence inverse (4.23), on considère que pour $k > k_f, d'_{opt}(k) = \top$, ce qui a pour effet de faire débiter la récurrence à $d'_{opt}(k_f) = d_{opt}(k_f)$.

On remarquera que la consigne choisie ne satisfait la contrainte sur l'écart maximum que pour $1 \leq k \leq k_f$. La récurrence (4.24) n'est par conséquent valide et appliquée que pour $1 \leq k \leq k_f$, et s'initialise en choisissant $d_{opt_A}(1) = d'_{opt}(1)$.

4.4.5 Exemple d'application

On considère le réseau de bus présenté ci dessous.

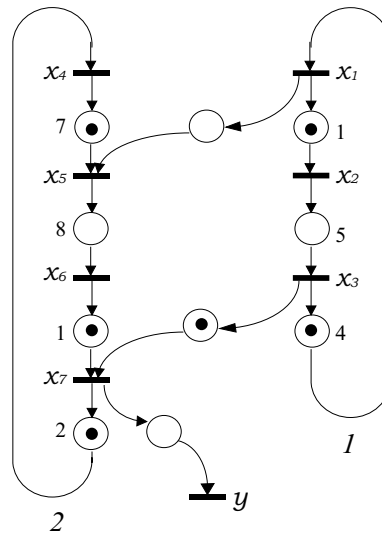


FIG. 4.4 – Représentation en GET d'un réseau de bus comportant deux lignes

Ce réseau est constitué de deux lignes et de cinq bus (deux pour la ligne 1 et trois pour la ligne 2). Il est pris pour hypothèse que le point "stratégique" du réseau est la station x_7 . Autrement dit, on va considérer une seule sortie qui sera égale au dateur associé à l'arrêt x_7 . C'est pour cette sortie que l'on va fixer une consigne, c'est-à-dire spécifier les dates au plus tard à laquelle les bus doivent successivement passer.

En suivant la démarche proposée au paragraphe 4.2, il est possible de mettre en équation ce système et d'obtenir la représentation d'état suivante :

$$\begin{cases} x(k) = Ax(k-1) \oplus Bd(k) \\ y(k) = Cx(k) \end{cases}$$

avec $B = Id$, $C = (\varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ e)$, et

$$A = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 4 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & 4 & 7 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 12 & 15 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon \end{pmatrix}.$$

La consigne $z(k)$ est la suivante (on choisit de ne commander que cinq départs) :

k	1	2	3	4	5
$z(k)$	10	20	24	41	50

Par exemple, le choix $z(2) = 20$ s'interprète de deux façons :

- "à la date $z(2) = 20$, on souhaite qu'au moins deux bus soient partis de l'arrêt", ou bien

- "le deuxième bus doit partir de l'arrêt au plus tard à la date $z(2) = 20$ ".

On considère que pour $k > k_f = 5$, on a $z(k) = T$.

Les écarts minimum et maximum sont choisis tel que

$$\text{pour } i = 1, 2, \quad \Delta_i^{\min} = 8 \quad \text{et} \quad \Delta_i^{\max} = 12.$$

Remarque 15 *En accord avec la proposition 2, les écarts minimums ont été choisis tels qu'ils garantissent la stabilité du réseau puisque :*

$$\Lambda_1 = \rho(\mathcal{C}_1) = 5 < \Delta_1^{\min} = 8$$

et,

$$\Lambda_2 = \max(\rho(\mathcal{C}_1), \rho(\mathcal{C}_2)) = \max(5, 6) < \Delta_2^{\min} = 8.$$

Étape 1

Cette étape consiste à résoudre le problème relaxé, *i.e.* sans les contraintes de planification. Les résultats obtenus sont présentés dans le tableau ci dessous

k	1	2	3	4	5
$z(k)$	10	20	24	41	50
$y(k)$	10	20	24	41	50
$d_1(k)$	11	15	32	41	⊤
$d_2(k)$	6	19	32	45	⊤
$d_3(k)$	11	24	37	50	⊤
$d_4(k)$	8	25	34	⊤	⊤
$d_5(k)$	11	15	32	41	⊤
$d_6(k)$	19	23	40	49	⊤
$d_7(k)$	10	20	24	41	50

On remarque que les contraintes de planification ne sont pas respectées pour certains éléments de la table d'horaires. Par exemple :

- $d_1(2) = 4 \otimes d_1(1)$, et donc $d_1(2) \not\geq \Delta_1^{\min} \otimes d_1(1)$
- $d_1(3) = 17 \otimes d_1(2)$, et donc $\Delta_1^{\max} \otimes d_1(2) \not\geq d_1(3)$.

Étape 2

L'application de l'équation (4.23) aux résultats obtenus à l'étape précédente fournit une nouvelle table d'horaires qui satisfait la contrainte (4.13). Cette nouvelle table d'horaires est présentée ci-dessous

k	1	2	3	4	5
$z(k)$	10	20	24	41	50
$y(k)$	8	16	24	41	50
$d_1(k)$	7	15	32	41	⊤
$d_2(k)$	6	19	32	45	⊤
$d_3(k)$	11	24	37	50	⊤
$d_4(k)$	8	25	34	⊤	⊤
$d_5(k)$	7	15	32	41	⊤
$d_6(k)$	15	23	40	49	⊤
$d_7(k)$	8	16	24	41	50

On remarque que l'ensemble des horaires de ce tableau respecte la contrainte de planification (4.13). Cependant de nombreuses dates de départ ne vérifient pas la condition (4.14).

Étape 3

La dernière étape de la mise en oeuvre consiste à appliquer à la table d'horaires précédente l'équation récurrente (4.24).

k	1	2	3	4	5
$z(k)$	10	20	24	41	50
$y(k)$	8	16	24	36	48
$d_1(k)$	7	15	27	39	51
$d_2(k)$	6	18	30	42	54
$d_3(k)$	11	23	35	47	59
$d_4(k)$	8	20	32	44	56
$d_5(k)$	7	15	27	39	51
$d_6(k)$	15	23	35	47	59
$d_7(k)$	8	16	24	36	48

Le dernier tableau obtenu correspond à la meilleure solution du problème (4.16) qui respecte les contraintes (4.13) et (4.14).

Remarque 16 *En accord avec la remarque 13, le vecteur $y(k)$ se dégrade au fil des étapes. En considérant que le système donné en exemple est réaliste, on a $y(k) = x_7(k) = d_7(k)$, on remarque bien :*

$$\forall k, d_{opt_7}(k) \geq d'_{opt_7}(k) \geq (d_{opt_A})_7(k).$$

La figure 4.5 représente le dateur $d_1(k)$ au fil des étapes de la résolution du problème (4.15), chacune des figures représentant une étape.

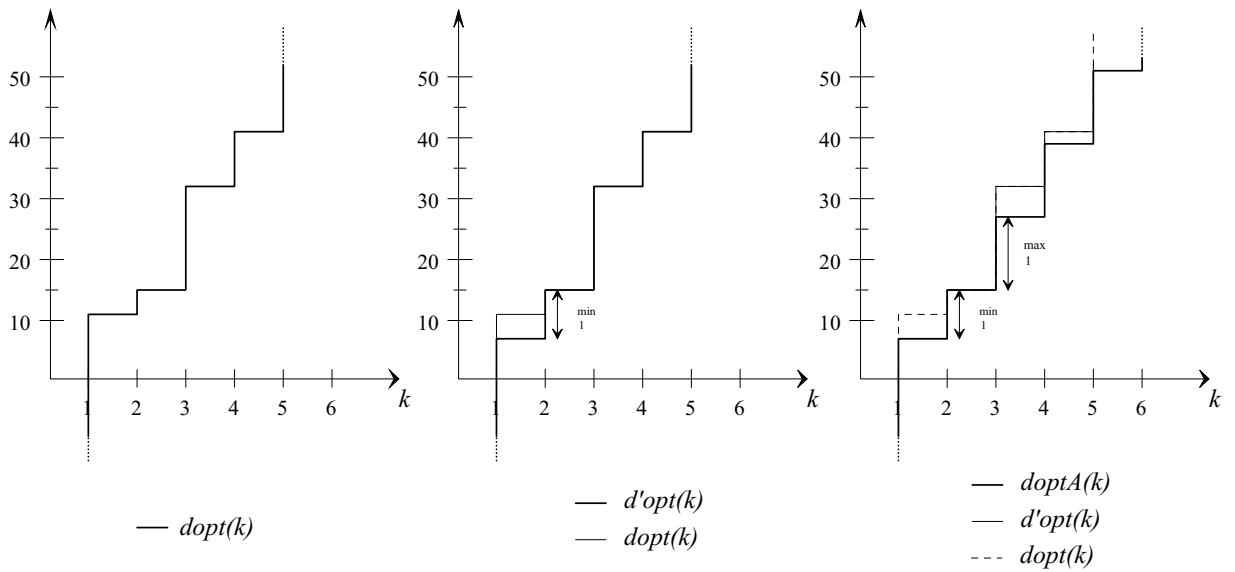


FIG. 4.5 – Évolution du dateur $d_1(k)$ au fil des étapes

Comme la figure 4.5 le montre, la dernière série obtenue pour $d_1(k)$ respecte toutes les contraintes de planification, c'est la meilleure solution du problème contraint.

Conclusion

Dans ce rapport, les travaux visant à appliquer la théorie des dioïdes aux systèmes de transport ont été rappelés. Ces études ont porté exclusivement sur des réseaux à table d'horaires comme les réseaux ferroviaires. Dans ces systèmes, les dates de départ des trains font l'objet de synchronisations, celles-ci proviennent:

- des correspondances entre les trains,
- du respect de la table d'horaires.

Nous avons rappelé des résultats énoncés par [Schutter et al., 1998],[Braker, 1993] et [Goverde et al., 1998] sur la stabilité, l'évaluation de performance ainsi qu'un principe de commande face à une perturbation du réseau.

Dans une seconde partie, nous nous sommes intéressés à l'étude des réseaux de transport urbain. L'objectif était d'appliquer la théorie des dioïdes aux systèmes de bus urbains en utilisant les descriptions de ces derniers apportées par les rapports d'exploitation accessibles dans la littérature. La phase de modélisation du tableau de marche a été abordée, et un modèle algébrique de ces systèmes a été défini dans l'algèbre des dioïdes. Des propriétés de stabilité ont été également mise en évidence. Une solution a été proposée au problème de génération de table d'horaires qui correspond, en fait, à un problème de résiduation contrainte. Un exemple élémentaire de réseaux de bus a été traité pour mettre en application la méthode de synthèse de tables d'horaires.

Ce stage a permis de considérer l'extension du champs d'application de la théorie des dioïdes aux systèmes de transport, et plus particulièrement aux réseaux de bus urbains. Ce travail ne constitue qu'une première approche puisque dans ce rapport, les problèmes de modélisation de la phase de régulation n'ont pas été abordés. Pour les systèmes de transport, il nous semble que l'étude des techniques de régulation constitue une extension potentielle de notre étude.

jojiuj

Bibliographie

- [Baccelli et al., 1992] Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G. J., and Quadrat, J. P. (1992). Synchronization and Linearity. Wiley.
- [Birkhoff, 1940] Birkhoff, G. (1940). Lattice theory. In American Mathematical Society Colloquium Publications, volume xxv. Providence.
- [Braker, 1993] Braker, H. (1993). Algorithms and applications in timed discrete event systems. PhD thesis, Delft University of Technology.
- [Ceder et al., 2000] Ceder, A., Golany, B., and Tal, O. (2000). Creating bus timetables with maximal synchronization. Transportation Research, A35:913–928.
- [Cohen, 1993] Cohen, G. (1993). Two-dimensional domain representation of timed event graphs. In Summer School on Discrete Event Systems, Spa, Belgium.
- [Cohen, 1995] Cohen, G. (1995). Théorie algébrique des systèmes à événements discrets. Polycopié de cours donné à l'INRIA.
- [Cohen, 1998] Cohen, G. (1998). Residuation and Applications. In Algèbres Max-Plus et applications en informatique et automatique : Ecole de printemps d'informatique théorique, Noirmoutier. INRIA.
- [Cohen et al., 1983] Cohen, G., Dubois, D., Quadrat, J. P., and Viot, M. (1983). Analyse du comportement périodique des systèmes de production par la théorie des dioïdes. Rapport de recherche 191, INRIA, Le Chesnay, France.
- [Cohen et al., 1989] Cohen, G., Moller, P., Quadrat, J. P., and Viot, M. (1989). Algebraic tools for the performance evaluation of discrete event systems. IEEE Proceedings: Special issue on Discrete Event Systems, 77(1).
- [Cottenceau, 1999] Cottenceau, B. (1999). Contribution à la commande de systèmes à événements discrets : synthèse de correcteurs pour les graphes d'événements temporisés dans les dioïdes. Ph.D Thesis, ISTIA - Université d'Angers.
- [David and Alla, 1989] David, R. and Alla, H. (1989). Du Grafcet aux réseaux de Petri. Hermès, Paris.
- [Gaubert, 1992] Gaubert, S. (1992). Théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes. Phd thesis, Ecole des Mines de Paris.
- [Gaubert, 1997] Gaubert, S. (1997). Methods and applications of $(\max,+)$ linear algebra. Rapport de recherche 3088, INRIA.
- [Gaubert, 1999] Gaubert, S. (1999). Introduction aux systèmes dynamiques à événements discrets. Polycopié de cours donné à l'ENSMP.
- [Gondran and Minoux, 1977] Gondran, M. and Minoux, M. (1977). Valeurs propres et vecteurs propres dans les dioïdes et leur interprétation en théorie des graphes. EDF, Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches, Serie C, Mathématiques Informatique, 2:25–41.
- [Gondran and Minoux, 1979] Gondran, M. and Minoux, M. (1979). Graphes et algorithmes. Eyrolles, Paris. Engl. transl. Graphs and Algorithms, Wiley, 1984.

- [Goverde et al., 1998] Goverde, R., Bovy, P., and Olsder, G. J. (1998). The max-plus algebra approach to transportation problems. In Proceedings of WCTR, Antwerp.
- [Hayat and Maouche, 1997] Hayat, S. and Maouche, S. (1997). Régulation du trafic des autobus : amélioration de la qualité des correspondances. Rapport interne LI-TU0192, INRETS.
- [Lahaye, 2000] Lahaye, S. (2000). Contribution à l'étude des systèmes linéaires non stationnaires dans l'algèbre des diodes. Phd thesis, ISTIA - Université d'Angers.
- [Lin et al., 1995] Lin, G.-S., Liang, P., Schonfeld, P., and Larson, R. (1995). Adaptive control of transit operations. Rapport de recherche MD-26-7002, University of Maryland.
- [Menguy, 1997] Menguy, E. (1997). Contribution à la commande des systèmes linéaires dans les diodes. Thèse de doctorat, ISTIA - Université d'Angers.
- [Palma and Lindsey, 2000] Palma, A. D. and Lindsey, R. (2000). Optimal timetables for public transportation. Transportation Research, B35:789–813.
- [Schutter et al., 1998] Schutter, B. D., Vries, R. D., and Moor, B. D. (1998). On max-algebraic models for transportation networks, wodes'98. Tech. rep., SISTA, Liège, Belgique.
- [Soulhi, 2000] Soulhi, A. (2000). Contribution de l'intelligence artificielle à l'aide à la décision dans la gestion des systèmes de transport urbain collectif. Ph. d. thesis, Université des sciences et technologies de Lille.
- [Strathman et al., 2001] Strathman, J., Kimpel, T., and Dueker, K. (2001). Bus transit operations control. Journal of Public Transportation, 31(1):1–26.