

ECOLE CENTRALE DE NANTES

UNIVERSITE DE NANTES

D.E.A "Automatique et Informatique Appliquée"

SÉMINAIRE BIBLIOGRAPHIQUE

Je tiens à remercier tous ceux que j'ai pu omettre dans ce qui suit.

Je tiens à remercier Jean-Louis FERRIER pour son accueil en stage de DEA au sein du Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés (LISA),

Laurent HARDOUIN et Bertrand COTTENCEAU, pour leur aide, leur disponibilité et leur soutien pour la réalisation de ce travail.

Je remercie les Thésards avec qui travailler est très agréable.

Je les remercie tous pour leurs précieux conseils qu'ils m'apportent tout au long de ce stage.

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Diïdes et théorie de la Résiduation</b>	<b>7</b>
1.1	Diïdes . . . . .	7
1.1.1	Axiomes . . . . .	7
1.1.2	Diïdes matriciels. . . . .	8
1.1.3	Résolution de l'équation $x = ax \oplus b$ dans les diïdes complets . . . . .	8
1.2	Applications Isotones et théorie de la Résiduation . . . . .	10
1.2.1	Théorie de la résiduation . . . . .	10
1.2.2	Restriction d'applications . . . . .	11
1.2.3	Fermeture et Résiduation . . . . .	13
1.2.4	Applications de la résiduation . . . . .	14
1.2.5	Résiduation de matrices . . . . .	14
<b>2</b>	<b>Modélisation et Commande de Graphes d'Événements Temporisés</b>	<b>17</b>
2.1	Modélisation des GET . . . . .	17
2.1.1	Mise en équation des GET . . . . .	17
2.1.2	Transformée en $\gamma$ et $\delta$ . . . . .	20
2.1.3	Matrice de transfert . . . . .	21
2.1.4	Représentation bi-dimensionnelle : diïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ . . . . .	21
2.1.5	Résultats dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ . . . . .	23
2.1.6	Séries rationnelles dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ . . . . .	25
2.2	Commande de GET . . . . .	27
2.2.1	Commande de GET en boucle Ouverte . . . . .	27
2.2.2	Commande avec modèle de référence : synthèse de feedback . . . . .	29
<b>3</b>	<b>Le Principe du Rejet de Perturbation en automatique "Classique"</b>	<b>37</b>
3.1	Rappels d'Algèbre Linéaire . . . . .	37
3.2	Les sous espaces (A, B)-invariants . . . . .	41
3.3	Le problème du rejet de perturbation . . . . .	43
<b>4</b>	<b>Le Principe du Rejet de Perturbation dans les diïdes</b>	<b>47</b>
4.1	Préliminaires et notion de Projections . . . . .	47
4.2	Le problème du rejet de perturbation . . . . .	48
4.3	Rejet de perturbation dans les diïdes . . . . .	49
4.4	Commande optimale en juste-à-temps en présence d'une perturbation . . . . .	51

<b>5</b>	<b>Modélisation de l'entreprise Recticel-Bultex</b>	<b>53</b>
5.1	Synopsis de l'atelier . . . . .	53
5.2	Modèle SIMAN-ARENA . . . . .	54
5.2.1	Introduction . . . . .	54
5.2.2	Modèle de l'atelier sous Siman-Arena . . . . .	54
5.3	Modèle en réseau de Petri . . . . .	55
5.3.1	Évolution du réseau de Petri de la figure 5.3 . . . . .	56
5.4	Modélisation sous forme de graphe d'événements temporisé . . . . .	58

# Introduction

La théorie classique des systèmes continus s'intéresse à la description de systèmes dits "naturels", c'est-à-dire obéissant aux lois de la Physique. Ces systèmes sont descriptibles par des équations différentielles ou aux dérivées partielles. Cette théorie est un outil de base approprié pour la modélisation, l'analyse et la commande de ces systèmes physiques à temps continu.

Les "Systèmes à Événements Discrets" recouvrent des systèmes également dynamiques, mais dont la description est impossible avec la théorie précédente. Au lieu de considérer le déroulement continu des phénomènes, on s'intéresse aux débuts et fins de ces phénomènes, caractérisant les événements discrets. Ces événements donnent lieu à des phénomènes de synchronisation, de concurrence (systèmes de production, réseaux informatiques,...).

La classe des Systèmes à Événements Discrets qui fait apparaître des phénomènes de synchronisation est modélisable dans une algèbre particulière par des équations linéaires. Une telle analogie avec les systèmes conventionnels a permis d'élaborer des principes de commande et d'identification de ces systèmes.

L'objectif de ce rapport est d'introduire en trois parties des résultats sur :

- L'algèbre des dioïdes, qui permet de disposer d'une représentation mathématique du système.
- La représentation, la commande, la modélisation de systèmes à événements discrets dans les dioïdes : Les Graphes d'Événements Temporisés (GET).
- Le principe du rejet de perturbation en automatique classique.

Nous concluons ce rapport en précisant les objectifs de mon travail de recherche qui portera sur l'application du rejet de perturbation dans l'algèbre des dioïdes, et à l'application de ces résultats à la modélisation de la chaîne de production de sommiers de l'entreprise Recticel-Bultex.



# Chapitre 1

## Dioïdes et théorie de la Résiduation

Ce premier chapitre propose un survol de la théorie des dioïdes.

### 1.1 Dioïdes

#### 1.1.1 Axiomes

**Définition 1 (Dioïde)** Un dioïde est un ensemble  $\mathcal{D}$  muni de deux opérations internes notées  $\oplus$  et  $\otimes$  et appelées respectivement "addition" et "multiplication", telles que :

- l'**addition** est **associative** :  $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$  ;
- l'**addition** est **commutative** :  $a \oplus b = b \oplus a$  ;
- l'**addition** admet un **élément neutre** : noté  $\varepsilon$  et appelé "zéro" :  $a \oplus \varepsilon = a$  ;
- la **multiplication** est **associative** :  $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$  ;
- la **multiplication** admet un **élément neutre** : noté  $e$  et appelé "identité" :  $a \otimes e = a = e \otimes a$  ;
- la **multiplication** est **distributive par rapport à l'addition** :  $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$  ;
- le **zéro** est **absorbant pour la multiplication** :  $\varepsilon \otimes a = a \otimes \varepsilon = \varepsilon$  ;
- l'**addition** est **idempotente** :  $a \oplus a = a$ .

Comme en algèbre usuelle, le signe multiplicatif  $\otimes$  sera parfois omis.

**Définition 2 (Dioïde commutatif)** Un dioïde est dit **commutatif** si la multiplication  $\otimes$  est commutative.

**Exemple 1**  $\mathbb{R}_{max}$  est le dioïde  $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, max, +)$  muni du  $max$  (loi additive  $\oplus$ ) et de l'addition usuelle  $+$  (loi multiplicative  $\otimes$ ). Cette structure est appelée algèbre  $(max, +)$ .

**Définition 3 (Dioïde complet)** Un dioïde est dit **complet** s'il est fermé pour les sommes infinies et si la loi  $\otimes$  distribue sur les sommes infinies, c'est-à-dire si pour tout  $c \in \mathcal{D}$  et tout sous-ensemble  $A \subseteq \mathcal{D}$ ,

$$c \otimes \left( \bigoplus_{x \in A} x \right) = \bigoplus_{x \in A} c \otimes x.$$

La borne supérieure d'un dioïde complet sera notée  $T$  et correspond à la somme des éléments du dioïde. L'élément  $T$  est donc absorbant pour l'addition :  $T \oplus a = T$ .

Rappelons néanmoins que, puisque  $\varepsilon$  est absorbant pour la loi  $\otimes$ , on a :  $T \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes T = \varepsilon$ .

**Exemple 2**  $\mathbb{R}_{max}$  n'est pas complet. Nous devons ajouter la borne supérieure  $T = +\infty$  avec la convention  $(T \otimes \varepsilon) = +\infty + (-\infty) = -\infty = \varepsilon$ . Ce nouveau dioïde complet est noté  $\overline{\mathbb{R}}_{max}$ . On a  $\overline{\mathbb{R}}_{max} = \{\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}, max, +\}$ .

**Définition 4 (Relation d'ordre)** [Baccelli et al., 1992] Dans un dioïde  $\mathcal{D}$ , on définit la relation d'ordre  $\succeq$  de la manière suivante :

$$a \succeq b \Leftrightarrow a = a \oplus b.$$

Cet ordre est compatible avec l'addition, c'est-à-dire

$$a \succeq b \Rightarrow \{\forall c \in \mathcal{D}, a \oplus c \succeq b \oplus c\},$$

ainsi qu'avec la multiplication

$$a \succeq b \Rightarrow \{\forall c \in \mathcal{D}, ac \succeq bc\}.$$

Preuve dans [Baccelli et al., 1992, Chapitre 4, p163].

Un dioïde  $\mathcal{D}$  muni de la relation d'ordre définie dans le théorème 4 est un demi-treillis supérieur [Birkhoff, 1940] car tout couple  $(a, b)$  admet  $a \oplus b$  comme plus petit majorant. Un dioïde complet admet en outre une structure de treillis complet pour l'ordre défini par le théorème 4. Par application du théorème [Baccelli et al., 1992, Théorème 4.27, p162], le plus grand minorant de tout couple  $(a, b)$  existe (ou borne inférieure) et sera alors noté  $a \wedge b$ . Le dioïde  $\mathcal{D}$  muni des lois  $\oplus$  et  $\wedge$  a une structure de treillis complet.

On a alors les deux relations d'équivalences suivantes :

$$a \succeq b \Leftrightarrow a = a \oplus b \Leftrightarrow b = a \wedge b.$$

### 1.1.2 Dioïdes matriciels.

A partir d'un dioïde  $\mathcal{D}$  "scalaire", on peut obtenir un dioïde  $\mathcal{D}^{n \times n}$  "matriciel" en considérant les matrices carrées de taille  $n$  à coefficients dans  $\mathcal{D}$  et en munissant cet ensemble de la somme et du produit matriciels usuels :

$$A = (A_{ij}), B = (B_{ij}), (A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}, (A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n A_{ik} \otimes B_{kj}.$$

Cette structure algébrique obéit aux axiomes des dioïdes.

### 1.1.3 Résolution de l'équation $x = ax \oplus b$ dans les dioïdes complets

**Définition 5 (Étoile de Kleene)** [Gaubert, 1992a] Soit  $\mathcal{D}$  un dioïde complet et  $a \in \mathcal{D}$ , l'opérateur étoile est défini par :

$$a^* = \bigoplus_{k \geq 0} a^k \text{ (avec } a^0 = e).$$



On notera :  $a^+ = a \oplus a^2 \oplus \dots \oplus a^n = \bigoplus_{k \geq 1} a^k$ .

On vérifie facilement l'égalité  $a^+ = a \otimes a^*$ .

**Théorème 1 (Théorème de l'étoile)** [Gaubert, 1992a] Soit  $\mathcal{D}$  un dioïde complet, l'équation

$$x = ax \oplus b \quad (1.1)$$

définie dans  $\mathcal{D}$  admet  $x = a^*b = \bigoplus_{k \geq 0} a^k b$  comme plus petite solution.

**Preuve:** On vérifie d'abord que  $x = a^*b$  est solution de (1.1). On a

$$a(a^*b) \oplus b = a(e \oplus a \oplus a^2 \oplus \dots)b \oplus b = (e \oplus a \oplus a^2 \oplus a^3 \dots)b = a^*b.$$

De plus, si  $x$  est solution de (1.1), on a par définition de l'ordre  $\succeq$  de  $\mathcal{D}$ ,

$$x \succeq ax \text{ et } x \succeq b.$$

La compatibilité de la relation d'ordre avec le produit, nous amène à établir :

$$x \succeq ax \Rightarrow x \succeq ax \succeq a^2x \succeq \dots \succeq a^kx,$$

et, par sommation,  $x \succeq \bigoplus_{k \geq 0} a^kx = a^*x$ . Finalement,

$$x \succeq a^*x \text{ et } x \succeq b \Rightarrow x \succeq a^*b.$$

Toute solution de (1.1) est par conséquent plus grande que la solution  $a^*b$ .

**Corollaire 1** On montre de même que l'équation  $x = xa \oplus b$  dans un dioïde complet admet comme plus petite solution  $ba^*$ .

**Théorème 2** Soit  $\mathcal{D}$  un dioïde complet.  $\forall a, b \in \mathcal{D}$

$$a^+ \preceq a^* \quad (1.2)$$

$$(a^*)^* = a^* \quad (1.3)$$

$$(a^+)^* = a^* \quad (1.4)$$

$$a(ba)^* = (ab)^*a \quad (1.5)$$

$$(a \oplus b)^* = (a^* \oplus b)^* = (a \oplus b^*)^* = (a^*b^*)^* = (a^* \oplus b^*)^* \quad (1.6)$$

$$a^*a^* = a^* \quad (1.7)$$

Pour (1.2, 1.3, 1.4) preuves dans [Gaubert, 1992a, Chapitre 2, p30], et pour (1.5, 1.6, 1.7) preuves dans [Cottenceau, 1999, Chapitre 1, p42-43].

A titre d'exercice, considérons la preuve de (1.3). L'élément  $a^*$  est la plus petite solution de l'équation  $x = ax \oplus e$  (voir théorème 1). Comme  $x \succeq ax \oplus e$ , par isotonicité des lois  $\oplus$  et  $\otimes$ , on a  $x \succeq a(ax \oplus e) \oplus e \succeq a^2x \oplus e$  ou plus généralement,  $x \succeq a^n x \oplus e$  et en sommant  $x \succeq a^*x \oplus e$ . La plus petite solution de  $x = a^*x \oplus e$  est  $(a^*)^*$ . Donc  $a^* \succeq (a^*)^*$ .

Comme  $a \preceq \bigoplus_{k \geq 0} a^k = a^*$ , il vient  $a^* \preceq (a^*)^*$ . D'où l'égalité.

## 1.2 Applications Isotones et théorie de la Résiduation

**Définition 6 (Applications isotones)** Une application  $f : (E, \preceq) \rightarrow (F, \preceq)$  définie sur des ensembles ordonnés est dite isotone si

$$x \preceq y \Rightarrow f(x) \preceq f(y).$$

**Définition 7 (Application injective)** Soit  $f$  une application de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{F}$ , elle est injective si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall a, b \in \mathcal{E}, \quad f(a) = f(b) \implies a = b.$$

**Définition 8 (Application surjective)** Soit  $f$  une application de  $\mathcal{E}$  dans  $\mathcal{F}$ ,  $f$  est une surjection de  $\mathcal{E}$  sur  $\mathcal{F}$ , ou  $f$  est surjective de  $\mathcal{E}$  sur  $\mathcal{F}$ , si elle vérifie :

$$\forall x \in \mathcal{F}, \quad \exists a \in \mathcal{E} \text{ tel que } x = f(a).$$

**Définition 9 (Continuité)** [Cohen, 1998a] Soit  $f$  une application d'un dioïde complet  $\mathcal{D}$  dans un dioïde complet  $\mathcal{C}$ , et un sous-dioïde (fini ou infini)  $X$  de  $\mathcal{D}$ .  $f$  est semi-continue inférieurement (noté s.c.i) si

$$\forall X \subseteq \mathcal{D}, f\left(\bigoplus_{x \in X} x\right) = \bigoplus_{x \in X} f(x),$$

respectivement, semi-continue supérieurement (noté s.c.s) si

$$\forall X \subseteq \mathcal{D}, f\left(\bigwedge_{x \in X} x\right) = \bigwedge_{x \in X} f(x).$$

Une application  $f$  est continue si elle est à la fois s.c.i et s.c.s.

### 1.2.1 Théorie de la résiduation

La théorie de la résiduation [Blyth and Janowitz, 1972] permet de définir "l'inverse" de certaines applications isotones en ne prenant en compte que la structure ordonnée définie sur l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée. Soit  $f$  une application isotone d'un dioïde  $\mathcal{D}$  dans un dioïde  $\mathcal{C}$ . Pour garantir l'existence des bornes supérieures et inférieures, on suppose  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{C}$  complets.

Si  $f$  n'est pas surjective, l'équation  $f(x) = b$  n'a pas nécessairement de solution pour certaines valeurs de  $b$ , et si  $f$  n'est pas injective la même équation peut ne pas avoir de solution unique. Une façon de résoudre ce problème est de considérer l'ensemble des "sous-solutions", c'est-à-dire les valeurs de  $x$  satisfaisant  $f(x) \preceq b$ . Si ce sous ensemble est non vide, on considère la borne supérieure de ce sous ensemble. Lorsqu'il existe pour tout  $b$ , cet élément sera noté  $f^\sharp(b)$ .

$$f^\sharp(b) = \bigoplus_{\{x | f(x) \preceq b\}} x \text{ et on aura } f(f^\sharp(b)) \preceq b.$$

On peut aussi considérer la borne inférieure de l'ensemble des "sur-solutions", c'est-à-dire l'ensemble des  $x$  satisfaisant  $f(x) \succeq b$ , si cet ensemble est non vide. La borne inférieure de cet ensemble, lorsqu'elle existe sera notée  $f^\flat(b)$ .

$$f^\flat(b) = \bigwedge_{\{x | f(x) \succeq b\}} x \text{ et on aura } f(f^\flat(b)) \succeq b.$$

**Théorème 3** *Soit  $f$  une application isotone d'un dioïde complet  $\mathcal{D}$  dans un dioïde complet  $\mathcal{C}$ , sont équivalents :*

1. *Pour tout  $b \in \mathcal{C}$ , il existe une plus grande sous-solution de l'équation  $f(x) = b$ .*
2.  *$f(\varepsilon) = \varepsilon$  et  $f$  est s.c.i..*
3. *Il existe une unique application  $f^\sharp$  de  $\mathcal{C}$  dans  $\mathcal{D}$ , qui est isotone et s.c.s. telle que*

$$f \circ f^\sharp \preceq Id_{\mathcal{C}} \quad (\text{Identité de } \mathcal{C}) \quad (1.8)$$

$$f^\sharp \circ f \succeq Id_{\mathcal{D}} \quad (\text{Identité de } \mathcal{D}) \quad (1.9)$$

*Quand  $f$  satisfait ces propriétés, elle est dite résiduable et  $f^\sharp$  est appelée la résiduée de  $f$ .*

*Preuve dans [Cohen, 1998a, Chapitre 1, p209-210].*

### 1.2.2 Restriction d'applications

[Cottenceau, 1999] entend par *restriction d'une application*, la restriction de son domaine et/ou de son codomaine de définition. Dans sa thèse il cherche notamment à déterminer si la propriété de résiduabilité est conservée après restriction, ou à l'inverse, sous quelle condition la restriction d'une application non résiduable devient résiduable.

Plus précisément, les problèmes étudiés sont les suivants. Soit  $f : (E, \preceq) \rightarrow (F, \preceq)$  une application définie sur des ensembles ordonnés. Il s'agit de s'intéresser d'une part à la restriction de  $f$  à un domaine  $A \subset E$  et d'autre part à la restriction de  $f$  à un codomaine  $B$  tel que  $Im f \subseteq B \subset F$ . Les questions traitées sont :

- a- Si  $f$  est résiduable, la restriction de  $f$  au domaine  $A$  l'est-elle également ?
- b- Si  $f$  n'est pas résiduable, existe-t-il une restriction de  $f$  à un codomaine  $B$  (tel que  $Im f \subseteq B \subset F$ ) qui soit résiduable ?
- La première question est liée à un problème de contrainte sur les solutions de l'équation  $f(x) \preceq b$ . Si  $f$  est résiduable, l'équation précédente admet toujours  $f^\sharp(b)$  comme plus grande solution. Cependant, si  $x$  est contraint à appartenir à un sous-ensemble "admissible" de solutions  $A$ , le problème a-t-il toujours une solution optimale dans  $A$  ?
- Le second problème est un peu différent. Sachant que  $f$  n'est pas résiduable, s'intéresser à une restriction de  $f$  à un codomaine  $B$  qui le soit revient à chercher si  $f(x) \preceq b$  admet des solutions dont l'optimalité est garantie seulement pour certains éléments  $b \in B$  (et non pour tout  $b \in F$ ). Ce problème n'a naturellement de sens que si  $Im f \subseteq B$ .

Les notations proposées par [Cottenceau, 1999] s'inspirent de celles utilisées par Wonham dans [Wonham, 1979]. Ci-dessous nous rappelons uniquement les définitions qui seront utilisées dans le chapitre 3.

**Définition 10 (Restriction d'une application à un domaine  $A$ )** *Soit  $f : E \rightarrow F$  et  $A \subseteq E$ . Il sera noté dans la suite  $f|_A$  l'application définie de  $A$  dans  $F$ , vérifiant*

$$f|_A = f \circ Id|_A$$

*où  $Id|_A : A \rightarrow E, x \mapsto x$  représente l'injection canonique de  $A$  dans  $E$ . L'application  $f|_A$  sera appelée restriction de  $f$  au domaine  $A$ . Le diagramme suivant commute<sup>1</sup>*

<sup>1</sup>un tel diagramme est dit commutatif lorsque les différentes applications permettant d'aller d'un point du diagramme à un autre sont égales

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{f} & F \\
 Id|_A \uparrow & \nearrow & \\
 A & & f|_A
 \end{array}$$

**Remarque 1** Dans [Cottenceau, 1999] l'injection canonique est notée comme la restriction d'une application identique. Notamment, l'injection canonique de  $A$  dans  $E$  est aussi la restriction de l'application identique sur  $E$  ( $Id_E$ ) au domaine  $A$ , notée  $Id_{E|_A}$  ou plus simplement  $Id|_A$ .

**Définition 11 (Restriction d'une application à un codomaine  $B$ )** Soit  $f : E \rightarrow F$  et  $Imf \subseteq B \subseteq F$ . Il sera noté dans la suite  ${}_B|f$  l'application définie de  $E$  dans  $B$  par l'égalité

$$f = Id|_B \circ {}_B|f$$

où  $Id|_B$  représente l'injection canonique de  $B$  dans  $F$ . L'application  ${}_B|f$  sera dite restriction de  $f$  au codomaine  $B$ . Le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{f} & F \\
 \searrow & & \uparrow Id|_B \\
 & & B \\
 & \nearrow & \\
 & & {}_B|f
 \end{array}$$

[Cottenceau, 1999] représente *via*  ${}_B|f$  l'action de  $f$  non plus par rapport à  $F$  tout entier, mais seulement par rapport à un sous-ensemble  $B$  incluant l'image de  $f$ .

**Définition 12 (Restriction double)** Soit  $f : E \rightarrow F$ ,  $A \subseteq E$  et  $f(A) \subseteq B \subseteq F$ . Nous noterons  ${}_B|f|_A$  l'application définie de  $A$  dans  $B$  par l'égalité

$$f|_A = Id|_B \circ {}_B|f|_A.$$

Le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc}
 E & \xrightarrow{f} & F \\
 Id|_A \uparrow & & \uparrow Id|_B \\
 A & \xrightarrow{{}_B|f|_A} & B
 \end{array}$$

**Remarque 2** Puisque tous les diagrammes précédents commutent, l'égalité suivante est également vérifiée

$${}_B|f|_A = {}_B|f \circ Id|_A.$$

D'autre part, pour  $Imf \subseteq B \subseteq F$ , il est toujours possible d'établir la décomposition suivante

$${}_B|f = {}_B|Id|_{Imf} \circ Imf|f.$$

Le diagramme suivant montre donc plusieurs décompositions d'une application, cela permet de se familiariser avec les notations d'applications restreintes.

$$\begin{array}{ccc}
E & \xrightarrow{f} & F \\
& \searrow^{B|f} & \uparrow Id|_B \\
& \searrow^{Imf|f} & B \\
& & \uparrow B|Id|_{Imf} \\
& & Imf
\end{array}$$

**Remarque 3 (Isotonie des applications restreintes)** Soit une application  $f : (E, \preceq) \rightarrow (F, \preceq)$ . Quels que soient  $A \subseteq E$  et  $B \subseteq F$ , les sous-ensembles  $(A, \preceq)$  et  $(B, \preceq)$  sont ordonnés pour l'ordre  $\preceq$  restreint à  $A$  et  $B$  respectivement. Lorsque  $f$  est isotone, on peut vérifier que les restrictions  $f|_A$ ,  $B|f$  et  $B|f|_A$  le sont également. Autrement dit, la propriété d'isotonie est conservée par restriction.

### 1.2.3 Fermeture et Résiduation

Nous étudions ici une classe particulière d'applications isotones : les fermetures. Après une définition, des résultats concernant la résiduation de cette classe particulière d'applications sont fournis (Théorème 4).

**Définition 13 (Fermeture, Fermeture Duale)** Soit  $\mathcal{D}$  un ensemble ordonné, on considère l'application isotone  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ , on appelle fermeture l'application vérifiant  $f = f \circ f \succeq Id_{\mathcal{D}}$ , de même on appelle fermeture duale l'application vérifiant  $f = f \circ f \preceq Id_{\mathcal{D}}$ .

**Exemple 3** L'application  $\mathcal{K} : x \rightarrow x^*$  est une fermeture.

**Théorème 4** Soit  $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$  une fermeture. La restriction  $Imf|f$  est résiduable et sa résiduée

$$(Imf|f)^{\sharp} = Id|_{Imf}$$

où  $Id|_{Imf}$  est l'injection canonique de  $Imf$  dans  $\mathcal{D}$  :

$$\begin{array}{l}
Id|_{Imf} : x \rightarrow x \\
Imf \rightarrow \mathcal{D}
\end{array}$$

**Preuve:** D'après le théorème 3, si  $Imf|f$  est résiduable il existe une unique application  $h$  telle que

$$\begin{array}{ll}
Imf|f \circ h \preceq Id|_{Imf} & \text{(Identité de } Imf) \\
\text{et } h \circ Imf|f \succeq Id_{\mathcal{D}}. & \text{(Identité de } \mathcal{D})
\end{array}$$

L'application  $Id|_{Imf}$  vérifie ces deux points en effet

- $Imf|f \circ Id|_{Imf} = imf|f|_{imf} = Id|_{Imf}$  (Identité de  $Imf$  puisque  $f \circ f = f$ )
- $Id|_{Imf} \circ Imf|f = f \succeq Id_{\mathcal{D}}$  (Identité de  $\mathcal{D}$ , par définition de la fermeture).

### 1.2.4 Applications de la résiduation

On considère les applications d'un dioïde  $\mathcal{D}$  dans lui même :

$$L_a : x \longrightarrow a \otimes x \text{ (multiplication à gauche par } a\text{).}$$

$$R_a : x \longrightarrow x \otimes a \text{ (multiplication à droite par } a\text{).}$$

Par définition la multiplication est distributive par rapport aux sommes infinies,  $L_a$  et  $R_a$  sont donc *s.c.i.* (définition 9). De plus  $\varepsilon$  étant absorbant pour la multiplication on a  $L_a(\varepsilon) = \varepsilon$ .  $L_a$  est donc résiduable et  $L_a^\sharp$  est sa résiduée. Ces mêmes considérations s'appliquent à la multiplication à droite  $R_a$ .

**Notation :**

$$\text{On notera } L_a^\sharp(x) = a \backslash x = \frac{x}{a} \text{ ("Division à gauche par } a\text{")}$$

$$\text{et } R_a^\sharp(x) = x / a = \frac{x}{a} \text{ ("Division à droite par } a\text{")}$$

**Formulaire :**

$$f.1 \quad \frac{x \wedge y}{a} = \frac{x}{a} \wedge \frac{y}{a} \text{ et } \frac{x \wedge y}{a} = \frac{x}{a} \wedge \frac{y}{a}.$$

$$f.2 \quad \frac{x \oplus y}{a} \succcurlyeq \frac{x}{a} \oplus \frac{y}{a} \text{ et } \frac{x \oplus y}{a} \succcurlyeq \frac{x}{a} \oplus \frac{y}{a}.$$

$$f.3 \quad \frac{x}{a \oplus b} = \frac{x}{a} \wedge \frac{x}{b} \text{ et } \frac{x}{a \oplus b} = \frac{x}{a} \wedge \frac{x}{b}.$$

$$f.4 \quad \frac{x}{a \wedge b} \succcurlyeq \frac{x}{a} \oplus \frac{x}{b} \text{ et } \frac{x}{a \wedge b} \succcurlyeq \frac{x}{a} \oplus \frac{x}{b}.$$

$$f.5 \quad \text{si } b \text{ est inversible } \Rightarrow \frac{a}{b} = b^{-1} \otimes a.$$

$$f.6 \quad \frac{ax}{a} \succcurlyeq x \text{ et } \frac{xa}{a} \succcurlyeq x.$$

$$f.7 \quad a \frac{ax}{a} = ax \text{ et } \frac{xa}{a} a = xa.$$

$$f.8 \quad \frac{x}{a} b \preccurlyeq \frac{xb}{a} \text{ et } b \frac{x}{a} \preccurlyeq \frac{bx}{a}.$$

$$f.9 \quad \frac{x}{ab} = \frac{a \backslash x}{b} \text{ et } \frac{x}{ba} = \frac{x / a}{b}.$$

Preuve dans [Baccelli et al., 1992, Chapitre 4, p183-185].

### 1.2.5 Résiduation de matrices

Les résultats précédents s'étendent au cas matriciel dans la mesure où les dimensions des matrices considérées sont compatibles.

Soit l'application

$$\begin{aligned} L_A : \mathcal{D}^{p \times q} &\rightarrow \mathcal{D}^{n \times q} \\ X &\mapsto A \otimes X \quad (A \in \mathcal{D}^{n \times p}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} R_A : \mathcal{D}^{q \times n} &\rightarrow \mathcal{D}^{q \times p} \\ X &\mapsto X \otimes A \quad (A \in \mathcal{D}^{n \times p}). \end{aligned}$$

**Théorème 5** Soit  $B \in \mathcal{D}^{n \times q}$ ,  $A \in \mathcal{D}^{n \times p}$  alors

$$(A \mathbin{\frown} B)_{ij} = (L_A^\sharp(B))_{ij} = \bigwedge_{l=1}^n (A_{li} \mathbin{\frown} B_{lj}) \quad , \quad i \leq p, j \leq q.$$

Voir preuve dans [Baccelli et al., 1992, Chapitre 4, p199].

**Théorème 6** Soit  $B \in \mathcal{D}^{q \times p}$ ,  $A \in \mathcal{D}^{n \times p}$  alors

$$(B \mathbin{\frown} A)_{ij} = (R_A^\sharp(B))_{ij} = \bigwedge_{l=1}^p (B_{il} \mathbin{\frown} A_{jl}) \quad , \quad i \leq q, j \leq n.$$

Voir preuve dans [Baccelli et al., 1992, Chapitre 4, p199].





## Chapitre 2

# Modélisation et Commande de Graphes d'Événements Temporisés

Les systèmes à événements discrets qui donnent lieu à des phénomènes de synchronisation peuvent être modélisés par des Graphes d'Événements Temporisés (GET). Les graphes d'événements (GE) sont une sous classe des Réseaux de Petri dans lesquels chaque place a exactement une transition d'entrée et une transition de sortie. De plus chaque arc reliant une transition à une place (et vice-versa) a un poids de un [David and Alla, 1989] .

Ainsi, les graphes d'événements peuvent modéliser la synchronisation mais pas la concurrence. Un GET est un graphe d'événements dont le fonctionnement dépend du temps. Le temps peut être associé soit aux transitions, soit aux places du graphe. Sachant que l'on peut passer d'une représentation à l'autre, on choisira ici d'associer le temps aux places.

Dans la deuxième partie, il sera traité de la représentation du comportement de GET à l'aide d'équations linéaires dans les dioïdes [Cohen, 1998b].

### 2.1 Modélisation des GET

#### 2.1.1 Mise en équation des GET

Pour analyser le comportement temporel d'un GET, on peut considérer deux points de vue qui conduisent à une seule représentation linéaire, mais dans deux dioïdes différents.

- \*  $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$  permet de se placer dans le domaine des événements : chaque variable aura pour but de dater les événements ; on parle d'*équations aux dateurs*.
- \*  $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$  permet de se placer dans le domaine temporel : chaque variable recense le nombre d'événements à un instant  $t$  ; on parle d'*équations aux compteurs*.

#### **Notation :**

Soit  $x_j$  une transition d'un GET, on utilisera les notations suivantes :

$x_j(k)$  : date à laquelle le  $k^{eme}$  tir de la transition associé à  $x_j$  a eu lieu.

$x_j(t)$  : nombre de tirs de la transition  $x_j$  ayant eu lieu jusqu'à la date  $t$ .

Il existe deux représentations (Figure 2.1).

1. Représentation par des dateurs

$$x_n(k) \geq \max(x_m(k), x_l(k)) \tag{2.1}$$

$$x_j(k) \geq x_i(k - \nu) + \tau \tag{2.2}$$

2. Représentation par des compteurs

$$x_n(t) \leq \min(x_m(t), x_l(t)) \tag{2.3}$$

$$x_j(t) \leq x_i(t - \tau) + \nu \tag{2.4}$$

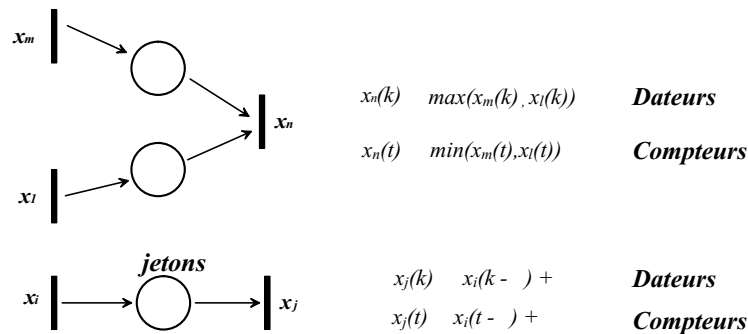


FIG. 2.1 – Equations aux dateurs et compteurs sur des graphes d'événements temporisés

Si le tir des transitions est au plus tôt, c'est-à-dire que les transitions sont franchies dès que les jetons des places amont sont disponibles, les inégalités (2.1) et (2.4) deviennent des égalités. On peut remarquer que les inégalités (2.1) et (2.3) représentent le phénomène de synchronisation. En effet, pour la figure 2.1, la transition  $x_n$  ne peut être franchie  $k$  fois que si  $x_m$  et  $x_l$  ont été franchies également au moins  $k$  fois chacune. Du point de vue compteur, la synchronisation se caractérise donc par la présence d'un opérateur *min*, et du point de vue dateur, par un opérateur *max*.

On considère l'exemple de la Figure 2.2. Les nombres représentent les temporisations (en nombre de tops d'horloges par exemple) associées aux places, ce GET possède un marquage initial.

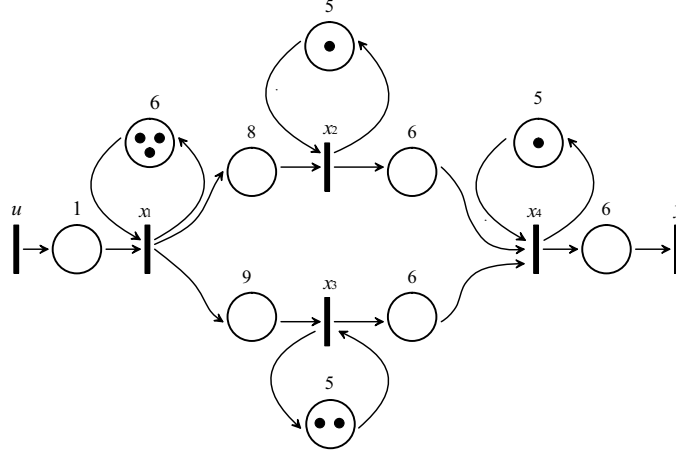


FIG. 2.2 – Graphe d'événements temporisé

On peut écrire les équations de la figure 2.2 dans  $\overline{\mathbb{Z}}$ .

$$\begin{aligned} x_1(k) &= \max(u(k) + 1, x_1(k-3) + 6) \\ x_2(k) &= \max(x_1(k) + 8, x_2(k-1) + 5) \\ x_3(k) &= \max(x_1(k) + 9, x_3(k-2) + 5) \\ x_4(k) &= \max(x_2(k) + 6, x_3(k) + 6, x_4(k-1) + 5) \\ y(k) &= \max(x_4(k) + 6) \end{aligned}$$

Dans le dioïde  $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$  cela devient <sup>1</sup> :

$$\begin{aligned} x_1(k) &= 1u(k) \oplus 6x_1(k-3) \\ x_2(k) &= 8x_1(k) \oplus 5x_2(k-1) \\ x_3(k) &= 9x_1(k) \oplus 5x_3(k-2) \\ x_4(k) &= 6x_2(k) \oplus 6x_3(k) \oplus 5x_4(k-1) \\ y(k) &= 6x_4(k) \end{aligned}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{aligned} x(k) &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 8 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 9 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 6 & 6 & \varepsilon \end{pmatrix} x(k) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{pmatrix} x(k-1) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} x(k-2) \oplus \begin{pmatrix} 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} x(k-3) \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} u(k) \\ y(k) &= (\varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad 6) x(k) \end{aligned}$$

<sup>1</sup>le signe  $\otimes$  est omis pour éviter d'alourdir l'écriture.

D'une manière générale, on obtient donc la forme sur  $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$  :

$$x(k) = \bigoplus_{i=0}^a A(i)x(k-i) \oplus \bigoplus_{j=0}^b B(j)u(k-j), \quad (2.5)$$

$$y(k) = \bigoplus_{l=0}^c C(l)x(k-l). \quad (2.6)$$

L'équation (2.5) est implicite en  $x(k)$ . En appliquant le Théorème 1, on peut passer à la forme ARMA<sup>2</sup> explicite suivante :

$$x(k) = \bigoplus_{i=1}^a \bar{A}(i)x(k-i) \oplus \bigoplus_{j=0}^b \bar{B}(j)u(k-j), \quad (2.7)$$

avec  $\bar{A}(i) = (A(0))^*A(i)$  et  $\bar{B}(j) = (A(0))^*B(j)$ .

Il est possible avec quelques manipulations [Cohen, 1995], de passer à une forme récurrente "markovienne", ce qui correspond à une forme où le retard est exactement de 1 sur la partie AR et de 0 sur la partie MA, ainsi que sur l'équation de sortie. On se ramène alors à une récurrence simple de la forme

$$x(k) = Ax(k-1) \oplus Bu(k), \quad (2.8)$$

$$y(k) = Cx(k) \oplus Du(k). \quad (2.9)$$

### 2.1.2 Transformée en $\gamma$ et $\delta$

La transformée en  $\gamma$  [Baccelli et al., 1992] est l'analogie de la transformée en  $\mathcal{Z}$  dans la théorie des systèmes linéaires échantillonnés.

**Transformée en  $\gamma$**  : Soit  $\{x_j(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  un dateur associé à une transition  $j$  d'un GET. La transformée en  $\gamma$  de  $\{x_j(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$  est définie comme la série formelle

$$X_j(\gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x_j(k)\gamma^k.$$

Par exemple, si l'on prend deux dateurs reliés par l'égalité  $x_1(k) = x_2(k-1)$ , ce qui correspond à deux transitions séparées par une place contenant un seul jeton, la transformée en  $\gamma$  de chacun des dateurs devient

$$X_1(\gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x_1(k)\gamma^k = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x_2(k-1)\gamma^k = \gamma \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x_2(k-1)\gamma^{k-1} = \gamma X_2(\gamma).$$

L'opérateur  $\gamma$  est un opérateur de décalage "événementiel", ce qui revient à écrire  $x(k-1) = \gamma x(k)$ .

---

<sup>2</sup>ARMA pour Auto Regressive - Moving Average

**Transformée en  $\delta$**  De la même manière, on peut introduire une série formelle pour coder une trajectoire décrite par un compteur  $x_j(t)_{t \in \mathbb{Z}}$ . La transformée en  $\delta$  de  $x_j(t)_{t \in \mathbb{Z}}$  est définie comme la série formelle

$$X_j(\delta) = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} x_j(t) \delta^t.$$

L'opérateur  $\delta$  joue le rôle d'opérateur de décalage "temporel", on peut donc écrire  $x_1(t-1) = \delta x_1(t)$ .

### 2.1.3 Matrice de transfert

En partant des équations (2.8), on obtient

$$X(\gamma) = A\gamma X(\gamma) \oplus BU(\gamma) \Rightarrow X(\gamma) = (A\gamma)^* BU(\gamma),$$

d'où

$$Y(\gamma) = (D \oplus C(\gamma A)^* B)U(\gamma) = H(\gamma)U(\gamma) \text{ avec } H(\gamma) = D \oplus C(\gamma A)^* B. \quad (2.10)$$

Si on reprend les équations de l'exemple de la figure 2.2, on a

$$\begin{aligned} x_1(k) &= 1u(k) \oplus 6x_1(k-3) \Rightarrow X_1 = 1U \oplus 6\gamma^3 X_1 \\ x_2(k) &= 8x_1(k) \oplus 5x_2(k-1) \Rightarrow X_2 = 8X_1 \oplus 5\gamma X_2 \\ x_3(k) &= 9x_1(k) \oplus 5x_3(k-2) \Rightarrow X_3 = 9X_1 \oplus 5\gamma^2 X_3 \\ x_4(k) &= 6x_2(k) \oplus 6x_3(k) \oplus 5x_4(k-1) \Rightarrow X_4 = 6X_2 \oplus 6X_3 \oplus 5\gamma X_4 \\ y(k) &= 6x_4(k) \Rightarrow Y = 6X_4. \end{aligned}$$

Ce que l'on peut aussi écrire sous forme matricielle

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\gamma^3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 8 & 5\gamma & \varepsilon & \varepsilon \\ 9 & \varepsilon & 5\gamma^2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 6 & 6 & 5\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} U$$

$$Y = (\varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ 6) X$$

### 2.1.4 Représentation bi-dimensionnelle : dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$

Il est possible de considérer les deux représentations dateurs et compteurs en établissant une représentation bi-dimensionnelle qui consiste à coder les trajectoires de tir de GET par des séries formelles en deux variables commutatives,  $\gamma$  et  $\delta$ , à exposants dans  $\overline{\mathbb{Z}}$  et à coefficients booléens ce nouveau dioïde se note  $\mathbb{IB}[[\gamma, \delta]]$  [Cohen, 1998b].

$\mathbb{IB}[[\gamma, \delta]]$  est un dioïde d'élément neutre  $e(\gamma, \delta) = \gamma^0 \delta^0$  et d'élément absorbant  $\varepsilon(\gamma, \delta)$  qui correspond à la série dont tous les éléments sont égaux à  $\varepsilon$ . Graphiquement, un élément de  $\mathbb{IB}[[\gamma, \delta]]$  est représenté par une collection de points de  $\mathbb{Z}^2$  (Figure 2.3).

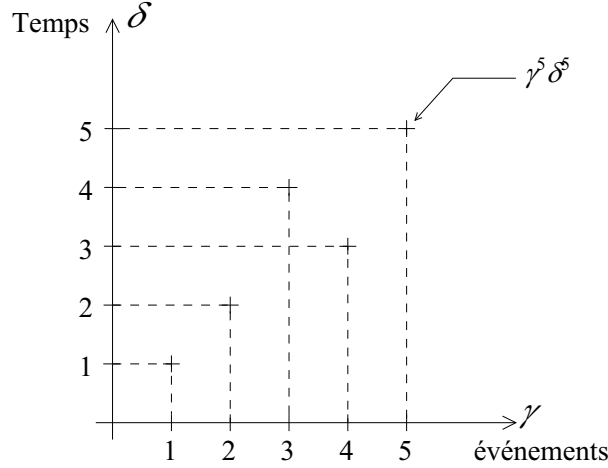


FIG. 2.3 – Collection de points de  $\mathbb{Z}^2$

**"Filtrage des trajectoires monotones"**  $d(k)$  et  $c(t)$  représentent le franchissement des transitions d'un GET, par conséquent les trajectoires de dateur  $d(k)$  ou de compteur  $c(t)$  sont monotones. Cela se traduit par

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{Z}, \quad & \{d(k) \geq d(k-1)\} \Leftrightarrow \{d(k) = d(k) \oplus d(k-1)\}, \\ \forall t \in \mathbb{Z}, \quad & \{c(t) \geq c(t-1)\} \Leftrightarrow \{c(t-1) = c(t-1) \oplus c(t)\}, \end{aligned}$$

en notant que l'ordre naturel de dioïde est inversé entre  $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$  et  $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$ . En passant aux transformées en  $\gamma$  et  $\delta$ , on obtient

$$\{D(\gamma) = D(\gamma) \oplus \gamma D(\gamma)\} \Leftrightarrow \{D(\gamma) = \gamma^* D(\gamma)\}, \quad (2.11)$$

$$\{C(\delta) = C(\delta) \oplus \delta^{-1} C(\delta)\} \Leftrightarrow \{C(\delta) = (\delta^{-1})^* C(\delta)\}. \quad (2.12)$$

Un élément  $X(\gamma, \delta)$  de  $\mathbb{IB}[[\gamma, \delta]]$ , doit donc satisfaire

$$\begin{aligned} X(\gamma, \delta) &\succeq \gamma X(\gamma, \delta), \\ X(\gamma, \delta) &\succeq \delta^{-1} X(\gamma, \delta), \end{aligned}$$

soit encore  $X(\gamma, \delta) \succeq (\gamma \oplus \delta^{-1}) X(\gamma, \delta)$ .

Finalement,

$$X(\gamma, \delta) = (\gamma \oplus \delta^{-1})^* X(\gamma, \delta). \quad (2.13)$$

Le dioïde  $(\gamma \oplus \delta^{-1})^* \mathbb{IB}[[\gamma, \delta]]$  est noté  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ . Graphiquement, on ne considère plus un point de coordonnées  $(n, t)$  mais un "cône Sud-Est" de sommet  $(n, t)$  (figure 2.4). Cette transformation a pour effet de ne conserver que les séries monotones non décroissantes.

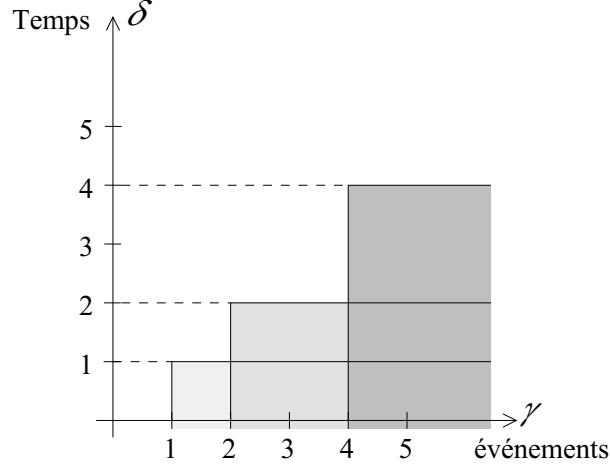


FIG. 2.4 – Représentation de "cônes Sud-Est"

**Remarque 4** Les notations suivantes seront utilisées pour le plus petit et le plus grand élément de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  :  $\varepsilon = \gamma^{+\infty} \delta^{-\infty}$  et  $T = \gamma^{-\infty} \delta^{+\infty}$ .

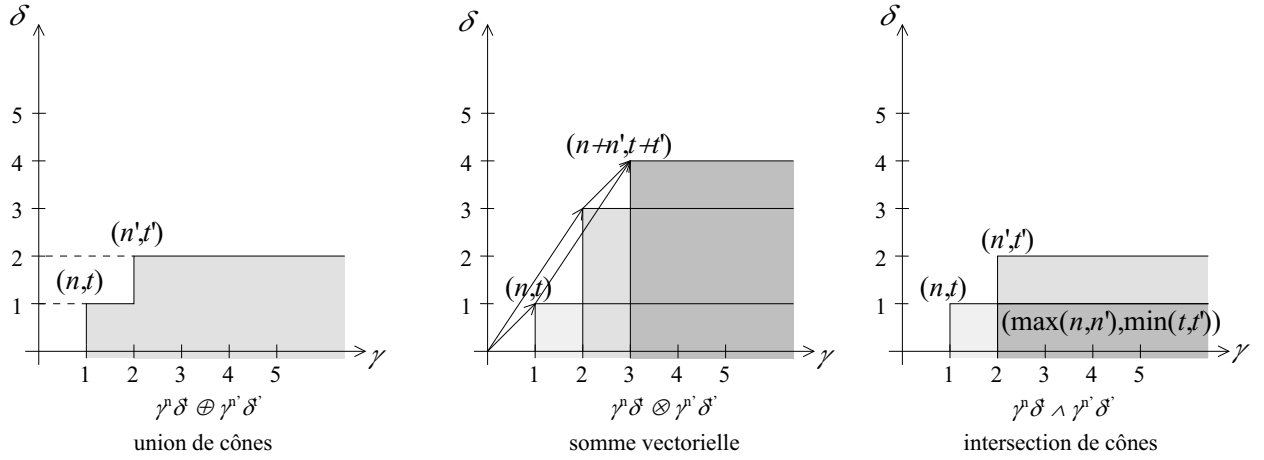
Du fait de la structure de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ , on peut donner plusieurs expressions de l'élément neutre  $e$  pour la multiplication :

$$e = \gamma^*(\delta^{-1})^* = \gamma^* = (\delta^{-1})^* = \gamma^0 = \delta^0 = \gamma^0 \delta^0.$$

### 2.1.5 Résultats dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$

À partir des résultats précédents, on peut interpréter graphiquement les opérations d'addition de multiplication et de borne inférieure dans  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ .

1. la somme de deux monômes  $\gamma^n \delta^t$  et  $\gamma^{n'} \delta^{t'}$  est représentée graphiquement par l'union des "cônes Sud-Est" de sommets respectifs  $(n, t)$  et  $(n', t')$ .
2. le produit de deux monômes  $\gamma^n \delta^t$  et  $\gamma^{n'} \delta^{t'}$  est représenté par le cône de sommet  $(n+n', t+t')$  (ce qui correspond au cône dont le sommet est la somme vectorielle des sommets  $(n, t)$  et  $(n', t')$ ).
3. l'inf de deux monômes  $\gamma^n \delta^t$  et  $\gamma^{n'} \delta^{t'}$  est représenté par l'intersection des "cônes Sud-Est" de sommets respectifs  $(n, t)$  et  $(n', t')$ .


 FIG. 2.5 – Représentation graphique des opérations sur  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ 

Les règles de simplification suivantes dans  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  sont immédiates :

$$\begin{aligned}\gamma^n \delta^t \oplus \gamma^{n'} \delta^{t'} &= \gamma^{\min(n, n')} \delta^t \\ \gamma^n \delta^t \oplus \gamma^n \delta^{t'} &= \gamma^n \delta^{\max(t, t')} \\ \gamma^n \delta^t \wedge \gamma^{n'} \delta^{t'} &= \gamma^{\max(n, n')} \delta^{\min(t, t')}.\end{aligned}$$

On peut reprendre l'exemple de la figure 2.2 dans  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  on a alors

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^3 \delta^6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \delta^8 & \gamma \delta^5 & \varepsilon & \varepsilon \\ \delta^9 & \varepsilon & \gamma^2 \delta^5 & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^6 & \delta^6 & \gamma \delta^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \delta \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} U$$

$$Y = (\varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \delta^6) X$$

Ce système peut s'écrire

$$\begin{cases} X_1 = (\gamma^3 \delta^6) * \delta U \\ X_2 = (\gamma \delta^5) * \delta^8 X_1 \\ X_3 = (\gamma^2 \delta^5) * \delta^9 X_1 \\ X_4 = (\gamma \delta^5) * (\delta^6 X_2 \oplus \delta^6 X_3) \end{cases}$$

soit encore,



$$\begin{cases} X_1 = (\gamma^3 \delta^6)^* \delta U \\ X_2 = (\gamma \delta^5)^* \delta^9 U \\ X_3 = [e \oplus (\gamma^2 \delta^5 \oplus \gamma^3 \delta^6)(\gamma^2 \delta^5)^*] \delta^{10} U \\ X_4 = (\gamma \delta^5)^* (\delta^6 X_2 \oplus \delta^6 X_3) \\ Y = \delta^6 X_4 \end{cases}$$

avec  $X_4 = [(\gamma \delta^5)^* \delta^{15} \oplus (\gamma \delta^5)^* \delta^{16} \oplus (\gamma^2 \delta^5 \oplus \gamma^3 \delta^6)(\gamma^2 \delta^5)^* (\gamma \delta^5)^* \delta^{16}] U$

donc  $Y = [e \oplus (\delta^2 \gamma^5 \oplus \gamma^3 \delta^6)(\gamma^2 \delta^5)^*] \delta^{22} (\gamma \delta^5)^* U$

or  $(\gamma^2 \delta^5 \oplus \gamma^3 \delta^6)(\gamma \delta^5 \oplus \gamma^2 \delta^5)^* \oplus (\gamma \delta^5)^* = (\gamma \delta^5)^*$

donc

$$Y = (\gamma \delta^5)^* \delta^{22} U = hU$$

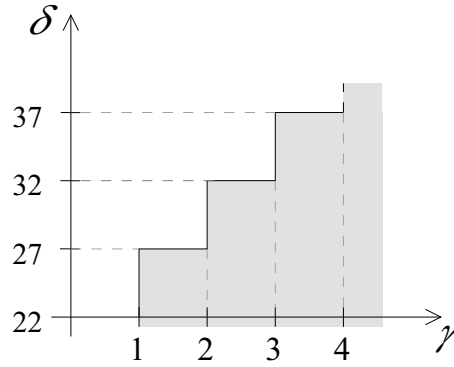


FIG. 2.6 – Représentation graphique de la fonction  $h$

### 2.1.6 Séries rationnelles dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$

Les séries rationnelles [Gaubert, 1992b] vont permettre de représenter d'une façon finie les relations entrées / sorties d'un GET.

**Définition 14 (Polynômes)** Un polynôme  $p$  de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  est une somme finie de monômes telle que :

$$p = \bigoplus_{i=1}^k \gamma^{n_i} \delta^{t_i} = \gamma^{n_1} \delta^{t_1} \oplus \dots \oplus \gamma^{n_k} \delta^{t_k}$$

Le polynôme  $p$  est sous forme canonique si  $n_1 < n_2 < \dots < n_k$  et  $t_1 < t_2 < \dots < t_k$ .

**Définition 15 (Causalité)** [Cohen, 1995] Une série  $s \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  est dite causale si  $s = \varepsilon$  (la série est nulle) ou si ses représentants sont à exposants dans  $\mathbb{N}$ . Une matrice est dite causale si toutes ses composantes sont causales.

**Définition 16 (Rationalité)** [Cohen, 1995] Un élément de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  est rationnel si l'un de ses représentants au moins peut être obtenu par un nombre fini d'opérations  $\oplus$ ,  $\otimes$  et  $*$  à partir d'éléments de l'ensemble  $\{\varepsilon, e, \gamma, \delta\}$ . On dira qu'une matrice à coefficients dans  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  est rationnelle si tous ses coefficients sont rationnels.

**Définition 17 (Périodicité)** [Cohen, 1995] Un élément de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  est périodique s'il peut s'écrire  $p \oplus qm^*$  où  $p$  et  $q$  sont des polynômes et  $m$  est un monôme. Une matrice est périodique si tous ses coefficients sont périodiques.

Une autre définition de la périodicité, équivalente, est la suivante : un élément de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  est périodique s'il admet un représentant qui peut s'écrire

$$p \oplus (\gamma^n \delta^t) q (\gamma^\nu \delta^\tau)^*$$

où  $n, t, \nu, \tau$  sont des entiers non négatifs, et  $p$  et  $q$  sont des polynômes en  $(\gamma, \delta)$  à exposants positifs et de degré en  $(\gamma, \delta)$  inférieur ou égal à  $(n-1, t-1)$ , resp.  $(\nu-1, \tau-1)$ . Le polynôme  $p$  représente ici la partie transitoire de largeur  $(n-1)$  et de hauteur  $(t-1)$ , tandis que le polynôme  $q$  représente le motif périodique commençant après ce transitoire (à cause de la translation par  $\gamma^n \delta^t$ ), de largeur  $(\nu-1)$  et de hauteur  $(\tau-1)$ , répété indéfiniment selon la pente  $\tau/\nu$  (à cause de la multiplication par  $(\gamma^\nu \delta^\tau)^*$ ).

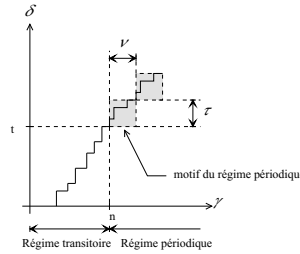


FIG. 2.7 – Représentation graphique d'une série périodique de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$

**Théorème 7** Pour un élément  $H$  de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ , ou pour une matrice  $H$  à coefficients dans  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ , les trois propositions sont équivalentes :

- (1)  $H$  est rationnelle ;
- (2)  $H$  est réalisable ;
- (3)  $H$  est périodique et causale.

Preuve dans [Cohen et al., 1998].

## 2.2 Commande de GET

De manière analogue aux systèmes continus, on entend par *commande* de systèmes à événements discrets le *pilotage* d'un système par le contrôle de ses entrées. Plus précisément on cherche à obtenir des trajectoires  $(y_k, u_k)$  telles que  $y_k \in \mathcal{Y}$  et  $u_k \in \mathcal{U}$  pour tout  $k$  et  $y_k$  satisfaisant les équations de l'état  $x_{k+1} = A x_k + B u_k + d_k$  et  $y_k = C x_k + d_k$  avec  $x_0 = x_0$  et  $x_k \in \mathcal{X}$  pour tout  $k$ .

**Théorème 8** Soient  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{C}$  deux dioïdes complets,  $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  et  $H : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  deux applications résiduables et  $c_1$  et  $c_2 \in \mathcal{C}$ . Considérons les ensembles

$$S_a = \{x \in \mathcal{D} \mid H(x) \preceq c_1 \text{ et } F(x) = c_2\} \text{ et } S_b = \{x \in \mathcal{D} \mid H(x) \preceq c_1 \text{ et } F(x) \preceq c_2\}.$$

Supposons  $S_a$  non vide et notons  $x_a = \bigoplus_{x \in S_a} x$  et  $x_b = \bigoplus_{x \in S_b} x$ .

On a  $x_a = x_b$  avec  $x_b = H^\sharp(c_1) \wedge F^\sharp(c_2)$ .

**Preuve:** On suppose  $S_a$  non vide et  $\mathcal{D}$  complet donc  $x_a$  existe. Comme  $S_a \subset S_b$ , on a  $x_a \preceq x_b$ . De plus, soit  $x \in S_a$ , on a  $x \preceq x_b$  et  $c_2 = F(x) \preceq F(x_b) \preceq c_2$  par isotonie de  $F$ . Donc  $F(x_b) = c_2$  et  $x_b \in S_a$ . On en déduit que  $x_a = x_b$ .

Par ailleurs,  $H^\sharp(c_1) \wedge F^\sharp(c_2) \preceq F^\sharp(c_2) \implies F(H^\sharp(c_1) \wedge F^\sharp(c_2)) \preceq F(F^\sharp(c_2)) \preceq c_2$  par isotonie de  $F$  et définition de la résiduée de  $F$ .

On a de même  $H(H^\sharp(c_1) \wedge F^\sharp(c_2)) \prec H(H^\sharp(c_1)) \preceq c_1$ , donc  $H^\sharp(c_1) \wedge F^\sharp(c_2) \in S_b$ .

De plus,  $\forall x \in S_b$ , avec  $x \preceq H^\sharp(c_1) \wedge F^\sharp(c_2)$  : on a  $x \preceq F^\sharp(c_2)$  puisque  $F^\sharp(c_2)$  est la plus grande solution de  $F(x) \preceq (c_2)$ ; de même pour  $x \preceq H^\sharp(c_1)$ .

On en conclut que  $H^\sharp(c_1) \wedge F^\sharp(c_2)$  est le plus grand élément de  $S_b$ .

**Proposition 1** Soient  $\mathcal{D}$  et  $\mathcal{C}$  deux dioïdes complets,  $H : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  et  $F : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{C}$  deux applications résiduables et  $c_1$  et  $c_2 \in \mathcal{C}$ . Supposons que  $F(x) = c_2$  admet au moins une solution, nous noterons  $\underline{x} = \inf\{x \in \mathcal{D} \mid F(x) = c_2\}$  la plus petite solution.

Alors  $c_1 \oplus H(\underline{x})$  est le plus petit élément de la forme  $c_1 \oplus \Delta c_1$  tel que  $S(\Delta c_1) = \{x \in \mathcal{D} \mid H(x) \preceq c_1 \oplus \Delta c_1 \text{ et } F(x) = c_2\}$  est non vide.

**Preuve:**  $S(H(\underline{x})) = \{x \in \mathcal{D} \mid H(x) \preceq c_1 \oplus H(\underline{x}) \text{ et } F(x) = c_2\}$  est non vide puisqu'il contient  $\underline{x}$ . En effet,  $\underline{x}$  vérifie évidemment  $H(\underline{x}) \preceq c_1 \oplus H(\underline{x})$  et, par définition, vérifie  $F(\underline{x}) = c_2$ . Montrons que  $c_1 \oplus H(\underline{x})$  est le plus petit élément de la forme  $c_1 \oplus \Delta c_1$  tel que  $S(\Delta c_1) = \{x \in \mathcal{D} \mid H(x) \preceq c_1 \oplus \Delta c_1 \text{ et } F(x) = c_2\}$  est non vide.

- On a vu que  $S(H(\underline{x}))$  est non vide.
- Soit  $S(\Delta c_1)$  non vide et  $y \in S(\Delta c_1)$ , alors  $\underline{x} \preceq y$  et sachant que  $H$  est isotone

$$H(\underline{x}) \preceq H(y) \preceq c_1 \oplus \Delta c_1. \quad (2.14)$$

Sachant (2.14), on obtient par isotonie de l'addition

$$c_1 \oplus H(\underline{x}) \preceq c_1 \oplus \Delta c_1.$$

Donc  $c_1 \oplus H(\underline{x})$  est le plus petit élément de la forme  $c_1 \oplus \Delta c_1$  tel que  $S(\Delta c_1) = \{x \in \mathcal{D} \mid H(x) \preceq c_1 \oplus \Delta c_1 \text{ et } F(x) = c_2\}$  est non vide.

**Remarque 5** On démontre simplement par isotonie de  $H$  que  $H(\underline{x}) = \inf\{H(x) \in \mathcal{C} \mid F(x) = c_2\}$ .

Soit  $S_1 = \{U \in \Sigma \mid H \otimes U \preceq Z \text{ et } U_{nc} = V_{nc}\}$  et  $F = (\varepsilon \mid Id)$   
alors  $FU = (\varepsilon \mid Id) \begin{pmatrix} U_c \\ U_{nc} \end{pmatrix} = U_{nc} = V_{nc}$ .

On peut réécrire  $S_1$  de la manière suivante

$$S_1 = \{U \in \Sigma \mid H \otimes U \preceq Z \text{ et } FU = V_{nc}\}$$

Calculons  $F^\sharp(x)$  :

$$F^\sharp(x) = \frac{x}{\varepsilon |T|} = \begin{pmatrix} \frac{x}{\varepsilon} \\ \frac{x}{T} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} T \\ x \end{pmatrix}.$$

D'après le théorème 8, le plus grand élément de  $S_1$ , lorsque  $S_1$  est non vide, est :

$$\frac{z}{H} \wedge F^\sharp(V_{nc}) \text{ c'est-à-dire } \begin{pmatrix} \frac{z}{H_c} \\ \frac{z}{H_{nc}} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} T \\ V_{nc} \end{pmatrix} = \frac{z}{H_c}.$$

La contrainte d'égalité peut mener à un ensemble  $S_1$  vide. Pour s'assurer l'existence d'une solution c'est-à-dire pour avoir les transitions de sortie aussi proche que possible de  $Z$ , on considère une modification de  $Z$ . Cette approche consiste à utiliser un nouvel ensemble  $S_2$ .

On pose  $\underline{U} = \inf\{U \in \Sigma \mid FU = V_{nc}\} = \begin{pmatrix} \varepsilon \\ V_{nc} \end{pmatrix}$ . D'après la proposition 1,  $Z \oplus H\underline{U}$  est le plus petit dateur tel que  $S_2 = \{U \in \Sigma \mid H \otimes U \preceq Z \oplus H\underline{U} \text{ et } FU = V_{nc}\}$  soit **non vide**. Par ailleurs,

$$H\underline{U} = (H_c \mid H_{nc}) \begin{pmatrix} \varepsilon \\ V_{nc} \end{pmatrix} = H_{nc} \otimes V_{nc}.$$

Donc  $S_2 = \{U \in \Sigma \mid H \otimes U \preceq Z \oplus H_{nc} \otimes V_{nc} \text{ et } F \otimes U = V_{nc}\}$ .

D'après le théorème 8, la plus grande solution  $U_{opt} \in S_2$  est  $U_{opt} = \frac{Z \oplus H_{nc} \otimes V_{nc}}{H} \wedge F^\sharp(V_{nc})$ . C'est-à-dire,

$$U_{opt} = \begin{pmatrix} \frac{Z \oplus H_{nc} \otimes V_{nc}}{H_c} \\ \frac{Z \oplus H_{nc} \otimes V_{nc}}{H_{nc}} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} T \\ V_{nc} \end{pmatrix}$$

$$U_{opt} = \begin{pmatrix} \frac{Z \oplus H_{nc} \otimes V_{nc}}{H_c} \\ V_{nc} \end{pmatrix}.$$

**Remarque 6** En utilisant la formule 1.2.4 et la propriété d'isotonie de la fonction  $L_a^\sharp : x \longrightarrow \frac{x}{a}$ , on a  $\frac{Z \oplus H_{nc} \otimes V_{nc}}{H_{nc}} \wedge V_{nc} = V_{nc}$ .

## 2.2.2 Commande avec modèle de référence : synthèse de feedback

### Formulation du problème

Connaissant la matrice de transfert  $H$  d'un GET<sup>6</sup>, et se donnant la matrice de transfert d'un modèle de référence  $G_{ref}$  rationnel, on cherche à synthétiser un correcteur de type retour de sortie  $F$  tel que le système bouclé s'approche "au mieux" du modèle de référence. On notera  $M_H(F)$  le transfert du système  $H$  contrôlé par le feedback  $F$ .

---

<sup>6</sup>dans  $\mathcal{M}_{in}^{\alpha,x}[[\gamma, \delta]]$ ,  $\overline{\mathcal{M}}_{max}[[\gamma]]$  ou  $\overline{\mathcal{M}}_{min}[[\delta]]$

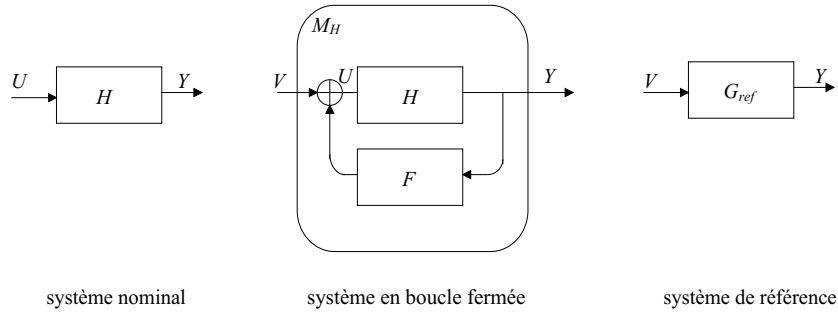


FIG. 2.8 – Commande avec modèle de référence : correction d'un système  $H$  par un correcteur  $F$  en feedback

Cette synthèse se fera sous les contraintes suivantes :

- (1) Le transfert du système contrôlé,  $M_H(F)$  sera inférieur ou égal à  $G_{ref}$ , c'est-à-dire que le GET du système contrôlé ( $H$  bouclé par  $F$ ) sera au moins aussi rapide que celui associé à  $G_{ref}$ , et que les sorties des jetons du GET contrôlé par  $F$  auront lieu avant celles du GET associé au modèle de référence.
- (2) Le feedback  $F$  devra être le plus grand possible, c'est-à-dire que le GET qui lui sera associé sera le plus lent possible.

Chercher un feedback le plus grand possible, tout en respectant la contrainte (1) revient à chercher un feedback qui retarde le plus possible l'apparition de jetons dans le GET. Lorsqu'un GET modélise un système de production, le marquage interne correspond au niveau d'encours, ce qui explique l'intérêt d'une réduction du marquage interne.

Dans [Cottenceau, 1999], il est montré que le problème ainsi contraint n'admet pas de solution optimale pour tout modèle de référence. Cela signifie que, pour certains modèles de référence soit il n'y a pas de solution, soit parmi les solutions, il n'en existe pas de plus grande.

Le correcteur calculé devra nécessairement être réalisable, donc il faudra qu'il soit causal, en effet la solution optimale du problème contraint par (1) ou (2), lorsqu'elle existe, n'est pas nécessairement causale.

### Formulation du problème dans les diodes

Il convient tout d'abord de déterminer le transfert d'un système  $H$  muni d'un feedback  $F$ . D'après la figure 2.8, le système en boucle fermée vérifie

$$\begin{cases} U = V \oplus FY \\ Y = HU. \end{cases}$$

On peut exprimer la sortie en fonction de l'entrée  $V$

$$\begin{aligned} Y &= H(V \oplus FY) \\ Y &= HV \oplus HFY. \end{aligned}$$

La résolution de cette équation en  $Y$ , en utilisant le théorème 1, donne pour le système bouclé le transfert

$$\begin{aligned} Y &= (HF)^*HV \\ &= M_H(F) \otimes V. \end{aligned}$$

On peut ainsi donner dans le cas mono-entrée/mono-sortie l'expression de l'application  $M_H$

$$\begin{aligned} M_H : \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]] &\longrightarrow \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]] \\ x &\longrightarrow (Hx)^*H. \end{aligned}$$

**Remarque 7** D'après (1.5),  $M_H(x)$  peut s'écrire aussi comme  $M_H(x) = (Hx)^*H = (e \oplus Hx \oplus HxHx \oplus \dots)H = H \oplus HxH \oplus HxHxH \oplus \dots = H(xH)^*$ .

Le problème de la synthèse de correcteur avec modèle de référence présenté en introduction s'exprime dans les dioïdes de la manière suivante. Soit  $H \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  le transfert du système ouvert et  $G_{ref} \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  un modèle de référence rationnel.

Pour  $G_{ref}$  donné, existe-t-il un plus grand  $F$  tel que

$$(HF)^*H \preceq G_{ref} \quad ? \quad (2.15)$$

Ce problème est donc lié à un problème de résiduabilité de l'application  $M_H$ . Si  $M_H$  est résiduable sur  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ , alors la réponse à (2.15) est oui, et ce pour tout  $G_{ref} \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ .

**$M_H$  est-elle résiduable sur un dioïde complet ?**

Puisque  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  est complet, on peut vérifier si  $M_H$  est résiduable. L'application  $M_H$  est résiduable si, et seulement si, l'application vérifie les conditions du théorème 3. C'est-à-dire si

$$\begin{aligned} M_H(\varepsilon) &= \varepsilon \\ \text{et } M_H(a \oplus b) &= M_H(a) \oplus M_H(b). \end{aligned}$$

D'une part  $M_H(\varepsilon) = (H\varepsilon)^*H = H$ , donc  $M_H(\varepsilon) \neq \varepsilon$  et  $M_H(a \oplus b) = H(aH \oplus bH)^* \neq H(aH)^* \oplus H(bH)^* = M_H(a) \oplus M_H(b)$ . Par conséquent  $M_H$  n'est pas résiduable sur  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ . Autrement dit, le problème (2.15) n'a pas de solution optimale pour tout modèle de référence  $G_{ref}$ .  $M_H$  n'est pas résiduable signifie d'une part que le problème n'a pas de solution pour  $G_{ref} \prec H$ , en effet  $M_H(\varepsilon) = H$ . D'autre part, si des solutions existent, l'ensemble des solutions n'admet pas de borne supérieure, il n'y a donc pas de solution optimale.

Dans [Cottenceau, 1999], il est montré que pour certains modèles de référence tels que  $G_{ref} \succeq H$ , le problème (2.15) a une solution optimale. Ceci revient, à résoudre le problème (2.15) non plus dans  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  entier, mais à résoudre ce problème en imposant des restrictions de  $M_H$  résiduables. Autrement dit, il existe au moins une restriction de  $M_H$ , à un codomaine inclus dans  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ , qui est résiduable.

**Théorème 9** [Cottenceau, 1999] Soit  $M_H : x \rightarrow H(xH)^*$  définie sur des dioïdes complets. Alors l'application  ${}_{ImM_H}M_H$  est résiduable et sa résiduée s'exprime par

$$({}_{ImM_H}M_H)^\sharp(x) = H \setminus x \phi H.$$

**Preuve :** Prenons  $G_{ref} \in ImM_H$ . C'est-à-dire,  $\exists a \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  tel que  $G_{ref} = H(aH)^*$ . Montrer que  ${}_{ImM_H}M_H$  est résiduable est équivalent à dire que l'équation  $H(xH)^* \preceq H(aH)^*$  admet une plus grande solution  $\forall a \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ .

Trouver un plus grand  $x$  satisfaisant  $H(xH)^* \preceq H(aH)^*$  revient à résoudre une série d'inéquations. En effet  $H(xH)^* = H(e \oplus xH \oplus xHxH \oplus \dots)$

Donc  $H(xH)^* \preceq H(aH)^* \iff H \oplus HxH \oplus HxHxH \oplus \dots \preceq H(aH)^*$  soit

$$H \preceq H(aH)^* \tag{2.16}$$

$$HxH \preceq H(aH)^* \tag{2.17}$$

$$H(xH)^2 \preceq H(aH)^* \tag{2.18}$$

⋮

La vérification de la première inégalité (2.16) est immédiate d'après la définition de l'étoile de Kleene. D'après les résultats sur la résiduation du produit, on peut établir que  $X = H \setminus H(aH)^* \phi H$  est la plus grande solution de l'inégalité (2.17). Par ailleurs cet élément  $X$  satisfait également (2.18). En effet on a :

$$H(XH)^2 = HXHXH \preceq H(aH)^*XH = (Ha)^*HXH \preceq (Ha)^*H(aH)^* = H(aH)^*$$

donc

$$H(XH)^2 \preceq H(aH)^*.$$

Le même raisonnement peut être tenu pour les inégalités suivantes donc  $X = H \setminus H(aH)^* \phi H$ , plus grande solution de (2.17), est aussi solution des autres inégalités, et donc la plus grande solution de l'inégalité  $H(xH)^* \preceq H(aH)^*$ .

Dans la thèse [Cottenceau, 1999], l'auteur s'intéresse à des restrictions moins "restrictives" de  $M_H$  qui sont également résiduables.

**Théorème 10** Soient  $\mathcal{G}_1$  et  $\mathcal{G}_2$  les deux sous-ensembles de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  définis par  $\mathcal{G}_1 = \{G | \exists A \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]], G = A^*H\}$  et  $\mathcal{G}_2 = \{G | \exists B \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]], G = HB^*\}$ .  $ImM_H \subseteq \mathcal{G}_1$  et  $ImM_H \subseteq \mathcal{G}_2$ . Les restrictions  ${}_{\mathcal{G}_1}M_H$  et  ${}_{\mathcal{G}_2}M_H$  sont résiduables. Leurs résiduées définies respectivement de  $\mathcal{G}_1$  dans  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ , et de  $\mathcal{G}_2$  dans  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  vérifient

$$({}_{\mathcal{G}_1}M_H)^\sharp(x) = ({}_{\mathcal{G}_2}M_H)^\sharp(x) = H \setminus x \phi H.$$

*Preuve dans [Cottenceau, 1999, Chapitre 3, p99-100].*



### Application à la synthèse de correcteurs de type retour de sortie

Les résultats théoriques précédents conduisent à la résolution du problème de synthèse de correcteurs de type retour de sortie avec modèle de référence. Le théorème 9 est applicable assez directement. On peut donner une expression des résultats précédents en termes de GET et de correcteurs réalisables, donc représentables par des GET. Un problème de causalité peut cependant se poser, en effet le correcteur calculé, n'est pas forcément causal, il se pose donc un problème de réalisation.

**Théorème 11** [Cottenceau, 1999] Soit  $I_{d_+}$ , l'injection canonique de l'ensemble des causaux, noté  $\mathcal{M}_{in}^{ax+}[[\gamma, \delta]]$ , dans  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$

$$I_{d_+} : \mathcal{M}_{in}^{ax+}[[\gamma, \delta]] \rightarrow \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]] \\ x \mapsto x$$

alors,  $I_{d_+}$  est résiduable et sa résiduée sera notée  $Pr_+$ .

**Preuve:** D'une part  $I_{d_+}$  est s.c.i. puisque

$$I_{d_+}(\bigoplus x) = \bigoplus I_{d_+}(x)$$

En effet la somme d'éléments causaux est causale (voir définition 15) et

$$I_{d_+}(\varepsilon) = \varepsilon$$

puisque par définition,  $\varepsilon$  est causal. Donc  $I_{d_+}$  est résiduable.

**Exemple 4** Le calcul pratique de  $Pr_+$  est simple.  $Pr_+(x)$  correspond au plus grand élément causal inférieur à  $x$ , il suffit donc de garder dans  $x$  uniquement les monômes causaux. Soit  $a = \gamma^{-2}\delta^{-2} \oplus \gamma^{-1}\delta^1 \oplus \gamma^2\delta^2$  un élément de  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ . Le plus grand élément causal inférieur à  $a$  est simplement  $Pr_+(a) = \delta^1 \oplus \gamma^2\delta^2$ . D'un point de vue graphique, on ne garde dans  $Pr_+(a)$  que les sommets de  $a$  contenus dans le cadran nord-est.

**Théorème 12** [Cottenceau, 1999] Soit  $H$  le transfert d'un GET. Pour tout modèle de référence  $G_{ref}$  réalisable s'exprimant  $G_{ref} = M_H(A)$  où  $A$  est un transfert réalisable, il existe un plus grand feedback réalisable  $F$  tel que le transfert du système bouclé soit celui de  $G_{ref}$ . Ce feedback est

$$F = Pr_+(H \setminus G_{ref} \not\! \! \! / H).$$

**Remarque 8** Le modèle de référence  $G_{ref} = H$  appartient à  $ImM_H$ , c'est-à-dire qu'il existe toujours un plus grand correcteur  $F$  permettant de conserver le comportement entrée/sortie initial tout en retardant au plus l'entrée.

**Remarque 9** Les résultats présentés ici dans  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  peuvent sans difficulté se transposer dans les dioïdes  $\mathbb{Z}_{max}[[\gamma]]$  et  $\mathbb{Z}_{min}[[\delta]]$ .

Les résultats précédents (Théorème 9, 10, 11, 12) s'étendent de manière naturelle au cas multi-entrées/multi-sorties.

On utilise ici le système décrit sur la Figure 2.9, on va calculer un correcteur qui, une fois appliqué au GET, impose un régime différent au système.

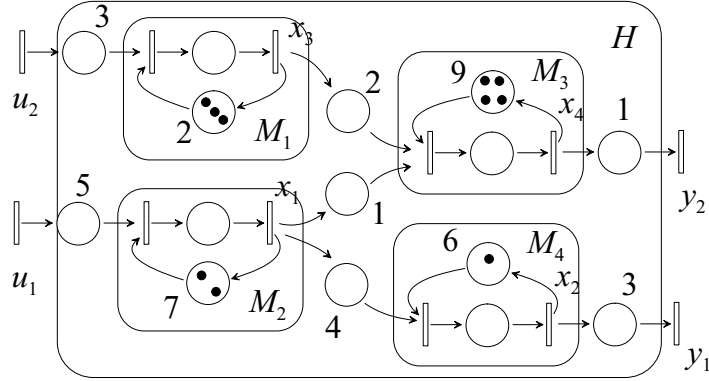


FIG. 2.9 – GET MIMO

Calcul du transfert global de la cellule

$$X = \begin{pmatrix} \gamma^2 \delta^7 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \delta^4 & \gamma \delta^6 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \gamma^3 \delta^2 & \varepsilon \\ \delta & \varepsilon & \delta^2 & \gamma^4 \delta^9 \end{pmatrix} X \oplus \begin{pmatrix} \delta^5 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^3 \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u1 \\ u2 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} \varepsilon & \delta^3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta \end{pmatrix} X$$

$$Y = HU$$

$$\text{avec } H = CA^*B = \begin{pmatrix} \delta^{12}(\gamma\delta^6)^* & \varepsilon \\ \delta^7(\gamma^2\delta^7)^* & (\delta^6 \oplus \gamma^3\delta^8)(\gamma^4\delta^9)^* \end{pmatrix}$$

$$\text{finalement } Y = \begin{pmatrix} \delta^{12}(\gamma\delta^6)^* & \varepsilon \\ \delta^7(\gamma^2\delta^7)^* & (\delta^6 \oplus \gamma^3\delta^8)(\gamma^4\delta^9)^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u1 \\ u2 \end{pmatrix}$$

Nous choisissons un modèle de référence tel que l'optimalité et l'existence du correcteur soient garanties, c'est-à-dire, vérifiant le théorème 9. En accord avec cette proposition, cette spécification doit s'exprimer sous la forme  $G_{ref} = (HF_0)^*H$ .

Nous prenons

$$F_0 = \begin{pmatrix} \gamma^3 & \gamma^3 \\ \gamma^3 & \gamma^3 \end{pmatrix}$$

$$\text{alors } G_{ref} = \left( H \begin{pmatrix} \gamma^3 & \gamma^3 \\ \gamma^3 & \gamma^3 \end{pmatrix} \right)^* H = \begin{pmatrix} \delta^{12}(\gamma\delta^6)^* & \varepsilon \\ \delta^7 \oplus \gamma^2\delta^{14} \oplus \gamma^3\delta^{19}(\gamma\delta^6)^* & \delta^6 \oplus \gamma^3\delta^{13} \oplus \gamma^4\delta^{15} \oplus \gamma^5\delta^{20} \oplus \gamma^6\delta^{25}(\gamma\delta^6)^* \end{pmatrix}$$

Le calcul du correcteur optimal, pour respecter ce modèle de référence, passe donc par le calcul de  $H \setminus G_{ref} \not\! / H$ .

On obtient alors

$$H \setminus G_{ref} \not\! / H = \begin{pmatrix} \delta^{-18}(\gamma^1 \delta^6)^* & \gamma^3 \oplus \gamma^4 \delta^2 \oplus \gamma^5 \delta^7 \oplus (\gamma^6 \delta^{12})(\gamma^1 \delta^6)^* \\ \delta^{-17}(\gamma^1 \delta^6)^* & \delta^{-6} \oplus \gamma^3 \delta^1 \oplus \gamma^4 \delta^3 \oplus \gamma^5 \delta^8 \oplus (\gamma^6 \delta^{13})(\gamma^1 \delta^6)^* \end{pmatrix}$$

Il existe donc un plus grand correcteur réalisable (Théorème 12) inférieur ou égal à  $H \setminus G_{ref} \not\! / H$  qui est

$$F = Pr_+(H \setminus G_{ref} \not\! / H) = \begin{pmatrix} \gamma^3(\gamma^1 \delta^6)^* & \gamma^3 \oplus \gamma^4 \delta^2 \oplus \gamma^5 \delta^7 \oplus (\gamma^6 \delta^{12})(\gamma^1 \delta^6)^* \\ \gamma^3 \delta(\gamma^1 \delta^6)^* & \gamma^3 \delta^1 \oplus \gamma^4 \delta^3 \oplus \gamma^5 \delta^8 \oplus (\gamma^6 \delta^{13})(\gamma^1 \delta^6)^* \end{pmatrix}$$

On donne une réalisation de ce correcteur sur la figure 2.10.

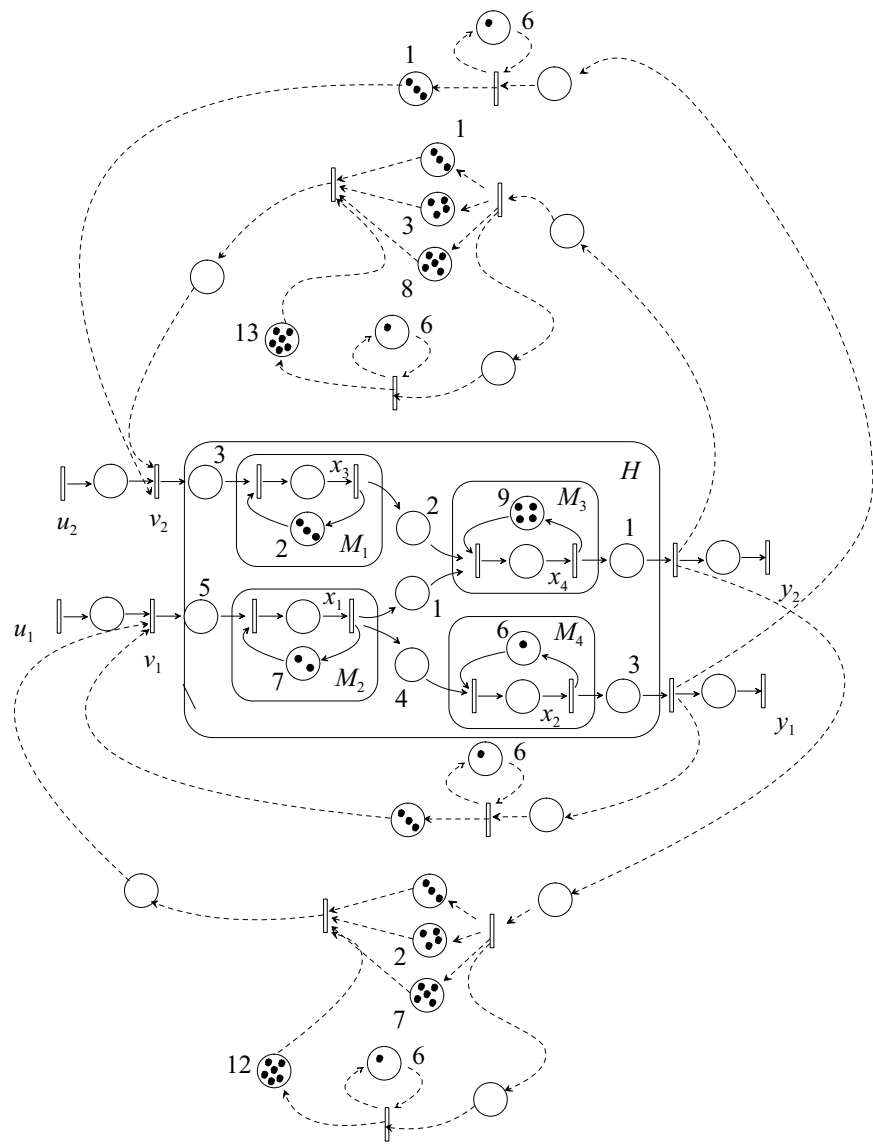


FIG. 2.10 – GET MIMO

**Remarque 10** Des algorithmes permettant la manipulation des séries périodiques ont été développés et implantés sous forme de script Scilab et de classes C++.

## Chapitre 3

# Le Principe du Rejet de Perturbation en automatique "Classique"

Le principe du rejet de perturbation faisant appel à des notions d'algèbre linéaire, nous consacrerons la première partie à des rappels élémentaires. La dernière partie sera consacrée au problème de la synthèse d'un retour d'état permettant le rejet de perturbation. La résolution de ce problème nous conduira à utiliser le concept et de sous espace (A, B)-invariant introduit dans la deuxième partie. [Descusse and Malabre, 1999], [Wonham, 1979] et [?].

### 3.1 Rappels d'Algèbre Linéaire

**Application 1** Soit à résoudre le système d'équations linéaires suivant dans lequel  $A$  et  $B$  sont des matrices respectivement de dimensions  $n \times n$  et  $n \times m$ ,  $\dot{x}(t)$  et  $x(t)$  sont des vecteurs de dimension  $n$  et  $u$  de dimension  $m$ .

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(t=0) = x_0 \end{cases}$$

Nous savons que la solution de l'équation est formée de la solution de l'équation homogène augmentée d'une solution particulière de l'équation complète que nous allons déterminer par la méthode de la variation de la constante.

La solution de  $\dot{x}(t) = Ax(t)$  est  $x(t) = e^{At}K$  où  $K$  est un vecteur de dimension  $n$ .

Cherchons une solution particulière  $x_p(t)$  de la forme  $e^{At}K$  en faisant varier  $K$ .

En reportant dans l'équation complète, nous avons

$$\begin{aligned} e^{At}\dot{K} + Ae^{At}K &= Ae^{At}K + Bu(t) \\ \text{soit } \dot{K} &= e^{-At}Bu(t). \end{aligned}$$

Intégrons alors  $\dot{K}$  de façon à ce que  $K(t)$  s'annule pour  $t = 0$

$$K = \int_0^t e^{-A\tau}Bu(\tau)d\tau \text{ et donc } x_p(t) = e^{At}K = \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau.$$

Ainsi, la solution de l'équation qui vérifie la valeur initiale  $x(t=0) = x_0$  sera :

$$x(t) = e^{At}x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau \text{ pour } t > 0. \quad (3.1)$$

**Définition 18** *Évaluation de la matrice  $e^{At}$ .*

*D'une manière explicite, le développement en série d'une exponentielle de matrice  $A$  carrée est une somme infinie des puissances de  $A$  pondérées :*

$$e^{At} = Id + tA + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \dots = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^i}{i!}A^i. \quad (3.2)$$

**Définition 19** *Soit  $\mathcal{X}$  un espace vectoriel défini sur le corps  $\mathbb{K}$  avec  $\dim \mathcal{X} = n$  et soit  $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  une application linéaire quelconque.*

*Que  $\mathbb{K}$  soit  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{C}$ , on définit le spectre de  $A$ , noté  $\sigma(A)$ , comme l'ensemble des  $n$  racines complexes du polynôme caractéristique de  $A$ . Les éléments de  $\sigma(A)$  sont aussi les valeurs propres de  $A$ .*

**Définition 20** *(transformation de Laplace) Soit  $f$  une fonction de variable réelle  $t$  définie sur  $\mathbb{R}$  telle que pour tout  $t$  négatif, la fonction  $f$  s'annule et  $s$  un réel.*

*On appelle transformée de Laplace de  $f$  la fonction :*

$$L_f : s \rightarrow L_f(s) \\ L_f(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} f(t) dt.$$

*On note  $L_f(s) = F(s)$ .*

**Définition 21** *(transformation de Laplace inverse) Si  $F(s)$  est une fonction analytique, quel que soit  $s$  avec  $\Re(s) > c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ , et si*

$$\int_{c-j\infty}^{c+j\infty} |F(s)| |ds| < \infty \\ \lim_{|s| \rightarrow \infty} F(s) = 0$$

*alors  $F(s)$  est la transformée de Laplace de la fonction*

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{c-j\infty}^{c+j\infty} e^{st} F(s) ds.$$

*$f(t)$  est la transformée inverse de Laplace.*

**Application 2** *Soit le système linéaire suivant :*

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) \\ x(t=0) = x_0 \end{cases}$$

*Nous avons vu que la solution de ce système est :*

$$x(t) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau \quad (3.3)$$

$$x(t) = e^{At} \left( x_0 + \int_0^t e^{-A\tau} Bu(\tau) d\tau \right) \quad (3.4)$$

*En utilisant la transformation de Laplace (définition 20), ce système linéaire peut se résoudre de la manière suivante :*

$$sX(s) - x_0 = A.X(s) + BU(s)$$

soit

$$X(s) = (sId - A)^{-1}(x_0 + BU(s)). \quad (3.5)$$

On a donc, d'après l'expression (3.4), que  $(sId - A)^{-1}$  est la transformée de Laplace de  $e^{At}$ . Pour s'en convaincre, il suffit de considérer le système linéaire libre (c'est-à-dire avec  $u(t) = 0$ ,  $\forall t \geq 0$ ).

Calculons  $(sId - A)^{-1}$  :

Soit  $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$  avec  $\dim(\mathcal{X}) = n$  et soit  $\Pi(\lambda)$  le polynôme caractéristique de  $A$ . On a

$$\Pi(\lambda) = \lambda^n - (p_1 + p_2\lambda + p_3\lambda^2 + \dots + p_n\lambda^{n-1}).$$

On pose la suite  $\Pi_r(\lambda)$  telle que :

$$\begin{cases} \Pi_r(\lambda) = \lambda^{n-r} - (p_{r+1} + p_{r+2}\lambda + \dots + p_n\lambda^{n-r-1}) & \text{avec } r = 1, \dots, n \\ \Pi_0(\lambda) = \Pi(\lambda). \end{cases}$$

**Remarque 11** Chaque  $\Pi_r(\lambda)$  s'obtient à partir du précédent en enlevant le terme constant et en divisant par  $\lambda$ .

On a donc la relation suivante :

$$\begin{cases} \Pi_0(\lambda) = \Pi(\lambda) \\ \lambda\Pi_r(\lambda) = \Pi_{r-1}(\lambda) + p_r & \text{avec } r = 1, \dots, n. \end{cases}$$

**Proposition 2** Soit  $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ , les polynômes  $\Pi(\lambda)$  et  $\Pi_r(\lambda)$  définis comme ci-dessus, on peut écrire

$$(sId - A)^{-1} = \frac{1}{\Pi(s)} \sum_{r=1}^n \Pi_r(s) A^{r-1}.$$

**Preuve:** Par récurrence, il suffit de vérifier que

$$(sId - A) \sum_{r=1}^n \Pi_r(s) A^{r-1} = \Pi(s) Id. \quad (3.6)$$

On écrit que

$$\begin{aligned} (sId - A) \sum_{r=1}^n \Pi_r(s) A^{r-1} &= (sId - A)(\Pi_1(s)Id + \Pi_2(s)A + \dots + \Pi_n(s)A^{n-1}) \\ &= (s\Pi_1(s)Id + s\Pi_2(s)A + \dots + s\Pi_n(s)A^{n-1}) - (\Pi_1(s)A + \Pi_2(s)A^2 + \dots + \Pi_n(s)A^n) \\ &= (\Pi_0(s)Id + p_1Id + \Pi_1(s)A + p_2A + \dots + \Pi_{n-1}(s)A^{n-1} + p_nA^{n-1}) - (\Pi_1(s)A + \Pi_2(s)A^2 + \dots + \Pi_n(s)A^n) \\ &= \Pi_0(s)Id + p_1Id + p_2A + \dots + p_nA^{n-1} - \Pi_n(s)A^n \end{aligned}$$

Et sachant que  $\Pi_n(s) = 1$  et  $\Pi_0(s) = \Pi(s)$ , alors

$$(sId - A) \sum_{r=1}^n \Pi_r(s) A^{r-1} = \Pi(s)Id + p_1 Id + p_2 A + \dots + p_n A^{n-1} - A^n$$

Or, d'après le théorème de Cayley-Hamilton, on a

$$\begin{aligned} \Pi(A) &= 0, \\ \text{c'est-à-dire } A^n &= p_1 + p_2 A + p_3 A^2 + \dots + p_n A^{n-1} \end{aligned}$$

donc  $\Pi(s)Id + p_1 Id + p_2 A + \dots + p_n A^{n-1} - (p_1 + p_2 A + p_3 A^2 + \dots + p_n A^{n-1}) = \Pi(s)Id$ .

On a donc démontré l'expression (3.6), à savoir que

$$(sId - A) \sum_{r=1}^n \Pi_r(s) A^{r-1} = \Pi(s)Id.$$

**Remarque 12** Si on désigne alors par  $\mathcal{C}$  un contour fermé quelconque du plan complexe entourant  $\sigma(A)$ , le spectre de  $A$ , le théorème de Cauchy et l'inversion de la transformation de Laplace donnent

$$e^{At} = \frac{1}{2\pi j} \oint_{\mathcal{C}} (zId - A)^{-1} e^{tz} dz. \quad (3.7)$$

Et, en utilisant l'égalité de la proposition (2), on obtient

$$e^{At} = \sum_{r=1}^n \left( \frac{1}{2\pi j} \oint \frac{\Pi_r(z)}{\Pi(z)} e^{tz} dz \right) A^{r-1}. \quad (3.8)$$

On voit que l'exponentielle  $e^{At}$  ne dépend que des puissances de  $A$  strictement inférieures à  $n$ .

**Définition 22** (sous espace des états atteignables) Soit  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ , et  $x(0) = x_0$  une condition initiale, continue par morceau, la solution est alors donnée par :

$$\varphi(t, \dot{x}, u) = e^{At} x_0 + \int_0^t e^{A(t-\tau)} Bu(\tau) d\tau.$$

Un état  $x \in \mathcal{X}$  est atteignable à partir de  $x_0$  si et seulement si il existe  $\theta \geq 0$  et une loi de commande  $u(\tau)$  pour tout  $0 \leq \tau \leq \theta$  continue par morceau sur  $[0, \theta]$  tels que

$$x = \varphi(t, x_0, u).$$

Désignons par  $\mathcal{R}_0$  l'ensemble de tous les états atteignables depuis l'origine  $x_0 = 0$ . On peut montrer que  $\mathcal{R}_0$  est un sous espace de  $\mathcal{X}$ . Le théorème suivant décrit ce sous espace.

**Théorème 13** [Descusse and Malabre, 1999] Soit le système  $\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t)$ , et  $x_0 = 0$  une condition initiale. Le sous espace des états atteignables depuis l'origine,  $\mathcal{R}_0$ , est donné par  $\mathcal{R}_0 = \langle A | B \rangle$  avec

$$\langle A | B \rangle = B + AB + \dots + A^{n-1}B \text{ et } B = \text{Im}B.$$



### 3.2 Les sous espaces (A, B)-invariants

**Définition 23** Soient les applications linéaires  $A : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{X}$  et  $B : \mathcal{U} \longrightarrow \mathcal{X}$ . Un sous espace  $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$  est dit (A, B)-invariant si il existe une application  $F : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{U}$  telle que

$$(A + BF)\mathcal{V} \subset \mathcal{V}. \quad (3.9)$$

On note la classe des sous espaces (A, B)-invariants de  $\mathcal{X}$  par  $\mathfrak{S}(A, B; \mathcal{X})$ , ou plus simplement  $\mathfrak{S}(\mathcal{X})$  quand les applications A et B sont sous entendues.

**Remarque 13** Supposons que  $\mathcal{V}$  est (A, B)-invariant et un retour d'état F choisi vérifiant la propriété (3.9). Le système en boucle fermée s'écrit :

$$\begin{aligned} \dot{x} &= Ax + Bu \\ u &= Fx, \end{aligned}$$

Alors, si  $x(0) = x_0 \in \mathcal{V}$ , on a

$$x(t) = e^{(A+BF)t}x_0 \in \mathcal{V}, \quad \forall t.$$

Ce sous espace  $\mathcal{V}$  a la propriété suivante :

Si  $x_0 \in \mathcal{V}$ , alors il existe une entrée  $u(t), t \geq 0$  telle que  $x(t) \in \mathcal{V}$  pour tout  $t \geq 0$ .

En d'autres termes, l'état  $x$  peut être maintenu dans  $\mathcal{V}$  par un choix convenable de  $u$ .

**Lemme 1** Soit  $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}$  et  $\mathcal{B} = \text{Im}B$ . Alors  $\mathcal{V} \in \mathfrak{S}(A, B; \mathcal{X})$  si et seulement si

$$A\mathcal{V} \subset \mathcal{V} + \mathcal{B}. \quad (3.10)$$

**Preuve:**

( $\Rightarrow$ )

Soit  $\mathcal{V} \in \mathfrak{S}(A, B; \mathcal{X})$  et soit  $v \in \mathcal{V}$ . On pose  $(A + BF)v = w$ , donc  $w \in \mathcal{V}$ . Or

$$\begin{aligned} Av &= w - BFv \in \mathcal{V} + \mathcal{B} \\ \text{et évidemment } Av &\in A\mathcal{V}. \end{aligned}$$

On a ainsi

$$A\mathcal{V} \subset \mathcal{V} + \mathcal{B}.$$

( $\Leftarrow$ )

On cherche un F tel que  $(A + BF)\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$ .

On a  $A\mathcal{V} \subset \mathcal{V} + \mathcal{B}$ . Soit  $(v_1, v_2, \dots, v_\mu)$  une base de  $\mathcal{V}$ , alors  $\forall i, i \in \{1, \mu\}$ ,  $\exists w_i \in \mathcal{V}$  et  $u_i \in \mathcal{U}$  tel que  $Av_i = w_i - Bu_i$ .

On définit une application  $F_0 : \mathcal{V} \longrightarrow \mathcal{U}$  telle que

$$F_0v_i = u_i, \quad \text{pour } 1 \leq i \leq \mu. \quad (3.11)$$

Soit F un prolongement de  $F_0$  avec  $F : \mathcal{X} \longrightarrow \mathcal{U}$  tel que la restriction de F à  $\mathcal{V}$  soit  $F_0$ . Alors

$$\begin{aligned} (A + BF)v_i &= (Av_i) + BFv_i \\ &= (w_i - Bu_i) + BFv_i \\ &= (w_i - Bu_i) + BF_0v_i \\ &= (w_i - Bu_i) + Bu_i && \text{d'après (3.11)} \\ &= w_i \in \mathcal{V}. \end{aligned}$$

On a ainsi vérifié que  $(A + BF)v_i \in \mathcal{V}$  pour une base de  $\mathcal{V}$ , donc la propriété est vraie pour le sous espace  $\mathcal{V}$ , c'est-à-dire  $\mathcal{V}$  est (A, B)-invariant.

**Remarque 14** D'après le lemme 1, pour démontrer qu'un espace est  $(A, B)$ -invariant il suffit de montrer que l'expression (3.10) est vraie, alors que précédemment il fallait trouver un  $F$  tel que  $(A + BF)\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$ .

**Notation 1** Si  $\mathcal{V} \in \mathfrak{S}(A, B; \mathcal{X})$ , on note  $F(A, B; \mathcal{V})$  ou plus simplement  $F(\mathcal{V})$ , la classe des fonctions  $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$  telles que  $(A + BF)\mathcal{V} \subset \mathcal{V}$ . La notation  $F(\mathcal{V})$  se lit, " $F$  est un ami de  $\mathcal{V}$ ".

**Lemme 2** La classe des sous espaces  $\mathfrak{S}(A, B; \mathcal{X})$  est fermée pour l'opération d'addition de sous espaces. C'est-à-dire  $\forall \mathcal{V}, \mathcal{V}' \in \mathfrak{S}(A, B; \mathcal{X}), \mathcal{V} + \mathcal{V}' \in \mathfrak{S}(A, B; \mathcal{X})$ .

**Preuve:** Soit  $\mathcal{V}$  et  $\mathcal{V}' \in \mathfrak{S}(A, B; \mathcal{X})$ . Alors, d'après le lemme (1), on a

$$\begin{cases} A\mathcal{V} \subset \mathcal{V} + \mathcal{B} \\ A\mathcal{V}' \subset \mathcal{V}' + \mathcal{B} \end{cases}$$

Et, de plus, on a évidemment

$$A(\mathcal{V} + \mathcal{V}') = A\mathcal{V} + A\mathcal{V}'.$$

Donc  $A(\mathcal{V} + \mathcal{V}') \subset (\mathcal{V} + \mathcal{V}') + \mathcal{B}$ .

On obtient, d'après le lemme 1,  $(\mathcal{V} + \mathcal{V}') \in \mathfrak{S}(A, B; \mathcal{X})$ .

**Lemme 3** Soit  $\mathcal{B}$  une classe de sous espaces de  $\mathcal{X}$  non vide et fermée pour l'addition, alors  $\mathcal{B}$  contient un élément maximal  $\mathcal{V}^*$ . On note

$$\mathcal{V}^* = \sup\{\mathcal{V}, \mathcal{V} \in \mathcal{B}\} \text{ ou } \mathcal{V}^* = \sup\{\mathcal{B}\}$$

**Preuve:** on sait que  $\mathcal{B} \neq \emptyset$ ,  $\mathcal{B} \subset \mathcal{X}$  et par hypothèse l'espace  $\mathcal{X}$  est fini, donc  $\dim \mathcal{X}$  est finie. On peut donc dire qu'il existe un élément  $\mathcal{V}^* \in \mathcal{B}$  dont la dimension,  $\dim(\mathcal{V}^*)$ , est la plus grande possible.

Soit  $\mathcal{V} \in \mathcal{B}$ , montrons qu'il est inclus dans  $\mathcal{V}^*$  ce qui prouvera que  $\mathcal{V}^*$  est le sous espace maximal. Sachant que  $\mathcal{B}$  est fermée pour l'addition, on a

$$\mathcal{V} + \mathcal{V}^* \in \mathcal{B}.$$

De plus, par définition de  $\mathcal{V}^*$  nous avons  $\dim(\mathcal{V}^*) \geq \dim(\mathcal{V} + \mathcal{V}^*)$ .

Évidemment, nous avons  $\dim(\mathcal{V} + \mathcal{V}^*) \geq \dim(\mathcal{V}^*)$  qui conduit à l'égalité

$$\dim(\mathcal{V} + \mathcal{V}^*) = \dim(\mathcal{V}^*). \quad (3.12)$$

Par ailleurs, on a  $\mathcal{V}^* \subseteq \mathcal{V} + \mathcal{V}^*$  alors, d'après l'égalité (3.12), on obtient

$$\mathcal{V} + \mathcal{V}^* = \mathcal{V}^*.$$

Donc  $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}^*$ , c'est-à-dire que  $\mathcal{V}^*$  est le plus grand sous espace de  $\mathcal{B}$ .

**Notation 2** L'ensemble des sous espaces  $(A, B)$ -invariants inclus dans  $\mathcal{K}$  se note

$$\mathfrak{S}(A, B; \mathcal{K}) := \{\mathcal{V} : \mathcal{V} \in \mathfrak{S}(A, B; \mathcal{X}) \text{ et } \mathcal{V} \subseteq \mathcal{K}\}.$$

**Remarque 15** Il est clair que

- $0 \in \mathfrak{S}(A, B; \mathcal{K})$  puisque  $0 \subset \mathcal{K}$  et  $(A + BF)0 \subset 0$ . Donc  $\mathfrak{S}(A, B; \mathcal{K})$  est non vide.
- $\mathfrak{S}(A, B; \mathcal{K})$  est fermé pour l'addition d'après le lemme 2.
- Le lemme 3 garantit l'existence d'un plus grand élément dans  $\mathfrak{S}(A, B; \mathcal{K})$  noté

$$\mathcal{V}^* := \sup \mathfrak{S}(A, B; \mathcal{K}).$$

### 3.3 Le problème du rejet de perturbation

Soit un système :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + Sq(t), & t \geq 0. \\ z(t) = Dx(t), & t \geq 0. \end{cases} \quad (3.13)$$

où le terme  $q(t) \in \mathbb{R}^r$  dans (3.13) représente une perturbation qui n'est pas directement mesurable et  $S : \mathbb{R}^r \rightarrow \mathcal{X}$ .

Le problème du rejet de perturbation consiste à trouver (si possible) un retour d'état, tel que la sortie du système bouclé soit indépendante de la perturbation.

Supposons que le retour d'état par  $F$  soit réalisé, donc dans (3.13),  $u(t) = Fx(t)$ .

On dit que le rejet de perturbation est réalisé si, pour chaque état initial  $x(0)$  nul, la sortie  $z(t)$ ,  $t \geq 0$ , est identiquement nulle pour tous les  $q$ . Donc le rejet de perturbation consiste à forcer la sortie à zéro.

$$z(t) = D \int_0^t e^{(A+BF)(t-\tau)} Sq(\tau) d\tau = 0 \quad (\text{d'après (3.1)})$$

pour tout  $q$  et  $t \geq 0$ .

Notons  $\mathcal{K} = \text{Ker} D$  et  $\mathcal{S} = \text{Im} S$ .

**Lemme 4** *Le rejet de la perturbation  $q$  sur le système (3.13) est possible si*

$$\langle A + BF \mid \mathcal{S} \rangle \subset \mathcal{K}.$$

**Preuve:** On veut :

$$z(t) = D \int_0^t e^{(A+BF)(t-\tau)} Sq(\tau) d\tau = 0.$$

Il faut donc que  $\int_0^t e^{(t-\tau)(A+BF)} Sq(\tau) d\tau$  soit inclus dans le noyau de  $D$ .

Or, d'après la définition (22) et le théorème (13), l'intégrale précédente ne définit rien d'autre que le sous espace des états atteignables,  $\langle A + BF \mid \mathcal{S} \rangle$ , de la première équation du système (3.13).

Il faut donc  $\langle A + BF \mid \mathcal{S} \rangle \subset \mathcal{K}$ .

Le problème à résoudre est donc :

Étant donnés  $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ ,  $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$ ,  $\mathcal{S} \subset \mathcal{X}$ , et  $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$ , il faut trouver (si possible)  $F : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{U}$  tel que

$$\langle A + BF \mid \mathcal{S} \rangle \subset \mathcal{K}.$$

**Théorème 14** *Le rejet de perturbation est possible si, et seulement si,  $\mathcal{V}^* \supset \mathcal{S}$  avec  $\mathcal{V}^* := \sup \mathfrak{F}(A, B; \mathcal{K})$ .*

**Preuve:**

( $\Rightarrow$ )

D'après le lemme 4, le rejet de perturbation est possible si  $\langle A + BF \mid \mathcal{S} \rangle \subset \mathcal{K}$ .

On pose  $\mathcal{V} := \langle A + BF \mid \mathcal{S} \rangle$ .

-  $\mathcal{V}$  est un sous espace vectoriel inclus dans  $\mathcal{K}$ .

- Montrons que  $\mathcal{V}$  est  $(A, B)$ -invariant.

$$\begin{aligned} (A + BF)(\langle A + BF \mid \mathcal{S} \rangle) &= (A + BF)[\mathcal{S} + (A + BF)\mathcal{S} + \dots + (A + BF)^{n-1}\mathcal{S}] \\ &= (A + BF)\mathcal{S} + (A + BF)^2\mathcal{S} + \dots + (A + BF)^n\mathcal{S} \\ \Rightarrow (A + BF)(\langle A + BF \mid \mathcal{S} \rangle) &\subset \langle A + BF \mid \mathcal{S} \rangle, \end{aligned}$$

c'est-à-dire  $\mathcal{V}$  est  $(A, B)$ -invariant.

Donc  $\mathcal{V} \in \mathfrak{S}(A, B; \mathcal{K})$ . Sachant que  $\mathcal{V}^* = \sup \mathfrak{S}(A, B; \mathcal{K})$  et en remarquant que  $\mathcal{S} \subset \mathcal{V}$ , par définition de  $\mathcal{V}$ , on obtient

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{V} \subset \mathcal{V}^*.$$

( $\Leftarrow$ )

On a  $\mathcal{V}^* \in \mathfrak{S}(A, B; \mathcal{K})$  c'est-à-dire  $\mathcal{V}^* \in \mathfrak{S}(A, B; \mathcal{X})$  et  $\mathcal{V}^* \subset \mathcal{K}$

Donc, il existe  $F$  tel que  $(A + BF)\mathcal{V}^* \subset \mathcal{V}^*$ . Or

$$\mathcal{S} \subset \mathcal{V}^*,$$

donc  $\langle A + BF \mid \mathcal{S} \rangle \subset \langle A + BF \mid \mathcal{V}^* \rangle \subset \mathcal{V}^* \subset \mathcal{K}$ .

Le rejet de la perturbation est donc possible.

**Théorème 15** Soit  $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{X}$ ,  $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$  et  $\mathcal{K} \subset \mathcal{X}$ . On définit une suite  $\mathcal{V}^\mu$  comme suit

$$\begin{aligned} \mathcal{V}^0 &= \mathcal{K} \\ \mathcal{V}^\mu &= \mathcal{K} \cap A^{-1}(\mathcal{B} + \mathcal{V}^{\mu-1}) \quad \mu = 1, 2, \dots \end{aligned}$$

Alors  $\mathcal{V}^\mu \subset \mathcal{V}^{\mu-1}$  et pour un certain  $k \leq \dim \mathcal{K}$ ,

$\mathcal{V}^\mu = \sup \mathfrak{S}(A, B; \mathcal{K})$  pour tout  $\mu \geq k$ .

**Preuve:** On observe tout d'abord que la suite  $\mathcal{V}^\mu$  est non croissante. En effet, on a  $\mathcal{V}^1 \subset \mathcal{V}^0$  et, si  $\mathcal{V}^\mu \subset \mathcal{V}^{\mu-1}$  est vraie, alors

$$\mathcal{V}^{\mu+1} = \mathcal{K} \cap A^{-1}(\mathcal{B} + \mathcal{V}^\mu) \subset \mathcal{K} \cap A^{-1}(\mathcal{B} + \mathcal{V}^{\mu-1}) = \mathcal{V}^\mu \quad (3.14)$$

On obtient  $\mathcal{V}^{\mu+1} \subset \mathcal{V}^\mu$ .

On a ainsi démontré, par récurrence, que la suite des  $\mathcal{V}^\mu$  est non croissante.

Supposons que  $\dim \mathcal{K} = d$  et montrons qu'à partir d'un certain rang  $k$ , tous les espaces  $\mathcal{V}^\mu$  avec  $\mu > k$  vérifient la relation  $\mathcal{V}^k = \mathcal{V}^\mu$ .

Deux cas sont envisageables :

- Soit  $\forall k$ ,  $k \leq \dim \mathcal{K}$ , on a  $\mathcal{V}^k \subsetneq \mathcal{V}^{k-1}$ ; c'est-à-dire  $\dim \mathcal{V}^k < \dim \mathcal{V}^{k-1}$ . On a donc

$$\dim \mathcal{V}^d < \dim \mathcal{V}^{d-1} < \dots < \dim \mathcal{V}^2 < \dim \mathcal{V}^1 < \dim \mathcal{V}^0 = \dim \mathcal{K} = d.$$

On en déduit que pour un certain rang  $k$ , on a  $\mathcal{V}^k = 0$  et pour tous les rangs  $k'$  supérieurs à  $k$ , on a  $\mathcal{V}^{k'} = 0$ .

- Soit  $\exists k$ ,  $k \leq \dim \mathcal{K}$  tel que  $\mathcal{V}^k = \mathcal{V}^{k-1}$ ; et donc tous les espaces suivants  $(\mathcal{V}^{k+1}, \mathcal{V}^{k+2}, \dots)$  sont égaux à  $\mathcal{V}^{k-1}$ .

En effet,  $\mathcal{V}^{k+1} = \mathcal{K} \cap A^{-1}(\mathcal{B} + \mathcal{V}^k)$ , or  $\mathcal{V}^k = \mathcal{V}^{k-1}$ , donc  $\mathcal{V}^{k+1} = \mathcal{K} \cap A^{-1}(\mathcal{B} + \mathcal{V}^{k-1}) = \mathcal{V}^k$ .

C'est pourquoi, pour un certain  $k \leq \dim \mathcal{K}$  et  $\forall \mu$ ,  $\mu \geq k$ ,

$$\mathcal{V}^\mu = \mathcal{V}^k \quad \text{avec } \mu \geq k.$$

Maintenant, soit  $\mathcal{V} \in \mathfrak{S}(\mathcal{K})$  alors

$$\mathcal{V} \subset \mathcal{K} \text{ et } \mathcal{V} \subset A^{-1}(\mathcal{V} + \mathcal{B}). \quad (3.15)$$

On a  $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}^0 = \mathcal{K}$ . Supposons  $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}^{\mu-1}$ , alors

$$\mathcal{V} \subset \mathcal{K} \cap A^{-1}(\mathcal{V} + \mathcal{B}) \subset \mathcal{K} \cap A^{-1}(\mathcal{V}^{\mu-1} + \mathcal{B}).$$

Or  $\mathcal{K} \cap A^{-1}(\mathcal{V}^{\mu-1} + \mathcal{B}) = \mathcal{V}^\mu$ , on en déduit

$$\mathcal{V} \subset \mathcal{V}^\mu.$$

Par récurrence, quel que soit  $\mu$ , on a  $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}^\mu$ ; en particulier  $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}^k$ .

$$\text{Montrons que } \mathcal{V}^k = \mathcal{K} \cap A^{-1}(\mathcal{V}^{k-1} + \mathcal{B}) \in \mathfrak{S}(\mathcal{K}).$$

Par définition de  $k$ , on a  $\mathcal{V}^k = \mathcal{V}^{k-1}$ .

On en déduit  $\mathcal{V}^k = \mathcal{K} \cap A^{-1}(\mathcal{V}^k + \mathcal{B})$ , c'est-à-dire

$$\begin{cases} \mathcal{V}^k \subset \mathcal{K}. \\ \mathcal{V}^k \subset A^{-1}(\mathcal{V}^k + \mathcal{B}). \end{cases}$$

Donc  $\mathcal{V}^k \in \mathfrak{S}(\mathcal{K})$ .

Or  $\mathcal{V}$  est arbitrairement choisi dans  $\mathfrak{S}(\mathcal{K})$  donc tous les sous espaces  $\mathcal{V}$  de  $\mathfrak{S}(\mathcal{K})$  sont inclus dans  $\mathcal{V}^k$ . Donc

$$\mathcal{V}^k = \sup \mathfrak{S}(\mathcal{K}).$$

Les théorèmes 14 et 15 permettent de construire une solution au problème de rejet de perturbation. Le principe de la solution peut être résumé comme suit :

- D'après la remarque (13), si  $q(t) = 0, \forall t$  et si  $\mathcal{V}$  quelconque,  $\mathcal{V} \in \mathfrak{S}(\mathcal{X})$ , et  $x_0 \in \mathcal{V}$ , alors par un choix convenable de  $u$  l'état  $x$  du système peut être maintenu dans  $\mathcal{V}$ . C'est à dire un choix de  $u$  tel que  $u = Fx$  avec  $F \in F(A, B; \mathcal{V})$ .
- D'autre part, si  $q(\cdot) \neq 0$ , mais  $ImS \subset \mathcal{V}$  alors la contribution  $Sq(t)$  sur  $\dot{x}$  est aussi dans  $\mathcal{V}$ . En effet,  $\dot{x} = (A + BF)x + Sq \subset \mathcal{V}$ .  
Sous ces conditions, la contribution de  $q$  sur  $x$  ( où  $x(t) = \int_0^t e^{(A+BF)(t-\tau)} Sq(\tau) d\tau$  ) peut être contrôlée et maintenue dans  $\mathcal{V}$ .  
De plus, cette contribution est inobservable sur  $z$  uniquement lorsque l'espace  $\mathcal{V} \subset KerD$ .  
Donc, pour résoudre le problème du rejet de perturbation, il faut trouver un espace, que nous avons noté  $\mathcal{V}$ , qui satisfait les propriétés d'"(A, B)-invariance" et qui soit inclus dans  $KerD$ . Le sous espace  $\mathcal{V}$  que nous cherchons n'est autre que  $\mathcal{V}^* = \sup \mathfrak{S}(\mathcal{K})$  qui vérifie bien ces propriétés. Ainsi, si  $ImS \subset \mathcal{V}^*$ , le rejet de perturbation est possible.
- Maintenant, avec un contrôle de la forme  $u = Fx + Gv$ , ou  $F \in F(\mathcal{V}^*)$  et  $v(\cdot)$  est la nouvelle entrée, l'état du système  $\dot{x}$  n'appartiendra pas, en général, à  $\mathcal{V}^*$ ; cependant, la linéarité assure que la perturbation  $q$  sur  $x$  ( où  $x(t) = \int_0^t e^{(A+BF)(t-\tau)} Sq(\tau) d\tau + \int_0^t e^{(A+BF)(t-\tau)} B G v(\tau) d\tau$  ) est dans  $\mathcal{V}^*$ , ce qui est la seule condition pour que le rejet de perturbation soit réalisable.



## Chapitre 4

# Le Principe du Rejet de Perturbation dans les dioïdes

### 4.1 Préliminaires et notion de Projections

Nous rappelons dans cette partie les quelques résultats utiles dans la suite du document. On peut les retrouver dans [Baccelli et al., 1992], [Cohen et al., 1996], [Cohen et al., 1997], [Cottenceau et al., 1999].

**Définition 24 (Noyau)** Soit  $C : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$  une application définie sur des dioïdes. On appelle noyau de  $C$  (noté  $\ker C$ ), la relation d'équivalence sur  $\mathcal{X}$  définie par

$$x \overset{\ker C}{\sim} y \iff C(x) = C(y). \quad (4.1)$$

**Définition 25 (Inclusion d'image)** Soit deux applications  $A : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Z}$  et  $B : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{Z}$ . Comment caractériser le fait que  $\text{Im} B \subset \text{Im} A$  ? Cette inclusion est équivalente à dire, quelque soit  $z \in \mathcal{Z}$  de la forme  $B(y)$  ( avec  $y \in \mathcal{Y}$  ), on peut l'écrire aussi comme  $A(x)$ . C'est pourquoi, on peut aussi dire que l'équation  $A(x) = B(y)$  d'inconnue  $x$  a une solution pour tout  $y$ . Et en supposant que  $A$  est résiduable, c'est équivalent à

$$A(A^\sharp(B(y))) = B(y), \forall y \in \mathcal{Y},$$

ou, autrement formulé,

$$B = A \circ A^\sharp \circ B. \quad (4.2)$$

En particulier, cela implique qu'il existe une application  $L : \mathcal{Y} \rightarrow \mathcal{X}$ , explicitement  $L = A^\sharp \circ B$ , tel que

$$B = A \circ L. \quad (4.3)$$

Inversement, si il existe  $L$  tel que l'expression 4.3 est vraie, alors  $B(y) = A(x)$  avec  $x = L(y)$ .

**Définition 26 (projection)** Soit  $B : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{X}$  et  $C : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ , on appelle projection de  $x \in \mathcal{X}$  dans  $\text{Im} B$  parallèlement à  $\ker C$ , l'élément  $x'$  qui appartient à  $\text{Im} B$  et à la classe d'équivalence engendrée par  $x$  modulo  $\ker C$ , i.e.,

$$\begin{aligned} x' = B(u) & \quad \text{et} & \quad x' \overset{\ker C}{\sim} x, \\ \text{ou } x' = B(u) & \quad \text{et} & \quad C(x') = C(x). \end{aligned}$$

Quand le projecteur dans  $\text{Im}B$  parallèlement à  $\ker C$  existe, il est noté  $\Pi_B^C$  et il est donné par

$$\Pi_B^C = B \circ (C \circ B)^\sharp \circ C = B \circ B^\sharp \circ C^\sharp \circ C, \quad (4.4)$$

dans le cas d'applications résiduables.

Il est possible de décomposer le projecteur (4.4). D'abord  $z = C^\sharp \circ C(x)$  est le plus grand élément dans la classe d'équivalence de  $x$  modulo  $\ker C$ . Ensuite,  $\xi = B \circ B^\sharp(z)$  est le plus grand élément dans  $\text{Im}B$  inférieur à  $z$ .

**Notation 3** On notera  $\Pi^C(x) = C^\sharp \circ C(x)$  le plus grand élément dans la classe d'équivalence de  $x$  modulo  $\ker C$ .

## 4.2 Le problème du rejet de perturbation

La représentation d'état d'un système perturbé s'écrit

$$x = Ax \oplus Bu \oplus Sq \quad (4.5)$$

$$y = Cx \quad (4.6)$$

$q \in \mathcal{Q}$  représente la perturbation agissant sur le système.

L'application  $S : \mathcal{Q} \rightarrow \mathcal{X}$  est représentée par une matrice constante, elle définit l'action de la perturbation sur l'état.

Comme nous l'avons vu précédemment, en automatique classique, le rejet de perturbation consiste à trouver une commande  $u$  de façon à ce que la perturbation  $q$  n'affecte pas la sortie  $y$ . De plus, sous certaines conditions il est montré qu'il existe une commande en boucle fermée  $u = Fx$  qui garantit que la trajectoire reste dans un sous espace de l'état inclus dans le noyau de l'application  $C$ , c'est-à-dire un état qui conduit à une sortie nulle quelle que soit  $q$ .

Le problème du rejet de perturbation pour les systèmes considérés ici doit être posé différemment, puisque les trajectoires  $u, x, y$  et  $q$  sont par nature monotones croissantes ( la date  $x_i(k+1)$  est naturellement supérieure à la date  $x_i(k)$ ), l'annulation de la sortie a par conséquent peu de sens dans ce contexte. Néanmoins la recherche d'une commande  $u$  qui maintient l'état  $x$  dans le noyau de  $C$  quelle que soit la perturbation  $q$  conserve un sens. En effet, la définition 24 précise que le noyau de  $C$  est la relation d'équivalence (4.1). C'est-à-dire que le noyau de  $C$  n'est pas un sous espace du domaine de l'application conduisant à une image nulle, mais une décomposition de l'espace en classes d'équivalences conduisant à une même image.

Par conséquent il s'agit de déterminer une commande  $u$  qui garantit que l'état  $x$  est maintenu dans la classe d'équivalence engendrée par  $q$ . C'est-à-dire d'établir une commande qui ne modifie pas la sortie perturbée par  $q$ . Dans l'ensemble des commandes qui permettent d'atteindre cet objectif, nous allons chercher la plus grande, c'est-à-dire celle qui satisfait au mieux le critère de juste-à-temps.

Formellement le problème du rejet de perturbation peut s'établir de la manière suivante : la plus petite solution de l'équation d'état (4.5) est

$$x = A^*Bu \oplus A^*Sq,$$

ce qui conduit à la sortie

$$y = CA^*Bu \oplus CA^*Sq.$$



Cette équation permet d'établir que toutes les commandes  $u$  telles que

$$CA^*Bu \preceq CA^*Sq \quad (4.7)$$

laissent inchangée la sortie générée par  $q$ .

**Remarque 16** L'appellation « Rejet de perturbation » doit s'entendre ici comme la recherche d'une plus grande commande qui maintient l'état dans le noyau de  $C$ . Cette appellation est peut-être ambiguë puisqu'elle ne conduit pas à une annulation de sortie (ce qui n'a pas de sens dans notre contexte) mais à une commande au plus tard tenant compte de la perturbation  $Q$ .

### 4.3 Rejet de perturbation dans les dioïdes

Nous disposons d'un système  $(\max, +)$ -linéaire sous forme d'état :

$$\begin{cases} X &= AX \oplus BU \oplus SQ \\ Y &= CX \end{cases} \implies \begin{cases} X &= A^*BU \oplus A^*SQ \\ Y &= CX \end{cases} \quad (4.8)$$

où

$X \in (\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta])^{n \times 1}$  est le vecteur d'état,  $U \in (\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta])^{p \times 1}$  le vecteur des entrées,  $Y \in (\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta])^{q \times 1}$  le vecteur des sorties et  $Q \in (\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta])^{m \times 1}$  le vecteur des perturbations. Les applications  $A \in (\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta])^{n \times n}$ ,  $B \in (\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta])^{n \times p}$ ,  $C \in (\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta])^{q \times n}$  et  $S \in (\mathcal{M}_{in}^{ax}[\gamma, \delta])^{n \times m}$  sont représentées par leurs matrices.

Le vecteur  $Q$  regroupe des entrées exogènes non maîtrisables. Les trajectoires que décrivent les composantes de ce vecteur ont pour effet de ralentir le franchissement des transitions sur lesquelles elles agissent<sup>1</sup>.

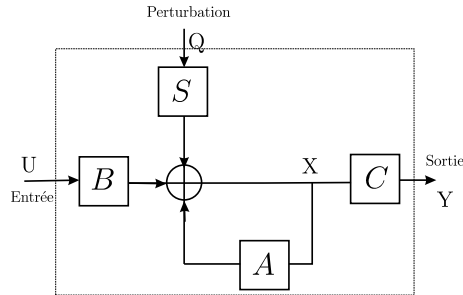


FIG. 4.1 – Représentation du système en boucle ouverte.

On dira qu'une commande  $U$  assure le rejet de perturbation lorsqu'elle maintient l'état  $X$  dans la classe d'équivalence de  $A^*SQ$  modulo  $\ker C$ . C'est-à-dire  $U$  telle que

$$A^*SQ \stackrel{\ker C}{\sim} X$$

$$A^*SQ \stackrel{\ker C}{\sim} A^*BU \oplus A^*SQ \quad (4.9)$$

<sup>1</sup>Dans un contexte manufacturier ces entrées peuvent représenter des arrêts machines dûs à des pannes ou des ruptures d'approvisionnement.

**Remarque 17** En remarquant que  $A^*SQ \stackrel{\ker C}{\sim} A^*BU \oplus A^*SQ \Leftrightarrow CA^*SQ = CA^*BU \oplus CA^*SQ$ , on voit que cette équation admet des solutions uniquement si  $CA^*SQ \succeq CA^*BU$ .

Parmi ces commandes, nous chercherons la plus grande, formellement

$$U_{opt} = \bigoplus_{\{U \mid A^*BU \oplus A^*SQ \stackrel{\ker C}{\sim} A^*SQ\}} U. \quad (4.10)$$

Pour résoudre ce problème, utilisons la notion de projecteur définie dans la partie (4.1). On sait que le plus grand état  $X$  de la forme  $X = A^*BU \oplus A^*SQ$  vérifiant  $Y = CA^*SQ$  est, par définition, le plus grand élément dans la classe d'équivalence de  $A^*SQ$  modulo  $\ker C$  noté

$$\Pi^C(A^*SQ) = C^\sharp \circ C(A^*SQ).$$

Cependant, cet état maximal n'étant pas toujours atteignable, on cherche le plus grand état atteignable solution du rejet de perturbation.

Cet état atteignable est la projection de  $A^*SQ$  dans  $A^*B$  parallèlement au noyau de  $C$  c'est-à-dire

$$\Pi_{A^*B}^C(A^*SQ) = A^*B \circ (A^*B)^\sharp \circ C^\sharp \circ C(A^*SQ).$$

Et la commande optimale  $U_{opt}$  permettant d'atteindre cet état optimal, connaissant  $Q$ , est

$$U_{opt} = (A^*B)^\sharp \circ C^\sharp \circ C(A^*SQ) = \frac{CA^*SQ}{CA^*B}. \quad (4.11)$$

**Remarque 18** La construction de la meilleure commande solution du rejet de perturbation est explicitée figure 4.2 où

$X_+$  représente l'état le plus grand dans la classe d'équivalence de  $A^*SQ$  modulo  $\ker C$ .

$X_{opt}$  représente l'état le plus grand dans la classe d'équivalence de  $A^*SQ$  modulo  $\ker C$  atteignable par le système, il s'agit de la projection de  $A^*SQ$  dans l'image de  $A^*B$  parallèlement au noyau de  $C$ .

$U_{opt}$  représente la commande optimale permettant d'atteindre l'état  $X_{opt}$ .

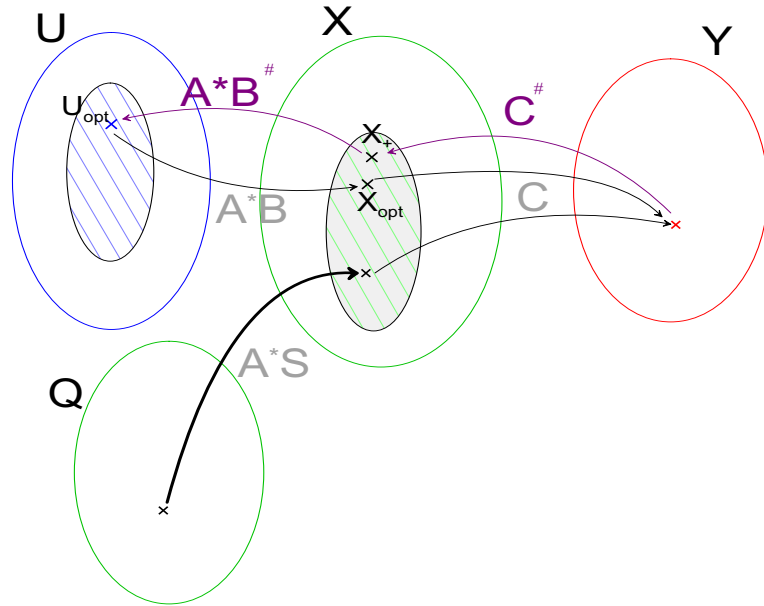


FIG. 4.2 – Schéma représentant la construction de la commande optimale en présence de perturbation.

**Remarque 19** *La commande optimal  $U_{opt}$  vérifiant le rejet de perturbation aurait pu directement être déduite de l'inégalité 4.7 en utilisant la théorie de la résiduation. Cependant, la notion de projection introduite permet de comprendre la construction de cette commande optimale  $U_{opt}$ .*

#### 4.4 Commande optimale en juste-à-temps en présence d'une perturbation

Nous disposons d'un système  $(\max, +)$ -linéaire d'écrit par les équations suivantes

$$\begin{cases} X &= AX \oplus BU \oplus SQ \\ Y &= CX \end{cases} \quad (4.12)$$

où  $Q$  représente une perturbation connue et non maîtrisable.

On se donne une consigne  $Z$ , et on cherche la plus grande commande  $U$  telle que

$$Y \preceq Z \text{ c'est-à-dire } CA^*BU \oplus CA^*SQ \preceq Z. \quad (4.13)$$

Il est claire que ce problème n'a pas toujours de solution notamment lorsque  $CA^*SQ \succeq Z$ .

Pour toujours avoir une solution à ce problème on considère la plus petite modification  $Z_q$  de la consigne telle qu'il existe toujours une commande  $U$  vérifiant la contrainte (4.13).

Soit  $H(x) = CA^*Bx \oplus CA^*SQ$ , d'après la proposition 1, la plus petite modification de la forme  $Z \oplus \Delta Z$  est  $H(\epsilon) = CA^*SQ$ , c'est-à-dire  $Z_q = Z \oplus CA^*SQ$ .

Maintenant, le problème est de trouver la plus grande commande  $U$  telle que

$$Y \preceq Z \oplus CA^*SQ,$$

c'est-à-dire

$$CA^*BU \oplus CA^*SQ \preceq Z \oplus CA^*SQ. \quad (4.14)$$

Et, en remarquant que le terme  $CA^*SQ$  est toujours inférieur ou égal à  $Z \oplus CA^*SQ$ , on peut écrire

$$CA^*BU \preceq Z \oplus CA^*SQ. \quad (4.15)$$

La résolution de ce problème fait appel à la théorie de la résiduation et la solution optimale est

$$U_{opt} = \frac{Z \oplus CA^*SQ}{CA^*B}. \quad (4.16)$$

**Remarque 20** *On peut voir que lorsque  $Z \preceq CA^*SQ$  la commande optimale est bien celle rejetant la perturbation car il n'existe pas de meilleure commande en présence de perturbation.*



## Chapitre 5

# Modélisation de l'entreprise Recticel-Bultex

Suite à la demande de l'entreprise Recticel-Bultex de Noyen sur Sarthe qui souhaitait modifier l'atelier de production de sommiers, nous avons modélisé cet atelier grâce au logiciel SIMAN-ARENA, puis grâce aux Réseaux de Petri Temporisés. Les objectifs de cette modélisation sont, dans un premier temps, de localiser les problèmes rencontrés quotidiennement dans la chaîne de production afin de valider le modèle et, dans un deuxième temps, d'évaluer les performances de cet atelier afin de proposer des modifications permettant d'accroître la productivité.

### 5.1 Synopsis de l'atelier

Voici le schéma de l'atelier de fabrication de sommier de l'entreprise Recticel-Bultex.

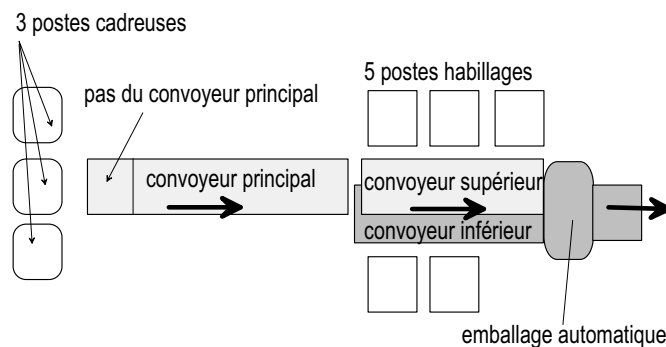


FIG. 5.1 – Schéma de Atelier Recticel

L'atelier est composé, dans l'ordre de passage des sommiers, de trois premières machines appelées cadreuses. Les opérateurs qui travaillent sur ces cadreuses fabriquent, à partir de bois et de lattes, la caisse du sommier.

Les caisses sont d'abord insérées sur le premier pas du convoyeur principal, où un opérateur dépose le tissu correspondant à la caisse fabriquée, puis ce convoyeur de neuf places dirige la caisse vers le convoyeur supérieur.

Les cinq opérateurs "habillage", après avoir pris chacun une caisse du convoyeur supérieur,

l'habillent grâce au tissu déposé précédemment puis insèrent la caisse habillée, c'est-à-dire le sommier, sur le convoyeur inférieur de cinq places.

Ce dernier convoyeur conduit les sommiers vers une machine d'emballage automatique ne traitant qu'un sommier à la fois.

**Remarque 21** *Les temps d'opérations de chaque sommier sur les postes cadreuses et habillage dépendent du modèle et des dimensions du sommier à réaliser.*

Enfin, un planning contenant les ordres de fabrication, c'est-à-dire les sommiers à fabriquer durant la journée, est fourni à chaque cadreuse. Ces ordres de fabrication possèdent les caractéristiques propres au type de sommier à réaliser :

- le modèle
- la longueur
- la largeur
- la quantité
- la type de tissu

## 5.2 Modèle SIMAN-ARENA

### 5.2.1 Introduction

Le logiciel de simulation SIMAN-ARENA est spécialement destiné à la simulation des systèmes de production. Il permet de construire un modèle dynamique d'un système réel afin de jouer des scénarii et d'en évaluer les performances.

Le principe d'un modèle est de suivre une entité de sa création jusqu'à sa destruction. Le chemin pris par les entités est modélisé par une succession de "boîtes" que nous appellerons blocs. Ces blocs possèdent chacun une ( ou plusieurs ) entrée(s) et une ( ou plusieurs ) sortie(s). Un bloc agit sur l'entité qui le traverse.

Le système est modélisé par un ensemble de blocs interconnectés qui décrivent les flux du système réel.

Un ensemble de données caractérisent le système. Ces données sont de deux types : les variables globales et les attributs.

Les variables globales : ce sont des données qui caractérisent le système dans sa globalité. Une variable globale est désignée par son nom. A un instant donné, elle possède une valeur qui est unique.

Les attributs : un attribut est une donnée qui est attachée aux entités. Il est désigné par son nom et il possède autant de valeurs qu'il y a d'entité dans le modèle à un instant donné. Chaque entité possède ses propres valeurs d'attributs.

### 5.2.2 Modèle de l'atelier sous Siman-Arena

Sous le logiciel Siman-Arena, on obtient le modèle suivant

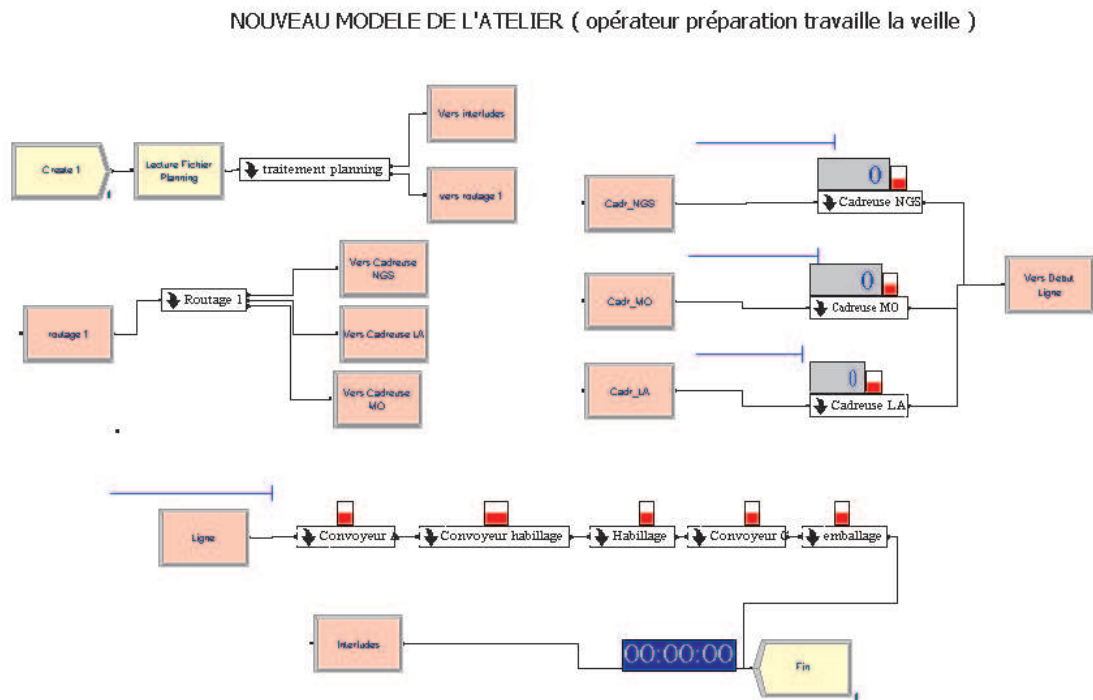


FIG. 5.2 – Schéma de Atelier Recticel

De nombreux indicateurs permettent de suivre en temps réel l'évolution de l'atelier

Indicateur d'activité des machines.

Remplissage des convoyeurs.

Niveau des files d'attente avant chaque machine.

Taux d'occupation des machines ( rapport en temps d'activité de la machine et temps écoulé ) en temps réel.

Nombre de sommiers finis.

Temps écoulé.

### 5.3 Modèle en réseau de Petri

Après avoir modélisé l'atelier sous le logiciel SIMAN-ARENA, nous allons le modéliser en réseau de Petri afin d'établir des commandes adaptées.

Le modèle obtenu est le suivant :

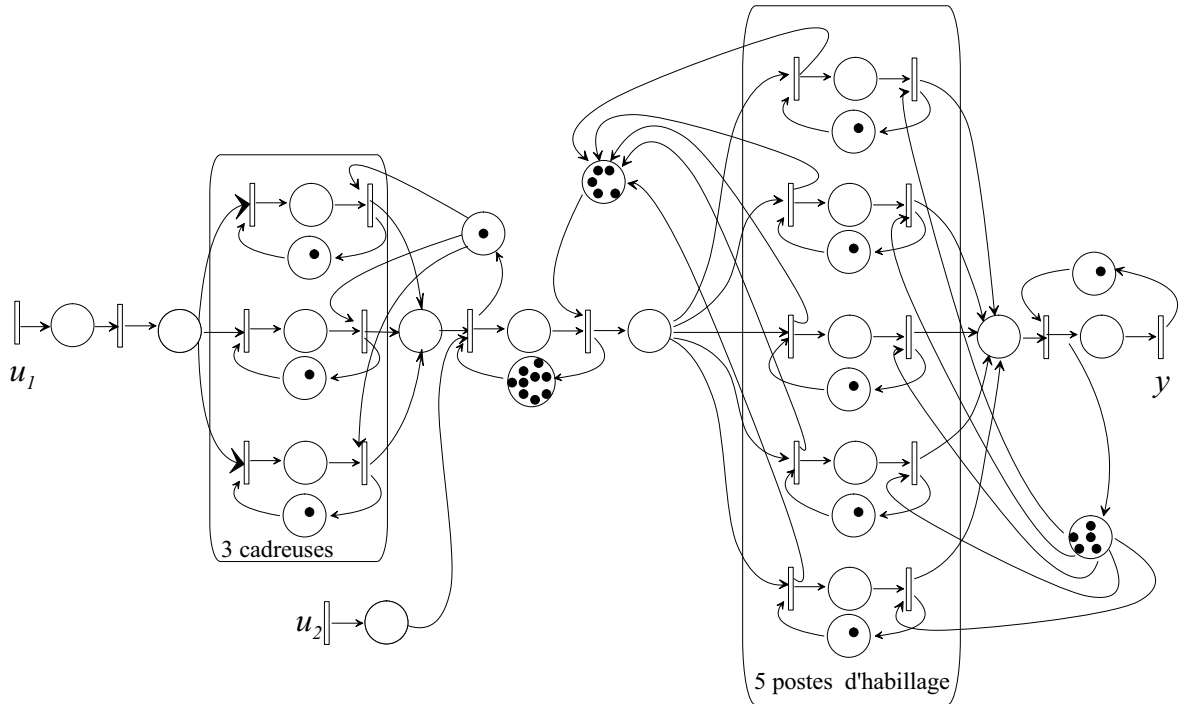


FIG. 5.3 – Modèle en réseau de Petri de l'atelier Recticel

**Remarque 22** *Les temporisations du modèle ont été omises dans un souci de clarté de la figure.*

On peut voir que ce réseau de Petri n'est pas un graphe d'événements temporisé : D'une part certaines places ont plus d'une transition amont, il s'agit d'une concurrence à la fourniture des jetons dans une place.

Et d'autre part, certaines places ont plus d'une transition avale, ce qui représente des conflits à la consommation.

De plus, d'après la remarque 21, les sommiers peuvent se doubler aux postes d'habillage. En effet, certains nécessitant beaucoup plus de temps pour l'habillage sont rattrapés puis doublés par des sommiers habillés plus rapidement.

Cependant, bien qu'on n'obtienne pas un graphe d'événements temporisé, on peut établir un algorithme qui caractérise l'évolution de ce réseau de Petri.

### 5.3.1 Évolution du réseau de Petri de la figure 5.3

Avant de s'intéresser au problème du réseau de Petri de la figure 5.3 dans lequel il y a des problèmes de conflit et de concurrence, nous allons en premier lieu, nous intéresser au problème de la concurrence seule et plus particulièrement au réseau de Petri de la figure 5.4.

En deuxième lieu, nous nous intéresserons au conflit représenté par le réseau de Petri de la figure 5.6 et nous finirons en caractérisant l'évolution du Réseau de Pétri de l'atelier Recticel, figure 5.3.



Considérons le problème de la concurrence représenté sur la figure suivante :

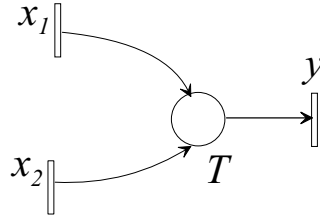


FIG. 5.4 – Graphe d'événements avec problème de concurrence

On associe à chaque transition une variable dateur.

$x_1(k_1)$  représente le  $k_1$ -ième tir de la transition  $x_1$ .

$x_2(k_2)$  représente le  $k_2$ -ième tir de la transition  $x_2$ .

$y(k)$  représente le  $k$ -ième tir de la transition  $y$ .

On voit qu'en ajoutant  $T$  à la date de franchissement de la transition  $x_1$  et  $x_2$ , on obtient la date d'un franchissement de  $y$ . Donc, le  $k$ -ième tir de la transition  $y$  impose que le nombre de franchissement de la transition  $x_1$  plus le nombre de franchissement de la transition  $x_2$  soient égal à  $k$ . La date de franchissement  $y(k)$  est la date de franchissement de la transition  $x_i, i = 1, 2$  la plus tardive ( la plus grande ) telle que  $k_1 + k_2 = k$ . Ce qui se traduit par :

$$y(k) = \text{Max}(x_1(k_1) + T, x_2(k_2) + T)$$

et  $k_1 + k_2 = k$ .

Maintenant limitons à deux le nombre maximum de jetons dans la place en amont de  $y$ . On obtient le réseau de Petri suivant :

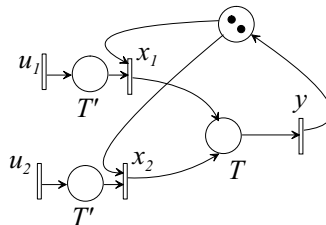


FIG. 5.5 – Réseau de Petri avec problème de concurrence

En remarquant que l'expression du dateur  $x_1(k_1)$  n'est pas immédiate, on transforme le réseau de Petri en un nouveau réseau de Petri équivalent donné sur la figure 5.6

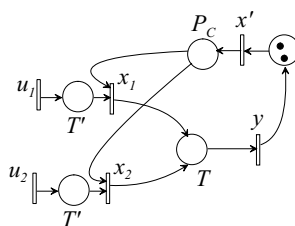


FIG. 5.6 – Réseau de Petri avec problème de concurrence et conflit

Dans ce nouveau modèle, où l'on a simplement ajouté une nouvelle transition nommée  $x'$ , cherchons l'expression des dateurs  $x_i(k_i)$ .

On remarque qu'il y a un phénomène de conflit car les transitions  $x_1$  et  $x_2$  sont alimentées par la même place  $P_c$ .

Pour lever le problème de conflit, il faut avoir une politique de choix.

Tout d'abord, la transition  $x_i$ , avec  $i = 1$  ou  $2$  est franchie dès qu'un jeton est disponible dans chacune de ses deux places amonts.

Maintenant, dans le cas où au moins un jeton est disponible dans les places  $P_1$  et  $P_2$  et qu'ensuite un jeton arrive dans la place  $P_c$ , alors la transition de plus petit indice  $i$  ( $i = 1, 2$ ) est franchie, c'est-à-dire dans notre exemple toujours  $x_1$ .

En résumé, lorsqu'il y a un conflit, c'est dire que les transitions  $x_1$  et  $x_2$  peuvent être franchies, on définit quelle transition va être franchie ( indice  $i$  minimum ) et ensuite, on affecte une date de franchissement.

Donc, lorsqu'il n'y a pas de conflit, la transition franchie est celle dont la date de franchissement est minimum ( car les transitions sont franchies au plus tôt ) et dans le cas où il n'y a pas de date minimum, c'est-à-dire qu'il y a un conflit, alors c'est la transition de plus petit indice  $i$ .

On cherche la transition  $i$  qui conduit à une date de tir minimum, c'est-à-dire le  $i$  tel que

$$\text{Max}(u_i(k_i) + T', x'(k)) \text{ soit minimum}$$

$$\text{donc } i = \text{Argmin}_{i=1,2}(\text{Max}(u_i(k_i) + T', x'(k)))$$

$$\text{et } x_i(k_i) = \text{Max}(u_i(k_i) + T', x'(k))$$

Maintenant, sachant traiter à la fois les problèmes de conflit et de concurrence, nous pouvons caractériser l'évolution du réseau de Petri de la figure 5.3.

Dans le paragraphe suivant, nous allons nous intéresser à un modèle approché de la ligne Recticel sous forme de graphe d'événements temporisé.

## 5.4 Modélisation sous forme de graphe d'événements temporisé

Le graphe d'événements temporisé de la figure 5.7 représente le modèle de la ligne sous les hypothèses suivantes :

Les trois cadreuses travaillent à la même vitesse.

Les sommiers ne se doublent pas au niveau des postes d'habillage.

L'entrée  $u_2$  représente le planning fourni aux cadreuses et l'entrée  $u_1$  représente la fourniture de bande de tissus que les postes d'habillage doivent mettre sur les caisses.

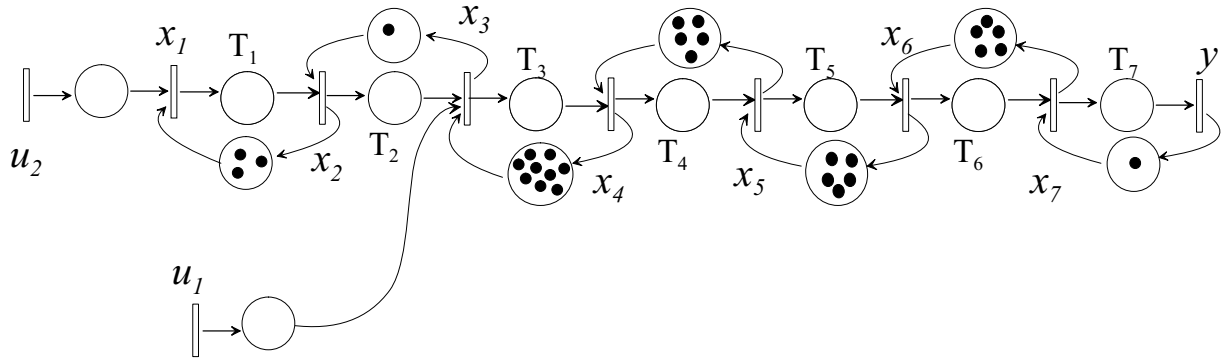


FIG. 5.7 – Graphe d'événement

**Remarque 23** Ce graphe d'événements temporisé représente l'atelier de production Recticel simplifié dans lequel les jetons ne peuvent se doubler.

Établissons les équations de ce graphe d'événements temporisé : Dans  $\overline{\mathbb{Z}}$ , on peut écrire

$$\begin{aligned}
 x_1(k) &= \max(u_2(k), x_2(k-3)) \\
 x_2(k) &= \max(x_1(k) + T_1, x_3(k-1)) \\
 x_3(k) &= \max(x_2(k) + T_2, x_4(k-9), u_1(k)) \\
 x_4(k) &= \max(x_3(k) + T_3, x_5(k-5)) \\
 x_5(k) &= \max(x_4(k) + T_4, x_6(k-5)) \\
 x_6(k) &= \max(x_5(k) + T_5, x_7(k-5)) \\
 x_7(k) &= \max(x_6(k) + T_6, y(k-1)) \\
 y(k) &= x_7(k) + T_7
 \end{aligned}$$

Dans le dioïde  $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$  cela devient <sup>1</sup> :

$$\begin{aligned}
 x_1(k) &= u_2(k) \oplus x_2(k-3) \\
 x_2(k) &= T_1 x_1(k) \oplus x_3(k-1) \\
 x_3(k) &= T_2 x_2(k) \oplus x_4(k-9) \oplus u_1(k) \\
 x_4(k) &= T_3 x_3(k) \oplus x_5(k-5) \\
 x_5(k) &= T_4 x_4(k) \oplus x_6(k-5) \\
 x_6(k) &= T_5 x_5(k) \oplus x_7(k-5) \\
 x_7(k) &= T_6 x_6(k) \oplus y(k-1) \\
 y(k) &= T_7 x_7(k)
 \end{aligned}$$

Dans le dioïde  $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$  :

$$\begin{aligned}
 X_1 &= U_2 \oplus \gamma^3 X_2 \\
 X_2 &= \delta^{T_1} X_1 \oplus \gamma^1 X_3 \\
 X_3 &= \delta^{T_2} X_2 \oplus \gamma^9 X_4 \oplus U_1
 \end{aligned}$$

<sup>1</sup>le signe  $\otimes$  est omis pour éviter d'alourdir l'écriture.

$$\begin{aligned}
X_4 &= \delta^{T_3} X_3 \oplus \gamma^5 X_5 \\
X_5 &= \delta^{T_4} X_4 \oplus \gamma^5 X_6 \\
X_6 &= \delta^{T_5} X_5 \oplus \gamma^5 X_7 \\
X_7 &= \delta^{T_6} X_6 \oplus \gamma^1 \delta^{T_7} Y \\
Y &= \delta^{T_7} X_7
\end{aligned}$$

Sous forme matricielle :

$$x(k) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \gamma^3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \delta^{T_1} & \varepsilon & \gamma^1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^{T_2} & \varepsilon & \gamma^9 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \delta^{T_3} & \varepsilon & \gamma^5 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^{T_4} & \varepsilon & \gamma^5 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^{T_5} & \varepsilon & \gamma^5 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^{T_6} & \gamma^1 \delta^{T_7} \end{pmatrix} x(k) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon \\ e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} u(k)$$

$$y(k) = (\varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \delta^{T_7}) x(k)$$

**Application 3** Pour effectuer les calculs, considérons le graphe d'événements temporisé de la figure 5.8 dans lequel l'entrée  $u_2$  joue le rôle d'une perturbation  $q$  de trajectoire connue et non modifiable.

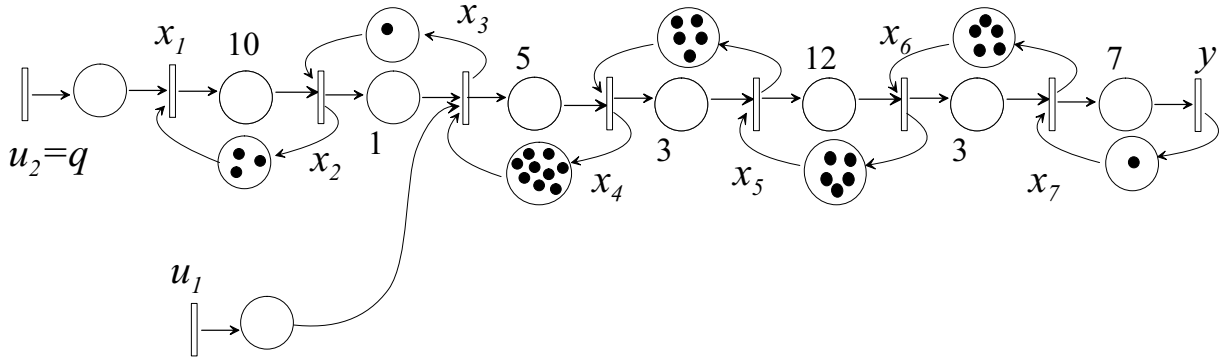


FIG. 5.8 – Graphe d'événements

Les équations de ce graphe d'événements temporisé sont

$$x(k) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \gamma^3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \delta^{10} & \varepsilon & \gamma^1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^1 & \varepsilon & \gamma^9 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \delta^5 & \varepsilon & \gamma^5 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^3 & \varepsilon & \gamma^5 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^{12} & \varepsilon & \gamma^5 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta^3 & \gamma^1 \delta^7 \end{pmatrix} x(k) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} u_1(k) \oplus \begin{pmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} q(k)$$

$$y(k) = (\varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \delta^7) x(k)$$

On fixe une trajectoire connue pour la perturbation  $Q = \gamma^1 \oplus \gamma^2 \delta^3 \oplus \gamma^5 \delta^6 \oplus \gamma^6 \delta^{19} \oplus \gamma^7 \delta^\infty$ , elle représente les dates de mise en production des caisses. Le plus grand état  $X_+$  de la classe d'équivalence de  $A^*SQ$  modulo  $\ker C$  est

$$X_+ = (C^\sharp \circ C)(A^*SQ) = \begin{pmatrix} T \\ T \\ T \\ T \\ T \\ T \\ \gamma^1\delta^{34} \oplus \gamma^2\delta^{41} \oplus \gamma^3\delta^{48} \oplus \gamma^4\delta^{55} \oplus \gamma^5\delta^{62} \oplus \gamma^6\delta^{69} \oplus \gamma^7\delta^\infty \end{pmatrix}$$

Ensuite, le plus grand état atteignable  $X_{opt}$ , c'est-à-dire la projection de  $A^*SQ$  dans l'image de  $A^*B$  parallèlement au noyau de  $C$  est

$$X_{opt} = (A^*B \circ (A^*B)^\sharp \circ C^\sharp \circ C)(A^*SQ) = \begin{pmatrix} \gamma^5\delta^{11} \oplus \gamma^6\delta^{18} \oplus \gamma^7\delta^{25} \oplus \gamma^8\delta^{32} \oplus \gamma^9\delta^{39} \oplus \gamma^{10}\delta^{46} \oplus \gamma^{11}\delta^\infty \\ \gamma^2\delta^{11} \oplus \gamma^3\delta^{18} \oplus \gamma^4\delta^{25} \oplus \gamma^5\delta^{32} \oplus \gamma^6\delta^{39} \oplus \gamma^7\delta^{46} \oplus \gamma^8\delta^\infty \\ \gamma^1\delta^{11} \oplus \gamma^2\delta^{18} \oplus \gamma^3\delta^{25} \oplus \gamma^4\delta^{32} \oplus \gamma^5\delta^{39} \oplus \gamma^6\delta^{46} \oplus \gamma^7\delta^\infty \\ \gamma^1\delta^{16} \oplus \gamma^2\delta^{23} \oplus \gamma^3\delta^{30} \oplus \gamma^4\delta^{37} \oplus \gamma^5\delta^{44} \oplus \gamma^6\delta^{51} \oplus \gamma^7\delta^\infty \\ \gamma^1\delta^{19} \oplus \gamma^2\delta^{26} \oplus \gamma^3\delta^{33} \oplus \gamma^4\delta^{40} \oplus \gamma^5\delta^{47} \oplus \gamma^6\delta^{54} \oplus \gamma^7\delta^\infty \\ \gamma^1\delta^{31} \oplus \gamma^2\delta^{38} \oplus \gamma^3\delta^{45} \oplus \gamma^4\delta^{52} \oplus \gamma^5\delta^{59} \oplus \gamma^6\delta^{66} \oplus \gamma^7\delta^\infty \\ \gamma^1\delta^{34} \oplus \gamma^2\delta^{41} \oplus \gamma^3\delta^{48} \oplus \gamma^4\delta^{55} \oplus \gamma^5\delta^{62} \oplus \gamma^6\delta^{69} \oplus \gamma^7\delta^\infty \end{pmatrix}$$

**Remarque 24** On a évidemment  $X_{opt} \preceq X_+$ .

Ainsi, La commande optimale  $U_{rj}$  permettant le rejet de la perturbation, c'est-à-dire d'atteindre l'état  $X_{opt}$ , est

$$U_{rj} = ((A^*B)^\sharp \circ C^\sharp \circ C)(A^*SQ) = \gamma^1\delta^{11} \oplus \gamma^2\delta^{18} \oplus \gamma^3\delta^{25} \oplus \gamma^4\delta^{32} \oplus \gamma^5\delta^{39} \oplus \gamma^6\delta^{46} \oplus \gamma^7\delta^\infty$$

Cette commande  $U_{rj}$  représente la commande la plus tardive au niveau de  $u_1$  compte tenu de la trajectoire de la perturbation  $Q$ .

La sortie  $Y_{rj}$  du système est donc

$$\begin{aligned} Y_{rj} &= CA^*SQ \oplus CA^*BU_{rj}, \\ \text{où } CA^*SQ &= \gamma^1\delta^{41} \oplus \gamma^2\delta^{48} \oplus \gamma^3\delta^{55} \oplus \gamma^4\delta^{62} \oplus \gamma^5\delta^{69} \oplus \gamma^6\delta^{76} \oplus \gamma^7\delta^\infty \\ \text{et } CA^*BU_{rj} &= \gamma^1\delta^{41} \oplus \gamma^2\delta^{48} \oplus \gamma^3\delta^{55} \oplus \gamma^4\delta^{62} \oplus \gamma^5\delta^{69} \oplus \gamma^6\delta^{76} \oplus \gamma^7\delta^\infty. \end{aligned}$$

$$\text{Donc } CA^*BU_{rj} = CA^*SQ = Y_{rj}.$$

**Remarque 25** La sortie  $Y_{rj}$  représente la meilleure trajectoire de sortie du système, en effet la présence de la perturbation empêche une trajectoire de sortie inférieure.

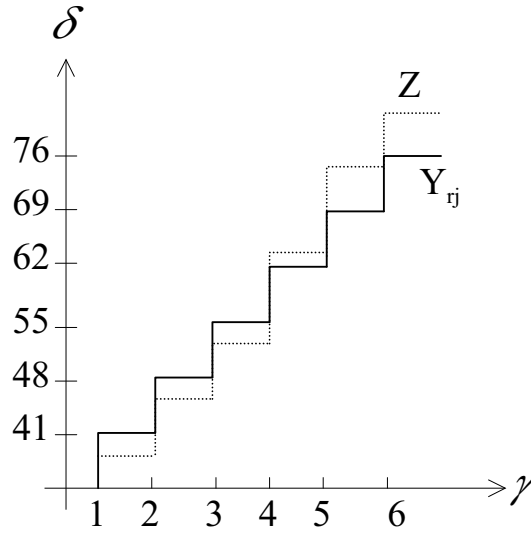
Dans cet exemple, on est dans le cas particulier où la commande  $U_{rj}$  est telle que  $CA^*BU_{rj} = CA^*SQ$  c'est-à-dire que la commande ne ralentit pas d'avantage le système que la sortie générée par la perturbation.

Il est à noter que  $A^*BU_{rj} \neq A^*SQ$ .

Maintenant, considérons le problème de la commande optimale en juste-à-temps en présence de contrainte. On fixe une consigne  $Z$  telle que

$$Z = \gamma^1\delta^{35} \oplus \gamma^2\delta^{44} \oplus \gamma^3\delta^{50} \oplus \gamma^4\delta^{65} \oplus \gamma^5\delta^{72} \oplus \gamma^6\delta^{80} \oplus \gamma^7\delta^\infty.$$

**Remarque 26** La consigne  $Z$  est judicieusement choisie de telle sorte qu'elle ne soit pas comparable avec la sortie au plus tôt  $Y_{rj}$  du système (voir figure 5.9).

FIG. 5.9 – Représentation des trajectoires de  $Y_{rj}$  et  $Z$ 

La commande optimale qui permet le rejet de la perturbation  $Q$  et qui est également inférieure à la consigne  $Z$  est

$$U_{opt} = ((A^*B)^\sharp \circ C^\sharp \circ C)(Z \oplus A^*SQ) = \gamma^1 \delta^{11} \oplus \gamma^2 \delta^{18} \oplus \gamma^3 \delta^{25} \oplus \gamma^4 \delta^{35} \oplus \gamma^5 \delta^{42} \oplus \gamma^6 \delta^{50} \oplus \gamma^7 \delta^\infty$$

C'est la date d'arrivée la plus tardive des morceaux de tissu garantissant le respect de la consigne et tenant compte du planning des cadreuses.

Vérifions que  $Y = CA^*BU_{opt} \oplus CA^*SQ \preceq Z \oplus CA^*SQ$

$$Y = \gamma^1 \delta^{41} \oplus \gamma^2 \delta^{48} \oplus \gamma^3 \delta^{55} \oplus \gamma^4 \delta^{65} \oplus \gamma^5 \delta^{72} \oplus \gamma^6 \delta^{80} \oplus \gamma^7 \delta^\infty \text{ est bien inférieure à } Z \oplus CA^*SQ.$$

On voit que lorsque la consigne  $Z$  est inférieure à la sortie  $Y_{rj}$ , alors la commande optimale est celle permettant le rejet de perturbation ( on ne peut pas être inférieur à  $Y_{rj}$  ) et lorsque la consigne est supérieure à la sortie  $Y_{rj}$  alors la commande optimale, moins contraignante, correspondant uniquement au critère de juste-à-temps vu dans le paragraphe 2.2.1.

# Conclusion

Nous avons rappelé précédemment que [Cottenceau, 1999] était arrivé à montrer qu'en partant d'un GET (nominal) et d'une spécification entrée-sortie donnée (modèle de référence), il était possible de calculer un correcteur (un GET) tel que le système nominal muni du correcteur ait un comportement entrée-sortie aussi proche que possible de celui du modèle de référence.

Par la suite, nous avons détaillé le principe du rejet de perturbation en automatique classique (d'après [Wonham, 1979] et introduit par G. Basile, G. MARRO et W.M. Wonham, A.S. MORSE ) pour le transposer au structure algébrique de type dioïde dans les graphes d'événements temporisé.

Nous avons trouvé la commande optimale permettant le rejet de perturbation au sens des dioïdes. De plus, nous avons aussi trouver la commande optimale en juste-à-temps en présence de perturbation.

Cependant, ces commandes ne sont calculables que si la trajectoire de la perturbation est connue. Il serait désormais intéressant de chercher des contrôles de type retour d'état ou de sortie permettant le rejet de la perturbation sans connaître celle-ci.

Enfin, afin d'utiliser les outils de modélisation que sont les GET et de concrétiser cette étude du rejet de perturbation dans les dioïdes, nous avons modélisé la chaîne de production de sommiers de l'entreprise Recticel-Bultex dans le cadre d'un stage en vue d'élaborer des lois de commande adaptées.





# Bibliographie

- [Baccelli et al., 1992] Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G., and Quadrat, J. (1992). *Synchronization and Linearity : An Algebra for Discrete Event Systems*. Wiley and Sons.
- [Birkhoff, 1940] Birkhoff, G. (1940). Lattice theory. Technical Report XXV, American Mathematical Society Colloquium Publications, Providence, Rhode Island.
- [Blyth and Janowitz, 1972] Blyth, T. and Janowitz, M. (1972). *Residuation Theory*. Pergamon press.
- [Cohen, 1995] Cohen, G. (1995). *Théorie algébrique des systèmes à événements discrets*. Polycopié de cours donné à l'INRIA.
- [Cohen, 1998a] Cohen, G. (1998a). Residuation and applications. *Algèbres Max-Plus et applications en informatique et automatique, école de printemps d'informatique théorique*.
- [Cohen, 1998b] Cohen, G. (1998b). Two-dimensional domain representation of timed event graphs. *Algèbres Max-Plus et applications en informatique et automatique, école de printemps d'informatique théorique*.
- [Cohen et al., 1996] Cohen, G., Gaubert, S., and Quadrat, J. (1996). Kernels, images and projections in dioids. In *Wodes*, Edinburgh, Scotland.
- [Cohen et al., 1997] Cohen, G., Gaubert, S., and Quadrat, J. (1997). Linear projections in the max-plus algebra. In *IEEE Mediterranean Control Conf.*, Cyprus.
- [Cohen et al., 1998] Cohen, G., Gaubert, S., and Quadrat, J. (1998). Max-plus algebra and system theory : Where we are and where to go now. In *IFAC Conference on System Structure and Control*, Nantes.
- [Cohen et al., 1989] Cohen, G., Moller, P., Quadrat, J., and Viot, M. (1989). Algebraic Tools for the Performance Evaluation of Discrete Event Systems. *IEEE Proceedings : Special issue on Discrete Event Systems*, 77(1) :39–58.
- [Cottenceau, 1999] Cottenceau, B. (1999). *Contribution à la commande de systèmes à événements discrets : synthèse de correcteurs pour les graphes d'événements temporisés dans les dioides*. Thèse, LISA - Université d'Angers.
- [Cottenceau et al., 1999] Cottenceau, B., Hardouin, L., Boimond, J.-L., and Ferrier, J.-L. (1999). Synthesis of Greatest Linear Feedback for TEG in Dioid. *IEEE Trans. On Automatic Control*, 44(6) :1258–1262.
- [David and Alla, 1989] David, R. and Alla, H. (1989). *Du grafcet aux réseaux de Petri*. Hermès.
- [Descusse and Malabre, 1999] Descusse, J. and Malabre, M. (1999). *Concepts de base pour la commande des systèmes linéaires*. Ecole Centrale de Nantes.
- [Gaubert, 1992a] Gaubert, S. (1992a). *Introduction aux systèmes dynamiques à événements discrets*. Polycopié de cours donné à l'ENSTA.

- [Gaubert, 1992b] Gaubert, S. (1992b). *Théorie des Systèmes Linéaires dans les Dioïdes*. Thèse, École des Mines de Paris.
- [Menguy et al., 2000] Menguy, E., Boimond, J.-L., Hardouin, L., and Ferrier, J.-L. (2000). Just-in-time Control of Linear Systems in Dioid : Update of Reference Input, Presence of Uncontrollable Input. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 45(11) :2155–2158.
- [Wonham, 1979] Wonham, W. (1979). *Linear Multivariable Control : A Geometric Approach*. Springer Verlag.