

D.E.A. Automatique et Informatique Appliquée

Rapport de Stage

Sur l'analyse de la robustesse de correcteurs linéaires dans les diodes

Mehdi LHOMMEAU

Responsable de stage : Laurent HARDOUIN

Je tiens à remercier tous ceux que j'ai pu omettre dans ce qui suit.

Je tiens à remercier Jean-Louis FERRIER pour son accueil en stage de DEA au sein du Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés (LISA),

et Laurent HARDOUIN, pour son aide, sa disponibilité et son soutien pour la réalisation de ce travail.

Je remercie en général tout les membres du LISA, et en particulier les Thésards et anciens Thésards, avec qui travailler est très agréable.

Je les remercie tous pour leur disponibilité, leurs conseils et pour l'aide qu'ils m'ont apportée tout au long de ce stage.

Je leur suis d'autant plus reconnaissant qu'ils ont tous, comme il se doit, mille autres choses à faire.

Table des matières

1	Dioïdes	3
1.1	Axiomes.	3
1.2	Dioïdes matriciels.	5
1.3	L'équation $x = ax \oplus b$ dans les dioïdes complets	5
2	Applications Isotones et Résiduation	6
2.1	Théorie de la résiduation	7
2.2	Restriction d'applications	8
2.3	Fermeture et Résiduation	10
2.4	Applications de la résiduation	11
2.5	Résiduation de matrices	13
3	Modélisation des GET	14
3.1	Mise en équation des GET	14
3.2	Transformée en γ et δ	17
3.3	Matrice de transfert	17
3.4	Représentation bi-dimensionnelle : dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$	18
3.5	Résultats dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$	20
3.6	Séries rationnelles dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$	22
4	Introduction	23
5	Commande avec modèle de référence : synthèse d'un feedback	24
5.1	Formulation du problème	24
5.2	Formulation du problème dans les dioïdes	25
6	Application à la synthèse de feedbacks	27
7	Exemples	28
7.1	Feedback laissant inchangé le transfert : cas SISO	28
7.2	Feedback imposant un transfert différent : cas MIMO	31
8	Introduction	33
9	Formulation du problème	34
10	Application	38
11	Conclusion	42
12	Introduction	42
13	Syntaxe générale	45
13.1	Opérations sur les monômes	45
14	Calcul rationnel dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$	46
14.1	Polynômes	46
15	Séries périodiques	47
16	Validation de MinMaxgd	49
17	Algorithme	49
17.1	Rappels	50

17.2	Mise sous forme propre d'une série périodique	50
17.3	Mise sous forme canonique d'une série périodique	52

Introduction

La théorie classique des systèmes continus s'intéresse à la description de systèmes dits "naturels", c'est-à-dire obéissant aux lois de la Physique. Ces systèmes sont descriptibles par des équations différentielles ou aux dérivées partielles.

Les "Systèmes à Evénements Discrets" recouvre des systèmes également dynamiques, mais dont la description est impossible avec la théorie précédente. Au lieu de considérer le déroulement continu des phénomènes, on s'intéresse aux débuts et fins de ces phénomènes, caractérisant les événements discrets. Ces événements donnent lieu à des phénomènes de synchronisation, de concurrence (systèmes de production, réseaux informatiques,...).

La classe des Systèmes à Evénements Discrets qui fait apparaître des phénomènes de synchronisation est modélisable dans une algèbre particulière par des équations linéaires. Une telle analogie avec les systèmes conventionnels a permis d'élaborer des principes de commande et d'identification de ces systèmes.

L'objectif de ce rapport est d'introduire en cinq parties des résultats sur :

- L'algèbre des dioïdes, qui permet de disposer d'une représentation mathématique du système, ainsi que la théorie de la résiduation qui permet de définir "l'inverse" de certaines applications. Cette partie repose sur les références suivantes : [Gondran and Minoux, 1979], [Cuninghame-Green, 1979], [Blyth and Janowitz, 1972], [Birkhoff, 1940], [Baccelli et al., 1992], [Cohen, 1998a].
- Les Graphes d'Evénements Temporisés (GET), leurs représentations, leurs modélisations dans différents types de dioïdes. Ce chapitre constitue une synthèse des articles suivants : [David and Alla, 1989], [Gaubert, 1992a], [Cohen, 1995], [Cohen, 1998b], [Cohen et al., 1989].
- La synthèse de correcteurs linéaires : Il s'agit d'une synthèse des travaux de [Cottenceau, 1999]. Nous nous concentrerons en particulier sur la commande en boucle fermée.
- La robustesse des correcteurs linéaires : nous cherchons à évaluer dans ce chapitre dans quelle plage le système peut évoluer sans remettre en cause la performance en boucle fermée vis-à-vis de la spécification considérée lors de la synthèse du correcteur.

- Description de la librairie de calcul MinMaxgd, écrite en $C++$, qui implémente des algorithmes permettant la manipulation de séries périodiques.

Chapitre 1

Dioïdes et théorie de la Résiduation

Ce premier chapitre propose un survol de la théorie des dioïdes. Il s'agit d'une présentation de quelques outils algébriques introduits depuis le début des années 80 par de nombreux auteurs, par exemple, [Gondran and Minoux, 1979], [Cuninghame-Green, 1979]. Nous rappellerons ensuite les principaux résultats relatifs à la théorie de la résiduation [Blyth and Janowitz, 1972]. Nous nous intéresserons également à l'interaction de cette théorie avec les structures algébriques de type dioïde [Baccelli et al., 1992]. Nous terminerons par l'introduction de notations permettant de considérer certaines restrictions d'application [Cottenceau, 1999].

1.1 Dioïdes

1.1.1 Axiomes.

Un dioïde est un ensemble \mathcal{D} muni de deux opérations internes notées \oplus et \otimes et appelées respectivement "addition" et "multiplication", telles que :

l'addition est associative : $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$;

l'addition est commutative : $a \oplus b = b \oplus a$;

l'addition admet un élément neutre : noté ε et appelé "zéro" : $a \oplus \varepsilon = a$;

la multiplication est associative : $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$;

la multiplication admet un élément neutre : noté e et appelé "identité" : $a \otimes e = a = e \otimes a$;

la multiplication est distributive par rapport à l'addition : $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$;

le zéro est absorbant pour la multiplication : $\varepsilon \otimes a = a \otimes \varepsilon = \varepsilon$;

l'addition est idempotente : $a \oplus a = a$.

Comme en algèbre usuelle, le signe multiplicatif sera parfois omis.

Définition 1 (Dioïde commutatif) *Le dioïde est dit **commutatif** si la multiplication est commutative.*

Exemple 1 \mathbb{R}_{max} est le dioïde $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, max, +)$ muni du max (loi additive \oplus) et de l'addition usuelle $+$ (loi multiplicative \otimes). Cette structure est appelée algèbre $(max, +)$.

Définition 2 (Dioïde complet) *Un dioïde est dit complet s'il est fermé pour les sommes infinies et si la loi \otimes distribue sur les sommes infinies, c'est-à-dire si pour tout $c \in \mathcal{D}$ et tout sous-ensemble $A \subseteq \mathcal{D}$,*

$$c \otimes \left(\bigoplus_{x \in A} x \right) = \bigoplus_{x \in A} c \otimes x.$$

La borne supérieure d'un dioïde complet sera notée T et correspond à la somme des éléments du dioïde. L'élément T est donc absorbant pour l'addition : $T \oplus a = T$.

Rappelons néanmoins que, puisque ε est absorbant pour la loi \otimes , on a : $T \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes T = \varepsilon$.

Exemple 2 \mathbb{R}_{max} n'est pas complet. Nous devons ajouter la borne supérieure $T = +\infty$ avec la convention $(T \otimes \varepsilon) = +\infty + (-\infty) = -\infty = \varepsilon$. Ce nouveau dioïde complet est noté $\overline{\mathbb{R}}_{max}$. On a $\overline{\mathbb{R}}_{max} = \{\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}, max, +\}$.

Théorème 1 (Relation d'ordre) [Baccelli et al., 1992] *Dans un dioïde \mathcal{D} , on définit la relation d'ordre \succeq de la manière suivante :*

$$a \succeq b \Leftrightarrow a = a \oplus b.$$

Cet ordre est compatible avec l'addition, c'est-à-dire

$$a \succeq b \Rightarrow \{\forall c \in \mathcal{D}, a \oplus c \succeq b \oplus c\},$$

ainsi qu'avec la multiplication

$$a \succeq b \Rightarrow \{\forall c \in \mathcal{D}, ac \succeq bc\}$$

Preuve dans [Baccelli et al., 1992, Chapitre 4, p163]

Un dioïde \mathcal{D} muni de la relation d'ordre définie dans le théorème 1 est un demi-treillis supérieur [Birkhoff, 1940] car tout couple (a, b) admet $a \oplus b$ comme plus petit majorant. Un dioïde complet admet en outre une structure de treillis complet pour l'ordre défini par le théorème 1. Par application du théorème [Baccelli et al., 1992, Théorème 4.27, p162], le plus grand minorant de tout couple (a, b) (ou borne inférieure) sera alors noté $a \wedge b$. Le dioïde \mathcal{D} muni des lois \oplus et \wedge a une structure de treillis complet.

On a alors les deux relations d'équivalences suivantes :

$$a \succeq b \Leftrightarrow a = a \oplus b \Leftrightarrow b = a \wedge b.$$

1.1.2 Dioïdes matriciels.

A partir d'un dioïde \mathcal{D} "scalaire", on peut obtenir un dioïde "matriciel" en considérant les matrices carrées de taille n à coefficients dans \mathcal{D} et en munissant cet ensemble de la somme et du produit matriciels usuels :

$$A = (A_{ij}), B = (B_{ij}), (A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}, (A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n A_{ik} \otimes B_{kj}.$$

Cette structure algébrique obéit aux axiomes des dioïdes.

1.1.3 L'équation $x = ax \oplus b$ dans les dioïdes complets

Définition 3 (Étoile de Kleene) [Gaubert, 1992a] Soit \mathcal{D} un dioïde complet et $a \in \mathcal{D}$, l'opérateur étoile est défini par :

$$a^* = \bigoplus_{k \geq 0} a^k \text{ (avec } a^0 = e).$$

On notera : $a^+ = a \oplus a^2 \oplus \dots \oplus a^n = \bigoplus_{k \geq 1} a^k$.

On vérifie facilement l'égalité $a^+ = a \otimes a^*$.

Théorème 2 (Théorème de l'étoile) [Gaubert, 1992a] Soit \mathcal{D} un dioïde complet, l'équation

$$x = ax \oplus b \tag{1.1}$$

définie dans \mathcal{D} admet $x = a^*b = \bigoplus_{k \geq 0} a^k b$ comme plus petite solution.

Preuve: On vérifie d'abord que $x = a^*b$ est solution de (1). On a

$$a(a^*b) \oplus b = a(e \oplus a \oplus a^2 \oplus \dots)b \oplus b = (e \oplus a \oplus a^2 \oplus a^3 \dots)b = a^*b.$$

De plus, si x est solution de (1), on a par définition de l'ordre \succeq de \mathcal{D} ,

$$x \succeq ax \text{ et } x \succeq b.$$

La compatibilité de la relation d'ordre avec le produit, nous amène à établir :

$$x \succeq ax \Rightarrow x \succeq ax \succeq a^2x \succeq \dots \succeq a^kx,$$

et, par sommation, $x \succeq \bigoplus_{k \geq 0} a^kx = a^*x$. Finalement,

$$x \succeq a^*x \text{ et } x \succeq b \Rightarrow x \succeq a^*b.$$

Toute solution de (1) est par conséquent plus grande que la solution a^*b .

Théorème 3 Soit \mathcal{D} un dioïde complet. $\forall a, b \in \mathcal{D}$

$$a^+ \preceq a^* \tag{1.2}$$

$$(a^*)^* = a^* \tag{1.3}$$

$$(a^+)^* = a^* \tag{1.4}$$

$$a(ba)^* = (ab)^*a \tag{1.5}$$

$$(a \oplus b)^* = (a^* \oplus b)^* = (a \oplus b^*)^* = (a^*b^*)^* = (a^* \oplus b^*)^* \tag{1.6}$$

$$a^*a^* = a^* \tag{1.7}$$

Pour (2, 3, 4) preuves dans [Gaubert, 1992a, Chapitre 2, p30], et pour (5, 6, 7) preuves dans [Cottenceau, 1999, Chapitre 1, p42-43].

1.2 Applications Isotones et Résiduation

Définition 4 (Applications isotones) Une application $f : (E, \preceq) \rightarrow (F, \preceq)$ définie sur des ensembles ordonnés est dite isotone si

$$x \preceq y \Rightarrow f(x) \preceq f(y).$$

Définition 5 (Application injective) Soit f une application de \mathcal{E} dans \mathcal{F} , elle est injective si elle vérifie la propriété suivante :

$$\forall a, b \in \mathcal{E}, \quad f(a) = f(b) \implies a = b.$$

Définition 6 (Application surjective) Soit f une application de \mathcal{E} dans \mathcal{F} , f est une surjection de \mathcal{E} sur \mathcal{F} , ou f est surjective de \mathcal{E} sur \mathcal{F} , si elle vérifie :

$$\forall x \in \mathcal{F}, \exists a \in \mathcal{E} \text{ tel que } x = f(a).$$

Définition 7 (Continuité) [Cohen, 1998a] Soit f une application d'un dioïde complet \mathcal{D} dans un dioïde complet \mathcal{C} , elle est semi-continue inférieurement en abrégé s.c.i, respectivement, semi-continue supérieurement, en abrégé s.c.s, si pour tout sous ensemble (fini ou infini) X de \mathcal{D}

$$f\left(\bigoplus_{x \in X} x\right) = \bigoplus_{x \in X} f(x),$$

respectivement,

$$f\left(\bigwedge_{x \in X} x\right) = \bigwedge_{x \in X} f(x).$$

Une application f est continue si elle est à la fois s.c.i et s.c.s..

1.2.1 Théorie de la résiduation

La théorie de la résiduation [Blyth and Janowitz, 1972] permet de définir "l'inverse" de certaines applications isotones en ne prenant en compte que la structure ordonnée définie sur l'ensemble de départ et l'ensemble d'arrivée. Soit f une application isotone d'un dioïde \mathcal{D} dans un dioïde \mathcal{C} . Pour garantir l'existence des bornes supérieures et inférieures, on suppose \mathcal{D} et \mathcal{C} complet.

Si f n'est pas surjective, l'équation $f(x) = b$ n'a pas nécessairement de solution pour certaines valeurs de b , et si f n'est pas injective la même équation peut ne pas avoir de solution unique.

Pour résoudre ce problème d'inversion d'application, on considère l'ensemble des "sous-solutions", c'est-à-dire les valeurs de x satisfaisant $f(x) \preceq b$. Si ce sous ensemble est non vide, on considère la borne supérieure de ce sous ensemble. Lorsqu'il existe pour tout b , cet élément sera noté $f^\sharp(b)$.

$$f^\sharp(b) = \bigoplus_{\{x | f(x) \preceq b\}} x \text{ et on aura } f(f^\sharp(b)) \preceq b.$$

On peut aussi considérer la borne inférieure de l'ensemble des "sur-solutions", c'est à dire l'ensemble des x satisfaisant $f(x) \succeq b$, si cet ensemble est non vide. La borne inférieure de cet ensemble, lorsqu'elle existe sera notée $f^b(b)$

$$f^b(b) = \bigwedge_{\{x|f(x)\succeq b\}} x \text{ et on aura } f(f^b(b)) \succeq b.$$

Théorème 4 *Soit f une application isotone d'un dioïde complet \mathcal{D} dans un dioïde complet \mathcal{C} , sont équivalents :*

1. *Pour tout $b \in \mathcal{C}$, il existe une plus grande sous-solution de l'équation $f(x) = b$.*
2. *$f(\varepsilon) = \varepsilon$ et f est s.c.i..*
3. *Il existe une unique application f^\sharp de \mathcal{C} dans \mathcal{D} , qui est isotone et s.c.s. telle que*

$$f \circ f^\sharp \preceq Id_{\mathcal{C}} \quad (\text{Identité de } \mathcal{C}) \quad (1.8)$$

$$f^\sharp \circ f \succeq Id_{\mathcal{D}} \quad (\text{Identité de } \mathcal{D}) \quad (1.9)$$

Quand f satisfait ces propriétés, elle est dite résiduable et f^\sharp est appelée la résiduée de f .

Preuve dans [Cohen, 1998a, Chapitre 1, p209-210].

Théorème 5 *Soit f une application isotone d'un dioïde complet \mathcal{D} dans un dioïde complet \mathcal{C} , sont équivalents :*

1. *Pour tout $b \in \mathcal{C}$, il existe une plus petite sur-solution de l'équation $f(x) = b$.*
2. *$f(T) = T$ et f est s.c.s..*
3. *Il existe une unique application f^b de \mathcal{C} dans \mathcal{D} , qui est isotone et s.c.i. telle que*

$$f \circ f^b \succeq Id_{\mathcal{C}} \quad (\text{Identité de } \mathcal{C}) \quad (1.10)$$

$$f^b \circ f \preceq Id_{\mathcal{D}} \quad (\text{Identité de } \mathcal{D}) \quad (1.11)$$

Quand f satisfait ces propriétés, elle est dite dualement résiduable et f^b est appelée sa résiduée duale.

Preuve dans [Cohen, 1998a, Chapitre 1, p209-210].

Théorème 6 *Soit $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{F}$ et $g : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{G}$ deux applications résiduables.*

On a :

$$f^\sharp \text{ est dualement résiduable et } (f^\sharp)^b = f. \quad (1.12)$$

$$f = f \circ f^\sharp \circ f \text{ et } f^\sharp = f^\sharp \circ f \circ f^\sharp. \quad (1.13)$$

$$g \circ f \text{ est résiduable et } (g \circ f)^\sharp = f^\sharp \circ g^\sharp. \quad (1.14)$$

Preuve:

- (12) D'après le point 3 du théorème 4, si f est résiduable, alors $f^\# \circ f \succeq Id_{\mathcal{E}}$ et $f \circ f^\# \preceq Id_{\mathcal{F}}$. Donc, d'après le théorème 5, $f^\#$ est dualement résiduable et f est sa résiduée duale.
- (13) $f \circ f^\# \preceq Id_{\mathcal{F}}$ (th. 4). Puisque f est isotone, $f \circ f^\# \circ f \preceq Id_{\mathcal{F}} \circ f = f$. Inversement, $f^\# \circ f \succeq Id_{\mathcal{E}}$, donc par isotonie de f , $f \circ f^\# \circ f \succeq f \circ Id_{\mathcal{E}} = f$. La démonstration de l'égalité $f^\# = f^\# \circ f \circ f^\#$ est similaire.
- (14) Puisque g et f sont isotones (car résiduables), $g \circ f$ et $f^\# \circ g^\#$ sont également isotones. De plus, puisque f et g sont résiduables, alors d'après le théorème (th. 4), d'une part $g \circ (f \circ f^\#) \circ g^\# \preceq g \circ Id_{\mathcal{F}} \circ g^\# = g \circ g^\# \preceq Id_{\mathcal{G}}$, et d'autre part, $f^\# \circ (g^\# \circ g) \circ f \succeq f^\# \circ Id_{\mathcal{F}} \circ f = f^\# \circ f \succeq Id_{\mathcal{E}}$. Puisque l'application h vérifiant $g \circ f \circ h \preceq Id_{\mathcal{G}}$ et $h \circ g \circ f \succeq Id_{\mathcal{E}}$ est unique, alors $g \circ f$ est résiduable et $(g \circ f)^\# = f^\# \circ g^\#$.

1.2.2 Restriction d'applications

[Cottenceau, 1999] entend par *restriction d'une application* la restriction de son domaine et/ou de son codomaine de définition. Dans sa thèse il cherche à déterminer si la propriété de résiduabilité est conservée après restriction, ou à l'inverse, sous quelle condition la restriction d'une application non résiduable devient résiduable.

Plus précisément, les problèmes étudiés sont les suivants. Soit $f : (E, \preceq) \rightarrow (F, \preceq)$ une application définie sur des ensembles ordonnés. Il s'agit de s'intéresser d'une part à la restriction de f à un domaine $A \subset E$ et d'autre part à la restriction de f à un codomaine B tel que $Imf \subseteq B \subset F$. Les questions traitées sont :

- a- Si f est résiduable, la restriction de f au domaine A l'est-elle également ?
- b- Si f n'est pas résiduable, existe-t-il une restriction de f à un codomaine B (tel que $Imf \subseteq B \subset F$) qui soit résiduable ?
- La première question est liée à un problème de contrainte sur les solutions de l'équation $f(x) \preceq b$. Si f est résiduable, l'équation précédente admet toujours $f^\#(b)$ comme plus grande solution. Cependant, si x est contraint à appartenir à un sous-ensemble "admissible" de solutions A , le problème a-t-il toujours une solution optimale dans A ?
- Le second problème est un peu différent. Sachant que f n'est pas résiduable, s'intéresser à une restriction de f à un codomaine B qui le soit revient à chercher si $f(x) \preceq b$ admet des solutions dont l'optimalité est garantie seulement pour certains éléments $b \in B$ (et non pour tout $b \in F$). Ce problème n'a naturellement de sens que si $Imf \subseteq B$.

Les notations proposées par [Cottenceau, 1999] s'inspirent de celles utilisées par Wonham dans [Wonham, 1979]. Ci-dessous nous rappelons uniquement les définitions qui seront utilisées dans le chapitre 3.

Définition 8 (Restriction d'une application à un domaine A) Soit $f : E \rightarrow F$ et $A \subseteq E$. Il sera noté dans la suite $f|_A$ l'application définie de A dans F , vérifiant

$$f|_A = f \circ Id|_A$$

où $Id_{|A} : A \rightarrow E, x \mapsto x$ représente l'injection canonique de A dans E . L'application $f_{|A}$ sera appelée restriction de f au domaine A . Le diagramme suivant commute¹

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ Id_{|A} \uparrow & \nearrow & \\ A & & f_{|A} \end{array}$$

Remarque 1 Dans [Cottenceau, 1999] l'injection canonique est notée comme la restriction d'une application identique. Notamment, l'injection canonique de A dans E est aussi la restriction de l'application identique sur E (Id_E) au domaine A , notée $Id_{E|A}$ ou plus simplement $Id_{|A}$.

Définition 9 (Restriction d'une application à un codomaine B) Soit $f : E \rightarrow F$ et $Im f \subseteq B \subseteq F$. Il sera noté dans la suite $_{B|}f$ l'application définie de E dans B par l'égalité

$$f = Id_{|B} \circ _{B|}f$$

où $Id_{|B}$ représente l'injection canonique de B dans F . L'application $_{B|}f$ sera dite restriction de f au codomaine B . Le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ & \searrow & \uparrow Id_{|B} \\ & _{B|}f & B \end{array}$$

[Cottenceau, 1999] représente *via* $_{B|}f$ l'action de f non plus par rapport à F tout entier, mais seulement par rapport à un sous-ensemble B incluant l'image de f .

Définition 10 (Restriction double) Soit $f : E \rightarrow F$, $A \subseteq E$ et $f(A) \subseteq B \subseteq F$. Nous noterons $_{B|}f_{|A}$ l'application définie de A dans B par l'égalité

$$f_{|A} = Id_{|B} \circ _{B|}f_{|A}.$$

Le diagramme suivant commute.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{f} & F \\ Id_{|A} \uparrow & & \uparrow Id_{|B} \\ A & \xrightarrow{_{B|}f_{|A}} & B \end{array}$$

Remarque 2 Puisque tous les diagrammes précédents commutent, l'égalité suivante est également vérifiée

$$_{B|}f_{|A} = _{B|}f \circ Id_{|A}.$$

D'autre part, pour $Im f \subseteq B \subseteq F$, il est toujours possible d'établir la décomposition suivante

$$_{B|}f = _{B|}Id_{|Im f} \circ Im f_{|}f.$$

Le diagramme suivant montre donc plusieurs décompositions d'une application, cela permet de se familiariser avec les notations d'applications restreintes.

¹un tel diagramme est dit commutatif lorsque les différentes applications permettant d'aller d'un point du diagramme à un autre sont égales

$$\begin{array}{ccc}
E & \xrightarrow{f} & F \\
& \searrow^{B|f} & \uparrow Id|_B \\
& \searrow^{Imf|f} & B \\
& & \uparrow B|Id|_{Imf} \\
& & Imf
\end{array}$$

Remarque 3 (Isotonie des applications restreintes) Soit une application $f : (E, \preceq) \rightarrow (F, \preceq)$. Quels que soient $A \subseteq E$ et $B \subseteq F$, les sous-ensembles (A, \preceq) et (B, \preceq) sont ordonnés pour l'ordre \preceq restreint à A et B respectivement. Lorsque f est isotone, on peut vérifier que les restrictions $f|_A$, $B|f$ et $B|f|_A$ le sont également. Autrement dit, la propriété d'isotonie est conservée par restriction.

1.2.3 Fermeture et Résiduation

Nous étudions ici une classe particulière d'applications isotones : les fermetures. Après une définition, des résultats concernant la résiduation de cette classe particulière d'applications sont fournis (Théorème 7).

Définition 11 (Fermeture, Fermeture Duale) Soit \mathcal{D} un ensemble ordonné, on considère l'application isotone $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$, on appelle fermeture l'application vérifiant $f = f \circ f \succeq Id_{\mathcal{D}}$, de même on appelle fermeture duale l'application vérifiant $f = f \circ f \preceq Id_{\mathcal{D}}$.

Exemple 3 L'application $\mathcal{K} : x \rightarrow x^*$ est une fermeture.

Théorème 7 Soit $f : \mathcal{D} \rightarrow \mathcal{D}$ une fermeture. La restriction $Imf|f$ est résiduable et sa résiduée

$$(Imf|f)^{\sharp} = Id|_{Imf}$$

où $Id|_{Imf}$ est l'injection canonique de Imf dans \mathcal{D} :

$$\begin{array}{l}
Id|_{Imf} : x \rightarrow x \\
Imf \rightarrow \mathcal{D}
\end{array}$$

Preuve: D'après le théorème 4, si $Imf|f$ est résiduable il existe une unique application h telle que

$$\begin{array}{ll}
Imf|f \circ h \preceq Id|_{Imf} & \text{(Identité de } Imf) \\
\text{et } h \circ Imf|f \succeq Id_{\mathcal{D}}. & \text{(Identité de } \mathcal{D})
\end{array}$$

L'application $Id|_{Imf}$ vérifie ces deux points en effet

$$\begin{array}{ll}
\bullet Imf|f \circ Id|_{Imf} = imf|f|_{imf} = Id|_{Imf} & \text{(Identité de } Imf \text{ puisque } f \circ f = f) \\
\bullet Id|_{Imf} \circ Imf|f = f \succeq Id_{\mathcal{D}} & \text{(Identité de } \mathcal{D}, \text{ par définition de la fermeture).}
\end{array}$$

1.2.4 Applications de la résiduation

On considère les applications d'un dioïde \mathcal{D} dans lui même :

$$L_a : x \longrightarrow a \otimes x \text{ (multiplication à gauche par } a).$$

$$R_a : x \longrightarrow x \otimes a \text{ (multiplication à droite par } a).$$

Par définition la multiplication est distributive par rapport aux sommes infinies, L_a et R_a sont donc *s.c.i.* (définition 7). De plus ε étant absorbant pour la multiplication on a $L_a(\varepsilon) = \varepsilon$. L_a est donc résiduable et L_a^\sharp est sa résiduée. Ces mêmes considérations s'appliquent à la multiplication à droite R_a .

Notation :

$$\text{On notera } L_a^\sharp(x) = a \backslash x = \frac{x}{a} \text{ ("Division à gauche par } a")$$

$$\text{et } R_a^\sharp(x) = x / a = \frac{x}{a} \text{ ("Division à droite par } a")$$

Formulaire :

$$f.1 \quad \frac{x \wedge y}{a} = \frac{x}{a} \wedge \frac{y}{a} \text{ et } \frac{x \vee y}{a} = \frac{x}{a} \vee \frac{y}{a}.$$

$$f.2 \quad \frac{x \oplus y}{a} \succcurlyeq \frac{x}{a} \oplus \frac{y}{a} \text{ et } \frac{x \ominus y}{a} \succcurlyeq \frac{x}{a} \ominus \frac{y}{a}.$$

$$f.3 \quad \frac{x}{a \oplus b} = \frac{x}{a} \wedge \frac{x}{b} \text{ et } \frac{x}{a \ominus b} = \frac{x}{a} \wedge \frac{x}{b}.$$

$$f.4 \quad \frac{x}{a \wedge b} \succcurlyeq \frac{x}{a} \oplus \frac{x}{b} \text{ et } \frac{x}{a \vee b} \succcurlyeq \frac{x}{a} \oplus \frac{x}{b}.$$

$$f.5 \quad \text{si } b \text{ est inversible} \Rightarrow \frac{a}{b} = b^{-1} \otimes a.$$

$$f.6 \quad \frac{ax}{a} \succcurlyeq x \text{ et } \frac{xa}{a} \succcurlyeq x.$$

$$f.7 \quad a \frac{ax}{a} = ax \text{ et } \frac{xa}{a} a = xa.$$

$$f.8 \quad \frac{x}{a} b \succcurlyeq \frac{xb}{a} \text{ et } b \frac{x}{a} \succcurlyeq \frac{bx}{a}.$$

$$f.9 \quad \frac{x}{ab} = \frac{a \backslash x}{b} \text{ et } \frac{x}{ba} = \frac{x / a}{b}.$$

Preuve dans [Baccelli et al., 1992, Chapitre 4, p183-185].

Théorème 8 Soit $H \in \mathcal{D}$ un dioïde complet

$$\exists A, B \in \mathcal{D} \text{ tel que } H \backslash H = A^* \text{ et } H / H = B^*. \quad (1.15)$$

$$\forall H \in \mathcal{D}, A^* H = A^* \backslash (A^* H). \quad (1.16)$$

Remarque 4 Il faut interpréter la relation (15) comme : les éléments du type $H \backslash H$ ou $H \phi H$ sont "des étoiles", c'est-à-dire qu'il existe x tel que $H \backslash H = \bigoplus_{i \in \mathbb{N}} x^i$.

Preuve: Pour (15) d'après (f.8) et (f.7) nous avons

$$\begin{aligned} \frac{H}{H} \otimes \frac{H}{H} &\preceq \frac{H \frac{H}{H}}{H} = \frac{H}{H} \\ \text{soit } (H \backslash H)^n &\preceq H \backslash H \quad \forall n \in \mathbb{N}^+ \\ \text{donc } \bigoplus_{n \in \mathbb{N}^+} (H \backslash H)^n &\preceq H \backslash H. \end{aligned}$$

D'après (f.6) en posant $x = e$ nous avons $e \preceq \frac{H}{H}$ ces 2 points nous conduisent à l'inégalité suivante

$$e \oplus \bigoplus_{n \in \mathbb{N}^+} (H \backslash H)^n = (H \backslash H)^* \preceq H \backslash H. \quad (1.17)$$

Par ailleurs on a

$$(H \backslash H)^* = e \oplus H \backslash H \oplus (H \backslash H)^2 \oplus \dots \succeq H \backslash H. \quad (1.18)$$

Les relations (17) et (18) conduisent à l'égalité $(H \backslash H)^* = H \backslash H$, c'est-à-dire en posant $A = H \backslash H$ nous obtenons le résultat.

Pour (16) considérons

$$\begin{aligned} \frac{Y}{A^*} &= \frac{Y}{A^* A^*} = \frac{\frac{Y}{A^*}}{A^*} \quad \text{d'après f.9} \\ \text{donc } A^* \frac{Y}{A^*} &= A^* \frac{\frac{Y}{A^*}}{A^*} \\ \text{or par définition de la résiduation } A^* \frac{\frac{Y}{A^*}}{A^*} &\preceq \frac{Y}{A^*} \\ \text{et comme } A^* \succeq e \text{ on a } A^* \frac{Y}{A^*} &\succeq \frac{Y}{A^*} \\ \text{ce qui conduit à l'égalité suivante } \frac{Y}{A^*} &= A^* \frac{Y}{A^*} = A^* \frac{\frac{Y}{A^*}}{A^*} \\ \text{en posant } Y = A^* X \text{ on a } \frac{A^* X}{A^*} &= A^* \frac{A^* X}{A^*} = A^* X. \end{aligned}$$

1.2.5 Résiduation de matrices

Les résultats précédents s'étendent au cas matriciel dans la mesure où les dimensions des matrices considérées sont compatibles.

Soit l'application

$$\begin{aligned} L_A : \mathcal{D}^{p \times q} &\rightarrow \mathcal{D}^{n \times q} \\ X &\mapsto A \otimes X \quad (A \in \mathcal{D}^{n \times p}). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
R_A : \mathcal{D}^{q \times n} &\rightarrow \mathcal{D}^{q \times p} \\
X &\mapsto X \otimes A \quad (A \in \mathcal{D}^{n \times p}).
\end{aligned}$$

Théorème 9 Soit $B \in \mathcal{D}^{n \times q}$, $A \in \mathcal{D}^{n \times p}$ alors

$$(A \backslash B)_{ij} = (L_A^\sharp(B))_{ij} = \bigwedge_{l=1}^n (A_{li} \backslash B_{lj}) \quad , \quad i \leq p, j \leq q.$$

Voir preuve dans [Baccelli et al., 1992, Chapitre 4, p199].

Théorème 10 Soit $B \in \mathcal{D}^{q \times p}$, $A \in \mathcal{D}^{n \times p}$ alors

$$(B \not\! / A)_{ij} = (R_A^\sharp(B))_{ij} = \bigwedge_{l=1}^p (B_{il} \not\! / A_{jl}) \quad , \quad i \leq q, j \leq n.$$

Voir preuve dans [Baccelli et al., 1992, Chapitre 4, p199].

Chapitre 2

Les Graphes d'Événements Temporisés

Les systèmes à événements discrets qui donnent lieu à des phénomènes de synchronisation peuvent être modélisés par des Graphes d'Événements Temporisés (GET). Les graphes d'événements (GE) sont une sous classe des Réseaux de Petri dans lesquels chaque place a exactement une transition d'entrée et une transition de sortie. De plus chaque arc reliant une transition à une place (et vice-versa) a un poids de un [David and Alla, 1989] .

Ainsi, les graphes d'événements peuvent modéliser la synchronisation mais pas la concurrence. Un GET est un graphe d'événements dont le fonctionnement dépend du temps. Le temps peut être associé soit aux transitions, soit aux places du graphe. Sachant que l'on peut passer d'une représentation à l'autre, on choisira ici d'associer le temps aux places.

Dans la deuxième partie, il sera traité de la représentation du comportement de GET à l'aide d'équations linéaires dans les dioïdes [Cohen, 1998b].

2.1 Modélisation des GET

2.1.1 Mise en équation des GET

Pour analyser le comportement temporel d'un GET, on peut considérer deux points de vue qui conduisent à une seule représentation linéaire, mais dans deux dioïdes différents.

- * $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ permet de se placer dans le domaine des événements : chaque variable aura pour but de dater les événements ; on parle d'*équations aux dateurs*.
- * $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$ permet de se placer dans le domaine temporel : chaque variable recense le nombre d'événements à un instant t ; on parle d'*équations aux compteurs*.

Notation :

Soit x_j une transition d'un GET, on utilisera les notations suivantes :

$x_j(k)$: date à laquelle le k^{eme} tir de la transition associé à x_j a eu lieu.

$x_j(t)$: nombre de tirs de la transition x_j ayant eu lieu jusqu'à la date t .

Il existe deux représentations (Figure 1).

1. Représentation par des dateurs

$$x_n(k) \geq \max(x_m(k), x_l(k)) \quad (2.1)$$

$$x_j(k) \geq x_i(k - \nu) + \tau \quad (2.2)$$

2. Représentation par des compteurs

$$x_n(t) \leq \min(x_m(t), x_l(t)) \quad (2.3)$$

$$x_j(t) \leq x_i(t - \tau) + \nu \quad (2.4)$$

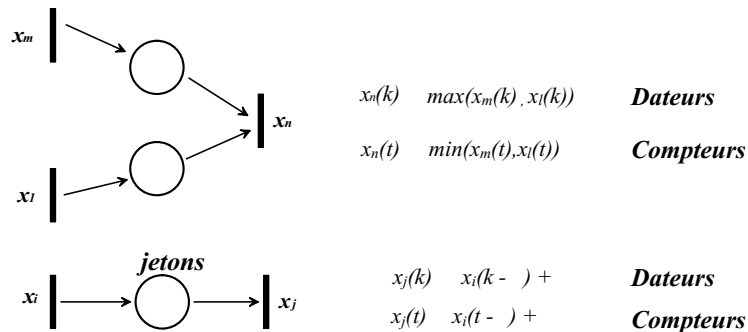


FIG. 2.1 – Equations aux dateurs et compteurs sur des graphes d'événements temporisés

On peut remarquer que les inégalités (19) et (21) représentent le phénomène de synchronisation. En effet, pour la figure 1, la transition x_n ne peut être franchie k fois que si x_m et x_l ont été franchies également au moins k fois chacune. Du point de vue compteur, la synchronisation se caractérise donc par la présence d'un opérateur *min*, et du point de vue dateur, par un opérateur *max*.

On considère l'exemple de la Figure 2. Les nombres représentent les temporisations (en nombre de tops d'horloges par exemples) associées aux places, ce GET possède aussi un marquage initial.

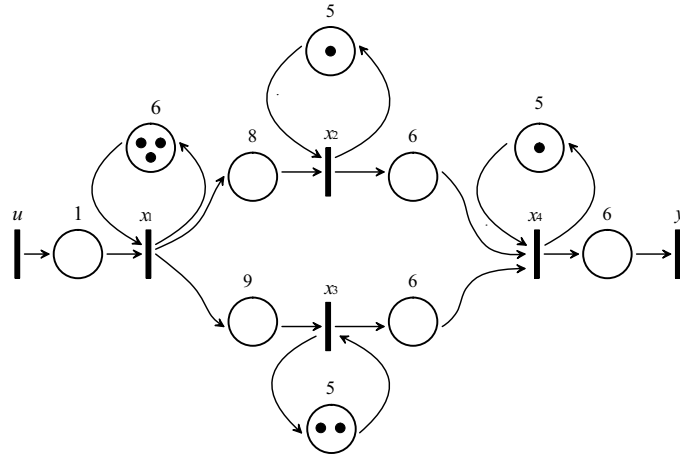


FIG. 2.2 – Graphe d'événements temporisé

On peut écrire les équations de la figure 2 dans $\overline{\mathbb{Z}}$.

$$\begin{aligned} x_1(k) &= \max(u(k) + 1, x_1(k-3) + 6) \\ x_2(k) &= \max(x_1(k) + 8, x_2(k-1) + 5) \\ x_3(k) &= \max(x_1(k) + 9, x_3(k-2) + 5) \\ x_4(k) &= \max(x_2(k) + 6, x_3(k) + 6, x_4(k-1) + 5) \\ y(k) &= \max(x_4(k) + 6) \end{aligned}$$

Dans le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ cela devient ¹ :

$$\begin{aligned} x_1(k) &= 1u(k) \oplus 6x_1(k-3) \\ x_2(k) &= 8x_1(k) \oplus 5x_2(k-1) \\ x_3(k) &= 9x_1(k) \oplus 5x_3(k-2) \\ x_4(k) &= 6x_2(k) \oplus 6x_3(k) \oplus 5x_4(k-1) \\ y(k) &= 6x_4(k) \end{aligned}$$

Sous forme matricielle :

$$\begin{aligned} x(k) &= \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 8 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 9 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 6 & 6 & \varepsilon \end{pmatrix} x(k) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 5 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 5 \end{pmatrix} x(k-1) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 5 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} x(k-2) \oplus \begin{pmatrix} 6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} x(k-3) \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} u(k) \\ y(k) &= (\varepsilon \quad \varepsilon \quad \varepsilon \quad 6) x(k) \end{aligned}$$

¹le signe \otimes est omis pour éviter d'alourdir l'écriture.

D'une manière générale, on obtient donc la forme sur $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$:

$$x(k) = \bigoplus_{i=0}^a A(i)x(k-i) \oplus \bigoplus_{j=0}^b B(j)u(k-j), \quad (2.5)$$

$$y(k) = \bigoplus_{l=0}^c C(l)x(k-l). \quad (2.6)$$

L'équation (23) est implicite en $x(k)$. En appliquant le Théorème 2, on peut passer à la forme ARMA² explicite suivante :

$$x(k) = \bigoplus_{i=1}^a \bar{A}(i)x(k-i) \oplus \bigoplus_{j=0}^b \bar{B}(j)u(k-j), \quad (2.7)$$

avec $\bar{A}(i) = (A(0))^*A(i)$ et $\bar{B}(j) = (A(0))^*B(j)$.

Il est possible avec quelques manipulations [Cohen, 1995], de passer à une forme récurrente "markovienne", ce qui correspond à une forme où le retard est exactement de 1 sur la partie AR et de 0 sur la partie MA, ainsi que sur l'équation de sortie. On se ramène alors à une récurrence simple de la forme

$$x(k) = Ax(k-1) \oplus Bu(k), \quad (2.8)$$

$$y(k) = Cx(k) \oplus Du(k). \quad (2.9)$$

2.1.2 Transformée en γ et δ

La transformée en γ [Baccelli et al., 1992] est l'analogue de la transformée en \mathcal{Z} dans la théorie des systèmes linéaires échantillonnés.

Transformée en γ : Soit $\{x_j(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ un dateur associé à une transition j d'un GET. La transformée en γ de $\{x_j(k)\}_{k \in \mathbb{Z}}$ est définie comme la série formelle

$$X_j(\gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x_j(k)\gamma^k.$$

Par exemple, si l'on prend deux dateurs reliés par l'égalité $x_1(k) = x_2(k-1)$, ce qui correspond à deux transitions séparées par une place contenant un seul jeton, la transformée en γ de chacun des dateurs devient

$$X_1(\gamma) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x_1(k)\gamma^k = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x_2(k-1)\gamma^k = \gamma \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} x_2(k-1)\gamma^{k-1} = \gamma X_2(\gamma).$$

L'opérateur γ est un opérateur de décalage "événementiel", ce qui revient à écrire $x(k-1) = \gamma x(k)$.

²ARMA pour Auto Regressive - Moving Average

Transformée en δ De la même manière, on peut introduire une série formelle pour coder une trajectoire décrite par un compteur $x_j(t)_{t \in \mathbb{Z}}$. La transformée en δ de $x_j(t)_{t \in \mathbb{Z}}$ est définie comme la série formelle

$$X_j(\delta) = \bigoplus_{t \in \mathbb{Z}} x_j(t) \delta^t.$$

L'opérateur δ joue le rôle d'opérateur de décalage "temporel", on peut donc écrire $x_1(t-1) = \delta x_1(t)$.

2.1.3 Matrice de transfert

En partant des équations (26), on obtient

$$X(\gamma) = A\gamma X(\gamma) \oplus BU(\gamma) \Rightarrow X(\gamma) = (A\gamma)^* BU(\gamma),$$

d'où

$$Y(\gamma) = (D \oplus C(\gamma A)^* B)U(\gamma) = H(\gamma)U(\gamma) \text{ avec } H(\gamma) = D \oplus C(\gamma A)^* B. \quad (2.10)$$

Si on reprend les équations de l'exemple de la figure 2, on a

$$\begin{aligned} x_1(k) &= 1u(k) \oplus 6x_1(k-3) \Rightarrow X_1 = 1U \oplus 6\gamma^3 X_1 \\ x_2(k) &= 8x_1(k) \oplus 5x_2(k-1) \Rightarrow X_2 = 8X_1 \oplus 5\gamma X_2 \\ x_3(k) &= 9x_1(k) \oplus 5x_3(k-2) \Rightarrow X_3 = 9X_1 \oplus 5\gamma^2 X_3 \\ x_4(k) &= 6x_2(k) \oplus 6x_3(k) \oplus 5x_4(k-1) \Rightarrow X_4 = 6X_2 \oplus 6X_3 \oplus 5\gamma X_4 \\ y(k) &= 6x_4(k) \Rightarrow Y = 6X_4. \end{aligned}$$

Que l'on peut aussi écrire sous forme matricielle

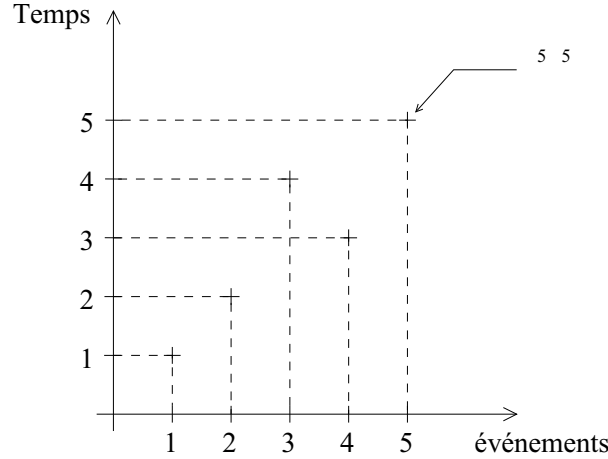
$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6\gamma^3 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 8 & 5\gamma & \varepsilon & \varepsilon \\ 9 & \varepsilon & 5\gamma^2 & \varepsilon \\ \varepsilon & 6 & 6 & 5\gamma \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 1 \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} U$$

$$Y = (\varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ 6) X$$

2.1.4 Représentation bi-dimensionnelle : dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$

Il est possible de considérer les deux représentations dateurs et compteurs en établissant une représentation bi-dimensionnelle qui consiste à coder les trajectoires de tir de GET par des séries formelles en deux variables commutatives, γ et δ , à exposants dans $\overline{\mathbb{Z}}$ et à coefficients booléens ce nouveau dioïde se note $\mathbb{IB}[[\gamma, \delta]]$ [Cohen, 1998b].

$\mathbb{IB}[[\gamma, \delta]]$ est un dioïde d'élément neutre $e(\gamma, \delta) = \gamma^0 \delta^0$ et d'élément absorbant $\varepsilon(\gamma, \delta)$ qui correspond à la série dont tous les éléments sont égaux à ε . Graphiquement, un élément de $\mathbb{IB}[[\gamma, \delta]]$ est représenté par une collection de points de \mathbb{Z}^2 (Figure 3).

FIG. 2.3 – Collection de points de \mathbb{Z}^2

"Filtrage des trajectoires monotones" $d(k)$ et $c(t)$ représente les transitions d'un GET, donc la propriété d'une trajectoire de dateur $d(k)$ ou de compteur $c(t)$ est d'être monotone cela se traduit par

$$\begin{aligned} \forall k \in \mathbb{Z}, & \quad \{d(k) \geq d(k-1)\} \Leftrightarrow \{d(k) = d(k) \oplus d(k-1)\}, \\ \forall t \in \mathbb{Z}, & \quad \{c(t) \geq c(t-1)\} \Leftrightarrow \{c(t-1) = c(t-1) \oplus c(t)\}, \end{aligned}$$

en notant que l'ordre naturel de dioïde est inversé entre $\bar{\mathbb{Z}}_{max}$ et $\bar{\mathbb{Z}}_{min}$. En passant aux transformées en γ et δ , on obtient

$$\{D(\gamma) = D(\gamma) \oplus \gamma D(\gamma)\} \Leftrightarrow \{D(\gamma) = \gamma^* D(\gamma)\}, \quad (2.11)$$

$$\{C(\delta) = C(\delta) \oplus \delta^{-1} C(\delta)\} \Leftrightarrow \{C(\delta) = (\delta^{-1})^* C(\delta)\}. \quad (2.12)$$

Un élément $X(\gamma, \delta)$ de $\mathbb{IB}[[\gamma, \delta]]$, doit donc satisfaire

$$\begin{aligned} X(\gamma, \delta) &\succeq \gamma X(\gamma, \delta), \\ X(\gamma, \delta) &\succeq \delta^{-1} X(\gamma, \delta), \end{aligned}$$

soit encore $X(\gamma, \delta) \succeq (\gamma \oplus \delta^{-1}) X(\gamma, \delta)$.

Finalement,

$$X(\gamma, \delta) = (\gamma \oplus \delta^{-1})^* X(\gamma, \delta). \quad (2.13)$$

Le dioïde $(\gamma \oplus \delta^{-1})^* \mathbb{IB}[[\gamma, \delta]]$ est noté $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$. Graphiquement, on ne considère plus un point de coordonnées (n, t) mais un "cône Sud-Est" de sommet (n, t) (figure 4). Cette transformation a pour effet de ne conserver que les séries monotones non décroissantes.

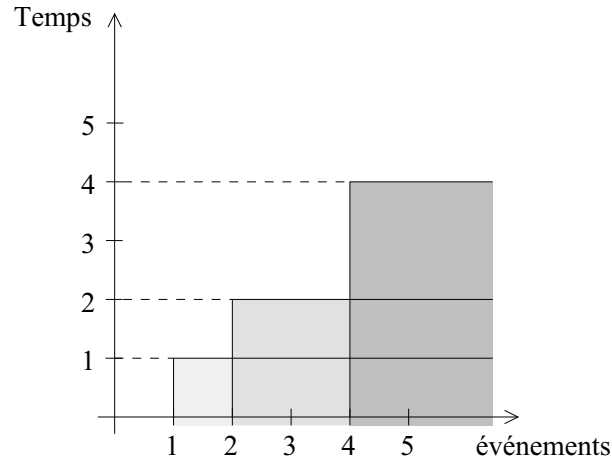


FIG. 2.4 – Représentation de "cônes Sud-Est"

Remarque 5 Les notations suivantes seront utilisées pour le plus petit et le plus grand élément de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$: $\varepsilon = \gamma^{+\infty}\delta^{-\infty}$ et $T = \gamma^{-\infty}\delta^{+\infty}$.

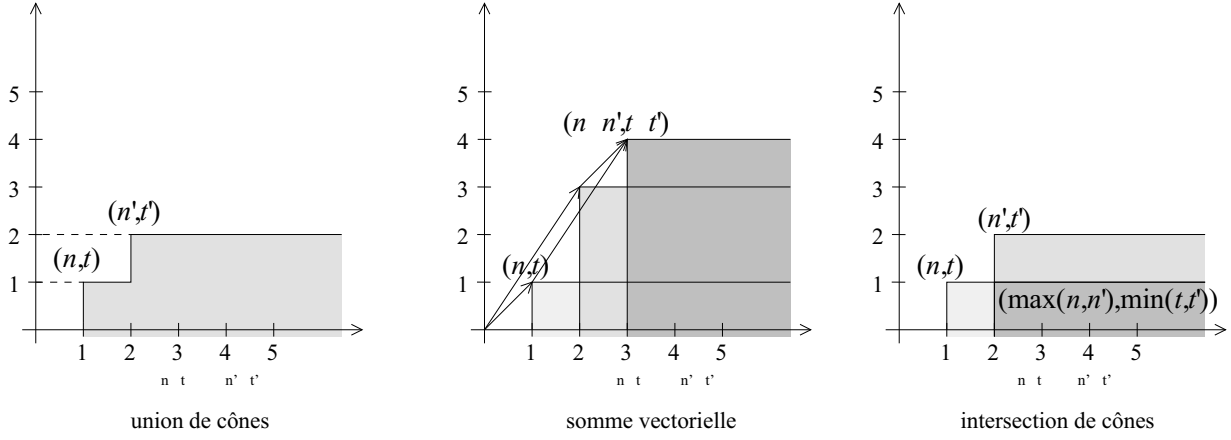
Du fait de la structure de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$, on peut donner plusieurs expressions de l'élément neutre e pour la multiplication :

$$e = \gamma^*(\delta^{-1})^* = \gamma^* = (\delta^{-1})^* = \gamma^0 = \delta^0 = \gamma^0\delta^0.$$

2.1.5 Résultats dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$

A partir des résultats précédents, on peut interpréter graphiquement les opérations d'addition de multiplication et de borne inférieure dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$.

1. la somme de deux monômes $\gamma^n\delta^t$ et $\gamma^{n'}\delta^{t'}$ est représentée graphiquement par l'union des "cônes Sud-Est" de sommets respectifs (n, t) et (n', t') .
2. le produit de deux monômes $\gamma^n\delta^t$ et $\gamma^{n'}\delta^{t'}$ est représenté par le cône de sommet $(n+n', t+t')$ (ce qui correspond au cône dont le sommet est la somme vectorielle des sommets (n, t) et (n', t')).
3. l'inf de deux monômes $\gamma^n\delta^t$ et $\gamma^{n'}\delta^{t'}$ est représenté par l'intersection des "cônes Sud-Est" de sommets respectifs (n, t) et (n', t') .

FIG. 2.5 – Représentation graphique des opérations sur $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$

Les règles de simplification suivantes dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ sont immédiates :

$$\begin{aligned}\gamma^n \delta^t \oplus \gamma^{n'} \delta^{t'} &= \gamma^{\min(n, n')} \delta^t \\ \gamma^n \delta^t \oplus \gamma^n \delta^{t'} &= \gamma^n \delta^{\max(t, t')} \\ \gamma^n \delta^t \wedge \gamma^{n'} \delta^{t'} &= \gamma^{\max(n, n')} \delta^{\min(t, t')}.\end{aligned}$$

On peut reprendre l'exemple de la figure 2 dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ on a alors

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma^3 \delta^6 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \delta^8 & \gamma \delta^5 & \varepsilon & \varepsilon \\ \delta^9 & \varepsilon & \gamma^2 \delta^5 & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^6 & \delta^6 & \gamma \delta^5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} \delta \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} U$$

$$Y = (\varepsilon \ \varepsilon \ \varepsilon \ \delta^6) X$$

Ce système peut s'écrire

$$\begin{cases} X_1 = (\gamma^3 \delta^6) * \delta U \\ X_2 = (\gamma \delta^5) * \delta^8 X_1 \\ X_3 = (\gamma^2 \delta^5) * \delta^9 X_1 \\ X_4 = (\gamma \delta^5) * (\delta^6 X_2 \oplus \delta^6 X_3) \end{cases}$$

soit encore,

$$\begin{cases} X_1 = (\gamma^3 \delta^6) * \delta U \\ X_2 = (\gamma \delta^5) * \delta^9 U \\ X_3 = [e \oplus (\gamma^2 \delta^5 \oplus \gamma^3 \delta^6) (\gamma^2 \delta^5) *] \delta^{10} U \\ X_4 = (\gamma \delta^5) * (\delta^6 X_2 \oplus \delta^6 X_3) \\ Y = \delta^6 X_4 \end{cases}$$

avec $X_4 = [(\gamma\delta^5)^*\delta^{15} \oplus (\gamma\delta^5)^*\delta^{16} \oplus (\gamma^2\delta^5 \oplus \gamma^3\delta^6)(\gamma^2\delta^5)^*(\gamma\delta^5)^*\delta^{16}]U$

donc $Y = [e \oplus (\delta^2\gamma^5 \oplus \gamma^3\delta^6)(\gamma^2\delta^5)^*]\delta^{22}(\gamma\delta^5)^*U$

or $(\gamma^2\delta^5 \oplus \gamma^3\delta^6)(\gamma\delta^5 \oplus \gamma^2\delta^5)^* \oplus (\gamma\delta^5)^* = (\gamma\delta^5)^*$

donc

$$Y = (\gamma\delta^5)^*\delta^{22}U = hU$$

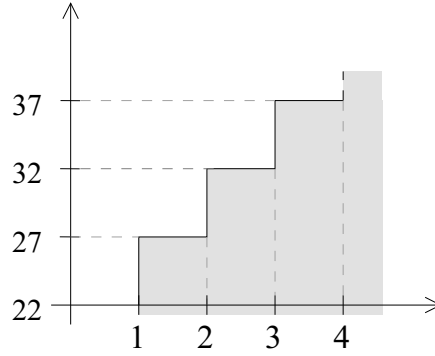


FIG. 2.6 – Représentation graphique de la fonction h

2.1.6 Séries rationnelles dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$

Les séries rationnelles [Gaubert, 1992b] vont permettre de représenter d'une façon finie les relations entrées / sorties d'un GET.

Définition 12 (Polynômes) *Un polynôme p de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ est une somme finie de monômes telle que :*

$$p = \bigoplus_{i=1}^k \gamma^{n_i} \delta^{t_i} = \gamma^{n_1} \delta^{t_1} \oplus \dots \oplus \gamma^{n_k} \delta^{t_k}$$

avec $n_1 < n_2 < \dots < n_k$ et $t_1 < t_2 < \dots < t_k$.

Définition 13 (Causalité) [Cohen, 1995] *Une série $s \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ est dite causale si $s = \varepsilon$ (la série est nulle) ou si ses représentants sont à exposants dans \mathbb{N} . Une matrice est dite causale si toutes ses composantes sont causales.*

Définition 14 (Rationalité) [Cohen, 1995] *Un élément de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ est rationnel si l'un de ses représentants au moins peut être obtenu par un nombre fini d'opérations \oplus , \otimes et $*$ à partir d'éléments de l'ensemble $\{\varepsilon, e, \gamma, \delta\}$. On dira qu'une matrice à coefficients dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ est rationnelle si tous ses coefficients sont rationnels.*

Définition 15 (Périodicité) [Cohen, 1995] Un élément de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ est périodique s'il peut s'écrire $p \oplus qm^*$ où p et q sont des polynômes et m est un monôme. Une matrice est périodique si tous ses coefficients sont périodiques.

Une autre définition de la périodicité, équivalente, est la suivante : un élément de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ est périodique s'il admet un représentant qui peut s'écrire

$$p \oplus (\gamma^n \delta^t) q (\gamma^\nu \delta^\tau)^*$$

où n, t, ν, τ sont des entiers non négatifs, et p et q sont des polynômes en (γ, δ) à exposants positifs et de degré en (γ, δ) inférieur ou égal à $(n-1, t-1)$, resp. $(\nu-1, \tau-1)$. Le polynôme p représente ici la partie transitoire de largeur $(n-1)$ et de hauteur $(t-1)$, tandis que le polynôme q représente le motif périodique commençant après ce transitoire (à cause de la translation par $\gamma^n \delta^t$), de largeur $(\nu-1)$ et de hauteur $(\tau-1)$, répété indéfiniment selon la pente τ/ν (à cause de la multiplication par $(\gamma^\nu \delta^\tau)^*$).

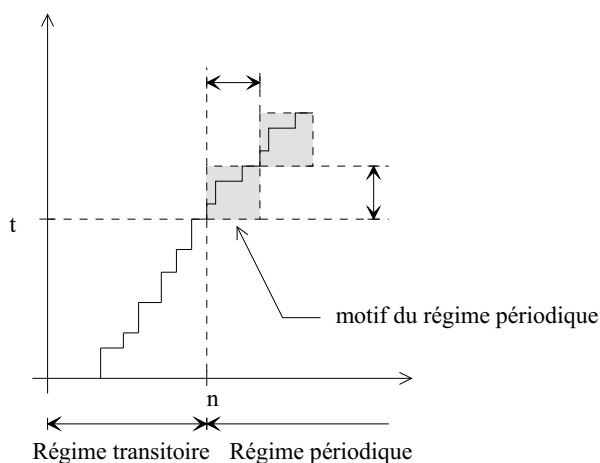


FIG. 2.7 – Représentation graphique d'une série périodique de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$

Théorème 11 Pour un élément H de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$, ou pour une matrice H à coefficients dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$, les trois propositions sont équivalentes :

- (1) H est rationnelle ;
- (2) H est réalisable ;
- (3) H est périodique et causale.

Preuve dans [Cohen et al., 1998].

Chapitre 3

Synthèse de correcteurs

3.1 Introduction

De manière analogue aux systèmes continus, on entend par *commande* de systèmes à événements discrets le *pilotage* d'un système par le contrôle de ses entrées. Plus précisément on cherche à obtenir, via la commande, certaines performances¹ spécifiées au préalable. On peut trouver des résultats concernant la commande des GET, avec une approche (*max, +*), dans [Cohen et al., 1989]. La commande optimale proposée est élaborée dans un objectif de *poursuite de trajectoire de sortie*. Le problème résolu est le suivant, partant d'un GET (m entrées, p sorties) dont on connaît la matrice de transfert $H \in \mathcal{D}^{p \times m}$ et une trajectoire de sortie désirée $Y_c \in \mathcal{D}^{p \times 1}$ (consigne de sortie), il est montré qu'il existe une plus grande entrée $U_{opt} \in \mathcal{D}^{m \times 1}$ telle que la sortie résultant de cette entrée ($Y_{opt} = HU_{opt}$) soit inférieure ou égale à la sortie désirée Y_c . La commande U_{opt} est alors optimale vis-à-vis du critère de juste-à-temps (la sortie Y_{opt} est dite en juste-à-temps).

D'autres types de commande existent par exemple dans [Libeaut, 1996] et [Menguy, 1997].

Dans [Cottenceau, 1999], est abordé le problème de la synthèse de "feedbacks" pour les GET. La synthèse se fait en vue d'atteindre, pour le système bouclé, des performances particulières.

3.2 Commande avec modèle de référence : synthèse d'un feedback

3.2.1 Formulation du problème

Le problème général considéré ici est le suivant :

connaissant la matrice de transfert H d'un GET², et se donnant la matrice de transfert d'un modèle de référence G_{ref} rationnel, on cherche à synthétiser un feedback F tel que le système bouclé s'approche "au mieux" du modèle de référence. On notera $M_H(F)$ le transfert du système H contrôlé par le feedback F .

¹ dans le cadre de la commande de systèmes continus, les performances recherchées sont par exemple la stabilité, la rapidité de réponse, la précision etc.

² dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$, $\overline{\mathcal{Z}}_{max}[[\gamma]]$, $\overline{\mathcal{Z}}_{min}[[\delta]]$

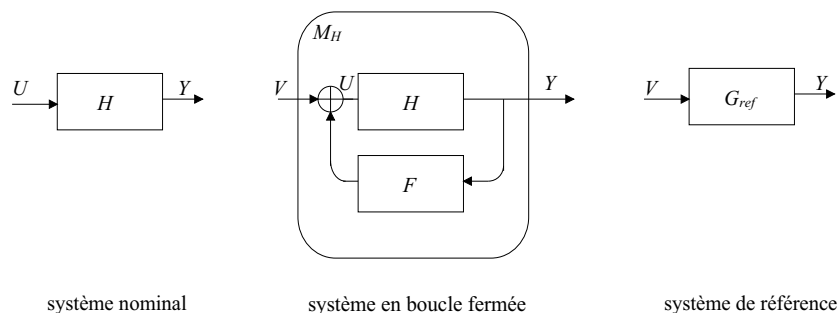


FIG. 3.1 – Commande avec modèle de référence : correction d'un système H par un compensateur F en feedback

Cette synthèse se fera sous les contraintes suivantes :

- (1) Le transfert du système contrôlé, $M_H(F)$ sera inférieur ou égal à G_{ref} , c'est-à-dire que le GET du système contrôlé (H bouclé par F) sera au moins aussi rapide que celui associé à G_{ref} , et que les sorties des jetons du GET contrôlé par F auront lieu avant celles du GET associé au modèle de référence.
- (2) Le feedback F devra être le plus grand possible, c'est-à-dire que le GET qui lui sera associé sera le plus lent possible.

Chercher un feedback le plus grand possible, tout en respectant la contrainte (1) revient à chercher un feedback qui retarde le plus possible l'apparition de jetons dans le GET. Lorsqu'un GET modélise un système de production, le marquage interne correspond au niveau d'encours, ce qui explique l'intérêt d'une réduction du marquage interne.

Dans [Cottenceau, 1999], il est montré que le problème ainsi contraint n'admet pas de solution optimale pour tout modèle de référence. Cela signifie que, pour certains modèles de référence soit il n'y a pas de solution, soit parmi les solutions, il n'en existe pas de plus grande.

Le feedback calculé devra nécessairement être réalisable, donc il faudra qu'il soit causal, en effet la solution optimale du problème contraint par (1) ou (2), lorsqu'elle existe, n'est pas nécessairement causale.

3.2.2 Formulation du problème dans les dioïdes

Il convient tout d'abord de déterminer le transfert d'un système H muni d'un feedback F . D'après la figure 8, le système en boucle fermée vérifie

$$\begin{cases} U = V \oplus FY \\ Y = HU. \end{cases}$$

On peut exprimer la sortie en fonction de l'entrée V

$$\begin{aligned} Y &= H(V \oplus FY) \\ Y &= HV \oplus HFY. \end{aligned}$$

La résolution de cette équation en Y , en utilisant le théorème 2, donne pour le système bouclé le transfert

$$\begin{aligned} Y &= (HF)^*HV \\ &= M_H V. \end{aligned}$$

On peut ainsi donner dans le cas mono-entrée/mono-sortie l'expression de l'application M_H

$$\begin{aligned} M_H : \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]] &\longrightarrow \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]] \\ x &\longrightarrow (Hx)^*H. \end{aligned}$$

Remarque 6 D'après (5), $M_H(x)$ peut s'écrire aussi comme $M_H(x) = (Hx)^*H = (e \oplus Hx \oplus HxHx \oplus \dots)H = H \oplus HxH \oplus HxHxH \oplus \dots = H(xH)^*$.

Le problème de la synthèse de feedback avec modèle de référence présenté en introduction s'exprime dans les dioïdes de la manière suivante. Soit $H \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ le transfert du système ouvert et $G_{ref} \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ un modèle de référence rationnel.

Pour G_{ref} donné, existe-t-il un plus grand F tel que

$$(HF)^*H \preceq G_{ref} \quad ? \tag{3.1}$$

Ce problème est donc lié à un problème de résiduabilité de l'application M_H . Si M_H est résiduable sur $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$, alors la réponse à (32) est oui, et ce pour tout $G_{ref} \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$.

M_H est-elle résiduable sur un dioïde complet ?

Puisque $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ est complet, on peut vérifier si M_H est résiduable. L'application M_H est résiduable si, et seulement si, l'application vérifie les conditions du théorème 4. C'est-à-dire si

$$\begin{aligned} M_H(\varepsilon) &= \varepsilon \\ \text{et } M_H(a \oplus b) &= M_H(a) \oplus M_H(b). \end{aligned}$$

D'une part $M_H(\varepsilon) = (H\varepsilon)^*H = H$, donc $M_H(\varepsilon) \neq \varepsilon$ et $M_H(a \oplus b) = H(aH \oplus bH)^* \neq H(aH)^* \oplus H(bH)^* = M_H(a) \oplus M_H(b)$. Par conséquent M_H n'est pas résiduable sur $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$. Autrement dit, le problème (32) n'a pas de solution optimale pour tout modèle de référence G_{ref} . M_H n'est pas résiduable signifie d'une part que le problème n'a pas de solution pour $G_{ref} \prec H$, en effet $M_H(\varepsilon) = H$. D'autre part, si des solutions existent, l'ensemble des solutions n'admet pas de borne supérieure, il n'y a donc pas de solution optimale.

Dans [Cottenceau, 1999], il est montré que pour certains modèles de référence tel que $G_{ref} \succeq H$, le problème (32) a une solution optimale. Ceci revient, à résoudre le problème (32) non plus dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ entier, mais à résoudre ce problème en imposant des restrictions de M_H résiduables. Autrement dit, il existe au moins une restriction de M_H , à un codomaine inclus dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$, qui est résuable.

Théorème 12 [Cottenceau, 1999] *Soit $M_H : x \rightarrow H(xH)^*$ définie sur des dioïdes complets. Alors l'application $ImM_H|M_H$ est résuable et sa résuée s'exprime par*

$$(ImM_H|M_H)^\sharp(x) = H \backslash x \phi H.$$

Preuve : Prenons $G_{ref} \in ImM_H$. C'est-à-dire, $\exists a \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ tel que $G_{ref} = H(aH)^*$. Montrer que $ImM_H|M_H$ est résuable est équivalent à dire que l'équation $H(xH)^* \preceq H(aH)^*$ admet une plus grande solution $\forall a \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$.

Trouver un plus grand x satisfaisant $H(xH)^* \preceq H(aH)^*$ revient à résoudre une série d'inéquations. En effet $H(xH)^* = H(e \oplus xH \oplus xHxH \oplus \dots)$

Donc $H(xH)^* \preceq H(aH)^* \iff H \oplus HxH \oplus HxHxH \oplus \dots \preceq H(aH)^*$ soit

$$H \preceq H(aH)^* \tag{3.2}$$

$$HxH \preceq H(aH)^* \tag{3.3}$$

$$H(xH)^2 \preceq H(aH)^* \tag{3.4}$$

⋮

La vérification de la première inégalité (33) est immédiate d'après la définition de l'étoile de Kleene. D'après les résultats sur la résudation du produit, on peut établir que $X = H \backslash H(aH)^* \phi H$ est la plus grande solution de l'inégalité (34). Par ailleurs cet élément X satisfait également (35). En effet on a :

$$H(XH)^2 = HXHXH \preceq H(aH)^*XH = (Ha)^*HXH \preceq (Ha)^*H(aH)^* = H(aH)^*$$

donc

$$H(XH)^2 \preceq H(aH)^*.$$

Le même raisonnement peut être tenu pour les inégalités suivantes donc $X = H \backslash H(aH)^* \phi H$, plus grande solution de (34), est aussi solution des autres inégalités, et donc la plus grande solution de l'inégalité $H(xH)^* \preceq H(aH)^*$.

Dans la thèse [Cottenceau, 1999] l'auteur s'intéresse à des restrictions moins "restrictives" de M_H qui sont également résuables.

Théorème 13 *Soit \mathcal{G}_1 et \mathcal{G}_2 les deux sous-ensembles de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ définis par $\mathcal{G}_1 = \{G | \exists A \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]], G = A^*H\}$ et $\mathcal{G}_2 = \{G | \exists B \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]], G = HB^*\}$. $ImM_H \subseteq \mathcal{G}_1$ et $ImM_H \subseteq \mathcal{G}_2$. Les restrictions $\mathcal{G}_1|M_H$ et $\mathcal{G}_2|M_H$ sont résuables. Leurs résuées définies respectivement de \mathcal{G}_1 dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$, et de \mathcal{G}_2 dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ vérifient*

$$(\mathcal{G}_1|M_H)^\sharp(x) = (\mathcal{G}_2|M_H)^\sharp(x) = H \backslash x \phi H.$$

Preuve dans [Cottenceau, 1999, Chapitre 3, p99-100].

3.3 Application à la synthèse de feedbacks

Les résultats théoriques précédents conduisent à la résolution du problème de synthèse de feedback avec modèle de référence. Le théorème 12 est applicable assez directement. On peut donner une expression des résultats précédents en termes de GET et de feedbacks réalisables, donc représentables par des GET. Un problème de causalité peut cependant se poser, en effet le feedback calculé, n'est pas forcément causal, il se pose donc un problème de réalisation.

Théorème 14 [Cottenceau, 1999] Soit $I_{d|+}$, l'injection canonique de l'ensemble des causaux, noté $\mathcal{M}_{in}^{ax+}[[\gamma, \delta]]$, dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$

$$I_{d|+} : \mathcal{M}_{in}^{ax+}[[\gamma, \delta]] \rightarrow \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$$

$$x \mapsto x$$

alors, $I_{d|+}$ est résiduable et sa résiduée sera notée Pr_+ .

Preuve: D'une part $I_{d|+}$ est s.c.i. puisque

$$I_{d|+}(\bigoplus x) = \bigoplus I_{d|+}(x)$$

En effet la somme d'éléments causaux est causale (voir définition 13) et

$$I_{d|+}(\varepsilon) = \varepsilon$$

puisque par définition, ε est causal. Donc $I_{d|+}$ est résiduable.

Exemple 4 Le calcul pratique de Pr_+ est simple. $Pr_+(x)$ correspond au plus grand élément causal inférieur à x , il suffit donc de garder dans x uniquement les monômes causaux. Soit $a = \gamma^{-2}\delta^{-2} \oplus \gamma^{-1}\delta^1 \oplus \gamma^2\delta^2$ un élément de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$. Le plus grand élément causal inférieur à a est simplement $Pr_+(a) = \delta^1 \oplus \gamma^2\delta^2$. D'un point de vue graphique, on ne garde dans $Pr_+(a)$ que les sommets de a contenus dans le cadran nord-est.

Théorème 15 [Cottenceau, 1999] Soit H le transfert d'un GET. Pour tout modèle de référence G_{ref} réalisable s'exprimant $G_{ref} = M_H(A)$ où A est un transfert réalisable, il existe un plus grand feedback réalisable F tel que le transfert du système bouclé soit celui de G_{ref} . Ce feedback est

$$F = Pr_+(H \setminus G_{ref} \not\! \! \! / H).$$

Remarque 7 Le modèle de référence $G_{ref} = H$ appartient à ImM_H , c'est-à-dire qu'il existe toujours un plus grand correcteur F permettant de conserver le comportement entrée/sortie initial tout en retardant au plus l'entrée.

Remarque 8 Les résultats présentés ici dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ peuvent sans difficulté se transposer dans les dioïdes $\overline{\mathbb{Z}}_{max}[[\gamma]]$ et $\overline{\mathbb{Z}}_{min}[[\delta]]$.

3.4 Exemples

3.4.1 Feedback laissant inchangé le transfert : cas SISO

Le GET de la figure 9 représente deux cellules de production en série. La première contient une machine de temps de traitement de 1 unité de temps et de capacité égale à 1. La seconde possède une machine de temps de traitement de 3 unités de temps et de capacité de 2. Entre les deux, un convoyeur met 2 unités de temps à alimenter la seconde machine. La seconde machine possède un buffer d'entrée à capacité illimitée. On peut remarquer que la deuxième cellule est une machine goulot, c'est-à-dire qu'elle conditionne le taux de production de la ligne. On peut calculer les transferts suivants dans le GET de la figure 9 (exprimés dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$)

La cellule 1 a un transfert égal à $\delta(\gamma\delta)^*$.

Le convoyeur a un transfert égal à δ^2 .

La cellule 2 a un transfert égal à $\delta^3(\gamma^2\delta^3)^*$.

Le transfert global de cette ligne est

$$y = hu = (\delta^3(\gamma^2\delta^3)^* \otimes \delta^2 \otimes (\delta(\gamma\delta)^*).$$

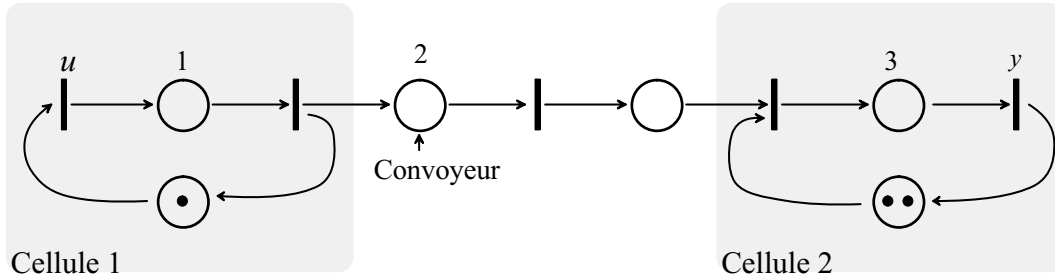


FIG. 3.2 – GET SISO

On peut apporter les simplifications suivantes :

$$\begin{aligned} h &= \delta^3 \delta \delta^2 (\gamma\delta)^* (\gamma^2\delta^3)^* \\ &= \delta^6 (\gamma\delta)^* (\gamma^2\delta^3)^* \\ &= \delta^6 (\gamma^2\delta^3)^* (e \oplus \gamma\delta \oplus \gamma^2\delta^2 \oplus \dots) \\ &= \delta^6 ((\gamma^2\delta^3)^* \oplus \gamma\delta(\gamma^2\delta^3)^*) \end{aligned}$$

Le développement infini de la dernière expression n'est pas nécessaire puisque $\gamma^2\delta^2(\gamma^2\delta^3)^* \preceq (\gamma^2\delta^3)^*$. Finalement on obtient l'expression du transfert entrée sortie suivant

$$h = (\delta^6 \oplus \gamma\delta^7)(\gamma^2\delta^3)^*.$$

Afin de calculer un feedback laissant le transfert inchangé, il faut calculer $h \setminus h \phi h$.

$$h \setminus h = \frac{(\delta^6 \oplus \gamma \delta^7)(\gamma^2 \delta^3)^*}{(\delta^6 \oplus \gamma \delta^7)(\gamma^2 \delta^3)^*} \quad (3.5)$$

$$= \frac{(\delta^6 \oplus \gamma \delta^7)(\gamma^2 \delta^3)^*}{\delta^6(\gamma^2 \delta^3)^* \oplus \gamma \delta^7(\gamma^2 \delta^3)^*} \quad (3.6)$$

$$= \frac{(\delta^6 \oplus \gamma \delta^7)(\gamma^2 \delta^3)^*}{\delta^6(\gamma^2 \delta^3)^*} \wedge \frac{(\delta^6 \oplus \gamma \delta^7)(\gamma^2 \delta^3)^*}{\gamma \delta^7(\gamma^2 \delta^3)^*} \quad (3.7)$$

$$= \delta^{-6} \frac{(\delta^6 \oplus \gamma \delta^7)(\gamma^2 \delta^3)^*}{(\gamma^2 \delta^3)^*} \wedge \gamma^{-1} \delta^{-7} \frac{(\delta^6 \oplus \gamma \delta^7)(\gamma^2 \delta^3)^*}{(\gamma^2 \delta^3)^*} \quad (3.8)$$

$$= \delta^{-6} (\delta^6 \oplus \gamma^1 \delta^7)(\gamma^2 \delta^3)^* \wedge \gamma^{-1} \delta^{-7} (\delta^6 \oplus \gamma^1 \delta^7)(\gamma^2 \delta^3)^* \quad (3.9)$$

$$= (e \oplus \gamma \delta^1)(\gamma^2 \delta^3)^* \wedge (\gamma^{-1} \delta^{-1} \oplus e)(\gamma^2 \delta^3)^* \quad (3.10)$$

$$= (e \oplus \gamma \delta)(\gamma^2 \delta^3)^* \quad (3.11)$$

(36) \rightarrow (37) : distributivité de l'addition

(37) \rightarrow (38) : égalité (f.3) de (§2.4)

(38) \rightarrow (39) : égalité (f.5) de (§2.4) les monômes sont inversibles dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$

(39) \rightarrow (40) : égalité (16)

(40) \rightarrow (41) : distributivité du produit

(41) \rightarrow (42) : $(\gamma^{-1} \delta^{-1} \oplus e)(\gamma^2 \delta^3)^* \succeq (e \oplus \gamma^1 \delta^1)(\gamma^2 \delta^3)^*$

Soit

$$h \setminus h \phi h = \frac{(e \oplus \gamma \delta)(\gamma^2 \delta^3)^*}{(\delta^6 \oplus \gamma^1 \delta^7)(\gamma^2 \delta^3)^*} \quad (3.12)$$

$$= \frac{(e \oplus \gamma^1 \delta^1)(\gamma^2 \delta^3)^*}{\delta^6(e \oplus \gamma^1 \delta^1)(\gamma^2 \delta^3)^*} \quad (3.13)$$

$$= \delta^{-6} \frac{(e \oplus \gamma^1 \delta^1)(\gamma^2 \delta^3)^*}{(e \oplus \gamma^1 \delta^1)(\gamma^2 \delta^3)^*} \quad (3.14)$$

$$= \delta^{-6} (e \oplus \gamma^1 \delta^1)(\gamma^2 \delta^3)^* \quad (3.15)$$

(43) \rightarrow (44) : factorisation au dénominateur

(44) \rightarrow (45) : égalité (f.5) de (§2.4) les monômes sont inversibles dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$

(45) \rightarrow (46) : égalité (15)

On peut remarquer que cette expression n'est pas causale (en raison de δ^{-6}), mais c'est une série périodique.

Il existe donc un plus grand feedback réalisable inférieur ou égal à $h \setminus h \phi h$ qui est

$$Pr_+(h \setminus h \phi h).$$

Cette projection consiste simplement à supprimer, dans le représentant de $h \setminus h \phi h$, tous les monômes d'exposants négatifs.

Pour cela on peut développer $h \setminus h \phi h$.

$$\begin{aligned} h \setminus h \phi h &= \delta^{-6}(e \oplus \gamma\delta)(\gamma^2\delta^3)^* \\ &= \delta^{-6} \oplus \gamma\delta^{-5} \oplus \gamma^2\delta^{-3} \oplus \gamma^3\delta^{-2} \oplus \gamma^4\delta^0 \oplus \gamma^5\delta^1 \oplus \dots \end{aligned}$$

Le premier monôme causal dans cette représentation est le monôme $\gamma^4\delta^0$. On a donc l'expression du plus grand élément causal inférieur à $h \setminus h \phi h$ qui est

$$Pr_+(h \setminus h \phi h) = (\gamma^4 \oplus \gamma^5\delta)(\gamma^2\delta^3)^*.$$

Une réalisation possible de ce feedback est représentée sur la figure 10, il peut cependant en exister plusieurs.

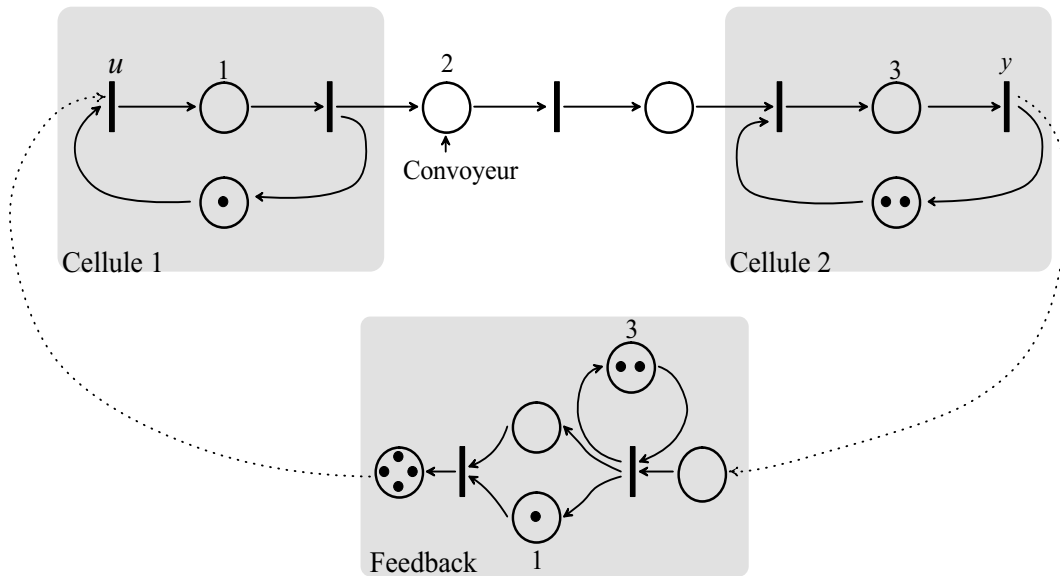


FIG. 3.3 – Bouclage conservant le transfert

3.4.2 Feedback imposant un transfert différent : cas MIMO

Les résultats précédents (Théorème 12, 13, 14, 15) s'étendent de manière naturelle au cas multi-entrées/multi-sorties.

On utilise ici le système décrit sur la Figure 11, on va désormais calculer un feedback qui, une fois appliqué au GET, impose un régime différent au système.

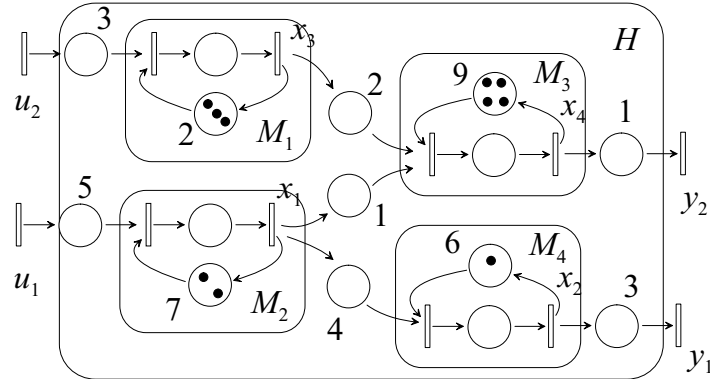


FIG. 3.4 – GET MIMO

Calcul du transfert global de la cellule

$$X = \begin{pmatrix} \gamma^2 \delta^7 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \delta^4 & \gamma \delta^6 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \gamma^3 \delta^2 & \varepsilon \\ \delta & \varepsilon & \delta^2 & \gamma^4 \delta^9 \end{pmatrix} X \oplus \begin{pmatrix} \delta^5 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^3 \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u1 \\ u2 \end{pmatrix}$$

$$Y = \begin{pmatrix} \varepsilon & \delta^3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta \end{pmatrix} X$$

$$Y = HU$$

$$\text{avec } H = CA^*B = \begin{pmatrix} \delta^{12}(\gamma\delta^6)^* & \varepsilon \\ \delta^7(\gamma^2\delta^7)^* & (\delta^6 \oplus \gamma^3\delta^8)(\gamma^4\delta^9)^* \end{pmatrix}$$

$$\text{finalement } Y = \begin{pmatrix} \delta^{12}(\gamma\delta^6)^* & \varepsilon \\ \delta^7(\gamma^2\delta^7)^* & (\delta^6 \oplus \gamma^3\delta^8)(\gamma^4\delta^9)^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u1 \\ u2 \end{pmatrix}$$

Nous choisissons un modèle de référence tel que l'optimalité et l'existence du feedback soit garantie, c'est-à-dire, vérifiant le théorème 12. En accord avec cette proposition, cette spécification doit s'exprimer sous la forme $G_{ref} = (HF_0)^*H$.

Nous prenons

$$F_0 = \begin{pmatrix} \gamma^3 & \gamma^3 \\ \gamma^3 & \gamma^3 \end{pmatrix}$$

$$\text{alors } G_{ref} = \left(H \begin{pmatrix} \gamma^3 & \gamma^3 \\ \gamma^3 & \gamma^3 \end{pmatrix} \right)^* H = \begin{pmatrix} \delta^{12}(\gamma\delta^6)^* & \gamma^3\delta^{18}(\gamma\delta^6)^* \\ \delta^7 \oplus \gamma^2\delta^{14} \oplus \gamma^3\delta^{19}(\gamma\delta^6)^* & \delta^6 \oplus \gamma^3\delta^{13} \oplus \gamma^4\delta^{15} \oplus \gamma^5\delta^{20} \oplus \gamma^6\delta^{25}(\gamma\delta^6)^* \end{pmatrix}$$

Le calcul du feedback optimal, pour respecter ce modèle de référence, passe donc par le calcul de $H \setminus G_{ref} \setminus H$.

On obtient alors

$$H \backslash G_{ref} \phi H = \begin{pmatrix} \delta^{-18}(\gamma^1 \delta^6)^* & \gamma^3 \oplus \gamma^4 \delta^2 \oplus \gamma^5 \delta^7 \oplus (\gamma^6 \delta^{12})(\gamma^1 \delta^6)^* \\ \delta^{-17}(\gamma^1 \delta^6)^* & \delta^{-6} \oplus \gamma^3 \delta^1 \oplus \gamma^4 \delta^3 \oplus \gamma^5 \delta^8 \oplus (\gamma^6 \delta^{13})(\gamma^1 \delta^6)^* \end{pmatrix}$$

Il existe donc un plus grand feedback réalisable (Théorème 15) inférieur ou égal à $H \backslash G_{ref} \phi H$ qui est

$$F = Pr_+(H \backslash G_{ref} \phi H) = \begin{pmatrix} \gamma^3(\gamma^1 \delta^6)^* & \gamma^3 \oplus \gamma^4 \delta^2 \oplus \gamma^5 \delta^7 \oplus (\gamma^6 \delta^{12})(\gamma^1 \delta^6)^* \\ \gamma^3 \delta(\gamma^1 \delta^6)^* & \gamma^3 \delta^1 \oplus \gamma^4 \delta^3 \oplus \gamma^5 \delta^8 \oplus (\gamma^6 \delta^{13})(\gamma^1 \delta^6)^* \end{pmatrix}$$

On donne une réalisation de ce feedback sur la figure 12.

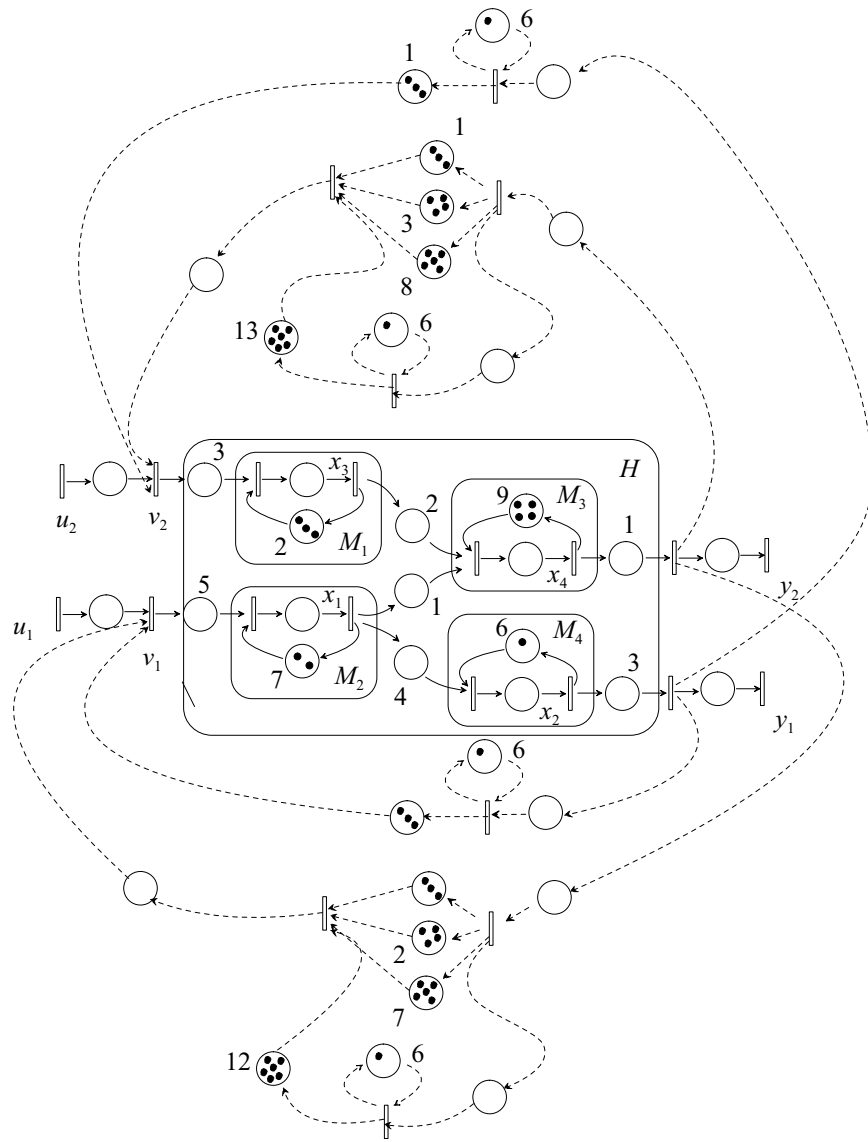


FIG. 3.5 – GET MIMO

Remarque 9 Des algorithmes permettant d'automatiser la manipulation des séries périodiques ont été développés et implantés sous forme de script MATLAB et de classes C++.

Chapitre 4

Etude de la robustesse

4.1 Introduction

Nous avons vu qu'il était possible d'assurer la synthèse d'un plus grand correcteur F tel que $(HF)^*H \preceq G_{ref}$.

On se propose d'analyser ici l'impact des variations du système H sur le comportement de la boucle fermée $(HF)^*H$. Plus précisément nous allons chercher à évaluer dans quelle plage le système peut évoluer sans remettre en cause la performance du système en boucle fermée vis-à-vis de la spécification considérée lors de la synthèse, à savoir $(HF)^*H \preceq G_{ref}$.

4.2 Formulation du problème

On peut d'abord déterminer le transfert d'un système H muni d'un feedback F . D'après la figure 13.a, le système en boucle fermée vérifie

$$\begin{cases} U = V \oplus FY \\ Y = HU. \end{cases}$$

On peut exprimer la sortie en fonction de l'entrée V

$$\begin{aligned} Y &= H(V \oplus FY) \\ Y &= HV \oplus HFY. \end{aligned}$$

La résolution de cette équation en Y , en utilisant le théorème 2, donne pour le système bouclé le transfert

$$\begin{aligned} Y &= (HF)^*HV \\ &= G_F V. \end{aligned}$$

On peut exprimer ce résultat dans le cas mono-entrée/mono-sortie, sous la forme d'une application M_H

$$\begin{aligned} M_H : \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]] &\longrightarrow \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]] \\ x &\longrightarrow (Hx)^*H. \end{aligned}$$

Le problème traité dans le chapitre précédent était de déterminer si pour un modèle de référence G_{ref} donné, il existait un plus grand feedback F tel que

$$(HF)^*H \preceq G_{ref}.$$

Nous avons vu que ce problème était lié à un problème de résiduation, et qu'en imposant certaines restrictions sur le modèle de référence G_{ref} , ce problème a une solution

$$F \preceq H \setminus G_{ref} / H.$$

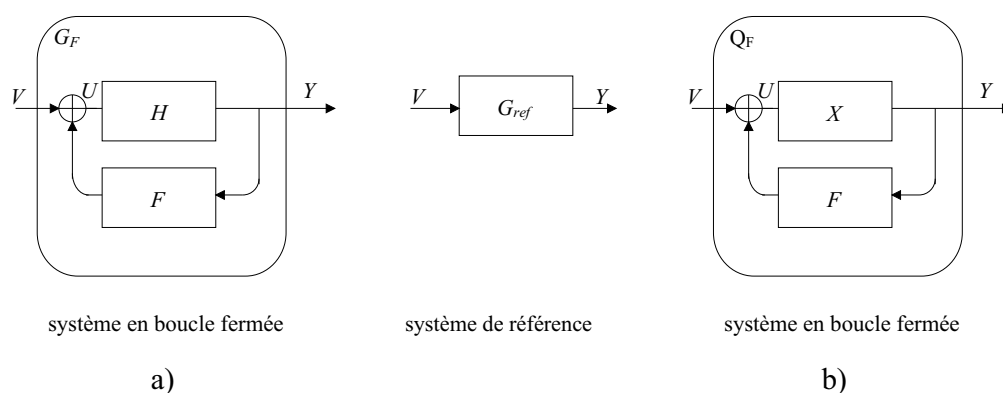


FIG. 4.1 – Etude des variations du système H sur le comportement du système en boucle fermée

Dans cette partie, nous allons nous intéresser au système dont le transfert nominal est donné par le modèle H mais qui peut dériver dans le temps (modifications du nombre de jetons, variations des temporisations). Il se pose alors un problème de robustesse de la commande mise en oeuvre, en effet le feedback F a été calculé pour le modèle nominal H , mais quel sera l'impact de la variation du système réel (nous noterons H_r le transfert réel) vis-à-vis de la spécification imposée à la commande, à savoir $(H_r F)^* H_r \preceq G_{ref}$? Nous allons montrer qu'il est possible d'établir une borne sup à l'ensemble des systèmes garantissant le respect de cette spécification (c'est-à-dire $H_r \leq H_{rmax}$). Elle est obtenue en considérant un problème particulier de résiduation.

On détermine d'abord le transfert de la figure 13.b

$$\begin{cases} U = V \oplus FY \\ Y = XU. \end{cases}$$

On exprime ensuite Y en fonction de U

$$\begin{aligned} Y &= X(V \oplus FY) \\ Y &= XV \oplus XFY. \end{aligned}$$

On peut comme précédemment résoudre cette équation au point fixe, en utilisant le théorème 2, nous avons alors le transfert suivant

$$Y = (XF)^*XV.$$

Le rôle du transfert X sur le comportement en boucle fermée peut-être analysé dans le cas mono-entrée/mono-sortie en considérant l'application suivante :

$$\begin{aligned} Q_F : \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]] &\longrightarrow \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]] \\ x &\longrightarrow (xF)^*x \end{aligned}$$

Cette application traduit le comportement d'un système x rebouclé par un feedback F .

Remarque 10 *On peut aussi écrire $Q_F(x)$, comme $Q_F(x) = (e \oplus xF \oplus xFx \oplus \dots)x = x \oplus xFx \oplus xFx \oplus \dots = x(Fx)^*$.*

On peut formuler le problème de robustesse énoncé en introduction de la manière suivante : soit $H \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ la fonction de transfert du système nominal, et $F \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ un feedback tel que l'on respecte la spécification suivante $(HF)^*H \preceq G_{ref}$. Pour ce feedback F , nous allons essayer de déterminer quelles sont les variations acceptables du système x , garantissant

$$x(Fx)^* \preceq G_{ref}. \quad (4.1)$$

On peut voir ici, qu'il s'agit encore d'un problème de résiduation de l'application Q_F , en effet si Q_F est résiduable sur $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$, on peut trouver une plus grande solution au problème (47), pour tout $G_{ref} \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$.

Q_F est-elle résiduable sur un dioïde complet ?

Pour savoir si une application est résiduable sur un dioïde complet, il suffit de vérifier si l'application, ici Q_F , respecte les conditions du théorème 4. C'est-à-dire si

$$\begin{aligned} Q_F(\varepsilon) &= \varepsilon \\ \text{et } Q_F(a \oplus b) &= Q_F(a) \oplus Q_F(b). \end{aligned}$$

La première condition est respectée, $Q_F(\varepsilon) = \varepsilon(F\varepsilon)^* = \varepsilon$. Pour la deuxième condition $Q_F(a \oplus b) = (a \oplus b)(F(a \oplus b))^* \neq a(Fa)^* \oplus b(Fb)^* = Q_F(a) \oplus Q_F(b)$. Donc Q_F n'est pas résiduable, il n'y a donc pas de solution optimale à (47).

Proposition 1 *Soit l'application $Q_F : x \rightarrow x(Fx)^*$ définie sur des dioïdes complets. L'application $Id_{ImQ_F}|Q_F$ est résiduable et sa résiduée s'exprime par*

$$(Id_{ImQ_F}|Q_F)^\sharp = Id_{ImQ_F}$$

avec $Id|_{ImQ_F}$ l'injection canonique de ImQ_F dans \mathcal{D}

Preuve: Prenons $G_C \in ImQ_F$, c'est-à-dire, $\exists y \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ tel que $G_C = y(Fy)^*$. Montrer que $ImQ_F|_{Q_F}$ est résiduable est équivalent à montrer que l'inéquation $x(Fx)^* \preceq G_C = y(Fy)^*$ admet une plus grande solution $\forall y \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$.

Trouver un plus grand x satisfaisant $x(Fx)^* \preceq y(Fy)^*$ revient à résoudre une série d'inéquations. En effet $x(Fx)^* = x(e \oplus Fx \oplus Fx Fx \oplus \dots)$.

Donc $x(Fx)^* \preceq y(Fy)^* \iff x \oplus xFx \oplus xFx Fx \oplus \dots \preceq y(Fy)^*$ soit

$$x \preceq y(Fy)^* \quad (4.2)$$

$$xFx \preceq y(Fy)^* \quad (4.3)$$

$$xFx Fx \preceq y(Fy)^* \quad (4.4)$$

⋮

Soit $X = y(Fy)^*$ la plus grande solution de la première inéquation (4.2). Par ailleurs vérifions que X est solution des autres inéquations.

Pour (4.3)

$$\begin{aligned} XFX &= y(Fy)^* Fy(Fy)^* \\ &= y(Fy)^* (Fy)^+ \\ &= y(Fy)^+ \end{aligned}$$

$$\text{Donc } XFX \preceq y(Fy)^* = X$$

Par isotonie on aura

$$XFXFX \preceq XFX \preceq X$$

qui permet de vérifier (50). En appliquant de manière récurrente ce principe, toutes les inégalités sont satisfaites.

En conclusion X est la plus grande solution de (48) et est solution de toutes les inéquations par conséquent $X = y(Fy)^*$ est la plus grande solution de l'inéquation $x(Fx)^* \preceq y(Fy)^*$.

Remarque 11 Il est intéressant de remarquer que l'application $x \rightarrow x(Fx)^*$ est une fermeture en effet :

$$\begin{aligned} x(Fx)^*(Fx(Fx)^*)^* &= x(Fx)^*((Fx)^+)^* = x(Fx)^* \\ \text{c'est à dire} \quad Q_F \circ Q_F &= Q_F. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Rappel : on a $(a^+)^* = a^*$ (eq. 4), et $a^*a^* = a^*$ (eq. 7).

De plus $x(Fx)^* = x \oplus xFx \oplus \dots \succeq x$, c'est-à-dire que $Q_F \succeq Id$. D'après la définition d'une fermeture (définition 11), Q_F est une fermeture.

Cette application étant une fermeture, la proposition 1 aurait pu être prouvée en utilisant le théorème 7 concernant la résiduation de fermeture. On pose $f = Q_F$

$$\text{On a } (Imf|f)^\sharp = (ImQ_F|Q_F)^\sharp = Id|Imf = Id|ImQ_F.$$

Proposition 2 Soit l'application $ImQ_F|Q_F : x \rightarrow x(Fx)^*$ et sa résiduée $(ImQ_F|Q_F)^\sharp = Id|ImQ_F$. Nous avons :

$$ImQ_F|Q_F \circ (ImQ_F|Q_F)^\sharp = ImQ_F|Q_F \circ Id|ImQ_F = Id|ImQ_F \quad (\text{Identité de } ImQ_F)$$

Preuve:

D'après le théorème 4, on a $ImQ_F|Q_F \circ Id|ImQ_F \preceq Id|ImQ_F$, mais clairement en considérant un élément $x = y(Fy)^* \in ImQ_F$ on a

$$Q_F(x) = Q_F(Q_F(y)) = Q_F(y(Fy)^*) = y(Fy)^*(Fy(Fy)^*)^* = y(Fy)^* = x.$$

Puisque Q_F est une fermeture.

Le résultat de la proposition 1 conduit au résultat suivant

Proposition 3 Soit un système en boucle fermée de transfert $(HF)^*H$, le système le plus lent (plus grand au sens du dioïde) conservant le même comportement est $Hr_{max} = (HF)^*H$.

Preuve: Il s'agit d'une application directe des propositions 1 et 2. Puisque Q_F est résiduable, que la résiduée est $Id|Imf$ et que $(HF)^*H \in ImQ_F$ nous avons directement

$$Hr_{max} = \bigoplus_{\{x|(xF)^*x \preceq (HF)^*H\}} x = (HF)^*H$$

Et d'après la proposition 2, Hr_{max} est solution, c'est-à-dire $Hr_{max}(FHr_{max})^* = (HF)^*H$.

Proposition 4 Tout système X plus rapide (inférieur au sens du dioïde) que Hr_{max} vérifie la spécification $(XF)^*X \preceq (HF)^*H$

Preuve: Considérons $X \preceq Hr_{max}$. Par isotonie du produit et de la somme nous avons immédiatement :

$$(XF)^*X \preceq (Hr_{max}F)^*Hr_{max} = (HF)^*H$$

En résumé les propositions 2 et 3 nous conduisent à énoncer le résultat suivant : quelque soit le comportement du système tel que son transfert H_r soit inférieur à $Hr_{max} = (HF)^*H$, il garantit que le transfert en boucle fermée est inférieur à $(HF)^*H$.

Proposition 5 Soit le comportement réel du système décrit par le transfert H_r ,

$\forall H_r$ tel que $H \preceq_H r \preceq Hr_{max}$ alors

$$(HrF)^*H_r = (HF)^*H = (Hr_{max}F)^*Hr_{max}$$

Preuve: Par isotonie $(HF)^*H \preceq (H_rF)^*H_r \preceq (Hr_{max}F)^*Hr_{max}$, or la proposition 4 a montré que $(HF)^*H = (Hr_{max}F)^*Hr_{max}$ qui conduit au résultat.

Cette proposition indique que quelque que soit le comportement du système réel dans l'intervalle $[H, Hr_{max}]$, le comportement en boucle fermée est inchangé.

4.3 Application

Les propositions précédentes s'étendent naturellement au cas multi-entrées/multi-sorties. Nous allons à travers un exemple, illustrer ces résultats. On va pour cela prendre le système de la Figure 11. Pour ce système la fonction de transfert H est

$$H = \begin{pmatrix} \delta^{12}(\gamma\delta^6)^* & \varepsilon \\ \delta^7(\gamma^2\delta^7)^* & (\delta^6 \oplus \gamma^3\delta^8)(\gamma^4\delta^9)^* \end{pmatrix}$$

Nous avons alors pris comme modèle de référence G_{ref} , la spécification suivante

$$G_{ref} = \left(H \begin{pmatrix} \gamma^3 & \gamma^3 \\ \gamma^3 & \gamma^3 \end{pmatrix} \right)^* H = \begin{pmatrix} \delta^{12}(\gamma\delta^6)^* & \gamma^3\delta^{18}(\gamma\delta^6)^* \\ \delta^7 \oplus \gamma^2\delta^{14} \oplus \gamma^3\delta^{19}(\gamma\delta^6)^* & \delta^6 \oplus \gamma^3\delta^{13} \oplus \gamma^4\delta^{15} \oplus \gamma^5\delta^{20} \oplus \gamma^6\delta^{25}(\gamma\delta^6)^* \end{pmatrix}$$

et nous avons alors obtenu le plus grand feedback réalisable F suivant

$$F = Pr_+(H \setminus G_{ref} \setminus H) = \begin{pmatrix} \gamma^3(\gamma^1\delta^6)^* & \gamma^3 \oplus \gamma^4\delta^2 \oplus \gamma^5\delta^7 \oplus (\gamma^6\delta^{12})(\gamma^1\delta^6)^* \\ \gamma^3\delta(\gamma^1\delta^6)^* & \gamma^3\delta^1 \oplus \gamma^4\delta^3 \oplus \gamma^5\delta^8 \oplus (\gamma^6\delta^{13})(\gamma^1\delta^6)^* \end{pmatrix}.$$

Tout d'abord nous constatons que ce feedback F vérifie la spécification

$$(HF)^*H \preceq G_{ref}.$$

On calcule d'abord $(HF)^*H$

$$\begin{aligned} (HF)^*H &= \left(\begin{pmatrix} \delta^{12}(\gamma\delta^6)^* & \varepsilon \\ \delta^7(\gamma^2\delta^7)^* & (\delta^6 \oplus \gamma^3\delta^8)(\gamma^4\delta^9)^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma^3(\gamma^1\delta^6)^* & \gamma^3 \oplus \gamma^4\delta^2 \oplus \gamma^5\delta^7 \oplus (\gamma^6\delta^{12})(\gamma^1\delta^6)^* \\ \gamma^3\delta(\gamma^1\delta^6)^* & \gamma^3\delta^1 \oplus \gamma^4\delta^3 \oplus \gamma^5\delta^8 \oplus (\gamma^6\delta^{13})(\gamma^1\delta^6)^* \end{pmatrix} \right)^* \begin{pmatrix} \delta^{12}(\gamma\delta^6)^* & \varepsilon \\ \delta^7(\gamma^2\delta^7)^* & (\delta^6 \oplus \gamma^3\delta^8)(\gamma^4\delta^9)^* \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \delta^{12}(\gamma^1\delta^6)^* & (\gamma^3\delta^{18})(\gamma^1\delta^6)^* \\ \delta^7 \oplus \gamma^2\delta^{14} \oplus (\gamma^3\delta^{19})(\gamma^1\delta^6)^* & \delta^6 \oplus \gamma^3\delta^{13} \oplus \gamma^4\delta^{15} \oplus \gamma^5\delta^{20} \oplus (\gamma^6\delta^{25})(\gamma^1\delta^6)^* \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{On a } (HF)^*H = \begin{pmatrix} \delta^{12}(\gamma^1\delta^6)^* & (\gamma^3\delta^{18})(\gamma^1\delta^6)^* \\ \delta^7 \oplus \gamma^2\delta^{14} \oplus (\gamma^3\delta^{19})(\gamma^1\delta^6)^* & \delta^6 \oplus \gamma^3\delta^{13} \oplus \gamma^4\delta^{15} \oplus \gamma^5\delta^{20} \oplus (\gamma^6\delta^{25})(\gamma^1\delta^6)^* \end{pmatrix}.$$

On peut remarquer ici que nous avons $(HF)^*H = G_{ref}$.

Nous allons maintenant étudier la robustesse de ce feedback F en cas de dérive du système H . Pour cela on calcule les variations acceptables du système H , on rappelle que le transfert du système H bouclé par le feedback F est $(HF)^*H = G_{ref}$. On suppose maintenant que le système H varie dans le temps (modifications du nombre de jetons, variations des temporisations), on sait d'après les résultats précédents qu'étudier la robustesse du feedback F , revient à résoudre l'inéquation suivante :

$$(xF)^*x \preceq G_{ref}.$$

D'après la proposition 1, on sait que le plus grand x satisfaisant cette inéquation est $X = G_{ref}$.

On peut maintenant déterminer la plage de variations acceptables de H .

On appelle H_r , le transfert réel du système H , d'après la proposition 4, la variation maximale (H_{rmax}), acceptable du système H_r est $H_{rmax} = (HF)^*H = G_{ref}$, on peut alors donner un encadrement pour le système H_r

$$H \preceq H_r \preceq H_{rmax}.$$

Caractérisons graphiquement cette plage de variations, on pose pour H

$$\begin{aligned} H_{11} &= \delta^{12}(\gamma\delta^6)^* & H_{12} &= \varepsilon \\ H_{21} &= \delta^7(\gamma^2\delta^7)^* & H_{22} &= (\delta^6 \oplus \gamma^3\delta^8)(\gamma^4\delta^9)^* \end{aligned}$$

et pour $H_{r_{max}}$

$$\begin{aligned} Hr_{max11} &= \delta^{12}(\gamma\delta^6)^* & Hr_{max12} &= (\gamma^3\delta^{18})(\gamma^1\delta^6)^* \\ Hr_{max21} &= \delta^7 \oplus \gamma^2\delta^{14} \oplus (\gamma^3\delta^{19})(\gamma^1\delta^6)^* & Hr_{max22} &= \delta^6 \oplus \gamma^3\delta^{13} \oplus \gamma^4\delta^{15} \oplus \gamma^5\delta^{20} \oplus (\gamma^6\delta^{25})(\gamma^1\delta^6)^* \end{aligned}$$

On peut voir sur la figure 14, la marge pour chacun des éléments de la matrice de transfert. D'après la proposition 4, toutes variations de H_r , comprises dans ces zones grisées, vérifient la spécification $(H_r F)^* H_r \preceq (H F)^* H$. On sait même, d'après la proposition 5 que $\forall H_r$ tel que $H \preceq H_r \preceq H_{r_{max}}$ nous avons l'égalité suivante :

$$(H_r F)^* H_r = (H F)^* H = (H_{r_{max}} F)^* H_{r_{max}}.$$

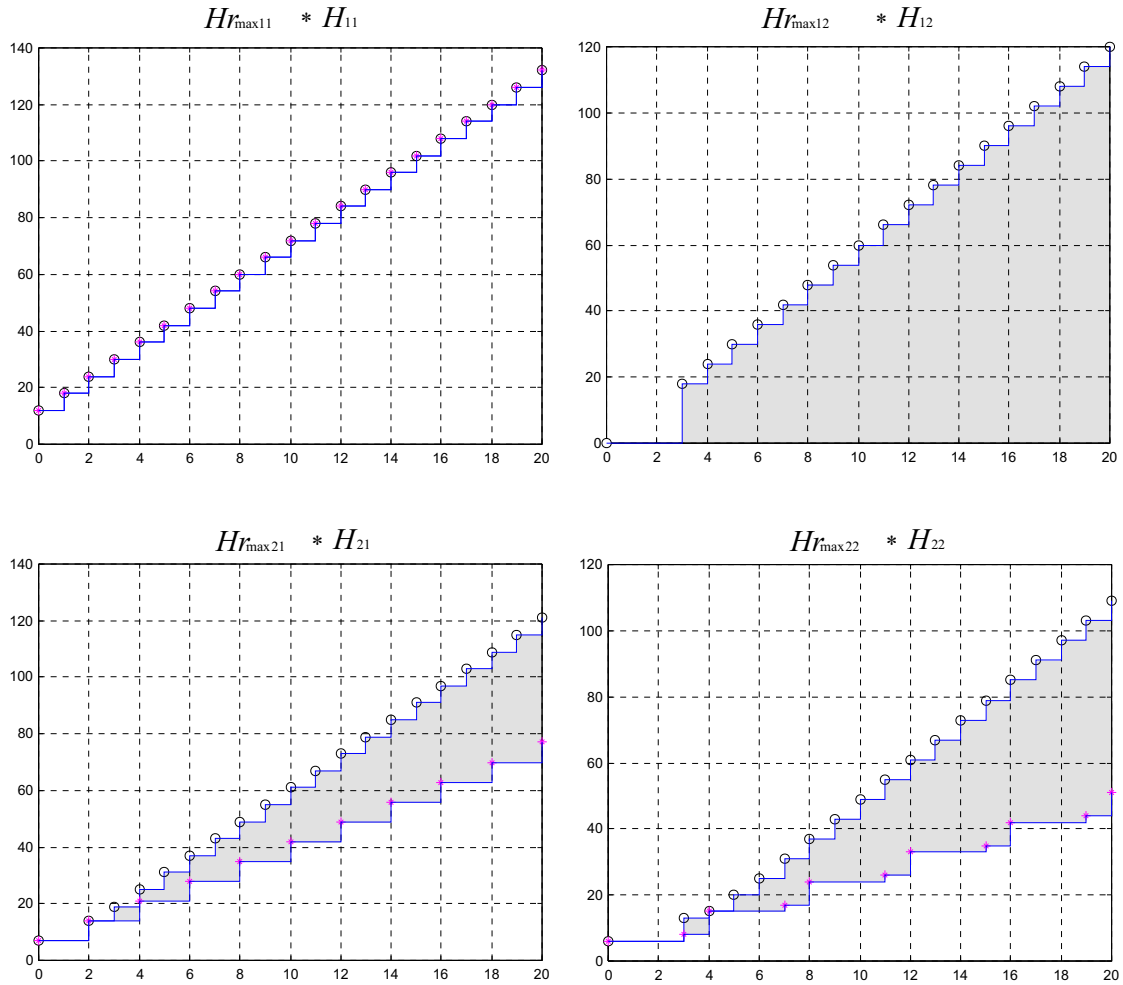


FIG. 4.2 – $H \preceq H_r \preceq H_{r_{max}}$

Prenons pour nouvelle fonction de transfert H_r la matrice suivante :

$$H_r = \begin{pmatrix} \delta^{12}(\gamma\delta^6)^* & \varepsilon \\ \delta^7(\gamma^2\delta^7)^* & \delta^6 \oplus \gamma^3\delta^{10} \oplus \gamma^4\delta^{15} \oplus (\gamma^7\delta^{20})(\gamma^4\delta^5)^* \end{pmatrix}$$

Ici, nous avons uniquement changé le terme H_{r22} , sur la figure 15 nous avons tracé H , H_{rmax} , et H_r on peut remarquer que H_r est bien compris entre $H \preceq H_r \preceq H_{rmax}$

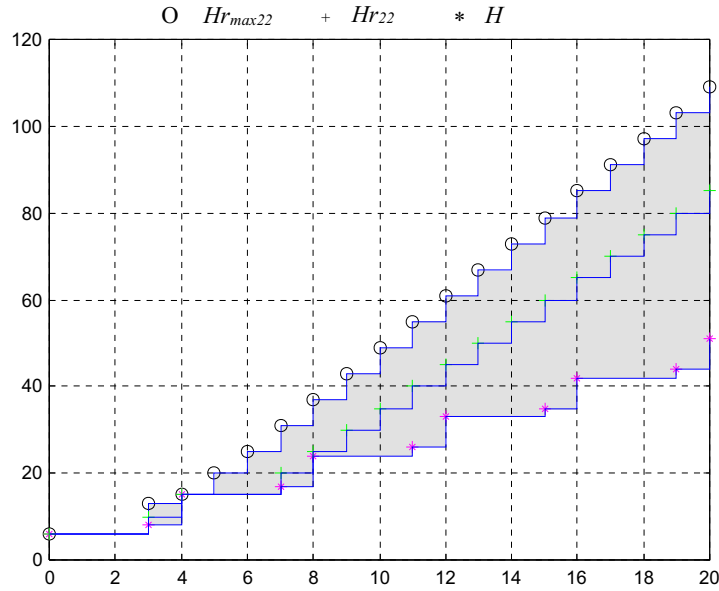


FIG. 4.3 – Nouvelle fonction de transfert H_r

Nous allons maintenant vérifier si l'inéquation $(H_r F)^* H_r \preceq G_{ref}$ est toujours vraie.

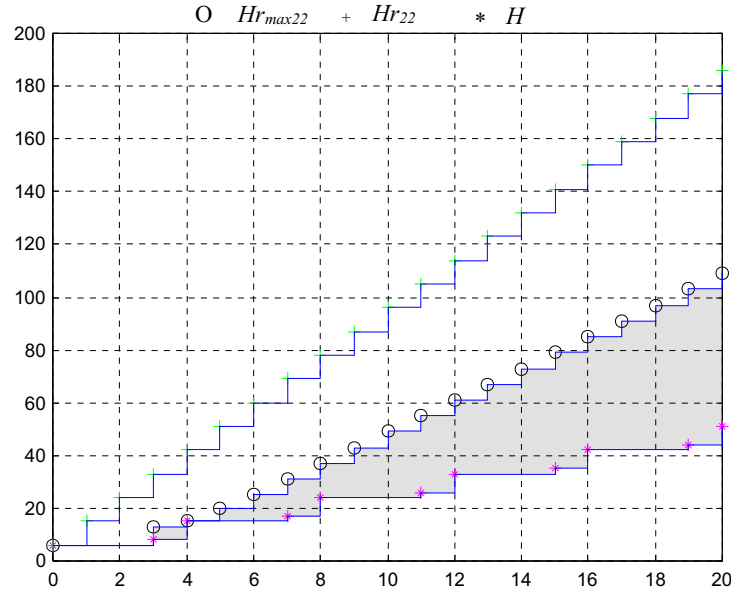
$$(H_r F)^* H_r = \begin{pmatrix} \delta^{12}(\gamma^1\delta^6)^* & (\gamma^3\delta^{18})(\gamma^1\delta^6)^* \\ \delta^7 \oplus \gamma^2\delta^{14} \oplus (\gamma^3\delta^{19})(\gamma^1\delta^6)^* & \delta^6 \oplus \gamma^3\delta^{13} \oplus \gamma^4\delta^{15} \oplus \gamma^5\delta^{20} \oplus (\gamma^6\delta^{25})(\gamma^1\delta^6)^* \end{pmatrix}$$

On s'aperçoit que $(H_r F)^* H_r = (H F)^* H = (H_{rmax} F)^* H_{rmax}$, donc la proposition 5 est vérifiée. Le feedback assure toujours une bonne correction.

Maintenant nous prenons pour H_r la matrice suivante :

$$H_r = \begin{pmatrix} \delta^{12}(\gamma\delta^6)^* & \varepsilon \\ \delta^7(\gamma^2\delta^7)^* & (\delta^6 \oplus \gamma^1\delta^8)(\gamma^1\delta^9)^* \end{pmatrix}$$

Dans cet exemple aussi nous avons uniquement changé la valeur de H_{r22} , les trois fonctions de transferts H , H_{rmax} , et H_r sont représentées sur la figure 16, on peut s'apercevoir que cette fois, la fonction de transfert H_r n'est plus contenue dans la zone grisée, nous avons ici $H \preceq H_{rmax} \preceq H_r$.

FIG. 4.4 – Nouvelle fonction de transfert Hr

Nous avons alors

$$(HrF)^* Hr = \left(\delta^{12} \oplus \gamma^1 \delta^{24} \oplus \gamma^3 \delta^{30} \oplus \gamma^4 \delta^{36} \oplus \gamma^5 \delta^{42} \oplus \gamma^6 \delta^{48} \oplus \gamma^7 \delta^{54} \oplus \gamma^8 \delta^{60} \oplus \gamma^9 \delta^{66} \oplus \gamma^{10} \delta^{72} \oplus \gamma^{11} \delta^{76} \oplus (\gamma^{12} \delta^{85}) (\gamma^1 \delta^6)^* \quad (\gamma^3 \delta^{18}) (\gamma^1 \delta^9)^* \right) \\ \delta^7 \oplus \gamma^2 \delta^{14} \oplus (\gamma^3 \delta^{19}) (\gamma^1 \delta^9)^*$$

Cette fois $(HrF)^* Hr \succ G_{ref}$, la spécification considérée lors de la synthèse du correcteur F n'est alors plus satisfaite.

4.4 Conclusion

Nous avons montré dans ce chapitre que la variation de transfert du système due à une perte de jetons ou une variation de temporisations pouvait être transparente vis-à-vis du comportement en boucle fermée et du respect de la spécification considérée lors de la synthèse du correcteur. En particulier toute variation du transfert du système Hr tel que $H \preceq Hr \preceq Hr_{max}$ garantit que le comportement en boucle fermée sera $(HF)^* H$.

Chapitre 5

MinMaxgd librairie de calculs dans

$\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$

5.1 Introduction

MinMaxgd se présente comme un ensemble de classes écrites en $C++$, ces classes permettent de manipuler des séries rationnelles dans le dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$. Nous allons découvrir l'utilisation de cette librairie à travers des exemples de calculs.

On peut par exemple reprendre les calculs de la figure 11. Voici le programme principal en $C++$, permettant d'effectuer les calculs.

déclarations des variables pour les matrices A, B, C du système.

```
void main(void) {  
    gd m;  
    smatrix A(4,4),B(4,2),C(2,4);
```

les variables étant déclarées, on peut maintenant leur affecter des éléments, par défaut l'initialisation des éléments se fait avec epsilon.

```
A(0,0).init(epsilon,m.init(2,7),e);  
A(0,1).init(epsilon,epsilon,e);  
A(0,2).init(epsilon,epsilon,e);  
A(0,3).init(epsilon,epsilon,e);  
  
A(1,0).init(epsilon,m.init(0,4),e);  
A(1,1).init(epsilon,m.init(1,6),e);  
A(1,2).init(epsilon,epsilon,e);  
A(1,3).init(epsilon,epsilon,e);  
  
A(2,0).init(epsilon,epsilon,e);  
A(2,1).init(epsilon,epsilon,e);  
A(2,2).init(epsilon,m.init(3,2),e);  
A(2,3).init(epsilon,epsilon,e);
```

```

A(3,0).init(epsilon,m.init(0,1),e);
A(3,1).init(epsilon,epsilon,e);
A(3,2).init(epsilon,m.init(0,2),e);
A(3,3).init(epsilon,m.init(4,9),e);

```

On obtient alors la matrice $A = \begin{pmatrix} \gamma^2\delta^7 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \delta^4 & \gamma\delta^6 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \gamma^3\delta^2 & \varepsilon \\ \delta & \varepsilon & \delta^2 & \gamma^4\delta^9 \end{pmatrix}$

pour la matrice B

```

B(0,0).init(epsilon,m.init(0,5),e);
B(0,1).init(epsilon,epsilon,e);

B(1,0).init(epsilon,epsilon,e);
B(1,1).init(epsilon,epsilon,e);

B(2,0).init(epsilon,epsilon,e);
B(2,1).init(epsilon,m.init(0,3),e);

B(3,0).init(epsilon,epsilon,e);
B(3,1).init(epsilon,epsilon,e);

```

On obtient la matrice $B = \begin{pmatrix} \delta^5 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \delta^3 \\ \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix}$

pour la matrice C

```

C(0,0).init(epsilon,epsilon,e);
C(0,1).init(epsilon,m.init(0,3),e);
C(0,2).init(epsilon,epsilon,e);
C(0,3).init(epsilon,epsilon,e);

C(1,0).init(epsilon,epsilon,e);
C(1,2).init(epsilon,epsilon,e);
C(1,0).init(epsilon,epsilon,e);
C(1,3).init(epsilon,m.init(0,1),e);

```

nous avons alors la matrice $C = \begin{pmatrix} \varepsilon & \delta^3 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \delta \end{pmatrix}$

Les trois matrices étant affectées, on peut maintenant calculer la fonction de transfert $H = CA^*B$, nous allons détailler dans la suite toutes les étapes.

On calcule d'abord A^*

```

smatrix H(4,4);

H=star(A);

```

puis CA^*

```
H=otimes(C,H);
```

pour finir on calcule la fonction de transfert finale CA^*B

```
H=otimes(H,B);
```

Le calcul de H donne $H = \begin{pmatrix} \delta^{12}(\gamma\delta^6)^* & \varepsilon \\ \delta^7(\gamma^2\delta^7)^* & (\delta^6 \oplus \gamma^3\delta^8)(\gamma^4\delta^9)^* \end{pmatrix}$

Le problème du Chapitre 3, était de calculer le plus grand feedback F réalisable, dont la valeur est donnée par le calcul suivant : $Pr_+(H \setminus G_{ref} \phi H)$.

Nous devons donc d'abord définir un modèle de référence G_{ref} (on se rappelle que ce modèle de référence doit satisfaire les conditions du théorème 15), voici la définition du modèle $G_{ref} =$

$(HF_0)^*H$ avec $F_0 = \begin{pmatrix} \gamma^3 & \gamma^3 \\ \gamma^3 & \gamma^3 \end{pmatrix}$.

```
smatrix F_0(2,2),G_ref(2,2);
F_0(0,0).init(epsilon,m.init(3,0),e);
F_0(0,1).init(epsilon,m.init(3,0),e);
F_0(1,0).init(epsilon,m.init(3,0),e);
F_0(1,1).init(epsilon,m.init(3,0),e);
/* modèle de référence */
G_ref=otimes(H,F_0);
G_ref=star(G_ref);
G_ref=otimes(G_ref,H);
```

On peut donc calculer le feedback $F = Pr_+(H \setminus G_{ref} \phi H)$, nous allons détailler le calcul de ce feedback. Dans la partie de programme qui suit, le feedback optimal F est noté F_{opt} .

On calcule d'abord $H \setminus G_{ref}$

```
smatrix F_opt(2,2);
```

```
F_opt=lfrac(G_ref,H);
```

puis $H \setminus G_{ref} \phi H$

```
F_opt=rfrac(F_opt,H);
```

la dernière étape consiste en la projection de F_{opt} dans l'ensemble des causaux

```
F_opt=prcaus(F_opt);
```

```
}
```

On obtient alors le feedback $F = \begin{pmatrix} \gamma^3(\gamma^1\delta^6)^* & \gamma^3 \oplus \gamma^4\delta^2 \oplus \gamma^5\delta^7 \oplus (\gamma^6\delta^{12})(\gamma^1\delta^6)^* \\ \gamma^3\delta(\gamma^1\delta^6)^* & \gamma^3\delta^1 \oplus \gamma^4\delta^3 \oplus \gamma^5\delta^8 \oplus (\gamma^6\delta^{13})(\gamma^1\delta^6)^* \end{pmatrix}$

5.2 Syntaxe générale

La librairie MinMaxgd est composée à partir du type élémentaire suivant : les monômes, ils sont représentés par une classe nommée gd. On peut effectuer quelques opérations élémentaires sur cette classe.

5.2.1 Opérations sur les monômes

<code>gd r(2,3)</code>	initialise un monôme $r = \gamma^2\delta^3$
<code>gd r</code> <code>r.init(2,3)</code>	déclare un monôme et lui affecte la valeur $r = \gamma^2\delta^3$
<code>gd inf(gd,gd)</code>	inf de deux monômes
<code>gd otimes(gd,gd)</code>	produit de deux monômes
<code>gd frac(gd,gd)</code>	résiduation de deux monômes
<code>==,! =,<=,>=</code>	opérations de comparaison

Voici un petit exemple d'utilisation des fonctions précédentes

```
void main(void)
{
    gd a(2,3);
    gd b,res_otimes,res_inf,res_frac;

    b.init(3,6);

    res_otimes = otimes(a,b);

    res_inf = inf(a,b);

    res_frac = frac(a,b);
}
```

Dans cet exemple $a = \gamma^2\delta^3$ et $b = \gamma^3\delta^6$.

les résultats donnent

- $\text{res_otimes} = a \otimes b = \gamma^5\delta^9$
- $\text{res_inf} = a \wedge b = \gamma^3\delta^3$
- $\text{res_frac} = a \setminus b = \gamma^{-1}\delta^{-3}$

5.3 Calcul rationnel dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$

5.3.1 Polynômes

Le type polynôme est représenté par une classe dans laquelle est déclarée un tableau de monômes, on peut donc considérer qu'un polynôme n'est rien de plus qu'un tableau de monômes. L'élément neutre e est codé par un monôme de valeur $e(0,0)$, et l'élément absorbant ε par un monôme de définit comme $\varepsilon(32767, -32767)$.

On peut effectuer plusieurs types d'opérations sur le type polynôme.

Opérations sur les polynômes

poly p p.init(2,3)(4,5)	déclare un polynôme p par défaut égal à ε initialise un polynôme $p = \gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^4\delta^5$
poly oplus(poly,poly)	somme de deux polynômes
poly oplus(poly,gd)	somme d'un polynôme et d'un monôme
poly oplus(gd,poly)	somme d'un monôme et d'un polynôme
poly otimes(poly,poly)	produit de deux polynômes
poly otimes(poly,gd)	produit d'un polynôme et d'un monôme
poly otimes(gd,poly)	produit d'un monôme et d'un polynôme
poly frac(poly,poly)	résiduation de deux polynômes
poly frac(poly,gd)	résiduation d'un polynôme et d'un monôme
poly frac(gd,poly)	résiduation d'un monôme et d'un polynôme
poly inf(poly,poly)	inf de deux polynômes
poly inf(poly,gd)	inf d'un polynôme et d'un monôme
poly inf(gd,poly)	inf d'un monôme et d'un polynôme
poly prcaus(poly)	projection d'un polynôme dans l'ensemble des causaux

Il existe d'autres initialisations pour les polynômes, elles ne sont pas toutes répertoriées dans le tableau.

Voici un exemple d'utilisation de cette classe poly.

```
void main(void)
{
    poly p1,p2;
    poly res_oplus,res_frac,res_inf,res_otimes;

    p1.init(1,1)(2,3)(4,5);
    p2.init(1,3)(3,3)(8,4);

    res_otimes = otimes(p1,p2);
    res_frac = frac(p1,p2);
    res_inf = inf(p1,p2);
    res_oplus = oplus(p1,p2);
}
```

Dans cet exemple $p1 = \gamma^1\delta^1 \oplus \gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^4\delta^5$ et $p2 = \gamma^1\delta^3 \oplus \gamma^3\delta^3 \oplus \gamma^8\delta^4$

pour chacune des opérations on obtient les valeurs suivantes

- $res_otimes = p1 \otimes p2 = \gamma^2\delta^4 \oplus \gamma^3\delta^6 \oplus \gamma^5\delta^8 \oplus \gamma^{12}\delta^9$
- $res_frac = p1 \setminus p2 = \gamma^0\delta^{-2} \oplus \gamma^1\delta^0 \oplus \gamma^3\delta^1$
- $res_inf = p1 \wedge p2 = \gamma^1\delta^1 \oplus \gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^8\delta^4$
- $res_oplus = p1 \oplus p2 = \gamma^1\delta^3 \oplus \gamma^4\delta^5$

5.4 Séries périodiques

Les séries périodiques (voir définition 15) sont représentées par une classe, dans laquelle sont déclarés deux polynomes p (le transitoire) et q (le motif), la pente est représentée par un monôme r .

Opérations sur les séries périodiques

serie s s.init(p,q,r)	déclare une série s initialise une série
serie oplus(serie,serie)	somme de deux séries
serie oplus(serie,poly)	somme d'une série et d'un polynôme
serie oplus(poly,serie)	somme d'un polynôme et d'une série
serie oplus(serie,gd)	somme d'une série et d'un monôme
serie oplus(gd,serie)	somme d'un monôme et d'une série
serie otimes(serie,serie)	produit de deux séries
serie otimes(serie,poly)	produit d'une série et d'un polynôme
serie otimes(poly,serie)	produit d'un polynôme et d'une série
serie otimes(serie,gd)	produit d'une série et d'un monôme
serie otimes(gd,serie)	produit d'un monôme et d'une série
serie frac(serie,serie)	résiduation de deux séries
serie frac(serie,poly)	résiduation d'une série et d'un polynôme
serie frac(poly,serie)	résiduation d'un polynôme et d'une série
serie frac(serie,gd)	résiduation d'une série et d'un monôme
serie frac(gd,serie)	résiduation d'un monôme et d'une série
serie inf(serie,serie)	inf de deux séries
serie inf(serie,poly)	inf d'une série et d'un polynôme
serie int(poly,serie)	inf d'un polynôme et d'une série
serie int(serie,gd)	inf d'une série et d'un monôme
serie int(gd,serie)	inf d'un monôme et d'une série
serie star(serie)	étoile de série
serie star(poly)	étoile de polynôme
serie star(gd)	étoile de monôme
serie prcaus(serie)	projection d'une série dans l'ensemble des causaux
void canon()	met une série sous forme canonique

Exemple d'utilisation de ces fonctions

```

void main(void)
{
    serie s1,s2,s_otimes,s_frac,s_oplus,s_inf,s_star;
    poly p1,q1,p2,q2;
    gd r1,r2;

    p1.init(1,1)(2,3)(4,5);
    q1.init(10,11)(12,15);
    r1.init(2,3);

    p2.init(1,3)(3,3)(8,4);
    q2.init(10,5)(12,7)(13,9);

```



```

r2.init(4,4);

s1.init(p1,q1,r1);
s2.init(p2,q2,r2);

s_otimes = s_otimes(s1,s2);
s_frac = frac(s1,s2);
s_oplus = oplus(s1,s2);
s_inf = inf(s1,s2);
s_star = star(s1);
}

```

Dans cet exemple $s1 = \gamma^1\delta^1 \oplus \gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^4\delta^5 \oplus (\gamma^{10}\delta^{11} \oplus \gamma^{12}\delta^{15})(\gamma^2\delta^3)^*$ et $s2 = \gamma^1\delta^3 \oplus \gamma^3\delta^3 \oplus \gamma^8\delta^4 \oplus (\gamma^{10}\delta^5 \oplus \gamma^{12}\delta^7 \oplus \gamma^{13}\delta^9)(\gamma^4\delta^4)^*$

On obtient alors les résultats suivants

$$\begin{aligned}
s_otimes &= s1 \otimes s2 = \gamma^2\delta^4 \oplus \gamma^3\delta^6 \oplus \gamma^5\delta^8 \oplus \gamma^{11}\delta^{14} \oplus (\gamma^{13}\delta^{18})(\gamma^2\delta^3)^* \\
s_frac &= s1 \setminus s2 = \gamma^0\delta^{-2} \oplus \gamma^1\delta^0 \oplus \gamma^3\delta^2 \oplus \gamma^9\delta^8 \oplus (\gamma^{11}\delta^{12})(\gamma^2\delta^3)^* \\
s_oplus &= s1 \oplus s2 = \gamma^1\delta^3 \oplus \gamma^4\delta^5 \oplus \gamma^{10}\delta^{11} \oplus (\gamma^{12}\delta^{15})(\gamma^2\delta^3)^* \\
s_inf &= s1 \wedge s2 = \gamma^1\delta^1 \oplus \gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^8\delta^4 \oplus \gamma^{10}\delta^5 \oplus (\gamma^{12}\delta^7 \oplus \gamma^{13}\delta^9)(\gamma^4\delta^4)^* \\
s_star &= s1^* = (\gamma^0\delta^0 \oplus \gamma^1\delta^1)(\gamma^2\delta^3)^*
\end{aligned}$$

La dernière classe, concerne les matrices de séries périodiques.

Opérations sur les matrices de séries périodiques

Un exemple de manipulation de matrices de séries périodiques, a été présenté en introduction, nous allons donc dans cette partie uniquement décrire les fonctions qui composent cette classe, pour l'exemple on se contentera donc de celui de l'introduction.

smatrix sm(4,4)	déclaration d'une matrice (4 × 4) de séries périodiques
smatrix oplus(smatrix,smatrix)	somme de deux matrices de séries périodiques
smatrix otimes(smatrix,smatrix)	produit de deux matrices de séries périodiques
smatrix lfrac(smatrix,smatrix)	résiduation à gauche de matrices de séries périodiques
smatrix rfrac(smatrix,smatrix)	résiduation à droite de matrices de séries périodiques
smatrix inf(smatrix,smatrix)	inf de matrices de séries périodiques

5.5 Validation de MinMaxgd

Pour valider les algorithmes de calculs sur ces séries périodiques, des fonctions générant des séries périodiques aléatoires ont été développées.

5.6 Algorithme

Il ne s'agit pas dans cette partie de présenter tous les algorithmes composant cette librairie, cependant deux algorithmes sont très importants. En effet pour tous les calculs on suppose que les séries sont sous forme propre et canonique.

5.6.1 Rappels

Une série périodique de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$ peut toujours s'écrire sous la forme

$$s = p \oplus qr^*$$

où p et q sont des polynômes et r un monôme.

On utilisera par la suite les notations suivantes

$$p = \bigoplus_{i=1}^d \gamma^{n_i} \delta^{t_i}, q = \bigoplus_{j=1}^c \gamma^{N_j} \delta^{T_j} \quad \text{et} \quad r = \gamma^\nu \delta^\tau$$

Définition 16 (Représentation Propre) Une série s est dite sous forme propre si

$$(n_d, t_d) < (N_1, T_1) \quad \text{et} \quad (N_c, T_c) - (N_1, T_1) < (\nu, \tau).$$

Définition 17 Une représentation propre $s = p \oplus qr^*$ est dite plus simple qu'une représentation propre $s = p' \oplus q'r'^*$ si

$$(n_d, t_d) \leq (n'_d, t'_d) \quad \text{et} \quad (\nu, \tau) \leq (\nu', \tau').$$

Théorème 16 Une série périodique s admet une plus simple représentation. Cette plus simple représentation est appelée forme canonique de s .

5.6.2 Mise sous forme propre d'une série périodique

Nous allons ici donner toutes les étapes nécessaires à la mise sous forme propre (définition 17) d'une série périodique.

Simplification du polynôme q

Une simplification de q peut être effectuée lorsque par exemple un monôme de q est dominé par une série simple de la forme $\gamma^{N_i} \delta^{T_i} (\gamma^\nu \delta^\tau)^*$ où $\gamma^{N_i} \delta^{T_i}$ est un autre monôme de q .

Exemple 5 $s = (\gamma^1 \delta^1 \oplus \gamma^4 \delta^3) (\gamma^2 \delta^2)^*$, on peut remarquer que

$$\gamma^4 \delta^3 \preceq \gamma^1 \delta^1 (\gamma^2 \delta^2)^*,$$

donc

$$\gamma^4 \delta^3 (\gamma^2 \delta^2)^* \preceq \gamma^1 \delta^1 (\gamma^2 \delta^2)^*,$$

soit

$$s = \gamma^1 \delta^1 (\gamma^2 \delta^2)^*.$$

Algorithme 1 (Simplification de q) $q = \bigoplus_{j=1}^c \gamma^{N_j} \delta^{T_j}$ et $r = \gamma^\nu \delta^\tau$

Tant que $c \neq 1$ Faire

On considère le monôme $\gamma^{N_c} \delta^{T_c}$

Si il existe $l < c$ tel que $\gamma^{N_c} \delta^{T_c} \preceq \gamma^{N_l} \delta^{T_l} (\gamma^\nu \delta^\tau)^*$ alors

supprimer le monôme $\gamma^{N_c} \delta^{T_c}$ de q

FinSi

$$c = c - 1$$

FinTq

Lorsque les simplifications de q ont été faites par l'algorithme 1, il se peut cependant que le polynôme q ne vérifie toujours pas $(N_c, T_c) - (N_1, T_1) < (\nu, \tau)$, ce qui ne permet pas à p, q, r d'être une représentation propre.

Nous allons donner dans la suite un algorithme permettant de générer un polynôme q différent vérifiant la condition de représentation propre.

Sur la figure 17, est représentée la série $s = (\gamma^1\delta^1 \oplus \gamma^2\delta^2 \oplus \gamma^4\delta^6)(\gamma^2\delta^2)^*$, on peut vérifier que cette série n'est pas sous forme propre. En effet ici $c = 3$, on peut voir que $(N_3 - N_1) = (4 - 1) > \nu$ et que $(T_3 - T_1) = (6 - 1) > \tau$.

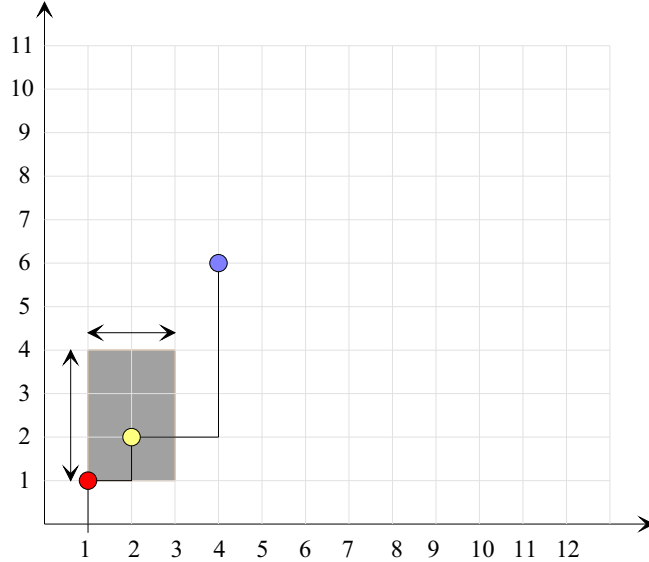


FIG. 5.1 – Polynôme q ne remplissant pas les conditions de représentation propre

Au départ dans cet algorithme q_{propre} ne contient aucun monômes.

Algorithme 2 (Obtention d'un nouveau polynôme q) $q = \bigoplus_{j=1}^c \gamma^{N_j} \delta^{T_j}$

Pour $j = 1$ à $c - 1$ **faire**

$$(N_{tmp}, T_{tmp}) = (N_j, T_j)$$

ajouter à p le monôme (N_{tmp}, T_{tmp})

Faire

$$(N_{tmp}, T_{tmp}) = (N_j, T_j) + (\nu, \tau)$$

Si $(N_{tmp}, T_{tmp}) < (N_c, T_c)$ **alors**

ajouter à p le monôme (N_{tmp}, T_{tmp})

FinSi

Tant que $(N_{tmp}, T_{tmp}) < (N_c, T_c)$

on ajoute à q_{propre} la valeur du monôme (N_{tmp}, T_{tmp})

FinPour

ajouter à q_{propre} le monôme (N_c, T_c)

On illustre cet algorithme sur la Figure 18, on développe chaque point de la Figure 17, jusqu'à ce qu'on dépasse le dernier point de q (point pivot) (sur la figure il s'agit du point $(\gamma^4\delta^6)$). Tous les points développés avant le dépassement sont ajoutés au transitoire p , et on ajoute à un nouveau polynôme que l'on note ici q_{propre} le point qui a dépassé le point pivot. A la fin de l'algorithme on obtient dans q_{propre} un nouveau polynôme, mais qui est, contrairement au q original, sous forme propre, c'est-à-dire qu'il remplit la condition $(N_c, T_c) - (N_1, T_1) < (\nu, \tau)$.

Pour la série $(\gamma^1\delta^1 \oplus \gamma^2\delta^2 \oplus \gamma^4\delta^6)(\gamma^2\delta^2)^*$, on obtient

$$\begin{aligned} p &= (\gamma^1\delta^1 \oplus \gamma^3\delta^3 \oplus \gamma^2\delta^2 \oplus \gamma^4\delta^5) \\ q_{propre} &= (\gamma^4\delta^6 \oplus \gamma^4\delta^5 \oplus \gamma^5\delta^7) \end{aligned}$$

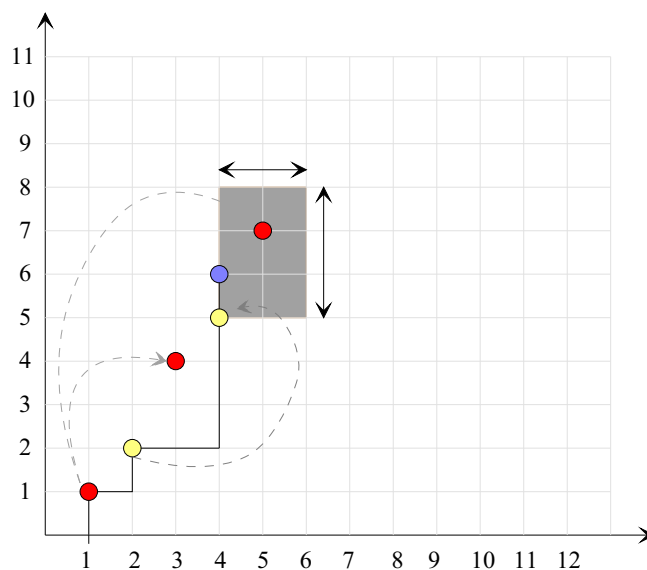


FIG. 5.2 – Mise sous forme propre de q

5.6.3 Mise sous forme canonique d'une série périodique

Les algorithmes précédents permettent d'obtenir une représentation propre d'une série, on va maintenant s'intéresser à la mise sous forme canonique (théorème 16). Pour obtenir cette forme canonique, il faut minimiser la taille du transitoire et celle du périodique.

Minimisation du périodique

La minimisation du périodique est en fait une factorisation du polynôme q . Soit (p, q, r) une représentation propre d'une série s . Si il existe un diviseur d de ν, τ tel que qr^* puisse s'écrire

$$qr^* = q'(e \oplus \gamma^{\nu/d} \delta^{\tau/d} \oplus \dots \oplus \gamma^{(d-1)(\nu/d)} \delta^{(d-1)(\tau/d)}) (\gamma^\nu \delta^\tau)^*$$

alors

$$qr^* = q'(e \oplus \gamma^{\nu/d} \delta^{\tau/d} \dots \gamma^{(d-1)(\nu/d)} \delta^{(d-1)(\tau/d)}) (\gamma^\nu \delta^\tau) = (\gamma^{\nu/d} \delta^{\tau/d})^* q'$$

On obtient alors une nouvelle représentation de s plus simple.

Algorithme 3 (Minimisation du périodique)

$$q = \bigoplus_{j=1}^c \gamma^{N_j} \delta^{T_j}, q' = \bigoplus_{j=1}^c \gamma^{N'_j} \delta^{T'_j}, \text{ et } q'' = \bigoplus_{j=1}^c \gamma^{N''_j} \delta^{T''_j},$$

$$r = \gamma^\nu \delta^\tau \text{ et } r' = \gamma^{\nu'} \delta^{\tau'}.$$

Si $\nu \leq \tau$ **alors**

indice = τ

Sinon

indice = ν

FinSi

Tant que *indice* ≥ 2 **Faire**

Si *indice* divise (ν, τ) **alors**

$(\nu', \tau') = (\nu/\text{indice}, \tau/\text{indice})$

On met dans q' les monômes de q qui rentrent dans (ν', τ')

On met dans (N''_j, T''_j) le développement de (N'_j, T'_j) par (ν', τ') jusqu'à (N_c, T_c)

Si $q'' = q'$ **Alors**

le polynôme q' est sous forme minimale

$q = q'$

$r = r'$

Sinon

indice = *indice* - 1

FinSi

Sinon

indice = *indice* - 1

FinSi

FinTq

Minimisation du transitoire

Il est possible que les derniers monômes du transitoire soient en fait les premiers monômes du régime périodique. Pour minimiser la taille du transitoire p il suffit de chercher s'il n'existe pas une autre expression de q englobant les derniers monômes du transitoire.

Algorithme 4 (Minimisation du transitoire)

Tant que $\gamma^{n_d}\delta^{t_d} = \gamma^{N_c}\delta^{T_c}\gamma^{-\nu}\delta^{-\tau}$ **Faire**

On supprime le monôme $\gamma^{n_d}\delta^{t_d}$ de p pour le placer dans q

On supprime le monôme $\gamma^{N_c}\delta^{T_c}$ de q

$d = d - 1$ et $c = c - 1$

FinTq

L'algorithme de mise sous forme canonique d'une série s est donc le suivant.

Algorithme 5 (Mise sous forme canonique)

Si (p, q, r) *n'est pas une représentation propre* **Alors**

Appliquer les algorithmes 1 et 2

FinSi

Appliquer les algorithmes 4 et 5

Conclusion

Nous avons rappelé précédemment que [Cottenceau, 1999] était arrivé à montrer qu'en partant d'un GET (nominal) et d'une spécification entrée-sortie donnée (modèle de référence), il était possible de calculer un correcteur (un GET) tel que le système nominal muni du correcteur ait un comportement entrée-sortie aussi proche que possible de celui du modèle de référence.

Nous avons ensuite étudié la robustesse de ce correcteur (un GET), et plus précisément analysé l'impact des variations du système nominal, sur le comportement en boucle fermée. Nous avons montré qu'il est possible de déterminer une plage de variation acceptable pour le système.

Enfin dans la dernière partie, nous décrivons le fonctionnement de la librairie de calcul Min-Maxgd développée en $C++$, qui permet d'effectuer des calculs sur les séries périodiques dans le dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[[\gamma, \delta]]$.

Il serait désormais intéressant d'analyser la robustesse des autres structures de commandes proposées par [Cottenceau, 1999], à savoir la commande par retour d'état sur l'entrée et retour de la sortie sur l'état.

Bibliographie

- [Baccelli et al., 1992] Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G., and Quadrat, J. (1992). *Synchronization and Linearity : An Algebra for Discrete Event Systems*. Wiley and Sons.
- [Birkhoff, 1940] Birkhoff, G. (1940). Lattice theory. Technical Report XXV, American Mathematical Society Colloquium Publications, Providence, Rhode Island.
- [Blyth and Janowitz, 1972] Blyth, T. and Janowitz, M. (1972). *Residuation Theory*. Pergamon press.
- [Cohen, 1995] Cohen, G. (1995). *Théorie algébrique des systèmes à événements discrets*. Polycopié de cours donné à l'INRIA.
- [Cohen, 1998a] Cohen, G. (1998a). Residuation and applications. *Algèbres Max-Plus et applications en informatique et automatique, école de printemps d'informatique théorique*.
- [Cohen, 1998b] Cohen, G. (1998b). Two-dimensional domain representation of timed event graphs. *Algèbres Max-Plus et applications en informatique et automatique, école de printemps d'informatique théorique*.
- [Cohen et al., 1998] Cohen, G., Gaubert, S., and Quadrat, J. (1998). Max-plus algebra and system theory : Where we are and where to go now. In *IFAC Conference on System Structure and Control*, Nantes.
- [Cohen et al., 1989] Cohen, G., Moller, P., Quadrat, J., and Viot, M. (1989). Algebraic Tools for the Performance Evaluation of Discrete Event Systems. *IEEE Proceedings : Special issue on Discrete Event Systems*, 77(1) :39–58.
- [Cottenceau, 1999] Cottenceau, B. (1999). *Contribution à la commande de systèmes à événements discrets : synthèse de correcteurs pour les graphes d'événements temporisés dans les dioïdes*. Thèse, Thèse de doctorat, LISA - Université d'Angers.
- [Cuninghame-Green, 1979] Cuninghame-Green, R. (1979). *Minimax Algebra*. Number 166 in Lecture notes in Economics and Mathematical Systems. Springer.
- [David and Alla, 1989] David, R. and Alla, H. (1989). *Du grafcet aux réseaux de Petri*. Hermès.
- [Gaubert, 1992a] Gaubert, S. (1992a). *Introduction aux systèmes dynamiques à événements discrets*. Polycopié de cours donné à l'ENSTA.
- [Gaubert, 1992b] Gaubert, S. (1992b). *Théorie des Systèmes Linéaires dans les Dioïdes*. Thèse, École des Mines de Paris.
- [Gondran and Minoux, 1979] Gondran, M. and Minoux, M. (1979). *Graphes et algorithmes*. Eyrolles, Paris. Engl. transl. *Graphs and Algorithms*, Wiley, 1984.
- [Libeaut, 1996] Libeaut, L. (1996). *Sur l'utilisation des dioïdes pour la commande des systèmes à événements discrets*. Thèse, Thèse de doctorat, Ecole centrale de Nantes.
- [Menguy, 1997] Menguy, E. (1997). *Contribution à la commande des systèmes linéaires dans les dioïdes*. Thèse, Thèse de doctorat, LISA - Université d'Angers.

- [Max Plus, 1991] Max Plus. (1991). Second Order Theory of Min-linear Systems and its Application to Discrete Event Systems. In *Proceedings of the 30th CDC*, Brighton, England.
- [Wonham, 1979] Wonham, W. (1979). Linear multivariable control : A geometric approach. *Springer Verlag*.