



École Centrale de Nantes



Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés
FRE 2656, Angers

Diplôme d'Études Approfondies en Automatique et Informatique Appliquée

RAPPORT DE RECHERCHE

**Propriétés Spectrales
des Fonctions (Min, Max, +)**

**Contribution à l'analyse de la vivacité
dans les réseaux de Petri p-temporels**

OTHMAN NASRI

Responsable de stage : Philippe Declerck

Version du 9 septembre 2004

Remerciements

J'adresse mes sincères remerciements à Monsieur Jean-Louis Ferrier, pour la confiance qu'il m'a accordé en m'accueillant au sein de son laboratoire.

Je remercie également Philippe Declerck, pour la qualité de son encadrement, et son soutien dans la réalisation de ce travail.

Je tiens aussi à exprimer ma profonde gratitude et mes remerciements les plus sincères à tous les membres du LISA, et en particulier les doctorants.

Enfin, je remercie tous ceux qui n'ont pas été cités ci-dessus et qui pourtant ont eu un rôle à jouer dans cette belle année d'études.

Table des matières

1	Treillis et Dioïdes	6
1.1	Structures ordonnées et Treillis	6
1.1.1	Structures ordonnées	6
1.1.2	Demi-treillis et treillis	8
1.2	Dioïdes comme structure ordonné	10
1.2.1	Axiomatique	10
1.2.2	l'équation $x = ax \oplus b$ dans les dioïdes complets	13
2	Fonctions et Matrices max-plus	16
2.1	Préliminaires	16
2.2	Graphes et matrices	18
2.2.1	rappels sur les graphes	18
2.2.2	Interprétations des manipulations matricielles	21
2.3	Propriétés spectrale et asymptotiques des matrices max-plus	23
2.3.1	Valeurs propres, vecteurs propres (max,+)	23
2.3.2	Cyclicité	25
3	Propriétés spectrales des fonctions (min,max,+)	28
3.1	Définitions et propriétés principales des Fonctions topicales	28
3.2	Fonctions (min,max,+)	32
3.2.1	Définitions	32
3.2.2	Vecteurs propres et représentations rectangulaires de fonctions (min,max,+)	34
3.3	Existence de vecteur propre	37
3.3.1	Théorème d'existence de vecteur propre	37
3.3.2	Exemples	38
4	Contribution à l'analyse de la vivacité dans les Réseaux de Petri P-temporels	40
4.1	Les réseaux de Petri autonomes (RdPA)	40
4.1.1	Définitions de base et règle de fonctionnement d'un RdPA	40
4.1.2	Principales propriétés dynamiques(comportementales) d'un RdPA	41
4.1.3	Graphes d'événements Autonomes (GEA)	42
4.2	Les réseaux de Petri P-temporels (p-RdP)	43
4.2.1	Règle de fonctionnement	45
4.2.2	Vivacité et blocage	46
4.2.3	Limitations de l'analyse énumérative dans un p-RdP	47

4.3	Contribution à l'analyse de la vivacité des p-RdP dans le cas statique . . .	48
4.3.1	Modélisation et première analyse	48
4.3.2	Aide à la conception dans le cas statique	50
4.4	Contribution à l'analyse de la vivacité des p-RdP dans le cas dynamique .	55
4.4.1	Modélisation et analyse	55
4.4.2	Application	56

INTRODUCTION

Un système à événement discrets est un système comprenant un ensemble fini d'événements qui se produisent de façon répétée : un circuit numérique dans lequel un événement peut être un changement de voltage sur un fil ; un réseau informatique dans lequel un événement peut être l'arrivée d'un message sur un ordinateur.

L'étude dynamique des "systèmes à événements discrets" amène à étudier l'itération de fonction de \mathbb{R}^n dans lui-même, qui sont croissantes (pour l'ordre produit sur les coordonnées) et additivement homogènes (c.à.d. qui commutent avec un certain groupe à un paramètre de translation). Selon la complexité de système, ces fonctions peuvent prendre des formes diverses, plus au moins générales (max-plus, min-plus, affines par morceaux, min-max-plus, et c...) mais vérifient toujours les deux axiomes précédents.

Gunawardena et Keane [GK95] ont appelé topicales les fonctions vérifiant ces deux axiomes (dus à Crandall et Tartar [CT80]).

La classe de toutes les fonctions topicales est sans doute trop vaste pour qu'on puisse en dire des choses intéressantes, d'un point de vue dynamique. Pour cela, ce rapport est consacré plus particulièrement à une classe des fonctions topicales, les fonctions (min, max, +), qui jouent un rôle central comme le montre les observations dues à Gunawardena, Kean et Saparrow. Ces fonctions utilisant les opérations minimum, maximum et l'addition. L'intérêt pour la classe des fonctions (min,max,+), et pour la classe des fonctions monotones homogènes vient de différentes directions : système à événements discrets, algèbre des matrices max-plus, théorèmes des points fixes pour les fonctions non-expansives, dynamique non linéaire et c...

Ainsi, il s'avère intéressent de présenter les propriétés spectrales des fonctions (min,max,+) afin d'analyser par la suite l'existence de solution dans des systèmes d'inéquations et équations utilisant ces fonctions. Un objectif est de vérifier le comportement d'un système modélisable par des fonctions (min,max,+).

Du point de vue fondamental, une question importante est de savoir si une telle fonction (min, max, +) admet un vecteur spectral (ou vecteur temps de cycle), des points fixes,...

Ce rapport est organisé de la façon suivante :

- Dans une première partie, nous rappelons les principales propriétés des treillis et des dioïdes nécessaires à l'étude.

- Comme les fonctions (min, max, +) englobent les fonctions (max,+) et les fonctions (min,+), la deuxième partie sera consacrée à l'étude des fonctions et matrices max-plus. On s'intéressera en particulier à leurs propriétés spectrales et asymptotiques.
- Dans une troisième partie, nous aborderons les fonctions (min, max, +). Après les avoir défini, les représentations rectangulaires permettront d'exprimer le vecteur spectral et ainsi de discuter sur l'existence de solutions de différents systèmes.
- Après l'étude spectrale des fonctions (min,max,+), une application des concepts étudiés s'avère importante. Nous enchaînerons par une contribution à l'analyse de la vivacité dans les réseaux de Petri p-temporels. Nous terminerons ce rapport par quelques perspectives.

Chapitre 1

Treillis et Dioides

1.1 Structures ordonnées et Treillis

Cette section présente les points clés de la théorie des treillis. Les treillis sont des concepts mathématiques que l'on peut manipuler en tant qu'ensemble ordonnées ou en tant que structures algébriques.

1.1.1 Structures ordonnées

Définition 1.1 (Ensemble ordonné) .

Un ensemble ordonné est un ensemble \mathcal{S} muni d'une relation d'ordre, c'est à dire une relation binaire qui est **reflexive**, **antisymétrique** et **transitive**. Cette relation sera notée \preceq et un ensemble ordonné sera notée (\mathcal{S}, \preceq) .

Un ensemble est dite **totalelement ordonné** si deux éléments quelconques s et s' sont toujours comparables, c'est à dire si l'on a $s \preceq s'$ ou $s' \preceq s$. La notation $s \prec s'$ signifie $s \preceq s'$ et $s \neq s'$.

Remarque 1.2 .

En présence d'ambiguïtés sur l'ensemble considéré, nous désignerons par la notation $\preceq_{\mathcal{S}}$ l'ordre d'un ensemble \mathcal{S} . Tout sous ensemble \mathcal{U} d'un ensemble (\mathcal{S}, \preceq) peut également être ordonné par la restriction de l'ordre de \mathcal{S} aux éléments de \mathcal{U} noté $\preceq_{\mathcal{U}}$. Cette ordre restreint est simplement défini par :

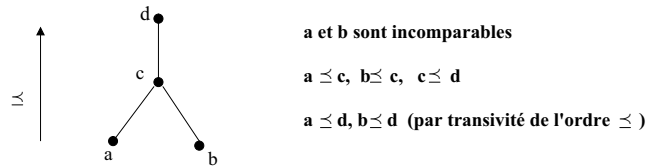
$$u, u' \in \mathcal{U} \subset \mathcal{S}, u \preceq u' \Leftrightarrow u \preceq_{\mathcal{U}} u'$$

Remarque 1.3 .

Si (\mathcal{S}, \preceq) est partiellement ordonné, un sous ensemble $(\mathcal{U} \subset \mathcal{S})$, ordonné par la restriction de \preceq à \mathcal{U} , peut être tel que tous les éléments de \mathcal{U} soient incomparables deux à deux. L'ensemble (\mathcal{U}, \preceq) est dit **totalelement non ordonné**.

Un ensemble ordonné fini (\mathcal{S}, \preceq) peut être représenté par un graphe appelé **diagramme de Hasse**. Chaque élément de \mathcal{S} est représenté par un (\bullet) . Un arc reliant deux sommets du diagramme signifie que les éléments représentés par ces sommets sont comparables. Par convention, l'ordre est croissant dans le sens du bas vers le haut du diagramme.

Pour la figure (1.2), l'ensemble $\mathcal{S} = \{a, b, c, d\}$ est partiellement ordonné pour l'ordre \preceq décrit par le diagramme. Le sous -ensemble $\mathcal{U} = \{a, b\} \subset \mathcal{S}$ est un ensemble ordonné

FIG. 1.1 – Diagramme de Hasse d'un ensemble ordonné $(\{a, b, c, d\}, \preceq)$

par la restriction de \preceq à \mathcal{U} . Néanmoins, dans ce cas précis, (\mathcal{U}, \preceq) est totalement non ordonné (remarque (1.3)).

Remarque 1.4 .

Un ensemble totalement ordonné est également appelé une **chaîne** en référence à son diagramme de Hasse qui en est une.

Exemple 1.5 (Ensemble ordonnés) .

- $(\mathbb{R}, \leq), (\mathbb{Z}, \leq), (\mathbb{Q}, \leq)$ où \leq est l'ordre naturel, sont totalement ordonnés.
- Soit S un ensemble. L'ensemble des parties de S , noté $\mathcal{P}(S)$, est un ensemble ordonné par l'inclusion. Cet ensemble ordonné est noté $(\mathcal{P}(S), \subset)$. Il s'agit d'un ordre partiel. Par exemple, deux sous-ensemble disjoints de S ne sont pas comparable suivant l'ordre \subset .

Définition 1.6 (Majorant, minorant) .

Soit S un ensemble muni d'une relation d'ordre \preceq et \mathcal{U} un sous ensemble de S . On appelle **minorant** de \mathcal{U} tout élément s de S tel que $\forall u \in \mathcal{U}, s \preceq u$. On appelle **majorant** de \mathcal{U} tout élément s' de S tel que $\forall u \in \mathcal{U}, u \preceq s'$.

Définition 1.7 (Bornes d'un ensemble) .

Un sous-ensemble $\mathcal{U} \subset S$ est dit **borné**, s'il admet un majorant et un minorant. Lorsque l'ensemble des majorants de \mathcal{U} a un plus petit élément, ce plus petit élément est appelé **borne supérieure** de \mathcal{U} . On note $\sup(\mathcal{U})$ ou $\bigvee \mathcal{U}$. De même lorsque l'ensemble des minorants de \mathcal{U} a un plus grand élément. On l'appelle **borne inférieure** de \mathcal{U} (noté $\inf(\mathcal{U})$ ou $\bigwedge \mathcal{U}$).

Exemple 1.8 .

Soit l'ensemble $S = \{a, c, d, e, f, g, h, j\}$ partiellement ordonné pour l'ordre \preceq décrit par le diagramme de la figure (1.2). Soit le sous-ensemble $\mathcal{U} = \{a, d, h, j\}$. L'ensemble des majorants $s' = \{f, j\}$ et l'ensemble des minorants $s = \{c, d, g\}$ de \mathcal{U} sont hachurés. Remarquons que $\sup(\mathcal{U}) = j$ et $\inf(\mathcal{U}) = d$. Notons qu'un minorant (resp. majorant) de \mathcal{U} n'appartient pas forcément à \mathcal{U} .

Remarque 1.9 (Élément particuliers dans un ensemble ordonné) .

Dans un ensemble ordonné S , on appelle **plus petit élément**, un élément ϵ_S tel que l'on ait $\epsilon_S \preceq s$ pour tout $s \in S$. Notons qu'un tel élément, s'il existe, est nécessairement unique. Car s'il y en avait deux, ϵ_S et ϵ_S' et, on aurait $\epsilon_S \preceq \epsilon_S'$ et $\epsilon_S' \preceq \epsilon_S$, donc $\epsilon_S = \epsilon_S'$.

De même, on appelle **plus grand élément** \top_S tel que l'on ait $s \preceq \top_S$ pour tout $s \in S$.
notons également qu'un tel élément, s'il existe, est nécessairement unique.

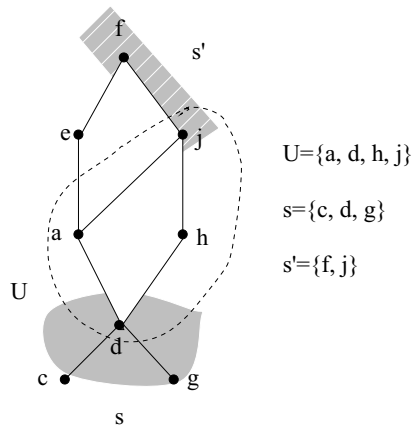


FIG. 1.2 – représentation de l'ensemble des majorants (resp. minorants) d'un sous-ensemble $\mathcal{U} \subset S$

1.1.2 Demi-treillis et treillis

Définition 1.10 (Demi-treillis) .

Un **sup-demi-treillis** est un ensemble S ordonné, dans lequel tout couple d'élément (s, s') admet une borne supérieure (plus petit majorant) notée $\sup(s, s')$ ou $s \vee s'$. De même , un **inf-demi-treillis** est un ensemble S ordonné, dans lequel tout couple d'élément (s, s') admet une borne inférieure notée $\inf(s, s')$ ou $s \wedge s'$.

Remarque 1.11 (Principe de dualité) .

Notons \preceq_{op} l'inverse de la relation d'ordre \preceq . Si (S, \preceq) est un sup-demi-treillis, alors (S, \preceq_{op}) est un inf-demi-treillis, et vice versa. Par conséquent, une relation impliquant \preceq , \vee et \wedge reste vraie en remplaçant \preceq par \preceq_{op} et en permutant \vee et \wedge . Il s'agit du principe de dualité.

Définition 1.12 (Treillis) .

Un **treillis** est un ensemble ordonné (S, \preceq) qui à la fois un sup-demi-treillis et un inf-demi-treillis ; autrement dit, un treillis est un ensemble ordonné dans lequel tout couple d'éléments admet un plus petit majorant et un plus grand minorant.

Exemple 1.13 .

$(\mathbb{N}^*, \preceq_{div})$, où l'ordre sur \mathbb{N}^* est défini par :

$$a \preceq_{div} b \Leftrightarrow a \text{ divise } b$$

est un treillis. Les lois de treillis de $(\mathbb{N}^*, \preceq_{div})$ sont $a \vee b = \text{ppcm}(a, b)$ et $a \wedge b = \text{pgcd}(a, b)$.

Définition 1.14 (Sous-treillis) .

On appelle **sous-treillis** d'un treillis \mathcal{S} , un sous-ensemble \mathcal{U} de \mathcal{S} qui, avec chaque couple $\{u, u'\}$ de \mathcal{U} contient aussi $u \vee u'$ et $u \wedge u'$ dans \mathcal{U} . on dit aussi que ce sous-ensemble est fermé pour les lois \vee et \wedge .

Remarque 1.15 .

Il faut noter que ' un sous ensemble \mathcal{U} peut être un treillis sans être un sous-treillis de \mathcal{S} .

Définition 1.16 (Demi-treillis complets et treillis complets) .

Un sup-demi-treillis (resp.inf-demi-treillis) \mathcal{S} est dit **sup-complets** (resp.**inf-complets**) si tout sous-ensemble (fini ou infini) de \mathcal{S} admet un plus petit majorant (resp.un plus grand minorant) dans \mathcal{S} . Un treillis est dit **complet** s'il est à la fois inf-complets et sup-complet.

Remarque 1.17 .

Pour un sup-demi-treillis complets noté (\mathcal{S}, \vee) , la borne sup de tout sous-ensemble de \mathcal{S} est défini, y compris pour \mathcal{S} . Un sup-demi-treillis complet \mathcal{S} a donc nécessairement un plus grand élément noté $\top_{\mathcal{S}} = \bigvee_{s \in \mathcal{S}} s$. Pour la même raison, un inf-demi-treillis complet (\mathcal{S}, \wedge) a toujours un plus petit élément noté $\epsilon_{\mathcal{S}} = \bigwedge_{s \in \mathcal{S}} s$. En outre, un demi-treillis fini est complet (sup ou inf-complet) et un treillis fini est complet.

Exemple 1.18 .

- En ajoutant l'élément $+\infty$ à \mathbb{Z} , l'ensemble $(\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}, \preceq)$ est totalement ordonné sup-complet.
- En revanche, $(\mathbb{Q} \cup \{+\infty\}, \leq)$ est un ensemble totalement ordonné qui n'est ni sup-complet ni inf-complet. Par exemple, le sous-ensemble $\{x \in \mathbb{Q} \text{ tque } x \leq \sqrt{2}\}$ de \mathbb{Q} n'a pas de plus petit majorant dans \mathbb{Q} .

Théorème 1.19 .

Un sup-demi-treillis complet \mathcal{S} est un treillis complet si, et seulement si, il a un plus petit élément $\epsilon_{\mathcal{S}}$.

Démonstration.

(\Rightarrow) si \mathcal{S} est un treillis complet alors il admet un plus petit élément $\epsilon_{\mathcal{S}}$ (définition 1.16 et remarque 1.17).

(\Leftarrow) supposons que \mathcal{S} est un sup-demi-treillis complet et possède un plus petit élément $\epsilon_{\mathcal{S}}$. Soit $\mathcal{U} = \{u_{\alpha}\}_{\alpha \in \mathcal{A}}$ un sous-ensemble non vide de \mathcal{S} , et $\mathbf{M} = \{m_{\beta}\}_{\beta \in \mathcal{B}}$ l'ensemble des minorants de \mathcal{U} . L'ensemble \mathbf{M} est non vide puisque $\epsilon_{\mathcal{S}} \in \mathbf{M}$. Posons $m = \bigvee_{\beta \in \mathcal{B}} m_{\beta}$;

l'élément m est défini dans \mathcal{S} puisque \mathcal{S} est complet.

Par définition de l'ensemble \mathbf{M} ,

$$\forall u_{\alpha} \in \mathcal{U}. \forall m_{\beta} \in \mathbf{M}, m_{\beta} \preceq u_{\alpha},$$

ou encore,

$$\forall u_\alpha \in \mathcal{U}, m = \bigvee_{\beta \in \mathbf{B}} m_\beta \preceq u_\alpha.$$

Donc m est minorant de \mathcal{U} , et par conséquent, le plus grand des minorants de \mathcal{U} . Tout sous-ensemble non vide de \mathcal{S} admettant un plus grand minorant, \mathcal{S} est un inf-treillis complet et donc également un treillis complet. \square

Remarque 1.20 .

En raison du principe de dualité énoncé dans la remarque(1.11), on peut énoncer le dual du théorème précédente : un inf-demi-treillis complet est treillis complet si, et seulement si, il a un plus grand élément $\top_{\mathcal{S}}$.

Remarque 1.21 .

Les définitions précédentes de demi-treillis et treillis ont été introduites de façon ensembliste, elles font uniquement intervenir les propriétés de la relation d'ordre \preceq défini sur l'ensemble. Il est intéressant de faire le lien entre ce point de vue ensembliste et le point de vue algébrique. En algèbre, un treillis est parfois défini comme un ensemble muni de deux opérations binaire \vee et \wedge jouissant des propriétés classiques d'associativité, de commutativité et d'idempotence, et de la propriété dite d'absorption : $x \wedge (x \vee y) = x = x \vee (x \wedge y)$. Dans ce cas, la notion d'ordre est dérivé : $x \preceq y$ est par définition $x \wedge y = x$ (ou $x \vee y = y$).

C'est là une des principales raisons de l'importance de la notion de treillis : elle permet de remplacer la relation $x \preceq y$ par des équations $x \vee y = y \Leftrightarrow x \wedge y = x$, et par conséquent de traiter les questions relatives à l'ordre par des moyens algébriques : des opérations, des équations. De plus, il est désormais possible de remplacer l'expression "soit un treillis " par (\mathcal{S}, \preceq) ou par $(\mathcal{S}, \vee, \wedge)$.

1.2 Dioïdes comme structure ordonné

Dans cette section, nous nous efforçons de présenter la théorie des dioïdes. On soulignera notamment les liens avec l'étude des ensembles ordonnés. Des outils algébriques utilisés pour la manipulation des ensembles ordonnés sont présentés. La possibilité de résoudre des équations malgré les problèmes d'inversion d'application est introduite.

1.2.1 Axiomatique

Définition 1.22 .

Un dioïde est un ensemble \mathcal{D} muni de deux lois de compositions internes notées \oplus et \otimes , appelées respectivement "addition" et "multiplication", telles que les axiomes suivants sont respectés.

l'addition est associative : $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$;

l'addition est commutative : $a \oplus b = b \oplus a$;

l'addition admet un élément neutre noté ε et appelé "zéro" : $a \oplus \varepsilon = a$;

la multiplication est associative : $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$;

la multiplication admet un élément neutre noté e et appelé "identité" : $a \otimes e = a = e \otimes a$;

la multiplication est distributive par rapport à l'addition : $a \otimes (b \oplus c) = (a \otimes b) \oplus (a \otimes c)$;

le zéro est absorbant pour la multiplication : $\varepsilon \otimes a = a \otimes \varepsilon = \varepsilon$;

l'addition est idempotente : $a \oplus a = a$.

Comme en algèbre usuelle, le signe multiplicatif sera parfois omis.

Définition 1.23 (Dioïde commutatif) .

*Un dioïde est dit **commutatif** si la multiplication est commutative.*

Exemple 1.24 .

$\mathbb{R}_{max} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, max, +)$ est un dioïde commutatif muni du max (loi additive \oplus) et de l'addition usuelle $+$ (loi multiplicative \otimes). Cette structure est appelée algèbre $(max, +)$.

Définition 1.25 (Dioïde complet) .

*Un dioïde est dit **complet** s'il est fermé pour les sommes infinies et si la loi \otimes distribue sur les sommes infinies, c'est-à-dire si pour tout $c \in \mathcal{D}$ et tout sous-ensemble $A \subseteq \mathcal{D}$,*

$$c \otimes \left(\bigoplus_{x \in A} x \right) = \bigoplus_{x \in A} c \otimes x.$$

La borne supérieure d'un dioïde complet \mathcal{D} existe et sera notée " \top ".

Il correspond à la somme des éléments du dioïde $\top = \bigoplus_{x \in \mathcal{D}} x$. L'élément \top est donc ab-

sorbant pour l'addition : $\top \oplus a = \top$.

Rappelons néanmoins que, puisque ε est absorbant pour la loi \otimes , on a : $\top \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes \top = \varepsilon$.

Exemple 1.26 .

\mathbb{R}_{max} n'est pas complet. Nous devons ajouter la borne supérieure $\top = +\infty$ avec la convention $(\top \otimes \varepsilon) = +\infty + (-\infty) = -\infty = \varepsilon$. Ce nouveau dioïde complet est noté $\overline{\mathbb{R}}_{max} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}, max, +)$.

L'idempotence de la loi additive \oplus permet de définir naturellement une relation d'ordre dans un dioïde. Le théorème suivant affirme de plus que cette relation d'ordre est compatible avec les lois du dioïde.

Théorème 1.27 (Relation d'ordre) .

Dans un dioïde $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$, la relation \succeq définie par

$$a \succeq b \Leftrightarrow a = a \oplus b$$

est une relation d'ordre compatible avec les lois additive \oplus et multiplicative \otimes , c'est-à-dire,

$$a \preceq b \Rightarrow \forall c \in \mathcal{D}, \quad a \oplus c \preceq b \oplus c,$$

$$a \preceq b \Rightarrow \forall c \in \mathcal{D}, \quad a \otimes c \preceq b \otimes c,$$

$$c \otimes a \preceq c \otimes b.$$

La relation d'ordre est dite **totale** si

$$\forall a, b \in \mathcal{D}, \quad a \preceq b \text{ ou } b \preceq a.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que l'ordre d'un dioïde soit total, s'écrit de la façon suivante

$$\forall a, b \in \mathcal{D}, \quad a \oplus b = a \text{ ou } b.$$

Le dioïde est alors dit **totalelement ordonné**.

Un dioïde \mathcal{D} muni de la relation d'ordre définie dans le théorème (1.27) est un demi-treillis supérieur (voir [Bir67]) car tout couple (a, b) admet $a \oplus b$ comme plus petit majorant (ou borne supérieure).

Sur un dioïde complet $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$, il est possible de définir la borne inférieure de toute paire d'éléments (a, b) . Cette borne, notée \wedge , est définie de la manière suivante :

$$a \wedge b = \bigoplus_{\{x \mid x \preceq a, x \preceq b\}} x.$$

La borne inférieure existe pour tout sous ensemble d'un dioïde complet, et celui-ci a donc une structure de treillis complet. On a de plus l'équivalence

$$a \preceq b \Leftrightarrow a = a \oplus b \Leftrightarrow b = a \wedge b.$$

L'opération \wedge est associative, commutative, idempotente et possède également un élément neutre \top ($\top \wedge a = a$, $\forall a$).

Remarque 1.28 .

La loi additive \oplus distribue généralement sur \wedge , mais la distributivité de \otimes par rapport à \wedge est rarement assurée en dehors des cas les plus simples (dioïde totalelement ordonné). De plus, on a la relation :

$$a \otimes (b \wedge c) \preceq ab \wedge ac.$$

En outre, la relation suivante, dite d'*absorption*, est vérifiée dans tout dioïde complet :

$$a \vee (b \wedge a) = a.$$

Proposition 1.29 .

Soient \mathcal{D} un dioïde complet, $a, b \in \mathcal{D}$. La borne inf de a et b existe et est donnée par

$$a \wedge b = \bigvee \{x \mid x \preceq a \text{ et } x \preceq b\}. \quad (1.1)$$

Le seul point non trivial est que l'ensemble à droite de (1.1) est non vide : cela résulte de ce que \mathcal{D} admet un plus petit élément égale à ϵ . On note que l'inf d'une partie quelconque $X \subset \mathcal{D}$ existe et se caractérise de manière analogue :

$$\bigwedge X = \bigvee \{y \in \mathcal{D} \mid \forall x \in X, y \preceq x\}$$

On a une autre classe importante où la borne inf est définie.

Définition 1.30 .

Soit $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ un dioïde, on note $\mathcal{D}^{n \times n}$ l'ensemble des matrices carrées de dimension n à coefficients dans \mathcal{D} . La somme et le produit de matrice sont définies de façon classique par :

$$A \oplus B : (A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij}$$

$$A \otimes B : (A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n A_{ik} \otimes B_{kj} .$$

L'ensemble $\mathcal{D}^{n \times n}$ muni de ces deux opérations est un dioïde.

L'élément nul d'un dioïde matriciel est la matrice composée exclusivement de ε et est noté également ε . L'élément unité est la matrice notée Id_n qui est composée de e sur la diagonale et de ε partout ailleurs. Cette structure algébrique obéit aux axiomes d'un dioïde.

Remarque 1.31 .

Même si la relation d'ordre est totale dans le dioïde \mathcal{D} , l'ordre dans le dioïde matriciel $\mathcal{D}^{n \times n}$ ($n > 1$) est partiel.

1.2.2 l'équation $x = ax \oplus b$ dans les dioïdes complets

L'utilisation de l'algèbre des dioïdes nous ramènera à résoudre certaines équations. On peut discerner une type, l'équation $x = ax \oplus b$ où x est l'inconnue. Par la suite, on sera amené à résoudre l'équation linéaire (en x) suivante :

$$x = Ax \oplus b ,$$

où x et b sont des vecteurs de taille n et A une matrice $n \times n$.

Définition 1.32 (Étoile de Kleene) .

Soit \mathcal{D} un dioïde complet et $a \in \mathcal{D}$, l'opérateur étoile est défini par :

$$a^* = \bigoplus_{i=0}^{+\infty} a^i \quad (\text{avec } a^0 = e)$$

On notera également :

$$a^+ = a \oplus a^2 \oplus \dots \oplus a^n = \bigoplus_{i=1}^{+\infty} a^i .$$

Les égalités suivantes sont facilement vérifiées : $a^* = e \oplus a^+$, $a^+ = aa^*$. Cette définition s'applique également aux éléments des dioïdes matriciels.

Théorème 1.33 (Théorème de l'étoile) .

Soit $\mathcal{D}^{n \times n}$ un dioïde complet, l'équation

$$x = ax \oplus b \tag{1.2}$$

définie dans $\mathcal{D}^{n \times n}$ admet $x = a^*b$ comme plus petite solution.

Démonstration.

On montre d'abord que a^*b est une solution de (1.2) :

$$a(a^*b) \oplus b = a^+b \oplus b = (a^+ \oplus e)b = aa^*b.$$

On montre maintenant que a^*b est le minorant des solutions de (1.2) :

$$\begin{aligned} x = ax \oplus b = a(ax \oplus b) \oplus b &= a^2x \oplus ab \oplus b \\ &= a^3x \oplus aa^2b \oplus ab \oplus b \\ &\vdots \\ &= a^n x \oplus (a^{n-1}b \oplus \dots \oplus ab \oplus b) \\ &\succeq a^{n-1}b \oplus \dots \oplus ab \oplus b, \quad n \geq 1 \end{aligned}$$

On en déduit que toute solution de (1.2) est supérieure ou égale à a^*b . □

Corollaire 1.34 .

De la même façon que le théorème(1.33), il est possible de montrer que l'équation $x = xa \oplus b$ admet comme plus petite solution ba^ .*

Théorème 1.35 .

Soit \mathcal{D} un dioïde complet. $\forall a, b \in \mathcal{D}$

$$a^* \succeq a^+ \tag{1.3}$$

$$(a^*)^* = a^* \tag{1.4}$$

$$(a^+)^* = a^* \tag{1.5}$$

$$a(ba)^* = (ab)^*a \tag{1.6}$$

$$a^*a^* = a^* \tag{1.7}$$

En outre, lorsque \mathcal{D} est commutatif, on a

$$(a \oplus b)^* = a^*b^* \tag{1.8}$$

Pour (1.3), (1.4), (1.5), (1.8) preuves dans [[Gau99] Chapitre 2, p30], et pour (1.6), (1.7) preuves dans [[Gau99], Chapitre 1, p43].

►► EQUATIONS IMPLICITES MATRICIELLES.

On considère l'équation.

$$x = Ax \oplus b \tag{1.9}$$

A étant ici une matrice carré et x, b étant des vecteurs , tous à coefficients dans un dioïde complet \mathcal{D} . En se plaçant dans le dioïde des matrices carré $\mathcal{D}^{n \times n}$, et en complétant b et x en des matrices carré par des colonnes de ϵ , on se ramène à appliquer le théorème (1.33),

et donc la plus petite solution de (1.9) est donné par $x = A^*b$ et vérifie en outre l'égalité. Cependant, l'expression de $x = A^*b = \bigoplus_n A^n b$ n'est pas effectif. on cherche ici des méthodes permettant de calculer les étoiles de matrices dès que les étoiles des scalaires sont connues. Le point clé est le lemme d'inversion par bloc suivant, qui est une version "dioïde" d'une formule bien connues dans les cas des corps.

Lemme 1.36 .

Pour la matrice suivante partitionnée en quatre blocs, on a

$$A^* = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} a^* \oplus a^*b(ca^*b \oplus d)^*ca^* & a^*b(ca^*b \oplus d)^* \\ (ca^*b \oplus d)^*ca^* & (ca^*b \oplus d)^* \end{bmatrix} \quad (1.10)$$

Preuve.

Soit

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$$

A^* est la plus petite solution de $X \succeq AX \oplus Id$, soit.

$$\begin{cases} x_{11} \succeq ax_{11} \oplus bx_{21} \oplus e \\ x_{12} \succeq ax_{12} \oplus bx_{22} \\ x_{21} \succeq cx_{11} \oplus dx_{21} \\ x_{22} \succeq cx_{12} \oplus dx_{22} \oplus e. \end{cases} \quad (1.11)$$

La seconde équation permet d'éliminer x_{12} :

$$x_{12} \succeq a^*bx_{22}.$$

En substituant x_{12} dans la dernière équation, il vient

$$x_{22} \succeq ca^*bx_{22} \oplus e,$$

d'où

$$x_{22} \succeq (d \oplus ca^*b)^*.$$

On obtient ainsi le coefficient (2, 2) de X . Les autres coefficients s'obtiennent par un argument analogue. Jusqu'ici, on a seulement montré que A^* est supérieure ou égale au second membre de (1.10). Pour montrer l'égalité, il faut reporter ce second membre dans $X = AX \oplus Id$ et vérifier qu'il satisfait l'égalité, ce qui est une vérification de routine. \square

Corollaire 1.37 .

On a

$$(ca^*b \oplus d)^* = d^* \oplus d^*c(bd^*c \oplus a)^*bd^*.$$

Remarque 1.38 .

Le lemme (1.36) appliqué d'une manière inductive permet de calculer l'étoile d'une matrice quelconque.

Chapitre 2

Fonctions et Matrices max-plus

2.1 Préliminaires

Supposons que les opérations sur $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ soient redéfinies de sorte que l'opération somme devienne le maximum et la multiplication devienne l'addition. On équipe ainsi \mathbb{R} d'une nouvelle structure $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$ qui est en fait un semi-anneau, dont nous rappelons la définition déjà introduite au premier chapitre.

Définition 2.1 (Semi-anneau) .

Soit \mathbf{E} un ensemble, \oplus et \otimes deux lois de composition interne sur \mathbf{E} .

$(\mathbf{E}, \oplus, \otimes)$ est un semi-anneau si :

- ▶ (\mathbf{E}, \oplus) est un monoïde à savoir \oplus est une loi interne, associative et possédant un élément neutre (zéro),
- ▶ \otimes est associative, distributive sur \oplus et possédant un élément neutre (unité).
- ▶ zéro est absorbant pour \otimes .

Exemple 2.2 .

Dans $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$ l'élément $-\infty$ devient l'élément neutre pour \max , et 0 devient l'unité de la deuxième loi. De plus, $-\infty$ est un élément absorbant pour l'addition : $a + (-\infty) = -\infty$. Puisque de plus l'addition est associative et distributive sur le maximum, cette structure forme bien un semi-anneau appelé le semi-anneau max-plus et noté \mathbb{R}_{\max} .

Notations :

Contrairement au chapitre précédent, il est commode dès le deuxième chapitre de fixer les notations suivantes :

Lois	\oplus	\otimes	\vee	\wedge
Exemple	max ou min	+	max	min

$$(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +) = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \vee, +)$$

$$(\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +) = (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \wedge, +)$$

Définition 2.3 (Ordre sur \mathbb{R}_{\max}) .

L'ordre usuel sur \mathbb{R} s'étant à \mathbb{R}_{\max} de façon évidente, de sorte que $-\infty \leq x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_{\max}$. Le même symbole est employé pour définir l'ordre produit sur les vecteurs $x, y \in (\mathbb{R}_{\max})^n$ alors $x \leq y$ si, est seulement si, $x_i \leq y_i$ pour tout i .

l'ordre : si $x \leq y$ alors $\mathbf{A}x \leq \mathbf{A}y$. Il découle que $F(x)^k = \mathbf{A}^k x$ et que le comportement dynamique de F revient à l'algèbre matricielle. Nous avons linéarisé un problème apparemment non linéaire. nous faisons pour la suite le choix de notation suivant : $+$ et \times garderont leur sens usuel. nous utiliserons \vee et $+$ pour les opérations max-plus correspondantes. Similaire, 0 gardera son sens usuel et nous noterons $-\infty$ pour le zéro dans \mathbb{R}_{max} .

Remarque 2.7 .

$\mathbb{R}_{min} = (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$ est isomorphe, en tant que semi-anneau à \mathbb{R}_{max} et tout résultat valable pour l'un possède un dual pour l'autre en interchangeant \min et \max . Les résultats duaux pour les fonctions et les matrices min-plus sont valables. Pour chaque fonction de ce type est associée une matrice sur le semi-anneau min-plus.

2.2 Graphes et matrices

2.2.1 rappels sur les graphes

Définition 2.8 (Graphe valué orienté) .

Un graphe valué orienté est un triplet $\mathbf{G} = (\mathbf{X}, \mathbf{U}, \mathbf{A})$ où \mathbf{X} est un ensemble fini des noeuds, $\mathbf{U} \subset \mathbf{X} \times \mathbf{X}$ est l'ensemble des arcs, et $\mathbf{A} : \mathbf{U} \rightarrow \mathbb{R}$, $(j, i) \rightarrow \mathbf{A}_{ij}$ est la fonction poids des arcs. Nous noterons un arc de i à j par (i, j) .

Définition 2.9 (Chemin, circuit) .

- ▶ *Un chemin de i_1 à i_m est une suite de noeuds i_1, \dots, i_m telle que $1 < m$ et (i_j, i_{j+1}) pour $1 \leq j < m$.*
- ▶ *Un circuit est un chemin qui commence et termine sur le même noeud : $i_1 = i_m$.*
- ▶ *Un circuit est élémentaire si les noeuds i_1, \dots, i_m sont tous distincts .*
- ▶ *Un noeud i est en amont de j , et noté $j \Leftarrow i$, si $i = j$ ou bien s'il y a un chemin dans \mathbf{G} de i à j . (Un noeud est toujours en amont de lui-même).*
- ▶ *Un circuit g est en amont du noeud i , et on note $i \Leftarrow g$, si un noeud du circuit est en amont de i .*

Définition 2.10 (Poids et longueur d'un chemin) ..

- ▶ *Le poids d'un chemin p , $|p|_w$, est la somme des valeurs des arcs du chemin :*

$$|p|_w = \sum_{j=1}^{m-1} A_{i_j i_{j+1}}.$$

la multiplication des matrices à une interprétation en termes de poids de chemins : A_{ij}^s est le poids maximum sur tout les chemins de longueur s de j à i .

- ▶ *La longueur d'un chemin, $|p|_l$, est le nombre d'arcs du chemin : $|p|_l = m - 1$.*

Définition 2.11 (Poids moyen maximal) .

Si g est un circuit, son poids moyen, noté $m(g)$ est défini par $m(g) = |g|_w / |g|_l$. Si A une matrice $n \times n$ sur \mathbb{R}_{max} , soit $\mu(A) \in (\mathbb{R}_{max})^n$ défini par

$$\mu_i(A) = \max\{m(g) / i \Leftarrow g\} \tag{2.3}$$

Cette quantité est bien définie : bien que $\mathbf{G}(A)$ puisse contenir un nombre indéfini de circuits, seuls les élémentaires sont nécessaires pour définir $\mu(A)$.

Le dual du vecteur μ se définit comme suit.

Si B une matrice $n \times n$ sur \mathbb{R}_{min} , satisfaisant la condition duale de non-dégénérescence (2.1), $\eta(B) \in \mathbb{R}^n$ désignera le vecteur de cycle amont moyen minimum dans $\mathbf{G}(B)$:

$$\eta_i(B) = \min\{m(g) / i \Leftarrow g\}$$

Définition 2.12 (Fonctions $t, b : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$) .

$$\begin{aligned} t(x) &= x_1 \vee \dots \vee x_n \\ b(x) &= x_1 \wedge \dots \wedge x_n \end{aligned}$$

De l'équation (2.3), il résulte que $t(\mu(A))$ est le poids moyen maximum sur tous les circuits .

Voici quelques formules triviaux impliquant t et b pourront être utiles :

$$\begin{aligned} b(x) &= -t(-x) \\ x &\leq t(x) \\ t(\lambda x) &= \lambda t(x) \text{ si } \lambda \geq 0 \\ t(x) &\leq t(y) \text{ si } x \leq y \\ t(x+h) &= t(x) + h \\ t(x+y) &\leq t(x) + t(y) \\ t(x \vee y) &= t(x) \vee t(y) \\ t(x \wedge y) &\leq t(x) \wedge t(y) \\ \|t(x)\| &= t(x) \vee -b(x) \end{aligned} \tag{2.4}$$

La notation $\|x\|$ fait référence à la norme l_∞ définie dans \mathbb{R}^n par :

$$\|x\| = |x_1| \vee |x_2| \vee \dots \vee |x_n|$$

Définition 2.13 (Circuit critique, classe critique) .

► Un **circuit critique** est un circuit élémentaire de poids moyen $t(\mu(A))$.

► On appelle **classe critique** et on note $\mathcal{C}(A) \subseteq \{1, \dots, n\}$ l'ensemble des noeuds de $\mathbf{G}(A)$ appartenant à un circuit critique quelconque.

Définition 2.14 (Prédécesseurs, successeurs) .

L'ensemble des **prédécesseurs immédiats** d'un noeud i , noté $\pi(i)$ est l'ensemble des noeuds j tels que $(j, i) \in \mathbf{U}$. Pour deux "multi-applications" θ et τ (i.e. applications à valeurs "sous-ensembles"), on note

$$\theta^n(i) = \underbrace{(\theta \circ \dots \circ \theta)}_{n \text{ fois}}(i) \quad \text{avec} \quad (\theta \circ \tau)(i) = \bigcup_{j \in \tau(i)} \{\theta(j)\}.$$

On pose alors

$$\pi^+(i) = \pi(i) \cup \pi^2 \cup \dots,$$

que l'on appelle l'**ascendance** ou les **prédécesseurs** de i lorsqu'il s'agit de la multi-application π des prédécesseurs immédiats. On pose aussi

$$\pi^*(i) = \{i\} \cup \pi^+(i).$$

On définira de même l'ensemble $\sigma(i)$ des **successeurs immédiats** d'un noeud i , l'ensemble $\sigma^+(i)$ appelé **descendance** ou **successeur** de i , et enfin l'ensemble $\sigma^*(i)$.

Définition 2.15 (Sources, puits) .

► Une **source** est un noeud i tel que $\pi(i) = \emptyset$. Les sources serviront d'entrées (au sens de l'automatique).

► On appelle **puits** tout noeud i tel que $\sigma(i) = \emptyset$. Ces noeuds serviront de sorties (au sens de l'automatique).

Définition 2.16 (Graphes acycliques, arbres) .

► Un graphe **acyclique** est un graphe sans circuit, c'est à dire

$$\nexists i \in \mathbf{X} \text{ tel que } i \in \pi^+(i).$$

(on peut remplacer π^+ par σ^+ dans cette définition).

► Un **arbre** est un graphe acyclique ayant un seul noeud source.

Définition 2.17 (Composantes fortement connexes, graphe réduit) .

On définit d'abord une relation de préordre sur \mathbf{X} : " i précède j " si $i \in \pi^*(j)$. Ce n'est pas une relation d'ordre (elle n'est pas antisymétrique) sauf si le graphe est acyclique (on peut aussi tolérer un graphe dont les seuls circuits sont des boucles). A chaque fois qu'on est en présence d'une relation de préordre, on définit classiquement une relation d'équivalence : $i \mathcal{R} j$ si j et i se précèdent mutuellement. La relation de préordre devient alors une relation d'ordre sur l'ensemble quotient \mathbf{X}/\mathcal{R} . On associe à cet ensemble quotient un **graphe réduit** : un noeud représente une classe d'équivalence $[i]$ appelé la **composante fortement connexe** contenant le noeud i . Un arc $([i], [j])$ du graphe réduit de la figure (2.2) représente un chemin existant du graphe original allant de i à j et n'emprunte pas d'autres noeuds que ceux de $[i] \cup [j]$.

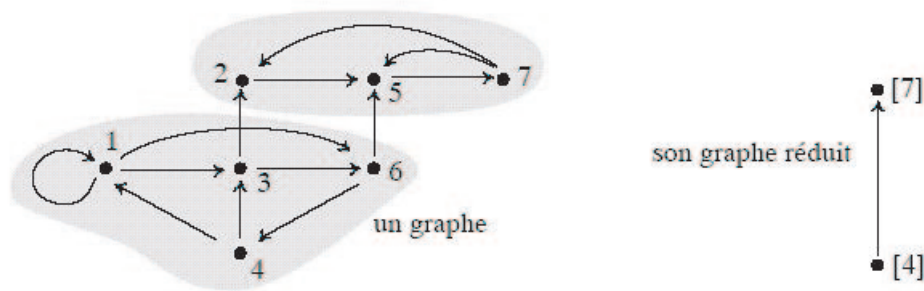


FIG. 2.2 – Graphe critique

2.2.2 Interprétations des manipulations matricielles

Définition 2.18 (Graphe associé à une matrice)

Soit A une matrice $n \times n$ sur \mathbb{R}_{max} . Le graphe de précédence de A , noté $G(A)$, est le graphe orienté dont les noeuds sont $\{1, \dots, n\}$ et un arc défini de i à j si, et seulement si, $A_{ij} \neq \{-\infty\}$. La valeur de cet arc est alors A_{ij}

Définition 2.19 (Matrice de transition)

Cette notion ne concerne que les graphes valués ne comportant que des noeuds sources numérotés de 1 à m , et des noeuds puits numérotés de $m+1$ à $m+p$. La **matrice de transition** T associé est de dimension $p \times m$, telle que la figure(2.3).

$$T_{ij} = \begin{cases} a_{m+i,j} & \text{s'il y a un arc } (j, m+i) \text{ de poids } a_{m+i,j}, \\ \epsilon & \text{si non.} \end{cases}$$

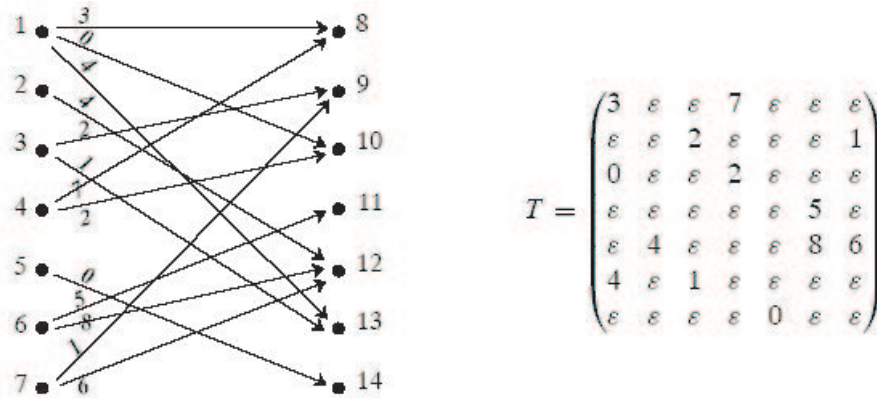


FIG. 2.3 – Graphes et matrices associées

Définition 2.20 (Matrice de précédence)

Pour un graphe valué à n noeuds, la **matrice de précédence** est une matrice carrée A de dimension $n \times n$ ayant élément A_{ij} le poids a_{ji} de l'arc (j, i) si celui-ci existe, et ϵ si non. Inversement, à toute matrice carrée, on peut associé un graphe de précédence. Pour la même matrice que celle de la figure (2.3) (qui était carrée), on obtient le graphe de la Figure (2.4)(dédit du graphe de transition de la Figure (2.3) en identifiant les noeuds de numéros égaux modulo 7).

Définition 2.21 (Matrice irréductible)

Une matrice carré est **irréductible** s'il n'est pas possible de la mettre sous une forme bloc-rectangulaire, avec des blocs carré sur la diagonale, par une même permutation de ses lignes et de ses colonnes. Sur le graphe de précédence associé, cette permutation correspond à une renumérotation des noeuds.

Proposition 2.22

Soit S un semi-anneau positif, soit $A \in (S^+)^{n \times n}$. Les propositions suivantes sont

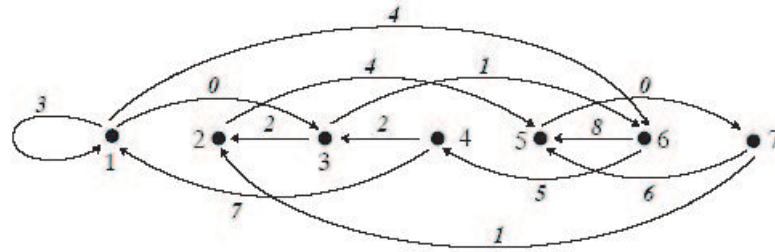


FIG. 2.4 – Graphes de précédence du graphe de transition de la figure (2.3)

équivalentes.

1. Le graphe associé à la matrice A est fortement connexe (Son graphe réduit consiste en un noeud unique).
2. On ne peut pas partitionner la matrice A sous forme triangulaire par bloc :

$$A = P \begin{bmatrix} B & C \\ \varepsilon & D \end{bmatrix} P^{-1} \quad (2.5)$$

où P est une matrice de permutation.

3. $(I + A)^{n-1}$ à tous ses coefficients **strictement positifs**.

La matrice A est dite irréductible lorsqu'elle vérifie les conditions ci-dessus.

Preuve.

Voir [Gau99] page 60 ou [BCOQ92].

□ OPERATIONS SUR LES GRAPHE ET MATRICES.

► Composition parallèle de graphes et addition de matrices.

L'addition de deux matrices A et B définies sur un dioïde quelconque n'est possible que pour des matrices de même dimensions. Les graphes de transition ou de précédence associés ont donc le même ensemble de noeuds. L'addition $A \oplus B$ correspond à la **composition parallèle** des graphes : il existera un arc (i, j) de poids $a_{ij} \oplus b_{ij}$ si, et seulement si, il existe au moins un tel arc dans l'un des deux graphes initiaux (car $a_{ij} \oplus \epsilon = a_{ij}$ et $a_{ij} \oplus b_{ij} = \epsilon \Rightarrow a_{ij} = b_{ij} = \epsilon$). Pour le dioïdes \mathbb{R}_{max} , cela revient à retenir le poids maximum pour des arcs parallèles (i.e. ayant les mêmes origine et extrémité). Il peut y avoir un ou plusieurs arcs des graphes de A et B qui réalise(nt) ce maximum pour une paire de noeuds donné. Par contre, si les poids sont pris dans un dioïde non totalement ordonné, il se peut qu'aucun des arcs de A ou B ne réalise la borne supérieure des poids des arcs en parallèle.

► Composition séquentielle de graphes et produit de matrices.

Le produit $A \otimes B$ de deux matrice (selon la définition habituelle, mais avec les opérateurs \oplus et \otimes est possible si le nombre de colonnes de A (soit n) est égal au nombre de lignes de B . Selon la formule du produit matriciel donnant $(A \otimes B)_{ij}$ [voir figure (2.1)], cela revient, sur les graphes de transition associés à A et B , à composer séquentiellement ces graphes

en identifiant les sorties de B aux entrées de A (et non pas le contraire !), puis à trouver tous les chemins parallèles de longueur 2 allant de i à j , enfin à garder pour poids du chemin de i à j la \oplus -somme des poids de tous ces chemins de longueur 2 (on rappelle que le poids d'un chemin est égal au \otimes -produit des poids de ses arcs (définition(2.10)). On observe que pour un chemin quelconque dont un arc le composant serait "absent" (donc de poids égal à ϵ , le poids du chemin serait aussi égal ϵ grâce au fait que ϵ est absorbant pour le produit dans un dioïde.

► **Poids maximal des chemins de longueur l dans un graphe.**

Si le dioïde des poids est \mathbb{R}_{max} , pour une matrice carré A de dimension $n \times n$, l'élément $(A^l)_{ij}$ représente le poids maximal des chemins de longueur l allant de j à i dans le graphe de précedence associé. si on pose

$$A^+ = A \vee A^2 \vee \dots, \tag{2.6}$$

alors $(A^+)_{ij}$ représente le poids maximal des chemins de n'importe quelle longueur allant de j à i .

Remarque 2.23 .

Une matrice $A \in \mathcal{D}^{n \times n}$ est dite irréductible si pour toute paire (i, j) , on a $(A^+)_{ji} \neq \epsilon = -\infty$.

2.3 Propriétés spectrale et asymptotiques des matrices max-plus

2.3.1 Valeurs propres, vecteurs propres (max,+)

On étudie les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice A , i.e.les vecteurs $u \in \mathbb{R}_{max} \setminus \{\epsilon\}$ et scalaires $\lambda \in \mathbb{R}_{max}$ tels que :

$$A \otimes u = \lambda \otimes u \quad i.e. \quad A + u = \lambda + u. \tag{2.7}$$

Remarque 2.24 (Interprétation physique des vecteurs propres) .

Soit un système de production en régime autonome vérifiant l'equation aux dateurs :

$$x(n + 1) = Ax(n).$$

Si u est vecteur propre de A , et si l'on prend la condition initiale $x_0 = u$, on obtient $x(n + 1) = \lambda \otimes x(n) = \lambda + x(n)$. Autrement dit, une pièce est produite toute les λ unités de temps : λ est donc l'inverse du taux de production. En outre, le vecteur propre u donne un vecteur initial autorisant un fonctionnement périodique (de période 1) du système.

Exemple 2.25 .

Dans la figure (2.4), on a représenté le coefficient a_{ij} sur l'arc (j, i) . La matrice est irréductible (il y a un chemin entre n'importe quels deux sommet). Par contre, la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \epsilon \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

n'est pas irréductible car il n'y a pas de chemin du sommet 2 au sommet 1.

Théorème 2.26 .

Soit A une matrice carré à coefficient dans \mathbb{R}_{max} et $G(A)$ le graphe de précédence qui lui est associé. Si A est irréductible, ou de façon équivalente si $G(A)$ est fortement connexe, alors il existe une unique valeur propre λ donné par :

$$\lambda = \rho(A) = \bigvee_{k=1}^n (\text{tr} A^k)^{1/k}. \quad (2.8)$$

Cette valeur propre est égal au poids maximum du graphe, c'est à dire le maximum des poids moyens des circuits du graphe.

Il est claire qu'une matrice irréductible admet une seule valeur propre, néanmoins il peut exister plusieurs vecteurs propres associés à cette valeur propre .

Preuve.

Voir [Gau99] page 64 ou [BCOQ92]. □

Remarque 2.27 .

Le théorème (2.26) laisse entrevoir une méthode pour calculer la valeur propre d'une matrice irréductible (à partir de son graphe de précédence). L'algorithme de Karp que l'on peut trouver dans [BCOQ92] permet ce calcul en s'inspirant du fait que l'élément $(A^l)_{ii}$ représente le poids maximal de tous les circuits de longueur l comprenant le noeud i .

L'expression $\bigvee_i^n (A^l)_{ii}$ nous donne le poids maximal de tous les circuits de longueur l . Il n'est pas utile de faire varier l au delà de n , car cela équivaldrait en termes de graphes à parcourir des circuits déjà parcourus pour $l \leq n$. En adéquation avec le théorème (2.26), le poids moyen maximum d'un graphe peut donc s'exprimer de la façon suivante :

$$\lambda = \left(\bigvee_l^n \left(\bigvee_i^n (A^l)_{ii} \right) \right)^{1/l}$$

Lemme 2.28 (Solidarité des matrices irréductibles) .

Si A est irréductible, un vecteur propre u a toutes ses composantes différentes de ϵ .

Définition 2.29 (Graphe critique) .

On appelle **graphe critique**, noté $GC(A)$, le sous graphe de $G(A)$ formé des sommets et arrêts appartenant à un circuit critique. On notera $C^c = (C_1^c, \dots, C_q^c)$ l'ensemble des q composantes fortement connexe du graphe critique.

Exemple 2.30 .

On a représenté sur la Figure (2.5) une matrice et son graphe. Le graphe critique de $G(A)$ est en traits gras. On a les deux composantes fortement connexes $C_1^c = \{1\}$ et $C_2^c = \{2, 3\}$.

Définition 2.31 .

Soit $A \in \mathcal{D}^{n \times n}$ une matrice irréductible de valeur propre $\lambda \in \mathcal{D}$. On défini la matrice noté A_λ par

$$A_\lambda = \lambda^{-1} \otimes A$$

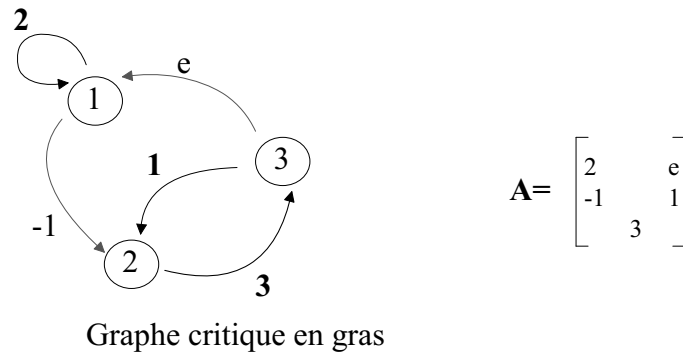


FIG. 2.5 – Graphe critique

Théorème 2.32 .

Soit $A \in \mathcal{D}^{n \times n}$ une matrice irréductible de valeur propre λ . La j -ème colonne de la matrice A_λ^+ , noté $(A_\lambda^+)_j$, est un vecteur propre de A si elle satisfait l'égalité

$$(A_\lambda^+)_j = A_\lambda \otimes (A_\lambda^+)_j$$

2.3.2 Cyclicité

Définition 2.33 .

► On appelle **cyclicité** d'une matrice irréductible A , noté $c(A)$, le pgcd des longueurs des circuits du graphes associé à A . Lorsque $c(A) = 1$, la matrice est dite **primitive**.

► La cyclicité d'une matrice $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ est défini comme suit :

1- La cyclicité d'une composante connexe du graphe critique est égale au pgcd des longueurs des circuits de cette composante.

2- La cyclicité de la matrice A est égale au ppcm des cyclicités des composantes connexes du graphe critique.

Exemple 2.34 .

La matrice A de la figure suivante a pour cyclicité 2. La matrice B est primitive.

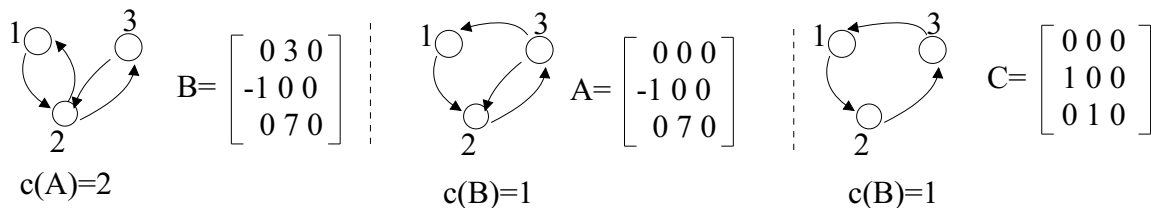


FIG. 2.6 – Matrices et graphes associées

Propriété 2.35 .

► Pour une matrice de permutation A , la cyclicité est égale à l'ordre de la permutation, à voir, l'ordre d'une matrice A est le plus entier k tel que $A^k = I$. A titre

d'exemple, la matrice C de la figure (2.6) est cyclique d'ordre 3 .

► Une matrice irréductible dont l'un des coefficients diagonaux est non nul est primitive.

Lemme 2.36 .

Soit $A \in (\mathbb{R}^+)^{n \times n}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1- A est primitive.

2- Il existe $N \in \mathbb{N}$, $k \geq N \Rightarrow \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, $A_{ij}^k > 0$.

Proposition 2.37 .

Soit A une matrice irréductible. La matrice $A^{c(A)}$ est bloc diagonale, chaque bloc étant primitif.

Lemme 2.38 .

Les longueurs de deux chemins de même extrémités sont congrues modulo $c(A)$.

Théorème 2.39 (Fondamental) .

Soit $A \in \mathbb{R}_{max}^{n \times n}$ irréductible. Il existe un entier N tel que

$$k \geq N \Rightarrow A^{k+c(A)} = (\rho(A))^{c(A)} A^k. \quad (2.9)$$

Pour la Démonstration voir [Gau99] page 73 .

Lemme 2.40 .

Tout circuit du graphe critique est critique

Applications[Régime périodique et taux de production].

Soit un graphe d'événement temporisé fonctionnant en régime autonome. Un tel graphe se représente par l'équation récurrente $x(k) = Ax(k-1)$. Lorsque A est irréductible, le théorème (2.39) entraîne que le comportement est périodique, i.e.

$$x(k+k_0) = \rho(A)^{k_0} x(k)$$

pour k assez grand. □

Définition 2.41 (Temps de cycle) .

Supposons que la matrice $A \in (\mathbb{R}_{max})^{n \times n}$ (a au moins un coefficient fini par ligne) et F sa fonction max-plus associé. On appelle **temps de cycle** de A (resp. de F), la limite défini par :

$$\chi(A) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{(A^k x)}{k} \quad (\text{resp. } \chi(F) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{F^k(x)}{k})$$

Proposition 2.42 .

Si F une fonction max-plus et A la matrice associé sur \mathbb{R}_{max} alors $\chi(F)$ existe et

$$\chi(F) = \mu(A)$$

Proposition 2.43 .

Si F a un vecteur propre tel que $F(x) = x + \lambda$, alors

$$\lambda = \mu(A)$$

Proposition 2.44 .

Soit F max-plus.

$\exists x \in \mathbb{R}^n$, tel que $F(x) = x + \lambda$ ssi, $\chi(F) = \lambda$

Chapitre 3

Propriétés spectrales des fonctions (min,max,+)

L'étude dynamique des "systèmes à événements discrets" amène à étudier l'itération de fonction de \mathbb{R}^n dans lui-même, qui sont croissantes (pour l'ordre produit sur les coordonnées) et additivement homogènes (c.à.d. qui commutent avec un certain groupe à un paramètre de translations). Selon la complexité de système, ces fonctions peuvent prendre des formes diverses, plus au moins générales (max-plus, affines par morceaux, min-max-plus, etc.) mais vérifient toujours les deux axiomes précédents.

Gunawardena et Keane [GK95] ont appelé **topicales** les fonctions vérifiant ces deux axiomes (dus à Crandall et Tartar [CT80]).

La classe de toutes les fonctions topicales est sans doute trop vaste pour qu'on puisse en dire des choses intéressantes, d'un point de vue dynamiques. Pour cela, ce chapitre est consacré plus particulièrement à une classe des fonctions topicales, les fonctions (min, max, +), qui jouent un rôle central comme le montre les observations dues à Gunawardena, Kean et Sapparrow.

Du point de vue dynamique, parmi les questions les plus importantes est de savoir si une telles fonctions (min, max, +) admet un vecteur spectrale (ou vecteur temps de cycle), des points fixes,...

3.1 Définitions et propriétés principales des Fonctions topicales

L'approche "topicale" des systèmes à événement discrets consiste à représenter l'état du système à une étape donnée par un point $x \in \mathbb{R}^n$ dans un certaine puissance finie de \mathbb{R} , et son évolution entre deux étapes successives par des fonctions $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$. La coordonnée x_i de x représente, à une étape donnée de l'évolution du système, la date de dernière apparition d'un "événement" de type i . Il se révèle indispensable de savoir quelques propriétés sur les fonctions topicales.

Définition 3.1 .

Soit F et $x, y \in \mathbb{R}^n$ et $h \in \mathbb{R}$.

1. **Monotonie** : si $x \leq y$ alors $F(x) \leq F(y)$ (M).

2. **Homogénéité** : $F(x + h) = F(x) + h$ (H).

3. **Non expansive (sens large)** : $\|F(x) - F(y)\| \leq \|x - y\|$ (N).

La notation $\|x\|$ fait référence à la norme l_∞ définie dans \mathbb{R}^n par :

$$\|x\| = |x_1| \vee |x_2| \vee \dots \vee |x_n|$$

4. **non contractivité de b** : $b(F(x) - F(y)) \geq b(x - y)$ (B).

5. **non expansivité de t** : $t(F(x) - F(y)) \leq t(x - y)$ (T).

Remarque 3.2 .

• On appellera **sous-homogène (SH)** les fonctions F telles que :

$$F(x + h) \leq F(x) + h \text{ pour } h \geq 0, h \in \mathbb{R}$$

• Une fonction $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ est **convexe** si chaque composante $F_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ est convexe, i.e $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$,

$$F_i(\lambda x + \mu y) \leq \lambda F_i(x) + \mu F_i(y)$$

avec $0 \leq \lambda, \mu \leq 1$ vérifiant $\lambda + \mu = 1$.

Exemples :

1- $f(x) = ax + b$ et $f(x) = x^2$ sont des fonctions convexes.

2- la fonction définie par $f(x) = \begin{cases} ax + b & \text{si } x < 2 \\ cx & \text{si } x \geq 2 \end{cases}$ décrit une fonction affine par morceaux.

Proposition 3.3 .

Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, les résultats suivants sont équivalents :

1. F satisfait (H) et (M).

2. F satisfait (H) et (N).

3. F satisfait (B).

4. F satisfait (T).

Preuve.

• (1 \Leftrightarrow 2) voir [CT80].

• (3 \Leftrightarrow 4) soient deux vecteurs $x, y \in \mathbb{R}^n$. La première formule de (2.4) nous donne :

$$\begin{aligned} b(F(x) - F(y)) &= -t(F(y) - F(x)) \\ b(x - y) &= -t(y - x) \end{aligned}$$

D’où l’équivalence entre 3 et 4 .

• (1 \Leftrightarrow 4) :

(4 \Rightarrow 1) Supposons que $y = x + h$. Puisque $b(y - x) = t(y - x) = h$, en appliquant (T) et (B), en aura $h \leq F(x + h) - F(x) \leq h$, d’où F satisfait (H). Maintenant supposons $x \leq y$. Nous déduisons que $0 \leq b(y - x)$, cependant en utilisant (B) en a $0 \leq b(F(y) - F(x))$. D’où $F(x) \leq F(y)$, ce qui prouve (M).

(1 \Rightarrow 4) Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. Puisque $x \leq y + t(x - y)$, en appliquant F et en utilisant (H) et (M), nous aurons $F(x) \leq F(y) + t(x - y)$ ce qui exprime le résultat 4.

• (2 \Leftrightarrow 4) :

(4 \Rightarrow 2) d'après ce qui précède, le résultat 4 entraîne que F satisfait **(H)**, reste à montrer que F satisfait aussi **(N)**. En effet, en combinant les résultats 3 et 4 et en utilisant les formules (2.4) nous déduisons que F satisfait **(N)**.

(2 \Rightarrow 4) Soient $x, y \in \mathbb{R}^n$. choisissons h tel que $y \leq x + h$ (en prend par exemple $h = t(y - x)$), et posons $z = x + h$. En a :

$$\begin{aligned}
 t(F(x) - F(y)) + h &= t(F(x) + h - F(y)) && \text{par (2.4)} \\
 &= t(F(z) - F(y)) && \text{par (H)} \\
 &\leq \| F(z) - F(y) \| && \text{par (2.4)} \\
 &\leq \| z - y \| && \text{par (N)} \\
 &= t(z - y) && \text{par le choix de h} \\
 &= t(x - y) + h && \text{par (2.4).}
 \end{aligned}$$

Soustrayant h de la première et de la dernière formule, nous démontrons facilement la propriété **(T)**. □

Remarque 3.4 .

• L'équivalence entre les deux premiers résultats (1 et 2) de La proposition (3.3) dus a [CT80] formule une importante remarque simplificatrice (voir figure 3.1) pour les applications vérifiant **(H)**, les propriétés **(M)** et **(N)**. De même les fonctions monotones sous-homogènes **(M.SH)** sont exactement les applications monotones non expansive**(M.N)**. La convexité **(Co)** est une hypothèse supplémentaire à l'ensemble des applications **(M.N)** qui permet des développements intéressants, de même que le caractère affine par morceaux **(Af)**.

• Les propriétés d'homogénéité et de monotonie ont une interprétation en termes de systèmes dynamiques ou de problèmes de décision. L'homogénéité d'un opérateur signifie que l'origine de la référence temporelle globale n'importe pas. La monotonie signifie qu'aucun retard d'événement ne pourra accélérer le système dynamique.

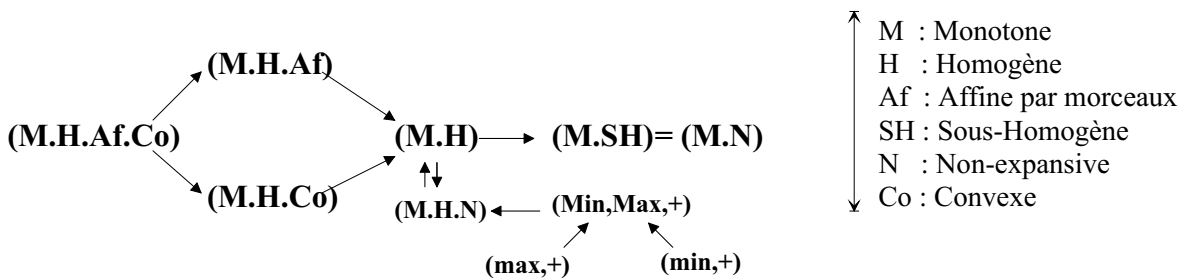


FIG. 3.1 – Une hiérarchie inclusive des fonctions topicales (la relation \subset étant représentée par \rightarrow)

Définition 3.5 (Fonction topicale) .

On appelle fonction **topicale** toute fonction $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfaisant l'un des résultats de la proposition (3.3).

L'ensemble des fonctions topicales de $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ sera noté **Tp**($\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n$).

Exemple 3.6 .

La fonction $F : (\mathbb{R}^+)^3 \rightarrow (\mathbb{R}^+)^3$ définie par :

$$\begin{aligned} F_1(x) &= 2x_1 \vee 3x_2 \\ F_2(x) &= \sqrt{x_1(4x_2 + 15x_3)} \\ F_3(x) &= x_2 \end{aligned}$$

est topicale.

Définition 3.7 (Temps de cycle de fonction topicale) .

Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ vérifiant **(N)**. Le **temps de cycle** (ou **vecteur spectral**) de F , noté $\chi(F) \in \mathbb{R}^n$, est défini par :

$$\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{F^k(x)}{k} \tag{3.1}$$

Quand cette limite existe pour un $x \in \mathbb{R}^n$, et est non définie ailleurs, si elle existe, ne dépend pas du point x .

Malheureusement, cette limite n'existe pas toujours.

Remarque 3.8 .

Il y a des nombreuses sous classes de $\mathbf{Tp}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^n)$ pour lesquelles l'existence du temps de cycle (vecteur spectral) est garantie, comme les fonctions topicales affines par morceaux et les fonctions uniformément topicales (Une fonction $F : \overline{\mathbb{R}}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^n$ est dite **uniformément topicale** si elle est topicale et admet un prolongement continu $F : \overline{\mathbb{R}}^n \rightarrow \overline{\mathbb{R}}^n$ avec $\overline{\mathbb{R}} = [-\infty, +\infty]$ muni de sa topologie usuelle).

Exemple 3.9 .

Une exigence fréquente des concepteurs de systèmes électroniques est l'estimation de performance. Si le système peut être modélisé par une seule fonction $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$, une estimation peut être faite sur la base du temps écoulé entre occurrences successives : $F(x) - x$. La moyenne sur plusieurs occurrences sera encore plus intéressante :

$$\frac{(F^k(x) - F^{k-1}(x) + \dots + F(x) - x)}{k}$$

Lemme 3.10 .

Soit $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfait **(N)**. Si $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{F^k}{k}$ existe quelque part alors elle existe partout et a une valeur unique.

Démonstration.

Supposons que pour un $x \in \mathbb{R}^n$, $\lim_{k \rightarrow +\infty} \frac{F^k}{k} = a$ et soit y un autre point de \mathbb{R}^n . Choisissons $\epsilon > 0$. Par **(N)**, pour tout k assez grand, en a :

$$\|a - \frac{F^k(y)}{k}\| \leq \|a - \frac{F^k(x)}{k}\| + \|\frac{F^k(x)}{k} - \frac{F^k(y)}{k}\| \leq \epsilon + \frac{\|x - y\|}{k}$$

le résultat en découle immédiatement. □

Définition 3.11 (Vecteur propre de fonction topicale) .

Supposons que $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ satisfait la propriété **(H)**. Nous disons que $x \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur propre de F , si $F(x) = x + h$ pour tout $h \in \mathbb{R}$, et que x est un point périodique de F de période p , si x est un vecteur propre de F^p , mais pas de F^k pour tout $0 < k < p$.

Remarque 3.12 (Importante) .

Un vecteur propre de F dans le sens de la définition (3.11) est un point fixe de $F - h$ au sens conventionnel. Dans une certaine mesure les problème de temps de cycle, sont des problèmes de point fixe. D'où les liaison fortes entre le temps de cycle, vecteur propre et point fixe. Sauf exception, les termes "vecteur propre" et "point périodique" auront la signification donnée par la définitions (3.11) dans toute cette partie.

Proposition 3.13 .

Si une fonction topicale possède un vecteur propre alors le temps de cycle existe et est indépendant du vecteur propre.

Démonstration.

Supposons que f est une fonction topicale possédant un vecteur propre tel que : $F(x) = x + h$. En itérant, nous voyons que $F^k(x) = x + k.h$. De là, $\chi(F)$ existe et $\chi(F) = h$. qui, par le lemme (3.10), est indépendante du choix du vecteur propre. \square

Le vecteur de temps de cycle fournit une mesure de performance pour les systèmes à événements discrets : le système ne possède qu'un état d'équilibre quand le temps de récurrence de chaque événement tend asymptotiquement vers la même valeur.

Définition 3.14 .

Pour tout $\epsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, nous posons :

$$a \oplus_{\epsilon} b = \epsilon \log(\exp \frac{a}{\epsilon} + \exp \frac{b}{\epsilon})$$

Cette loi est associative et commutative. les lois \max et \min apparaissent comme limites de \oplus_{ϵ} :

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} a \oplus_{\epsilon} b = \max(a, b), \quad \lim_{\epsilon \rightarrow 0^-} a \oplus_{\epsilon} b = \min(a, b)$$

Les lois \oplus_{ϵ} , \max , \min sont distributives par rapport à $+$:

$$\forall \epsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \forall \diamond \in \{\max, \min, \oplus_{\epsilon}\}, c + (a \diamond b) = (c + a) \diamond (c + b) \quad (3.2)$$

Il est commode ici d'étendre la notion \max aux vecteurs composante par composante (quand on écrit $\max(f, g)$ on prétend pas que le \max est atteint).

Proposition 3.15 .

soient $f, g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ des fonctions topicales. Soit $\epsilon \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, avec $0 \leq \alpha \leq 1$, $c \in \mathbb{R}^n$. Les fonctions suivantes sont toutes topicales :

$$\max(f, g), \quad \min(f, g), \quad f \oplus_{\epsilon} g, \quad \alpha f + (1 - \alpha)g, \quad c + f, \quad f \circ g$$

3.2 Fonctions (min,max,+)

3.2.1 Définitions

Définition 3.16 (Fonction (min,max,+) de type $(n, 1)$) .

Une fonction $(\min, \max, +)$ de **type $(n, 1)$** est une fonction $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$, qui peut être

écrit comme un mot dans la grammaire suivante :

$$F := x_1, x_2, \dots \mid F + a \mid F \wedge F \mid F \vee F \quad (a \in \mathbb{R}). \quad (3.3)$$

Les barres verticales séparent la construction récursive des termes. (Notations de Backus-Naur) Autrement dit, une fonction (min,max,+) $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^1$ est construite à partir de termes de la forme $x_i + a$ où $1 \leq i \leq n$ et $a \in \mathbb{R}$, par application d'un nombre fini d'opération max et min sur chaque composante.

Définition 3.17 (Fonction (min,max,+) de type (n,m)) .

Une fonction (min,max,+) de **type (n,m)** est toute fonction $F : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, telle que chaque composante F_i est une fonction (min,max,+) de type $(n, 1)$.

L'ensemble des fonctions (min,max,+) de type (n,m) noté **MM(n,m)**. Le cas le plus fréquent sera (n,n) , nous parlerons alors de fonction de dimension n et on notera **MM** l'ensemble de ces fonctions.

Exemples 3.18 .

1- La fonction :

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, x_3) &= \min(\max(x_2 + 2, x_3 + 5), x_1) \\ F_2(x_1, x_2, x_3) &= \min(x_2 + 1, x_3 + 2) \\ F_3(x_1, x_2, x_3) &= \max(x_1 - 1, x_2 + 3) \end{aligned}$$

est une fonctions de **MM(3,3)**.

2- Soient les trois termes suivants :

$$\begin{aligned} &(((x_1 + 5) \vee (x_2 - 0.5)) \wedge x_3) \vee (x_2 + 7) - 8 \\ &\quad \quad \quad x_2 \vee 4 \\ &\quad \quad \quad (x_1 + x_2) \wedge (x_3 + 9) \end{aligned}$$

Le premier est une fonction (min,max,+) mais ni le second ni le troisième ne peuvent être générés par (3.3).

Nous supposons que + est prioritaire sur \vee ou \wedge , nous permettant de d'écrire le premier exemple plus simplement :

$$(((x_1 + 5 \vee x_2 - 0.5) \wedge x_3) \vee x_2 + 7) - 8.$$

Bien que le grammaire fournisse une écriture syntaxique commode, les termes ne nous intéressent que comme fonctions, $\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. Ils peuvent être réarrangés par associativité et distributivité des opérations de treillis \wedge et \vee , et par distributivité de l'addition sur \wedge et \vee . L'exemple ci-dessus se simplifie en :

$$(x_1 - 3 \vee x_2 - 8.5) \wedge (x_3 - 8 \vee x_2 - 1).$$

On remarque que tout mot se simplifie en minima de maxima, ou, dualement, en maxima de minima.

Cas particuliers.

Soit $F \in \mathbf{MM}(n,1)$:

★ Si F peut être représentée par un terme qui n'utilise pas \wedge , elle est dite **max-seulement** (ou fonction max-plus). On reconnaîtra bien sûr les fonctions max-plus présentées auparavant.

★ Si F peut être représentée par un terme qui n'utilise pas \vee , elle est dite **min-seulement** (ou fonction min-plus).

★ Si F à la fois max et min seulement, elle est dite **simple**.

La même terminologie s'étend aux $F \in \mathbf{MM}(n,m)$ en exigeant que chaque composante F_i ait la propriété en question.

★ Si $F \in \mathbf{MM}(n,m)$ et que chaque F_i est soit max-seulement ou min-seulement, F est dite **séparée**.

Exemple 3.19 .

Soient les fonctions suivantes dans $\mathbf{MM}(2,2)$

$$U = \begin{pmatrix} x_1 + 1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} x_2 + 1 \\ x_2 - 1 \end{pmatrix} \quad W = \begin{pmatrix} x_1 + 1 \vee x_2 + 1 \\ x_2 + 2 \end{pmatrix}$$

U et V sont simples et W est max-seulement. De plus, $U \wedge V$ est min-seulement et $(U \vee V) \wedge W$ est séparée.

Lemme 3.20 .

Soit $G : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction topicale et soit $S \subseteq \mathbb{R}^n$ un ensemble fini. Il existe $F \in \mathbf{MM}$ tel que $G \leq F$ et $G(x) = F(x) \quad \forall x \in S$.

3.2.2 Vecteurs propres et représentations rectangulaires de fonctions (min,max,+)

Définition 3.21 (Max-représentation) .

Soit $F \in \mathbf{MM}(n,m)$. Un sous ensemble $S \subseteq \mathbf{MM}(n,m)$ est appelé **max-représentation** de F si S est un ensemble fini de fonction max-seulement tel que $F = \bigwedge_{H \in S} H$.

Les remarques précédents, la définition (3.14) indiquent que toute fonction (min,max,+) possède une **max-représentation** et (dualmente) une **min-représentation**. Puisque nous connaissons les vecteurs de temps de cycle des fonctions max-seulement, nous pouvons estimer celui de F , quand il existe.

Supposons que $\chi(F)$ existe, pour $H \in S$, $F \leq H$.

Selon la propriété (**M**),

$$\chi(F) \leq \chi(H)$$

Donc,

$$\chi(F) \leq \bigwedge_{H \in S} \chi(H) \tag{3.4}$$

Remarque 3.22 .

Une représentation max-seulement donne une estimation supérieure pour le temps de cycle. Cette estimation peut être utilisée pour développer une condition alternative pour les vecteurs propres. La première difficulté est qu'il y a des nombreuses max-représentations d'une fonction (min,max,+) donnée et que les estimations correspondantes peuvent varier.

Exemple 3.23 .

La fonction (min,max,+) suivante :

$$\begin{aligned} F_1(x_1, x_2, x_3) &= (x_2 + 2 \vee x_3 + 5) \wedge x_1 \\ F_2(x_1, x_2, x_3) &= x_2 + 1 \wedge x_3 + 2 \\ F_3(x_1, x_2, x_3) &= x_1 - 1 \vee x_2 + 3 \end{aligned}$$

admet les max-représentations

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_2 + 2 \vee x_3 + 5 \\ x_2 + 1 \\ x_1 - 1 \vee x_2 + 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_3 + 2 \\ x_1 - 1 \vee x_2 + 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

et

$$\left\{ \begin{pmatrix} x_2 + 2 \vee x_3 + 5 \\ x_3 + 2 \\ x_1 - 1 \vee x_2 + 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 + 1 \\ x_1 - 1 \vee x_2 + 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Les vecteurs de temps de cycle des fonctions max-seulement constituantes peuvent être calculés avec l'algorithme d'itération sur les politiques max-plus, qui donne ce qui suit.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2.5 \\ 2.5 \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} 2.5 \\ 2.5 \\ 2.5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Il découle que l'estimation de la relation (3.4) donne pour la première max-représentation, (0, 1, 2), et pour la seconde, (0, 1, 1).

Pour obtenir la meilleur estimation, toute l'information des max-représentation de F doit être utilisée. Observons que l'ensemble des fonctions (min,max,+) $\mathbf{MM}(n,m)$ a pour représentation naturelle le produit cartésien :

$$\mathbf{MM}(n,m) = \underbrace{\mathbf{MM}(n,1) \times \dots \times \mathbf{MM}(n,1)}_{m \text{ fois}}$$

D'une manière générale :

si $S \subseteq A_1 \subseteq \dots \times A_m$ un sous ensemble d'un tel produit cartésien quelconque, alors $\pi_i(S) \subseteq A_i$ avec $\pi_i(S)$ sa projection sur la i -ème composante.

Définition 3.24 (Rectangularisation) .

La rectangularisation de S , noté $\mathbf{Rec}(S)$, est définie par :

$$\mathbf{Rec}(S) = \pi_1(S) \times \dots \times \pi_m(S).$$

S est dite **rectangulaire** si $S = \mathbf{Rec}(S)$.

On a toujours $S \subseteq \mathbf{Rec}(S)$. Il est intéressant de remarquer que $\pi_i(S) = \pi_i(\mathbf{Rec}(S))$. On en déduit que si $S \subseteq \mathbf{Rec}(S)$ est fini alors :

$$\bigwedge_{H \in S} H = \bigwedge_{H \in \mathbf{Rec}(S)} H \text{ et } \bigvee_{H \in S} H = \bigvee_{H \in \mathbf{Rec}(S)} H \quad (3.5)$$

L'ordre partiel auquel réfère l'inf et le sup sur les fonctions de $\mathbf{MM}(n,m)$ est défini composante par composante. De plus si S ne contient pas des fonctions max-seulement, il en est de même pour $Rec(S)$.

Il est bon de remarquer qu'aucune des max-représentation utilisées dans l'exemple précédent n'était rectangulaire.

Supposons que $S \subseteq P$, où (P, \leq) est un ensemble partiellement ordonné. Notons $\mathbf{Min}(S)$ le sous ensemble des plus petits éléments de S ,

$$\mathbf{Min}(S) = \{x \in S \mid y \in S, y \leq x \Rightarrow y = x\}$$

et $\mathbf{Max}(S)$ l'ensemble correspondant des plus grands éléments

$$\mathbf{Max}(S) = \{x \in S \mid y \in S, y \geq x \Rightarrow y = x\}$$

Si S est fini et $x \in S$, alors il existe $u \in \mathbf{Min}(S)$ et $v \in \mathbf{Max}(S)$ tels que $u \leq x \leq v$. Supposons maintenant que P est un produit partiel : $P = A_1 \times \dots \times A_m$ avec l'ordre partiel sur P défini composante par composante à partir des A_i .

Lemme 3.25 .

Soit $S_i \subseteq A_i$ des sous ensembles finis pour $1 \leq i \leq m$. Alors

$$\mathbf{Min}(S_1 \times \dots \times S_m) = \mathbf{Min}(S_1) \times \dots \times \mathbf{Min}(S_m).$$

Démonstration.

Il est clair que $L = \mathbf{Min}(S_1 \times \dots \times S_m)$ et $R = \mathbf{Min}(S_1) \times \dots \times \mathbf{Min}(S_m)$ sont non redondants : aucune paire d'éléments n'est en relation par l'ordre partiel. Si $x \in S_1 \times \dots \times S_m$ alors par définition du sous ensemble des plus petits éléments, nous pouvons trouver $u \in L$ tel que $u \leq x$. Avec un argument similaire sur chaque composante, nous pouvons trouver $v \in R$ tel que $v \leq x$. Il en découle que $L = R$. \square

Théorème 3.26 .

Soit $F \in \mathbf{MM}(n,m)$ et supposons que $S, T \subseteq \mathbf{MM}(n,m)$ sont des max-représentations rectangulaires de F . Alors

$$\mathbf{Min}(S) = \mathbf{Min}(T).$$

Démonstration.

Voir [Gun94b] ou [CTGG99]. \square

Corollaire 3.27 .

Soit $F \in \mathbf{MM}$ et supposons que $S, T \subseteq \mathbf{MM}$ sont des max-représentations rectangulaires de F . Alors

$$\bigwedge_{H \in S} \chi(H) = \bigwedge_{G \in T} \chi(G).$$

Démonstration.

Puisque χ est monotone, on doit avoir :

$$\bigwedge_{H \in \mathbf{Min}(S)} \chi(H) = \bigwedge_{H \in S} \chi(H)$$

Le résultat se déduit immédiatement du théorème (3.26). \square

Proposition 3.28 .

Soit $F \in \mathbf{MM}$, supposons que S, T sont deux représentation rectangulaire max et min, respectivement, de F et supposons de plus que F a un vecteur propre : $F(x) = x + h$. Alors :

$$\bigvee_{G \in T} b(\chi(G)) = \bigvee_{G \in T} \chi(G) = \bigwedge_{H \in S} \chi(H) = \bigwedge_{H \in S} t(\chi(H)). \quad (3.6)$$

Pour les définitions des applications t et b voir définition (2.12).

3.3 Existence de vecteur propre

La relation (3.6) est une condition nécessaire pour qu'une fonction $F \in \mathbf{MM}$ ait un vecteur propre. Dans [Gun94a] il a été montré que c'est une condition suffisante. Ce résultat est non constructif. La proposition (3.28) montre aussi que la condition $\bigwedge_{H \in S} \chi(H) = h$, et sa duale sont toutes deux nécessaires pour que F ait un vecteur propre. la partie ci-après montrera qu'une seule de ces conditions est suffisante.

3.3.1 Théorème d'existence de vecteur propre

Lemme 3.29 .

Soit $F \in \mathbf{MM}$ et $S \subseteq \mathbf{MM}$ une max-représentation rectangulaire de F . Choisissons une famille quelconque de n fonctions dans S : $A_1, \dots, A_n \in S$. Il existe une fonction $K \in S$ telle que :

$$t(\chi(K)) = \bigvee_{1 \leq i \leq n} \chi_i(A_i)$$

Lemme 3.30 .

Sous les mêmes hypothèses que pour le lemme (3.29), si $\bigwedge_{H \in S} \chi(H) = h$, il existe $K \in S$ tel que $\chi(K) = h$.

Théorème 3.31 (Existante de vecteur propre) [CT01].

Soit $F \in \mathbf{MM}$, supposons que S, T sont deux représentation rectangulaire max et min, respectivement, de F . Les conditions suivantes sont équivalentes.

1. F a un vecteur propre avec $F(x) = x + h$.
2. $\bigwedge_{H \in S} \chi(H) = h$.
3. $\bigvee_{G \in T} \chi(G) = h$.

Démonstration.

La preuve découle d'une part de la proposition (3.28), et d'autre part, elle est fondé sur une version (min,max,+) de l'algorithme d'itération des politiques, qui est inspiré de l'algorithme de Howard. Pour plus de détail voir [CTG96]. \square

Propriétés 3.32 .

Soit $F \in \mathbf{MM}$:

► Si F a une max-représentation S telle que chaque $H \in S$ a un vecteur propre. Alors F a un vecteur propre.

► Soit S, T comme pour le théorème (3.31).

F a un vecteur propre, avec $F(x) = x + h$, si et seulement si,

$$\bigvee_{G \in T} b(\chi(G)) = h = \bigwedge_{H \in S} t(\chi(H))$$

Théorème 3.33 (Existence d'une solution) .

Soit $F \in \mathbf{MM}$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

1. Il existe un vecteur fini x tel que $x \leq F(x)$.
2. $\chi(F) \geq 0$.

Dualement, Les deux conditions suivantes sont aussi équivalentes :

1. Il existe un vecteur fini x tel que $x \geq F(x)$.
2. $\chi(F) \leq 0$

3.3.2 Exemples**Exemple 3.34 (Systèmes (min,max,+) non autonome, [YDZ02]) .**

Considérons le système (min,max,+) défini par :

$$\begin{aligned} x_1(k+1) &= (x_1(k) \wedge (x_2(k) + 1 \vee x_3(k))) \vee x_4(k) \\ x_2(k+1) &= (x_2(k) \wedge x_3(k) - 1) \vee x_4(k) + 15 \\ \mathcal{M} : x_3(k+1) &= x_1(k) \vee x_2(k) \\ x_4(k+1) &= (x_4(k) + 3 \vee x_5(k) + 8) \wedge x_2(k) - 10 \\ x_5(k+1) &= x_4(k) \end{aligned}$$

On peut décomposer arbitrairement ce système en deux sous-systèmes plus simples :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_1 : x_1(k+1) &= (x_1(k) \wedge (x_2(k) + 1 \vee x_3(k))) \vee x_4(k) \\ x_2(k+1) &= (x_2(k) \wedge x_3(k) - 1) \vee x_4(k) + 15 \\ x_3(k+1) &= x_1(k) \vee x_2(k) \end{aligned}$$

et

$$\mathcal{M}_2 : \begin{aligned} x_4(k+1) &= (x_4(k) + 3 \vee x_5(k) + 8) \wedge x_2(k) - 10 \\ x_5(k+1) &= x_4(k) \end{aligned}$$

\mathcal{M}_1 a une valeur propre 0 et \mathcal{M}_2 a une valeur propre 4. Il résulte de théorème 3 dans [YDZ02] que le système \mathcal{M} admet une valeur propre entre 0 et 4. Une simulation numérique montre que ce système a une valeur propre 2.5.

Exemple 3.35 (Structure des espaces propres dans l'algèbre max-min, [Gav01]) .

Soit l'algèbre $(\mathcal{B}, \vee, \wedge)$. Posons $A \in \mathcal{B}(n, n)$ et $b \in \mathcal{B}(n)$ avec n un entier naturel non

nul. On appelle espace propre de A l'ensemble défini par :

$$\mathcal{F}(A) = \{x \in \mathcal{B}(n) \text{ tel que } A \wedge x = x\}$$

Dans cet exemple on voulait représenter $\mathcal{F}(A)$ pour des valeurs différentes de la matrice A .

Posons $\mathcal{B} = [0, 8]$, $A \in \mathcal{B}(2, 2)$.

Pour trois valeurs de la matrice A , on représente $\mathcal{F}(A)$ respective a chaque valeur dans l'algèbre $([0, 8], \vee, \wedge)$:

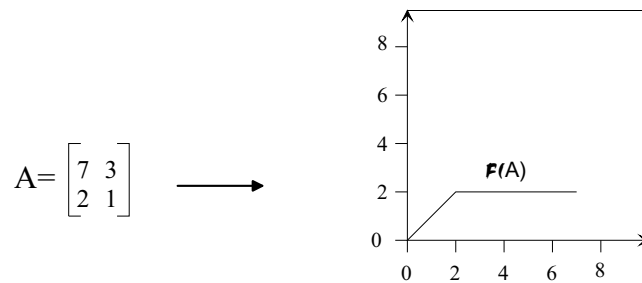


FIG. 3.2 – Structure d'un espace propre dans l'algèbre $([0, 8], \vee, \wedge)$

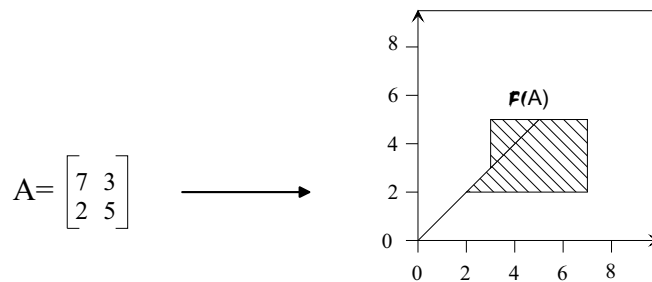


FIG. 3.3 – Structure d'un espace propre dans l'algèbre $([0, 8], \vee, \wedge)$

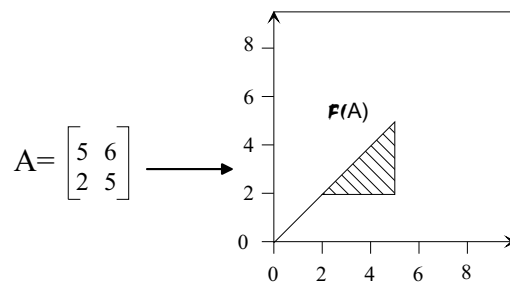


FIG. 3.4 – Structure d'un espace propre dans l'algèbre $([0, 8], \vee, \wedge)$

Chapitre 4

Contribution à l'analyse de la vivacité dans les Réseaux de Petri P-temporels

Le paramètre temps est un élément majeur dans l'analyse des systèmes. En effet, dans les systèmes à contraintes de temps ce paramètre n'affecte pas uniquement les performances du système mais aussi sa validité fonctionnelle.

Un bon comportement du système dépend donc de l'ordre d'obtention des résultats mais aussi du temps pris pour les obtenir. Il apparaît alors primordial de disposer de méthodes formelles permettant l'analyse de certaines propriétés comportementales afin de préserver le bon fonctionnement du système dans son environnement. Comme les contraintes temporelles apparaissant sur ces systèmes s'expriment par des intervalles de temps, notre choix s'est naturellement orienté vers les réseaux de Petri P-temporels. Nous sommes ainsi amenés à proposer ce nouveau modèle temporel permettant de représenter et d'analyser un tels systèmes, dans lequel, des intervalles de temps sont associés aux places. Des nouvelles méthodes d'analyse de la vivacité dans les réseaux de Petri P-temporels seront proposées.

4.1 Les réseaux de Petri autonomes (RdPA)

4.1.1 Définitions de base et règle de fonctionnement d'un RdPA

Un réseau de Petri (RdP) est un graphe biparti constitué de places, de transitions et d'arcs orientés qui relient les transitions aux places et les places aux transitions. Il est représenté par un quadruplet $\mathbf{R}=\langle \mathbf{P}, \mathbf{T}, \mathbf{Pré}, \mathbf{Post} \rangle$ où :

- \mathbf{P} : ensemble fini de places $P = (p_1, p_2, \dots, p_m)$, avec $m = \text{card}(P)$
- \mathbf{T} : ensemble fini de transitions $T = (t_1, t_2, \dots, t_n)$, avec $n = \text{card}(T)$
- $\mathbf{Pré}$: application de $P \times T \rightarrow N$ (ensemble des entiers naturels) correspondant aux arcs directs reliant les places aux transitions,
- \mathbf{Post} : application de $P \times T \rightarrow N$ correspondant aux arcs directs reliant les transitions aux places.

On notera t^0 (resp. 0t) l'ensemble des places de sortie (resp. d'entrée) de la transition t . De même p^0 (resp. 0p) désignera l'ensemble des transitions de sortie (resp. d'entrée) de la place p .

Définition 4.1 (Un RdP marqué) .

Un RdP marqué est un $\langle R, M \rangle$ où :

- R : un RdP
- M : une application qui associe à chaque place p du RdP un nombre de marques

$$\begin{aligned} M : P &\rightarrow N \\ p &\rightarrow M(p) \end{aligned}$$

$M(p)$ désigne le nombre de marques (jetons) contenues dans la place p . M peut être représenté par un vecteur colonne indicé par les numéros des places.

Règle de fonctionnement

Une transition est dite franchissable (validée ou tirable) si :

$$\forall p \in {}^0t \quad M(p) \geq \text{Pré}(p, t)$$

Le tir (le franchissement) d'une transition t a pour conséquence :

- (i) De retirer $\text{Pré}(p, t)$ marques de chaque place d'entrée p de la transition t .
- (ii) D'ajouter $\text{Post}(p, t)$ marques dans chaque place de sortie p de la transition t .

Le franchissement d'une transition t provoque alors le passage d'un marquage M à un autre marquage M' tel que :

$$\forall p \in P \quad M'(p) = M(p) + \text{Post}(p, t) - \text{Pré}(p, t)$$

Une séquence de transition $s = (t_1, t_2, \dots, t_s)$ est franchissable pour le marquage M_0 si t_k ($k = 1, \dots, s$) est franchissable pour le marquage M_{k-1} obtenu par le franchissement de $s_{k-1} = (t_1, t_2, \dots, t_{k-1})$.

L'ensemble des marquages accessibles en partant du marquage M_0 et en franchissant une séquence de transitions, sera noté M_0^* .

Si $M \in M_0^*$, il existe au moins une séquence s franchissable qui permet de passer du marquage M_0 au marquage M .

4.1.2 Principales propriétés dynamiques (comportementales) d'un RdPA

Ces propriétés dépendent du marquage initial et sont liées à l'évolution du réseau (borné, vivant, réinitialisable,...).

- Une place p_i est dite **bornée** pour un marquage initial M_0 s'il existe un entier naturel k tel que, pour tout marquage accessible à partir de M_0 , le nombre de marques dans p_i est inférieur ou égal à k (on dit que p_i est k -bornée).

- Un RdPA marqué est **borné** pour un marquage initial M_0 si toutes les places sont bornées pour M_0^* (le réseau est k -borné si toutes les places sont k -bornées).

- Supposons que R est un RdPA et M_0 est le marquage initial de R , le problème **d’accessibilité d’un marquage** consiste à trouver si un marquage M_i est accessible depuis M_0 dans R .

- Un RdPA est **sauf** s’il est 1-borné.

- Un RdPA marqué (R, M_0) est **vivant** si et seulement si, pour tout marquage accessible $M \in M_0^*$, et pour toute transition t , il existe une séquence de franchissement qui contient t .

- Un RdPA marqué (R, M_0) est **Pseudo-vivant** si et seulement si, pour tout marquage accessible $M \in M_0^*$, il existe une transition t sensibilisée.

$$\forall M \in M_0^*, \forall p \in P, \exists t \in T \text{ tel que } M(p) \geq \text{Pré}(p, t)$$

Remarque 4.2 .

► La vivacité d’un réseau garantit le franchissement de toute transition quel que soit le marquage atteint.

► La propriété de vivacité est une propriété forte, souvent difficile à vérifier [LP92].

► La pseudo-vivacité traduit l’absence de blocage total dans le RdP donc dans le système spécifié.

- Un **blocage** est un marquage tel qu’aucune transition n’est validée.

- Un RdP a un **état d’accueil** M_a pour un marquage initial M_0 si pour tout marquage accessible $M_i \in M_0^*$, il existe une séquence de franchissement (s) tel que M_a est accessible de M_i en franchissant s .

Le réseau est **réinitialisable** pour un marquage initial M_0 , si M_0 est un état d’accueil.

Remarque 4.3 [DA92].

La vérification de ces propriétés se fait généralement en établissant l’arbre de couverture (ou le graphe de couverture). **L’arbre de couverture** est composé de noeuds qui correspondent aux marquages accessibles, et d’arcs correspondant aux franchissements de la transition qui fait passer d’un marquage à l’autre. Le nombre de noeuds dans cette arbre est fini.

l’approche qui est basé sur le graphe de couverture pour étudier les RdP constitue l’analyse énumérative

4.1.3 Graphes d’événements Autonomes (GEA)

Définition 4.4 .

Un GEA est un RdPA pour lequel chaque place a exactement une transition d’entrée et une transition de sortie. Il se caractérise par l’absence de conflit structurel.

$$|p^0| = |p| = 1, \forall p \in P$$

Théorème 4.5 .

- Dans un GEA, le nombre de marques dans tout circuit élémentaire est invariant

quelle que soit l'évolution.

- Un GEA est vivant si et seulement si le marquage de tout circuit élémentaire est strictement positif.

4.2 Les réseaux de Petri P-temporels (p-RdP)

Les réseaux de Petri P-temporels, ont été développés en particulier par Wael Khansa [Kha97].

Des intervalles de temps sont associés aux places de ces réseaux. La sémantique de ces intervalles est la durée de séjour admissible d'une marque dans une place. La violation de cette spécification se traduira par la **mort** des marques. Cette notion des marques-mortes est spécifiques à ce nouveau modèle.

L'existence et la détection de jetons morts sont un point important du modèle : par exemple, dans un contexte de chaîne de production avec trempage de pièces dans des bains chimiques, un jeton mort représente une pièces qui restée trop longtemps dans un bac.

Présentation formelle

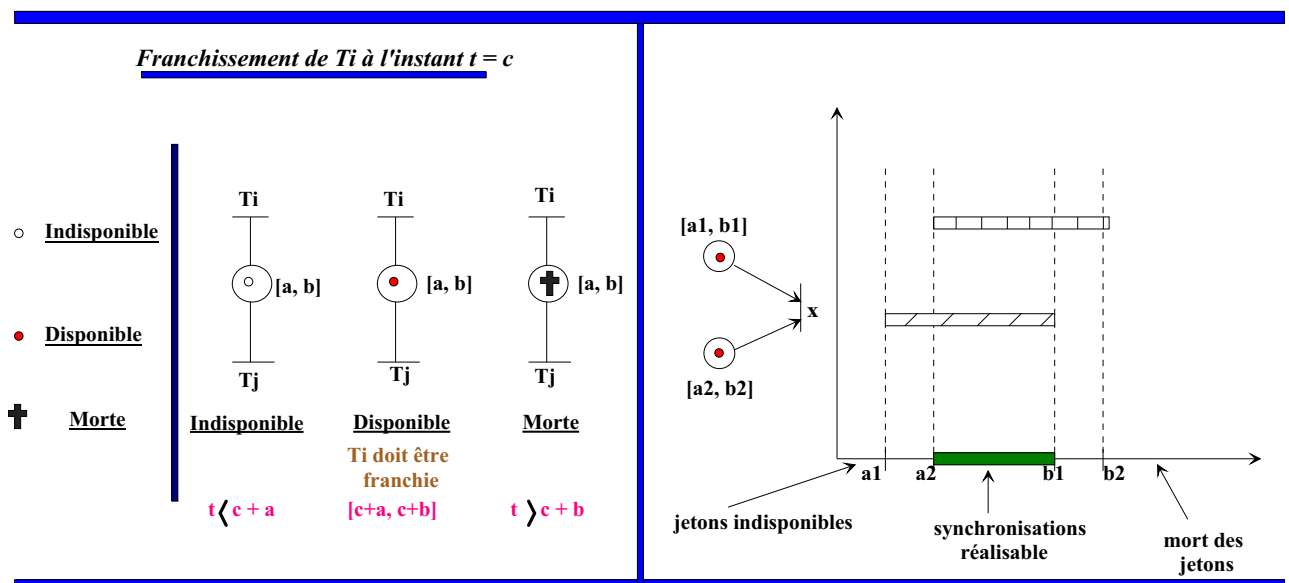


FIG. 4.1 – États des marques

Définition 4.6 (Réseaux de Petri P-temporels) [Kha97].

Un réseau de Petri P-temporel (**p-RdP**) est une paire $\langle R; IS \rangle$ où :

- R est un réseau de Petri $\langle P, T, Pre, Post \rangle$ muni d'une marquage initiale M_0 .
- IS est une fonction qui à chaque place p_i fait correspondre un intervalle fermé rationnel.

$$IS : P \rightarrow (Q^+ \cup 0) \times (Q^+ \cup \infty)$$

$$p_i \rightarrow IS_i = [a_i, b_i] \quad \text{tel que } 0 \leq a_i \leq b_i$$

IS_i décrit des durées de sensibilisation. En effet, IS_i définit l'intervalle statique de temps de séjour d'une marque dans la place p_i (\mathbb{Q}^+ est l'ensemble des nombres rationnels positifs). Une marque dans la place p_i participe à la validation de ses transitions de sortie que si elle a séjourné au moins la durée a_i dans cette place. Elle doit alors quitter la place p_i , donc franchir l'une des transitions de sortie au plus tard quand sa durée de séjour devient b_i . Après ce temps (b_i), la marque sera "morte" et ne participera plus à la validation des transitions.

Définition 4.7 (Sensibilisation) .

Soit R un réseau de Petri, M un marquage, et t une transition.

On dit que la transition t est *sensibilisée* par le marquage M , ce que l'on note $M[t > \text{ou}$
 $M \xrightarrow{t}$ ssi le marquage des places en entrée de t est suffisant pour le tir.

Exemple 4.8 (Réseaux de Petri P-temporels) .

La cellule considérée est une cellule de traitement assurant la coloration de pièces à l'aide de bains chimiques. Elle est constituée :

- de deux cuves identiques (de capacité unitaire) qui assurent le même traitement (coloration). Le temps de traitement d'une pièce doit durer entre 4 et 6 unités de temps.
- d'un robot réalisant le chargement et le déchargement des 2 cuves. Après une opération de chargement ou de déchargement, le robot a besoin d'une unité de temps pour être prêt pour l'opération suivante. Le temps de chargement est exactement 3 unités de temps, celui de déchargement est exactement 3 unités de temps, quelles que soient les cuves.

Le modèle p-RdP de cette cellule est donné par la figure (4.2)

p_1 modélise le robot libre, p_2 le chargement, p_3 le traitement dans les cuves, p_4 le déchar-

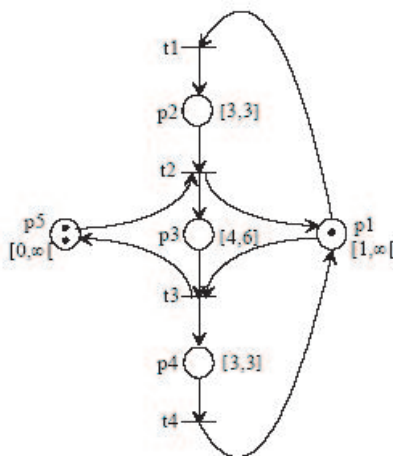


FIG. 4.2 – Réseaux de Petri P-temporels

gement, et p_5 les cuves libres.

A partir de l'intervalle de temps associé à la place p_1 , nous savons que le robot a besoin d'une unité de temps pour être prêt pour faire l'opération suivante (chargement ou déchargement) et il peut attendre jusqu'à l'infini sans charger une nouvelle pièce. La transition de synchronisation t_2 est la borne supérieure de l'intervalle de temps associé à la place p_2 , assure qu'une cuve doit être vide à la fin du chargement d'une nouvelle pièce.

Par les intervalles associés aux places p_1 et p_3 (en amont de la transition de synchronisation t_3 , nous modélisons le fait que le robot doit être libre au plus tard à la fin du temps de traitement autorisé ([4, 6]) d'une pièce dans une cuve.

4.2.1 Règle de fonctionnement

Pour pouvoir déterminer le fonctionnement, il faut d'abord caractériser la situation du réseau à un instant donné, puis déterminer les conditions de franchissement des transitions. Enfin le passage d'une situation à une autre devra être établie.

On utilisera la notion "d'état" pour caractériser la situation du réseau à instant donné. En fait, l'évolution dynamique d'un p-RdP dépend des marques et de leurs situations temporelles.

Définition 4.9 (État d'un p-RdP) .

A un instant donné, l'état est totalement déterminé par la paire $E = \langle M, I \rangle$ telle que :

- M est une application de marquage, assignant à chaque place du réseau un certain nombre de marques ($\forall p \in P, M(p) \geq 0$);
- I est une application "intervalle potentiel" de tir, associant à chaque marque k dans une place p_i un intervalle $[a_i^k, b_i^k]$. On l'appellera "**intervalle dynamique**" de tir pour le distinguer de l'**intervalle statique** (initial) associé à la place qui contient cette marque. Ces intervalles (les intervalles dynamiques) sont relatifs à l'instant d'arrivée de la marque dans la place. Supposons que la marque k arrive dans la place p_i (son intervalle statique est $[a_i, b_i]$) à l'instant c , à l'instant $c + d$ ($a_i \leq d \leq b_i$) l'intervalle dynamique de k est

$$[a_i^k, b_i^k] = [\max(a_i - d, 0), b_i - d]$$

Remarque 4.10 .

Le tir d'une transition dépend des intervalles dynamiques associés aux marques dans toutes ses places d'entrée. Par conséquent, la connaissance de l'intervalle dynamique associé à une marque dans une de ses places d'entrée ne donne pas les informations suffisantes sur le tir de cette transition (en a besoin de tous les intervalles dynamiques associés aux marques dans ses places d'entrée). C'est la raison pour laquelle on a utilisé le mot "**potentiel**".

On constate que deux problèmes peuvent survenir dans les p-RdP :

- Le blocage classique (un marquage tel qu'aucune transition n'est validée).
- La mort des marques (l'intervalle dynamique d'une marque devient $[0, 0]$ et aucune transitions de sortie de la place contenant cette marque n'est validée à cet instant). Ce problème est spécifique aux p-RdP. On aura donc un réseau **marques mortes** ou un réseau **marques-vivantes**.

Définition 4.11 (Une autre manière de Caractériser l'état) .

A un instant donné, l'état est défini par un doublet $E = \langle M, G \rangle$, où :

- M est identique à la définition précédente ;
- G est une application temps de séjour qui associe à chaque marque k dans la place p_i , un nombre réel g_i^k où g_i^k est l'**âge** de cette marque (le temps écoulé depuis son arrivée dans la place p_i). Le g_i^k associé à une marque k dans la place p_i . La marque k dans la place p_i peut participer à la validation de ses transitions de sortie quand son âge g_i^k est supérieur ou égal à a_i . Elle est **morte** quand son âge est strictement supérieur à b_i .

Condition de franchissement d'une transition

Dans les p-RdP, la détermination de l'intervalle de tir d'une transition est compliquée. En effet, on détermine l'intervalle potentiel de tir d'une transition en ne considérant que, dans un premier temps, les intervalles potentiels associés aux marques dans les places d'entrée de cette transition. On détermine, dans un second temps, l'intervalle réel de tir de cette transition en considérant cette fois ci tous les intervalles potentiels associés aux marques dans les autres places.

Définition 4.12 .

Une transition t_1 est **potentiellement tirable** (validée au sens des RdPA) à partir de l'état $E(M, I)$ si et seulement si :

1- elle est validée au sens des RdPA dans cette état (voir 4.1.1) ;

2- $\forall p_i \in {}^0t_1$, il existe au moins $\text{Pré}(p_i, t_1)$ marques dans cette place telles que

$$\cap_k [a_i^k, b_i^k] \neq \emptyset \quad \text{où } k = 1, 2, \dots, \text{Pré}(p_i, t_1)$$

De plus, il n'existe pas des marques (**qui ne participent pas au franchissement de la transition t_1**) dans cette place dont les bornes supérieures de leur intervalles dynamiques sont strictement inférieure à a_i^i . Sinon, il y a des marques qui meurent et par conséquent, le réseau sera marques-mortes. Alors chaque place p_i a un intervalle potentiel $[a_i^i, b_i^i] \neq \emptyset$. Enfin, l'intervalle d'intersection de toutes les places d'entrée de t_1 , $[a_1, b_1]$ doit être non vide (sinon il y a des marques qui seront mortes).

$[a_1, b_1]$ est l'intervalle dans lequel t_1 reste potentiellement tirable.

4.2.2 Vivacité et blocage

Les notions de vivacité des transitions et de blocage sont similaires à celles évoqués pour les RdPA (Réseau de Petri Autonome) .

En plus de ces deux propriétés précédentes des p-RdP, un autre problème est l'étude de la mort des marques (**Vivacité des marques**). Ce problème découle du fait qu'une marque peut mourir dans une place précédant immédiatement une transition de synchronisation avant la validation de celle-ci.

Un état E_i d'un p-RdP est **marques-vivantes**, si toutes les marques dans M_i sont vivantes.

Un p-RdP est marques-vivantes pour un marquage initial M_0 (l'état initial E_0) si toutes les marquages des états accessibles depuis M_0 sont des états marques-vivantes.

Si une marques dans un marquage d'un état accessible depuis E_0 est morte, alors le réseau est **marques-mortes**.

Rappelons qu'une marque qui meurt ne participe plus à la validation des transitions.

Remarque 4.13 .

► La propriété de vivacité ne se conserve pas forcément entre les p-RdP et leurs RdPA (Réseau de Petri Autonome) sous-jacent. La figure (4.4) illustre ce résultat.

► Notons qu'un p-RdP peut être vivant sans être marques-vivantes. L'inverse est aussi vrai : un p-RdP peut être marques-vivantes sans être vivant (figure 4.3).

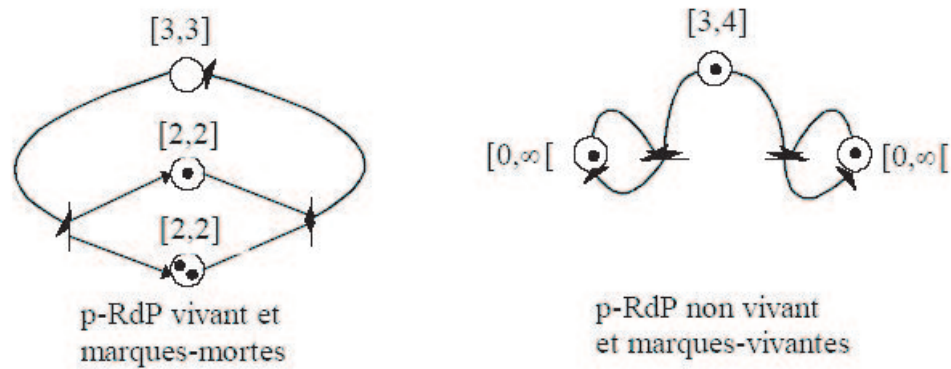


FIG. 4.3 – vivacité des marques

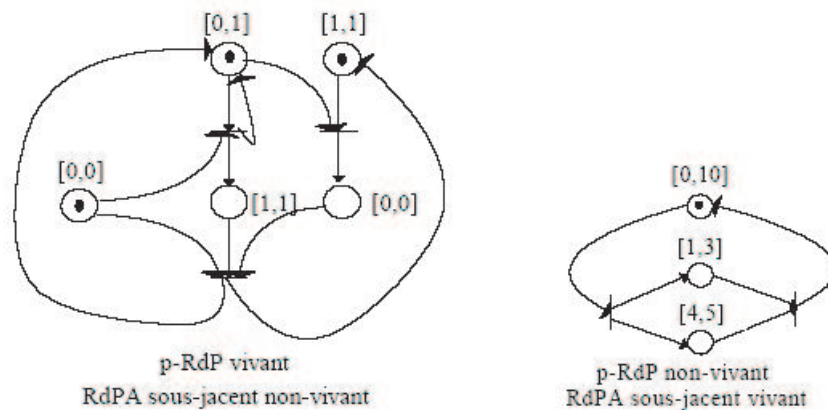


FIG. 4.4 – Non conservation de vivacité entre les p-RdP et les RdPA sous-jacents

4.2.3 Limitations de l'analyse énumérative dans un p-RdP

L'analyse énumérative est une approche basée sur le graphe de couverture afin de valider un modèle RdP. En effet, son but est de mettre en évidence les propriétés de système modélisé. Cette approche d'analyse est générale : elle est applicable à toute classe de réseaux. En effet, le graphe de couverture est le seul outil pour vérifier les propriétés dynamiques d'un RdP pour un marquage initial.

Cependant, à partir des règles de fonctionnement qui utilisent le concept d'intervalle, il est impossible d'étudier le comportement d'un réseau et d'analyser ses propriétés. La raison principale de ceci est que le nombre d'états accessibles à partir d'un état donné est, en général, infini (les arbres de couvertures sont lourds, coûteux et difficiles à exploiter à cause de l'explosion combinatoire du nombre de noeuds dans ces arbres). D'où le besoin de définir une autre approche permettant d'étudier la vivacité dans un p-RdP.

Dans un premier temps, en s'inspirons du travail basé sur les graphes AOA, nous étudierons la structure (structure vivante) d'un p-RdP.

Dans un deuxième temps, nous établirons une méthode d'analyse de la vivacité en utilisant la théorie spectrale des fonctions (min, max, +) vue dans le troisième chapitre.

4.3 Contribution à l'analyse de la vivacité des p-RdP dans le cas statique

4.3.1 Modélisation et première analyse

La prise en compte simultanée des contraintes de précédence et de durées entre les événements (franchissements de transition) se fait tout naturellement en se plaçant dans le cadre des problèmes de satisfaction de contraintes temporelles (TCSP).

Dans les TCSP, les contraintes entre les variables sont binaires et les paramètres utilisés dans les contraintes prennent des valeurs sur des domaines qui peuvent être des durées ou des intervalles. Ces valeurs se retrouvent associées aux arcs des graphes. Dans la définition originelle des TCSP, les variables peuvent avoir pour domaine de valeurs, une union d'intervalles. Cependant, il existe une classe particulière plus simple de ces TCSP qui ne considère qu'un seul intervalle par domaine de valeurs possibles pour les variables : les problèmes temporels simples (STP). Mathématiquement, les TCSP et les STP sont définis de la manière suivante.

Définition 4.14 (TCSP).

Un problème à satisfaction de contraintes temporelles est un triplet (X, D, C) .

- $X = \{x_1, \dots, x_n\}$ est un ensemble de n variables (dates) ayant des domaines continus de valeurs.
- $D = \{d_1, \dots, d_n\}$ est l'ensemble des domaines (intervalles temporels) des variables.
- $C = \{c_1, \dots, c_m\}$ est un ensemble de m contraintes. Chaque contrainte est représentée par un ensemble d'intervalles

$$C \stackrel{\text{def}}{=} \{i_1, \dots, i_n\} = \{[i_{1min}; i_{1max}], \dots, [i_{nmin}; i_{nmax}]\}$$

Une contrainte binaire c_{ij} entre x_i et x_j restreint les valeurs possibles pour la distance $x_j - x_i$ et est représentée par :

$$c_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} (i_{1min} \leq x_j - x_i \leq i_{1max}) \cup \dots \cup (i_{nmin} \leq x_j - x_i \leq i_{nmax})$$

Un n -uplet $X = (x_1, \dots, x_n)$ est appelé **solution** si $\{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\}$ satisfait toutes les contraintes. Notre problème est cohérent si et seulement s'il existe au moins une solution. Les problèmes temporels simples communément appelés par leur abréviation anglaise STP (simple temporal problems) sont définis de la façon suivante.

Définition 4.15 (STP).

Un problème temporel simple est un TCSP où les domaines des variables de X et les contraintes c_{ij} de C ne comportent qu'un seul intervalle temporel $[a_{ij}; b_{ij}]$ tel que

$$a_{ij} \leq x_j - x_i \leq b_{ij}$$

Un réseau de contraintes binaires temporelles associé à un TCSP ou à un STP est constitué de l'ensemble des variables X et d'un ensemble de contraintes. Il peut être représenté

sous la forme d'un graphe tel que les noeuds représentent les variables et qu'un arc $i \rightarrow j$, étiqueté par l'ensemble des intervalles, indique qu'une contrainte c_{ij} est spécifiée (elle existe). Les TCSP et les STP sont souvent utilisés pour l'analyse de contraintes temporelles liées à des activités.

Dans la communauté scientifique de l'ordonnancement exploitant les TCSP, il a été pris pour habitude d'utiliser des graphes où les activités sont liées aux arcs (activity-on-arc graph en anglais, graphe AOA pour l'abréviation).

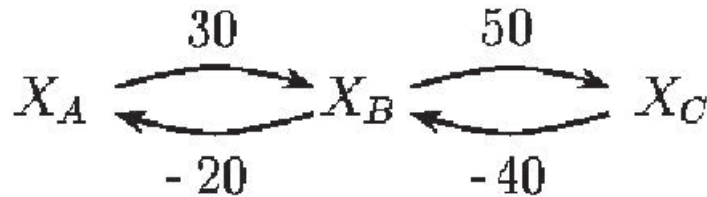


FIG. 4.5 – Exemple de STP

Définition 4.16 (Graphe AOA) .

Un graphe AOA est un graphe tel que les noeuds représentent des événements de début ou de fin d'un ensemble d'activités et tel que la longueur d'un arc représente la durée de l'activité associée (c'est une contrainte temporelle entre deux événements).

Un graphe AOA peut être vu comme une représentation graphique d'un STP. La borne minimale a_{ij} de la contrainte c_{ij} est associée à l'activité reliant l'événement x_j à l'événement x_i .

Exemples 4.17 .

1- Considérons que nous voulons nous déplacer d'un point A à un point C en passant par un point B. Sachant que la durée du déplacement entre les points A et B varie entre 20 et 30 minutes et que la durée entre B et C varie entre 40 et 50 minutes, voici une représentation graphique du problème (figure 4.5).

X_A représente l'instant de départ de A, X_B représente l'instant d'arrivée depuis A mais aussi l'instant de départ de B et X_C représente l'instant d'arrivée depuis B. Ainsi les deux contraintes

$$C_{A_B} : 20 \leq x_B - x_A \leq 30$$

$$C_{B_C} : 40 \leq x_C - x_B \leq 50$$

sont représentées sous la forme de quatre activités

$$C_{B_A} : x_A \leq x_B + 20$$

$$C_{A_B} : x_B \leq x_A + 30$$

$$C_{C_B} : x_B \leq x_C + 40$$

$$C_{B_C} : x_C \leq x_B + 50.$$

Dans l'algèbre $\mathbb{R}_{max} = (\mathbb{R} \cup \{+\infty\}, \min, +)$, Une modélisation mathématique donne :

$$X = \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{pmatrix} \leq \begin{pmatrix} +\infty & -20 & +\infty \\ -30 & +\infty & -40 \\ +\infty & -50 & +\infty \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} x_A \\ x_B \\ x_C \end{pmatrix} = AX$$

2-

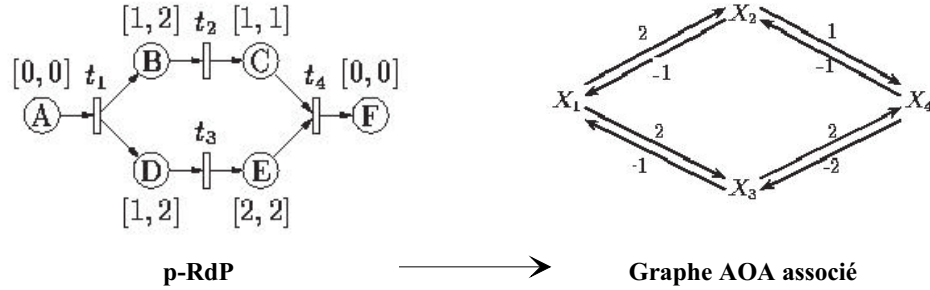


FIG. 4.6 – Graphe AOA associé au p-RdP

Nous introduisons le résultat suivant :

Proposition 4.18 .

Vérifier la structure "vivante" d'un p-RdP, cela revient à vérifier dans le graphe AOA associé l'absence des circuits de poids négatifs.

Preuve.

Soit $\{x_1, \dots, x_m\}$ un circuit de poids $p > 0$, les contraintes temporelles associés sont représentés par les inéquations suivantes :

$$\begin{cases} x_1 \leq x_2 + \alpha_1 \wedge \dots \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_{m-1} \leq x_m + \alpha_{m-1} \wedge \dots \\ x_m \leq x_1 + \alpha_m \wedge \dots \end{cases}$$

Par substitution en aura

$$x_1 \leq x_1 + (\alpha_1 + \dots + \alpha_m) \wedge \dots$$

Or on sait que :

$$p = \frac{\alpha_1 + \dots + \alpha_m}{m} < 0$$

D'où l'inégalité $x_1 \leq x_1 + m.p$, qui n'est pas vérifiée : le système est sans solution. \square

4.3.2 Aide à la conception dans le cas statique

1/–Mise en inéquation linéaire

Une modélisation mathématique de la figure (4.7) donne ce qui suit :

$$\begin{cases} x_2 + a_1 \leq x_1 \leq x_2 + b_1 \\ (x_1 + a_2) \vee (x_2 + a_3) \leq x_3 \leq (x_2 + b_3) \wedge (x_1 + b_2) \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 & \Updownarrow \\
 & \begin{cases} x_1 \leq (x_2 + b_1) \wedge (x_3 - a_2) \\ x_2 \leq (x_1 - a_1) \wedge (x_3 - a_3) \\ x_3 \leq (x_2 + b_3) \wedge (x_1 + b_2) \end{cases} \\
 & \Updownarrow \\
 & x \leq F(x) \quad \text{avec } F(x) \text{ une fonction (min,+)} \tag{4.1}
 \end{aligned}$$

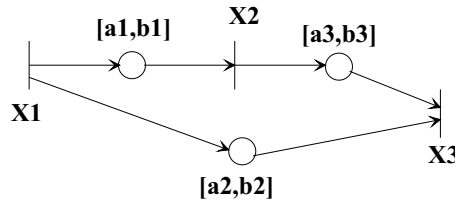


FIG. 4.7 – Exemple

D'après [CT01], dire qu'il existe un x qui vérifie l'inéquation (4.1), équivalent à dire que $\chi(F) \geq 0$. La proposition (4.18) déclare le même résultat mais pour $F(x)$ de type (min,+).

Notre tâche est d'agir sur les contrainte temporelles afin de rendre la condition $\chi(F) \geq 0$ toujours vraie. Cette tâche nous amène à résoudre un système d'inéquations linéaires. Pour l'exemple de la figure (4.7), on a par exemple :

$$\chi(x_3) = \min\left(\frac{b_3 - a_3}{2}, \frac{b_1 - a_1}{2}, \frac{b_2 - a_2}{2}, \frac{b_1 + b_2 - a_1 - a_2}{4}, \frac{b_1 + b_3 - a_1 - a_3}{4}, \frac{b_1 + b_3 - a_2}{3}, \frac{b_2 - a_1 - a_3}{3}\right)$$

Pour avoir $\chi(x_3) \geq 0$, il faut que toutes les termes soient ≥ 0 . Cela revient après simplification à résoudre le système d'inéquations linéaires suivant :

$$\begin{cases} b_i - a_i \geq 0 & \text{pour } i=1, 2, 3. \\ b_1 + b_3 - a_2 \geq 0 \\ b_2 - a_1 - a_3 \geq 0 \end{cases}$$

D'une manière générale, on est ramener à chercher des solutions dans un système d'inéquations linéaires dans l'algèbre classique de la forme

$$AX \leq b \quad \text{tel que } X = \begin{pmatrix} a_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ a_k \\ b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ b_k \end{pmatrix} \quad \text{avec } X \geq 0 \tag{4.2}$$

La matrice A est composée de 0, de 1 et de -1.

2/ – Méthode d'élimination de Fourier-Motzkin

Dans cette partie on voulait évoquer une méthode de résolution des systèmes d'inéquations linéaire sous la forme (4.2), une méthode dite d'**élimination** dus à Fourier[1827], Dines[1918], et Motzkin[1936].

La méthode d'élimination Fourier-Motzkin consiste à :

Tester si $AX \leq b$ est consistant (a des solutions), où A est une matrice $m \times n$ à coefficient dans \mathbb{R} et b un vecteur $m \times 1$.

Présentation générale de la méthode

Nous commençons par un système d'inéquations linéaires de la forme :

$$(I) \quad \sum_{j=1}^n a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

On peut écrire aussi le système (I) sous une forme matricielle

$$AX \leq b$$

ou sous cette forme

$$A_i x \leq b_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Avec A_i représente la $i^{\text{ème}}$ ligne de la matrice A .

Supposons qu'on désire éliminer la variable x_k . Définissons :

$$\begin{aligned} I_- &= \{i : a_{ik} < 0\} \\ I_+ &= \{i : a_{ik} > 0\} \\ I_0 &= \{i : a_{ik} = 0\} \end{aligned}$$

Pour chaque $(p, q) \in I_- \times I_+$, construisons l'inégalité

$$-\frac{1}{a_{pk}} (A_p x \leq b_p) + \frac{1}{a_{qk}} (A_q x \leq b_q) \implies (\text{élimination de } x_k)$$

Moyennant ces inégalités en a

$$\left(-\frac{1}{a_{pk}} A_p + \frac{1}{a_{qk}} A_q\right) x \leq -\frac{1}{a_{pk}} b_p + \frac{1}{a_{qk}} b_q. \quad (4.3)$$

La méthode consiste à remplacer le système (I) par un autre système d'inégalités linéaires (II) aux variables $x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_n$ (en éliminant donc x_k) de sorte que (I) soit consistant si et seulement si (II) l'est.

Le système (II) construit ainsi :

i) mettre dans (II) toute les relations j de (I) telle que le coefficient a_{kj} de x_k est 0.

ii) mettre dans (II) les inégalités fournie par (4.3).

Il est clair que, si $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n)$ une solution de (I), alors $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1}, \bar{x}_{k+1}, \dots, \bar{x}_n)$ est une solution de (II). Le système (4.3) est équivalent à

$$\frac{1}{a_{pk}} (b_p - \sum_{j \neq k} a_{pj} x_j) \leq \frac{1}{a_{qk}} (b_q - \sum_{j \neq k} a_{qj} x_j).$$

Or celui ci satisfait $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1}, \bar{x}_{k+1}, \dots, \bar{x}_n)$ pour tout $(p, q) \in I_- \times I_+$, nous concluons que

$$\max_{p \in I_-} \left\{ \frac{1}{a_{pk}} (b_p - \sum_{j \neq k} a_{pj} \bar{x}_j) \right\} \leq \min_{q \in I_+} \left\{ \frac{1}{a_{qk}} (b_q - \sum_{j \neq k} a_{qj} \bar{x}_j) \right\}$$

Choisissons un \bar{x}_k qui prend une valeur comprise entre α et β où α et β désignent respectivement les valeurs des membres de gauche et de droite de l'inégalité ci-dessus (inclus). D'où pour tout $(p, q) \in I_- \times I_+$,

$$\frac{1}{a_{pk}} (b_p - \sum_{j \neq k} a_{pj} \bar{x}_j) \leq \bar{x}_k \leq \frac{1}{a_{qk}} (b_q - \sum_{j \neq k} a_{qj} \bar{x}_j)$$

Il est facile de voir maintenant que $(\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_{k-1}, \bar{x}_k, \bar{x}_{k+1}, \dots, \bar{x}_n)$ satisfait toute les inégalités de système (I). Par conséquent (I) est consistant si, est seulement si (II) l'est aussi.

Théorème 4.19 .

Le système

$$(I) \quad AX \leq b$$

a des solutions si, et seulement si le système

$$(II) \quad \begin{array}{l} y^T A = 0^T \\ y^T b < 0 \\ y \geq 0 \end{array}$$

a des solutions.

Exemples illustratifs sur la méthode

• Soit le système suivant :

$$(I) \quad \begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 & \leq & -2 \\ x_1 + x_2 & \leq & 3 \\ x_1 & \leq & 2 \\ -2x_1 + x_2 & \leq & 0 \\ -x_1 & \leq & -1 \\ 8x_2 & \leq & 15 \end{array}$$

Notre but est de changer le système (I) afin d'aboutir à un système (II) qui vérifiera les propriétés suivants :

a- Il contient moins de variable que le système (I).

b- Il admet des solutions si est seulement si le système (I) admet des solution.

A partir de système (I), on peut avoir les systèmes suivantes :

$$(I_-) \quad \begin{array}{rcl} -2x_1 + x_2 & \leq & 0 \\ -x_1 & \leq & -1 \end{array} \quad (I_+) \quad \begin{array}{rcl} x_1 - 2x_2 & \leq & -2 \\ x_1 + x_2 & \leq & 3 \\ x_1 & \leq & 2 \end{array} \quad (I_0) \quad 8x_2 \leq 15$$

Pour chaque paire des inégalités, un de (I_-) et un de (I_+) , on les multiplie par des nombres positifs puis on les additionne afin d'éliminer x_1 . Pour cet exemple, utilisant les premières inégalités de chaque groupe,

$$\begin{array}{r} (\frac{1}{2})(-2x_1 + x_2 \leq 0) \\ + (1)(x_1 - 2x_2 \leq -2) \\ \hline -\frac{3}{2}x_2 \leq -2 \end{array}$$

Le système (II) est formé des résultats déduite de chaque opération sur les paires, et les inégalités de système (I_0) :

$$(II) \begin{array}{r} -\frac{3}{2}x_2 \leq -2 \\ +\frac{3}{2}x_2 \leq 3 \\ \frac{1}{2}x_2 \leq 2 \\ -2x_2 \leq -3 \\ x_2 \leq 2 \\ 0x_2 \leq 1 \\ 8x_2 \leq 15 \end{array}$$

Après tout calcul fait :

$$\{\frac{4}{3}, \frac{3}{2}\} \leq x_2 \leq \{2, 4, \frac{15}{8}\}.$$

Si on choisit par exemple $x_2 = \frac{3}{2}$, le calcul montre que

$$\{\frac{3}{4}, 1\} \leq x_1 \leq \{1, \frac{3}{2}, 2\}$$

On peut vérifier que $(1, \frac{3}{2})$ est une solution admissible pour le système (I).

●● Regardons maintenant le système suivant

$$(I) \begin{array}{r} x_1 - 2x_2 \leq -2 \\ x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 \leq 2 \\ -2x_1 + x_2 \leq 0 \\ -x_1 \leq -1 \\ 8x_2 \leq 11 \end{array}$$

On utilisant la méthode d'élimination, nous aboutissons à l'inégalité suivante $0x_1 + 0x_1 \leq -\frac{1}{8}$, qui prouve bien que notre système n'a pas de solution.

Remarque 4.20 (Efficacité de Fourier-Motzkin élimination) .

Reprenons le système (I), on voulait éliminer par exemple x_1 :

▷ supposons qu'il y a $\frac{m}{2}$ inégalités à coefficient positifs de x_1 , et $\frac{m}{2}$ inégalités à coefficient négatifs. La méthode de Fourier-Motzkin construit exactement $\lfloor \frac{m^2}{4} \rfloor$ inégalités nouvelles.

▷ En suivant les éliminations, l'algorithme construit au pire des cas

$$\lfloor \frac{m}{2} \rfloor^{2^n}$$

inégalités. Cependant l'algorithme de Fourier-Motzkin s'avère **non polynomial**.

4.4 Contribution à l'analyse de la vivacité des p-RdP dans le cas dynamique

4.4.1 Modélisation et analyse

Définition 4.21 (Fonctionnement admissible) .

On appelle un fonctionnement admissible d'un p-RdP toute évolution dynamique du système sans qu'il aboutisse à un état marque-mortes ou à un état de blocage.

Définition 4.22 (Phénomène de synchronisation dans un p-RdP) .

Une phénomène de synchronisation dans Un p-RdP est illustrée par l'exemple défini par la figure (4.8) :

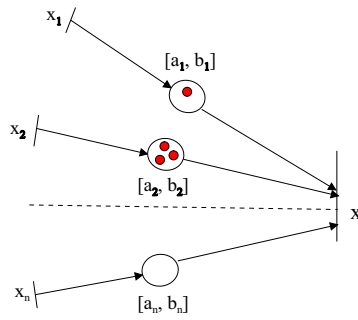


FIG. 4.8 – Synchronisation dans un p-RdP

Une modélisation mathématique de la figure (4.8) donne

$$\bigvee_{j \in S_i} (x_j(k - m_j) + a_j) \leq x_i(k) \leq \bigwedge_{j \in S_i} (x_j(k - m_j) + b_j) \quad (4.4)$$

Avec :

- n : le nombre des places en aval de la transition X_i
- m_j : le nombre de jetons dans la place p_j

D'après l'équation (4.4), si on pose :

$$f_i^+ = \bigwedge_{j \in S_i} (x_j(k - m_j) + b_j)$$

$$f_i^- = \bigvee_{j \in S_i} (x_j(k - m_j) + a_j)$$

On aboutit au système (min,max,+) suivant :

$$\begin{cases} x(k) = x(k) \wedge f^+(x(k), \dots, x(k - m)) \\ x(k) = x(k) \oplus f^-(x(k), \dots, x(k - m)) \end{cases}$$

Où f^+ et f^- sont deux fonctions du type respectivement (min,+) et(max,+).

Rappel 4.23 (Théorème 3.33 page 38)[CT01].

Soit $F \in \mathbf{MM}$ (voir définition (3.2.1)).
 Les deux conditions suivantes sont équivalentes :
 (i)- Il existe un vecteur fini x tel que $x \leq F(x)$.
 (ii)- $\chi(F) \geq 0$.
 Dualement, Les deux conditions suivantes sont aussi équivalentes :
 (i)- Il existe un vecteur fini x tel que $x \geq F(x)$.
 (ii)- $\chi(F) \leq 0$.

4.4.2 Application

Dans cet exemple d'application on voulait dégager le comportement d'un p-Rdp en se basant sur le temps de cycle.

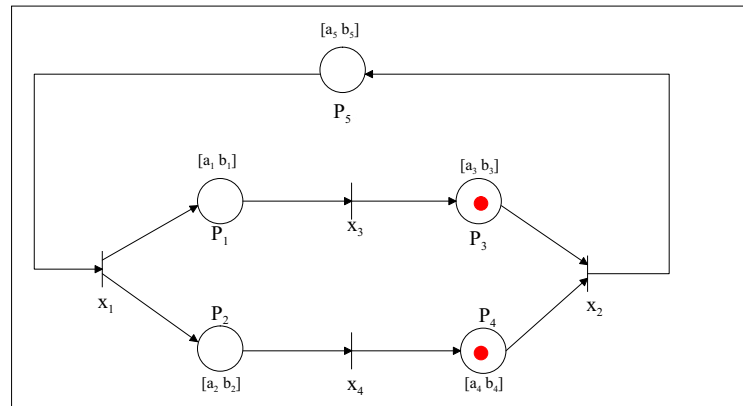


FIG. 4.9 – Exemple d'application

La modélisation mathématique de la figure (4.9) est :

$$\left\{ \begin{array}{l} x_2(k) + a_5 \leq x_1(k) \leq x_2(k) + b_5 \\ (x_3(k-1) + a_3) \vee (x_4(k-1) + a_4) \leq x_2(k) \leq (x_3(k-1) + b_3) \wedge (x_4(k-1) + b_4) \\ x_1(k) + a_1 \leq x_3(k) \leq x_1(k) + b_1 \\ x_1(k) + a_2 \leq x_4(k) \leq x_1(k) + b_2 \end{array} \right.$$

Cas 1 : $[a_3, b_3] \cap [a_4, b_4] \neq \emptyset$

$$[a_1, b_1] = [0, 1], [a_2, b_2] = [5, 6], [a_3, b_3] = [0, 1], [a_4, b_4] = [0, 1] \text{ et } [a_5, b_5] = [3, 4]$$

► Calcul du vecteur spectral :

$$\begin{array}{l} \chi(x_2(1)) = \frac{1}{2} \quad \chi(x_1(1)) = \frac{1}{2} \\ \chi(x_2(2)) = -\frac{3}{4} \quad \chi(x_1(2)) = -\frac{3}{4} \end{array}$$

► Le résultat : $\chi \begin{pmatrix} x_2(2) \\ x_1(2) \end{pmatrix} < 0 \Rightarrow$ Synchronisation n'est pas assurée.

Cas 2 : $[a_3, b_3] \cap [a_4, b_4] = \emptyset$

$$[a_1, b_1] = [3, 4], [a_2, b_2] = [3, 4], [a_3, b_3] = [1, 2], [a_4, b_4] = [6, 7] \text{ et } [a_5, b_5] = [4, 5]$$

► Calcul du vecteur spectral :

$$\chi(x_2(1)) = -\frac{12}{5}\chi(x_1(1)) = -\frac{12}{5}$$

► Le résultat : $\chi \begin{pmatrix} x_2(1) \\ x_1(1) \end{pmatrix} < 0 \Rightarrow$ Synchronisation non réalisable.

Conclusion et Perspectives

L'étude des systèmes de type système de production, réseau de transport,...et leur supervision par un système de commande, peut conduire à des modèles complexes utilisant les opérateurs de maximisation, de minimisation et d'addition. Les réseaux de Petri de type p-temporel sont un exemple dont le comportement dynamique présente cette caractéristique. Ceci rend nécessaire l'analyse et la résolution de nouveaux systèmes d'équations et d'inéquations. Une question importante est de savoir si ces systèmes et donc le modèle correspondant présente des solutions.

Le vecteur spectral(ou vecteur temps de cycle) exprime la dynamique des fonctions et fournit une réponse permettant de résoudre ces problèmes de points fixes.

Dans cette objectif, nous avons dans un premier temps abordé les notions de base des treillis et l'algèbre des dioïdes, et nous avons vu comment résoudre des équations dans cette algèbre. Notamment, nous avons rappelé quelques propriétés fondamentales nécessaires à l'étude. Par la suite , nous avons essayé de dévoiler les propriétés spectrales et asymptotiques des fonctions et matrices max-plus (dualement les fonctions et matrices min-plus).

Dans un troisième temps, nous avons abordés les fonctions topicales et surtout les fonctions (min,max,+). Après les avoir définis, nous avons rappelé des résultats énoncés essentiellement par : [CGNQ91], [Ols91], [CT01], [Gau99],[Gun01] et [Gav01] sur l'existence et la structure de ce vecteur spectrale.

Comme l'analyse énumérative s'est avéré limitée pour analyser la vivacité dans les réseaux de Petri p-temporels (Wael Khansa [Kha97]), nous avons appliqué la théorie spectrale des fonctions (min, max, +) vue dans le troisième chapitre, afin de contribuer à l'analyse de la vivacité dans les réseaux de Petri p-temporels.

Une perspective possible serait par exemple d'analyser un système présentant un "mauvais" vecteur spectral introduisant un problème d'existence de solution (et donc de trajectoire pour un système dynamique à événements discrets) . La question sera alors de comment modifier ce système afin de rétablir la compatibilité du système en agissant par exemple sur les coefficients et donc les temporisations (ou marquage selon la modélisation) pour un réseaux de Petri de type P-temporel.

Une autre perspective plus lointaine est d'analyser la structure de l'ensemble de solutions. Les exemples fournis en fin de troisième chapitre montrent déjà des structures complexes

lorsque l'on considère seulement des fonctions (max, min) même si une certaine allure générale semble se dégager.

Bibliographie

- [BCOQ92] François Baccelli, Guy Cohen, Geert-Jan Olsder, and Jean-Pierre Quadrat. *Synchronization and linearity, an algebra for discrete event systems*. Wiley, Newyork, 1992.
- [Bir67] G. Birkhoff. *Lattice theory*. Providence, In american Mathematical Society Colloquium Publications, volume xxv, 1967.
- [BM03] Thierry Bousch and Jean Mairesse. *Fonctions topicales à portée finie et fonctions uniformément topicales*. Cours dispensé à l'université de Paris sud, 2003.
- [CDQV83] Guy Cohen, Didier Dubois, Jean-Pierre Quadrat, and Michel Viot. *Analyse du comportement périodique de systèmes de production par la théorie des dioïdes*. Rapport de recherche. INRIA, Fevrier 1983.
- [CG79] R. Cunninghame-Green. Minimax algebra. In *Lecture notes in economics and mathematical systems. Number 166*. Springer-Verlag, 1979.
- [CGNQ91] Guy Cohen, Stéphane Gaubert, Ramine Nikoukhah, and Jean-Pierre Quadrat. *Second order theory of min-linear systems and its application to discrete event systems*. Proceedings of the 30th Conference on Decision and Control, IEEE, Brighton, Angleterre, 1991.
- [Coh95] Guy Cohen. *Théorie algébrique des systèmes à événements discrets*. Cours dispensé à l'École des Mines de Paris, Université de Fontainebleau, France, 1995.
- [CT80] M-G. Crandall and L. Tartar. Some relations between non expansive and order preserving maps. *Proceeding of the AMS*, 78(3) : pages 385-390, 1980.
- [CT01] Jean Cochet-Terrasson. *Algorithme d'itération sur les politiques pour les applications monotones contractantes*. Thèse de doctorat présentée à l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris, ENSMP, Paris, 2001.
- [CTGG99] Jean Cochet-Terrasson, Stéphane Gaubert, and J. Gunawardena. A constructive fixed point theorem for min-max functions. In *Dynamics and Stability of systems*, 14(4) : pages 407-433, 1999.
- [DA92] R. David and H. Alla. *Du Grafcet aux Réseaux de Petri*. Edition Hermès, Paris, 1992.
- [Gau99] Stéphane Gaubert. *Introduction aux Systèmes Dynamiques à Evénements Discrets(Notes de cours)*. l'Ecole Nationale Supérieure des Mines de Paris,, ENSMP-DEA ATS Orsay, 1999.

- [Gav01] Martin Gavalec. Monotone eigenspace structure in max-min algebra. In *FEEL*. Elsevier Sciences, Paris, 2001.
- [GG98] S. Gaubert and J. Gunawardena. The duality theorem for min-max functions. Académie des Sciences/ Elsevier, Paris, July 1998.
- [GK95] J. Gunawardena and M. Keane. On the existence of cycle time for some nonexpansive maps. In *Technical Report HPL-BRIMS-95-003*. Hewlett-Packard Labs, 1995.
- [GM77] M. Gondran and M. Minoux. Valeurs propres et vecteurs propres dans les dioïdes et leur interprétation en théorie des graphes. In *Problèmes combinatoires en théorie des graphes, number 260*. Colloques internationaux CNRS, Orsay, 1977.
- [GM84] M. Gondran and M. Minoux. *Graphes et algorithmes*. Eyrolles, Paris 1979. Engl. trans. Graphs and Algorithms, Wiley, 1984.
- [Gun94a] J. Gunawardena. Cycle time fixed point of min-max functions. In *pages 266–272*. 11th International Conference on analysis and optimization of systems, number 199 in LNCIS, 1994.
- [Gun94b] J. Gunawardena. Min-max function. In *Discret Event Dynamic Systems, 4 : pages 377–406*, 1994.
- [Gun01] J. Gunawardena. From max-plus algebra to nonexpansive mapping : a nonlinear theory for discrete event systems. *Theoretical Computer Science*, 2001.
- [Kha97] Weal Khansa. *Réseaux de Petri P-temporels : Contribution à l'étude des systèmes à événements discrets*. Thèse de doctorat de l'Ecole supérieure d'ingénieur d'Annecy, ESIA, Université de Savoie, 1997.
- [Lho03] M. Lhommeau. *Etude de systèmes à événements discrets dans l'algèbre (max,+) : Synthèse de correcteurs robustes dans un dioïde d'intervalles*. Thèse de doctorat présenté au Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés, LISA-Angers, 2003.
- [LP92] S. Laftit and J-M. Proth. Optimisation of invariant criteria for event graphs. In *IEEE Trans.on Automatic Control, Vol.37, No.5, pp.547-555*, May 1992.
- [Ols91] G-J. Olsder. Eigenvalues of dynamic min-max systems. 1991.
- [YDZ02] Cheng Yiping and Zheng Da-Zhong. On the cycle time of non-autonomous min-max systems. In *DATU, pages 191-196*, 2002.