

UNIVERSITÉ D'ANGERS

ISTIA

ÉCOLE DOCTORALE D'ANGERS

2006

Master2 Recherche

Spécialité : Systèmes Dynamiques et Signaux

Présenté par

Ahmad ALSAYED

à l'ISTIA - Université d'Angers

**Algorithme de linéarisation des Graphes
d'Événements Temporisés avec
Multiplieurs dans l'algèbre (min,+)**

Application : Evaluation de performances.

Responsables de stage : Jean-Louis Boimond - Samir Hamaci

Laboratoire : LABORATOIRE D'INGÉNIERIE DES SYSTÈMES AUTOMATISÉS. 62, avenue Notre Dame
du Lac, F-49000 ANGERS

**ALGORITHME DE LINÉARISATION DES GRAPHES
D'ÉVÉNEMENTS TEMPORISÉS AVEC MULTIPLIEURS
DANS L'ALGÈBRE (MIN,+).**

Ahmad ALSAYED



Université d'Angers

Ahmad ALSAYED

*Algorithme de linéarisation des Graphes d'Événements Temporisés avec Multi-
plieurs dans l'algèbre (min,+).*

xvi+

Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été préparé au Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés dirigé par le Professeur **Jean-Louis Ferrier**. Je lui exprime ma profonde reconnaissance pour la confiance qu'il m'a témoigné en m'acceptant au sein de ce laboratoire.

Je tiens à exprimer particulièrement ma gratitude à **Jean-Louis Boimond**, Professeur à l'université d'Angers, et à **Samir Hamaci**, Docteur à l'université d'Angers, pour leur immense disponibilité et leurs nombreux et précieux conseils. Ce travail n'aurait jamais abouti sans leurs aides. Qu'ils trouvent ici l'expression de mon respect et de ma profonde reconnaissance.

J'exprime toute ma reconnaissance à tous les membres du jury, pour l'honneur qu'ils m'ont fait en acceptant d'examiner ce mémoire.

Enfin, je remercie également les collègues de laboratoire pour leur témoignage d'amitié et pour l'ambiance de travail qu'ils ont su faire régner durant cette année.

*A mes chers parents,
mes frères, mes soeurs
et mes amis.*

Sommaire

Table des matières	ix
Introduction	xi
1 Outils algébriques	1
2 Graphes d'événements temporisés	5
3 Graphes d'événements temporisés avec multiplieurs	15
4 Conclusion	31
Bibliographie	33

Table des matières

Table des matières	ix
Introduction	xi
1 Outils algébriques	1
1.1 Dioïde	1
1.1.1 Définitions et exemples	1
1.1.2 Structure ordonnée d'un dioïde	2
1.1.3 Signaux	2
2 Graphes d'événements temporisés	5
2.1 Réseaux de Petri : définitions et notations	5
2.1.1 Invariants d'un réseau de Petri	6
2.2 Graphes d'événements temporisés	9
2.2.1 Mise en équations des graphes d'événements temporisés	9
2.3 Evaluation de performances des graphes d'événements temporisés dans l'algèbre $(min, +)$	12
3 Graphes d'événements temporisés avec multiplieurs	15
3.1 Présentation des graphes d'événements temporisés avec multiplieurs	15
3.1.1 Equations récurrentes des graphes d'événements temporisés avec multiplieurs	16
3.2 Evaluation de performances des graphes d'événements temporisés avec multiplieurs	17
3.3 Méthode de linéarisation des graphes d'événements temporisés avec multiplieurs	19
3.3.1 Linéarisation exacte des graphes d'événements temporisés avec multiplieurs	19
3.3.2 Linéarisation approchée par ajout/retrait de jetons	21
3.3.3 Exemple	22
3.4 Algorithme de linéarisation	27
3.4.1 Description des variables	27
3.4.2 Programme Matlab correspondant à l'algorithme de linéarisation	27
3.5 Conclusion	28
4 Conclusion	31
Bibliographie	33

Introduction

Les Graphes d'Événements Temporisés forment une sous classe des Réseaux de Petri dont le comportement événementiel/temporel peut être décrit par des équations récurrentes linéaires sur des structures algébriques particuliers appelées dioïdes (l'algèbre $(\min,+)$ est un exemple de dioïde).

Lorsque la taille d'un GET est importante, les techniques développées pour l'étude et l'analyse de ces modèles atteignent leurs limites. L'utilisation des graphes d'événements temporisés à arcs pondérés [Teruel et al., 1992], [Chao et al., 1993, Munier, 1993], encore appelés graphes d'événements temporisés avec multiplieurs (GETM), peut réduire la taille des modèles manipulés. De plus, pour un système de production, l'emploi de ces graphes permet de modéliser simplement l'assemblage et le désassemblage de lots de produits effectués durant la fabrication.

Ce mémoire porte sur les Graphes d'Événements Temporisés avec Multiplieurs, il est divisé en trois parties : après la présentation de l'algèbre des dioïdes dans le première chapitre, on va rappeler, dans le chapitre deux, que les GET peuvent être représenté par des équations récurrentes linéaire dans l'algèbre $(\min,+)$. La troisième chapitre de ce rapport est consacré au graphes d'événements temporisés avec multiplieurs. Dans cette partie, on va montrer que ces dernières n'admettent pas une représentation linéaire dans l'algèbre $(\min,+)$ de par la présence des poids sur les arcs. Est abordé ensuite, l'évaluation de performances des Graphes d'Événements Temporisés avec Multiplieurs. On présente une méthode de linéarisation développée dans [Hamaci et al., 2005], dans le but d'une implémentation informatique, sous Matlab.

CHAPITRE 1

Outils algébriques

Dans cette première partie, on rappelle certaines propriétés propres à la structure algébrique d'un dioïde. Pour une présentation plus détaillée, on renvoie le lecteur à l'ouvrage [Baccelli et al., 1992] et à la thèse de doctorat de Stéphane Gaubert [Gaubert, 1992].

1.1 Dioïde

1.1.1 Définitions et exemples

Définition 1.1. Un dioïde est un ensemble \mathcal{D} muni de deux lois de compositions internes, notées \oplus et \otimes , appelées respectivement *addition* et *multiplication*, telles que les axiomes suivants sont respectés :

- l'addition est associative : $(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c)$;
- l'addition est commutative : $a \oplus b = b \oplus a$;
- l'addition admet un élément neutre noté ε et appelé *zéro* : $a \oplus \varepsilon = a$;
- la multiplication est associative : $(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c)$;
- la multiplication admet un élément neutre noté e et appelé *identité* : $a \otimes e = a = e \otimes a$;
- le zéro est absorbant pour la multiplication : $\varepsilon \otimes a = a \otimes \varepsilon = \varepsilon$;
- la loi \otimes est distributive à gauche et à droite par rapport à la lois \oplus .

Si la loi additive est idempotente, c'est-à-dire $\forall a \in \mathcal{D}, a \oplus a = a$ alors $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ est un demi anneau idempotent, également appelé dioïde.

On dit qu'un dioïde est commutatif si la loi \otimes est commutative.

Exemple 1.2. (Dioïdes $\mathbb{Z}_{min}, \mathbb{Z}_{max}$)

- $\mathbb{Z}_{min} = (\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}, min, +)$ est un dioïde commutatif où, la loi additive \oplus correspond à l'opération *min* usuelle ; la loi multiplicative \otimes est équivalente à l'addition usuelle. L'élément zéro de \mathbb{Z}_{min} est $\varepsilon = +\infty$ et l'élément identité est $e = 0$. Ce dioïde est appelé *l'algèbre (min, +)*.
- $\mathbb{Z}_{max} = (\mathbb{Z} \cup \{-\infty\}, max, +)$ est un dioïde commutatif où la loi additive \oplus correspond à l'opération *max* usuelle ; la loi multiplicative \otimes est équivalente à l'addition usuelle et pour lequel $\varepsilon = -\infty$ et $e = 0$. Ce dioïde est appelé *l'algèbre (max, +)*.

Définition 1.3 (Dioïde matriciel). L'ensemble des matrices carrées de dimension n , à coefficients dans un dioïde $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$, est un dioïde matriciel, noté $(\mathcal{D}^{n \times n}, \oplus, \otimes)$, où les opérations sont définies, à partir des opérations du dioïde $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ de manière analogue à l'algèbre classique, de la façon suivante :

$$\forall A, B \in \mathcal{D}^{n \times n}, A \oplus B : (A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij},$$

$$A \otimes B : (A \otimes B)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^n A_{ik} \otimes B_{kj}.$$

L'élément identité de $\mathcal{D}^{n \times n}$ est la matrice, notée Id_n , composée de e sur la diagonale et de ε partout ailleurs. L'élément zéro est la matrice composée exclusivement de ε et est noté ε .

La somme et le produit de deux matrices de dimensions compatibles, pas nécessairement carrées, peuvent être définis de la façon suivante :

$$A \in \mathcal{D}^{n \times p}, \quad B \in \mathcal{D}^{n \times q}; \quad A \oplus B : (A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij},$$

$$C \in \mathcal{D}^{n \times p}, \quad D \in \mathcal{D}^{p \times q}; \quad C \otimes D : (C \otimes D)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^p A_{ik} \otimes B_{kj}.$$

1.1.2 Structure ordonnée d'un dioïde

L'idempotence de la loi additive \oplus permet de définir une relation d'ordre, notée \preceq ou \succeq , dans un dioïde. En effet, soit $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ un dioïde, alors la relation \preceq définie par :

$$a \preceq b \Leftrightarrow b = a \oplus b$$

est une *relation d'ordre*. En effet :

- $a \oplus a = a$ du fait de l'idempotence de la loi \oplus , d'où $a \preceq a$ (réflexivité),
- si $a \preceq b$ et $b \preceq a$ alors $b = a \oplus b$ et $a = b \oplus a$, d'où $a = b$ (antisymétrie),
- si $a \preceq b$ et $b \preceq c$ alors $b = a \oplus b$ et $c = b \oplus c$, d'où $c = b \oplus c = (a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) = a \oplus c$.
On en déduit que $a \preceq c$ (transitivité).

Cette relation d'ordre (partielle) est compatible avec les lois \oplus et \otimes , c'est-à-dire :

- $a \preceq b \Rightarrow \forall c \in \mathcal{D}, a \oplus c \preceq b \oplus c$,
- $a \preceq b \Rightarrow \forall c \in \mathcal{D}, a \otimes c \preceq b \otimes c$ et $c \otimes a \preceq c \otimes b$.

La relation d'ordre est *totale* si :

$$\forall a, b \in \mathcal{D}, a \succeq b \text{ ou } b \succeq a.$$

Une condition nécessaire et suffisante pour que l'ordre d'un dioïde soit total, s'écrit de façon évidente comme suit :

$$\forall a, b \in \mathcal{D}, a \oplus b = a \text{ ou } b.$$

Exemple 1.4. L'ordre total \succeq défini dans \mathbb{R}_{max} coïncide avec l'ordre usuel, par exemple, $5 \succeq 4$, en effet $max(4, 5) = 5$. Par contre, l'ordre \succeq défini dans \mathbb{R}_{min} est total et est l'inverse de l'ordre usuel \geq , par exemple, $4 \succeq 5$, en effet $min(4, 5) = 4$.

1.1.3 Signaux

Définition 1.5 (Signal). On appelle *signal* une application x de $\mathbb{Z} \rightarrow (\mathcal{D}, \oplus, \otimes), t \mapsto x(t)$. Sachant que \mathcal{D} est un dioïde complet.

L'ensemble $\mathcal{D}^{\mathbb{Z}}$ est composé de signaux.

Exemple 1.6. $\overline{\mathbb{Z}}_{min}^{\mathbb{Z}}$ constitue un ensemble de signaux discrets.

Définition 1.7 (Produit de convolution). Le *produit de convolution* de deux signaux est noté \otimes et est défini par :

$$\forall x_1, x_2 \in \mathcal{D}^{\mathbb{Z}}, (x_1 \otimes x_2)(t) = \bigoplus_{\tau \in \mathbb{Z}} x_1(\tau) x_2(t - \tau) = \bigoplus_{\tau \in \mathbb{Z}} x_1(t - \tau) x_2(\tau).$$

Exemple 1.8. Le produit de convolution de deux signaux de $\overline{\mathbb{Z}}_{min}^{\mathbb{Z}}$ satisfait la relation suivante :

$$\forall x_1, x_2 \in \overline{\mathbb{Z}}_{min}^{\mathbb{Z}}, \forall t \in \mathbb{Z}, (x_1 \otimes x_2)(t) = \min_{\tau \in \mathbb{Z}} \{x_1(\tau) + x_2(t - \tau)\},$$

on parle alors de produit d'*inf-convolution*.

De manière duale, le produit de convolution de deux signaux de $\overline{\mathbb{Z}}_{max}^{\mathbb{Z}}$ donne

$$\forall x_1, x_2 \in \overline{\mathbb{Z}}_{max}^{\mathbb{Z}}, \forall t \in \mathbb{Z}, (x_1 \otimes x_2)(t) = \max_{\tau \in \mathbb{Z}} \{x_1(\tau) + x_2(t - \tau)\},$$

on parle de produit de *sup-convolution*.

Définition 1.9 (Impulsion). On appelle *impulsion*, le signal

$$e : t \rightarrow e(t) = \begin{cases} +\infty & \text{si } t = 0, \\ \varepsilon & \text{sinon.} \end{cases}$$

CHAPITRE 2

Graphes d'événements temporisés

Certains Systèmes à Evénements Discrets (SED) qui mettent en jeu uniquement des phénomènes de synchronisation peuvent être décrits de façon linéaire dans certains dioïdes. Ces systèmes peuvent également être représenté par un modèle graphique appelé graphe d'événements temporisé (GET). Cette représentation découle directement de la théorie des réseaux de Petri.

2.1 Réseaux de Petri : définitions et notations

Les Réseaux de Petri (RdP) sont des modèles graphiques principalement dédiés à la représentation du comportement dynamique des SED. En raison de leur puissance de modélisation, ces modèles ont fait l'objet de très nombreux travaux de recherche ces 30 dernières années.

Un RDP est constitué de deux types de noeuds : les places et les transitions. Il est défini par un 5-tuplet $(\mathcal{P}, \mathcal{T}, M, m, \tau)$ où :

1. \mathcal{P} (resp., \mathcal{T}) est un ensemble non vide et fini de places (resp., transitions) ;
2. $M \in \mathbb{N}^{(\mathcal{P} \times \mathcal{T}) \cup (\mathcal{T} \times \mathcal{P})}$ définit le poids des arcs : pour $p \in \mathcal{P}$ et $q \in \mathcal{T}$, le multiplicateur M_{pq} (resp., M_{qp}) spécifie le poids de l'arc allant de la transition n_q vers la place p (resp., de la place p vers la transition q) ;
3. $m \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}}$ définit le marquage initial : m_p désigne le nombre de jetons initialement contenus dans la place p ;
4. $\tau \in \mathbb{N}^{\mathcal{P}}$ définit les temporisations associées aux places : τ_p désigne la durée minimale de séjour d'un jeton dans la place p .

Une transition sans place située en amont est dite *transition source*, une transition sans place située en aval est dite *transition puit*.

La figure 2.1 représente un RdP ordinaire (tous les poids sont égaux à un), dont les places sont représentées par des cercles, et les transitions par des barres.

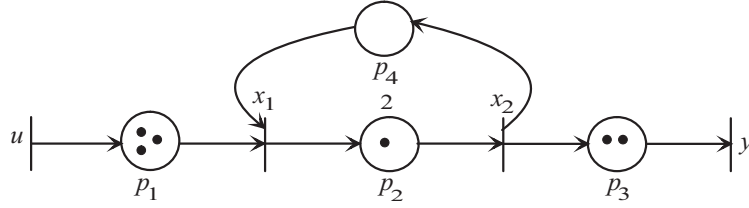


Figure 2.1 – Représentation graphique d'un RdP ordinaire.

L'évolution au cours du temps des jetons dans un RdP se fait selon le processus de franchissement de transitions décrit ci-après. Etant donné un RdP et un marquage m , on dit que la transition $q \in \mathcal{T}$ est *franchissable* pour le marquage m si l'on a :

$$\forall p \in \mathcal{P}, m(p) \geq M_{qp}.$$

Lorsque cette condition est satisfaite, le *franchissement* de la transition q conduit à nouveau marquage m' défini par :

$$m'(p) = m(p) - M_{qp} + M_{pq'}.$$

Dans le cas du RdP de la figure 2.1, en partant du marquage $m_0^t = (3, 1, 2, 0)$ ($m(p_1) = 3$, $m(p_2) = 1$, $m(p_3) = 2$, $m(p_4) = 0$), on atteint, par franchissement de la transition x_2 , le marquage $m_1^t = (3, 0, 3, 1)$.

Plus généralement, pour un RdP, en posant $[W^-] = M_{qp}$ (élément de la matrice d'incidence avant), $[W^+] = M_{pq'}$ (élément de la matrice d'incidence arrière), $W = W^+ - W^-$ (la matrice d'incidence) et en considérant S une séquence de franchissement réalisable à partir d'un marquage m_i , on a l'équation fondamentale¹ suivante :

$$m_k = m_i + W \times \bar{S}, \quad (2.1)$$

où \bar{S} est le vecteur caractéristique de la séquence de franchissement S , c'est-à-dire un vecteur de dimension égale à $|\mathcal{T}|$; \bar{S}_q correspond au nombre de franchissement de la transition x_q dans la séquence S .

2.1.1 Invariants d'un réseau de Petri

Il existe deux types d'invariants (aussi appelés semiflotts) dans un RdP [David and Alla, 1992] : les *invariants de marquage* (notés également P-invariant) et les *invariants de franchissement* (notés également T-invariant).

Définition 2.1 (P-invariant). Les invariants de marquage, appelés *P-invariant*, ou encore *P-semiflotts*, illustrent la conservation du nombre de jetons dans un sous ensemble de places du RdP. Un vecteur, noté Y , de dimension égale au nombre de places du RdP est un P-invariant si, et seulement si il vérifie l'équation suivante :

$$Y^t \times W = \vec{0}, \quad Y \neq \vec{0}, \quad (2.2)$$

où W correspond à la matrice d'incidence du RdP.

¹L'équation fondamentale traduit la dynamique de fonctionnement du RdP.

D'après l'équation (2.1), on déduit que si Y est un P-invariant, alors pour un marquage donné, noté m_i , obtenu à partir d'un marquage initial m_0 , on a :

$$Y^t \times m_i = Y^t \times m_0 = k, \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Cette équation représente un invariant de marquage, elle signifie que si Y est un P-invariant du RdP alors la transposée du vecteur Y pondéré par le vecteur marquage m_i du RdP est une constante entière quel que soit le marquage m_i atteignable à partir du marquage initial m_0 . L'ensemble des places pour lesquelles la composante associée dans le P-invariant est non nulle, est appelée la *composante conservatrice* du RdP.

Définition 2.2 (T-invariant). Un vecteur non nul d'entiers θ de dimension $|\mathcal{T}| \times 1$ est un *T-invariant*, ou encore *T-semiflote*, du RdP si, et seulement si, il vérifie l'équation suivante :

$$W \times \theta = \vec{0}. \quad (2.3)$$

D'après l'équation (2.1), le franchissement à partir d'un marquage m_i d'une séquence dont le vecteur caractéristique est θ , ramène le graphe au même marquage $m_k = m_i$.

L'ensemble des transitions pour lesquelles la composante associée dans le T-invariant est non nulle est appelé le *support* du T-invariant. Un T-invariant correspondant à une séquence de franchissement réalisable, est appelé *composante répétitive*.

Définition 2.3 (Consistance d'un RdP). Un RdP est dit *consistant* s'il possède un T-invariant θ couvrant toutes les transitions du réseau. Un RdP qui possède cette propriété est dit *répétitif* ou *réinitialisable*. Le réseau atteint un régime périodique dès lors qu'il existe une séquence de franchissement réalisable avec θ , comme vecteur caractéristique.

Définition 2.4 (RdP conservatif). Un RdP est dit *conservatif* si toutes les places du graphe forment une composante conservatrice.

Définition 2.5.

- Un T-invariant θ est *élémentaire* s'il est *canonique*, c'est-à-dire si le plus grand commun diviseur de ses composantes est égal à un.
- Un T-invariant θ a un support *minimal* s'il n'existe pas un autre T-invariant θ' tel que :

$$\{q \in \mathcal{T} | \theta'(q) > 0\} \subset \{q \in \mathcal{T} | \theta(q) > 0\}.$$

- Un RdP consistant est dit *fortement connexe* si, et seulement si, il est conservatif.

Remarque 2.6.

- Toute combinaison de T-invariants (resp., P-invariants) est un T-invariant (resp., P-invariant).
- Un RdP consistant a un unique T-invariant élémentaire.
- Le produit des poids d'un circuit d'un RdP conservatif est égal à un.

Exemple 2.7. Le RdP de la figure 2.2 admet un T-invariant vérifiant :

$$W \times \theta = \begin{pmatrix} -3 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & -1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \\ \theta_4 \end{pmatrix} = \vec{0}.$$

Il existe un T-invariant minimal : $\theta^t = (2, 3, 3, 1)$. Le support de θ est $\{n_1, n_2, n_3, n_4\}$.

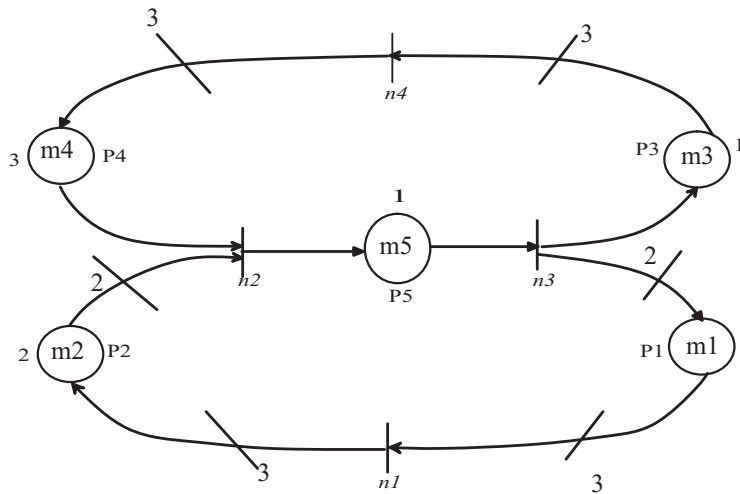


Figure 2.2 – RdP à arcs pondérés.

Définition 2.8 (Nombre de franchissement dans un RdP). Un RdP est dit k -serveur si, pour chaque transition, il ne peut y avoir au maximum que k franchissements simultanés. Une boucle de ré-entrance implicite contenant k jetons est alors associée à chaque transition du graphe.

- Dans le cas où $k = 1$, le RdP est dit *mono-serveur*.
- Dans le cas où le nombre de franchissement de transitions n'est pas limité, le RdP est dit *infini-serveur*.

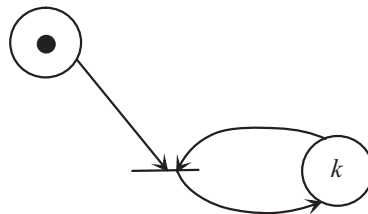


Figure 2.3 – Boucle de ré-entrance.

Dans la suite, on note $\bullet q$ (resp., $q\bullet$) l'ensemble des places situées immédiatement en amont (resp., en aval) de la transition n_q . Similairement, $\bullet p$ (resp., $p\bullet$) représente l'ensemble des transitions situées immédiatement en amont (resp., en aval) de la place p .

2.2 Graphes d'événements temporisés

Les GET sont une sous classe de RdP. Dans un graphe d'événements, chaque place possède une transition en amont et une transition en aval, les conflits n'apparaissent donc jamais. Ce type de graphes modélise la synchronisation mais pas la concurrence. Tous les arcs d'un GET ont un poids unitaire.

2.2.1 Mise en équations des graphes d'événements temporisés

Pour l'étude des SED, les GET sont généralement utilisés comme outil de modélisation intermédiaire. Si la modélisation graphique constitue une première étape, la seconde étape est la mise en équations du modèle graphique, c'est-à-dire la définition d'une représentation algébrique du système.

Deux types d'équations sont possibles pour un même GET, elles correspondent à deux points de vue différents.

1. **Compteurs et domaine temporel :** On associe à chaque transition x une fonction appelée compteur $x(t)$ qui désigne le nombre de tirs de transition x cumulés à l'instant t .

Pour illustrer l'évolution d'un compteur associé à la transition x_q d'un GET, considérons le GET élémentaire suivant :

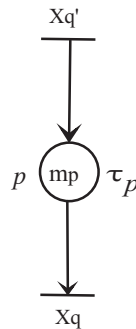


Figure 2.4 – GET élémentaire.

L'évolution du compteur $x_q(t)$, associé à la transition x_q du GET élémentaire de la figure 2.4, est exprimée par l'équation suivante :

$$x_q(t) = m_p + x_{q'}(t - \tau_p). \quad (2.4)$$

Dans un GET, le phénomène de synchronisation se produit lorsque plusieurs arcs convergent sur une même transition (*cf.* figure 2.5).

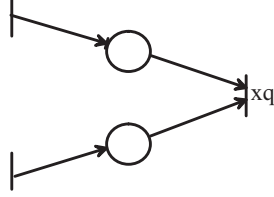


Figure 2.5 – Phénomène de synchronisation dans un GET.

En général, l'évolution d'un compteur associé à une transition de synchronisation d'un GET est donnée par l'équation suivante :

$$x_q(t) = \min_{p \in \bullet q, q' \in \bullet p} (m_p + x_{q'}(t - \tau_p)). \quad (2.5)$$

On remarque que cette équation est non linéaire dans l'algèbre usuelle de par la présence de l'opérateur \min qui modélise le phénomène de synchronisation au niveau de la transition x_q . Par contre, elle se décrit de façon linéaire dans le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$. Le compteur x_q vérifie l'équation récurrente suivante :

$$x_q(t) = \bigoplus_{p \in \bullet q, q' \in \bullet p} (m_p \otimes x_{q'}(t - \tau_p)). \quad (2.6)$$

L'opération \bigoplus du dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ représente un phénomène de synchronisation au niveau de la transition x_q , et l'opération \otimes représente un décalage *événementiel* du compteur $x_q(t)$ par rapport à tout compteur associé à une transition située en amont de la transition x_q .

D'une manière générale, les équations modélisant le fonctionnement au plus tôt des GET ont la forme suivante dans le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$:

$$\begin{cases} X(t) &= \bigoplus_{i=0}^T A_i X(t-i) \oplus \bigoplus_{i=0}^T B_i U(t-i), \\ Y(t) &= \bigoplus_{i=0}^T C_i X(t-i), \end{cases} \quad (2.7)$$

avec $T = \max_{p_i \in \mathcal{P}}(\tau(p_i))$. $X(t)$ est le vecteur d'état, composé des compteurs associés aux transitions internes du graphe, $U(t)$ et $Y(t)$ sont respectivement les vecteurs d'entrées (commandes) et de sorties, composés des transitions sources, respectivement puits, du graphe.

Exemple 2.9. Dans l'algèbre $(\min,+)$, les variables d'état du GET de la figure 2.6 sont régies par les relations aux compteurs suivantes :

$$\begin{cases} x_1(t) &= 3 \otimes x_3(t-2) \oplus u(t), \\ x_2(t) &= x_1(t-2) \oplus 6 \otimes x_3(t-2), \\ x_3(t) &= x_2(t-1), \\ y(t) &= x_2(t). \end{cases}$$

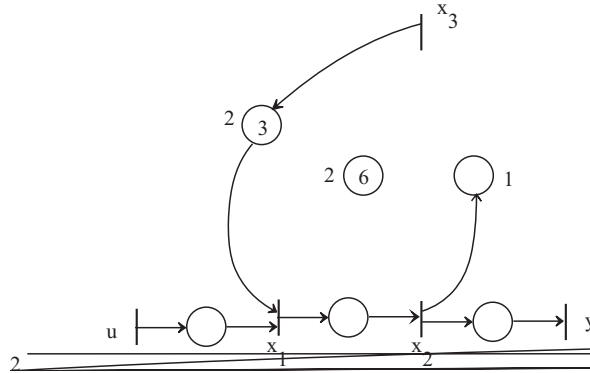


Figure 2.6 – Exemple d'un GET.

Il en résulte la représentation d'état suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} X(t) = \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} X(t) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & e & \varepsilon \end{pmatrix} X(t-1) \oplus \begin{pmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 3 \\ e & \varepsilon & 6 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{pmatrix} X(t-2) \oplus \begin{pmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} U(t), \\ Y(t) = (\varepsilon \quad e \quad \varepsilon) X(t), \end{array} \right.$$

avec $X = (x_1 \ x_2 \ x_3)^t$, $U = u$ et $Y = y$.

Une extension du vecteur d'état permettra de passer à une représentation d'état, ce qui correspond à une forme où le retard est exactement de 1 sur la partie AR et de 0 sur la partie MA, ainsi que pour l'équation de sortie. On se ramène à la forme standard suivante :

$$\begin{cases} X(t) = AX(t-1) \oplus BU(t), \\ Y(t) = CX(t). \end{cases} \quad (2.8)$$

- Dateurs et domaine temporel :** Au lieu de considérer les nombres cumulés de tirs d'une transition d'un GET à chaque instant, on s'intéresse aux différentes dates de tirs de cette transition. A chaque transition x_q , on associe l'application $x_q : \mathbb{Z} \rightarrow \overline{\mathbb{Z}}_{max}$, $k \mapsto x_q(k)$ où $x_q(k)$ désigne la date du k -ième tir de la transition x_q . Cette application est non décroissante et est appelée *dateur*.

Par un raisonnement analogue à celui effectué pour les compteurs, on montre que la description du comportement d'un GET peut se représenter *via* des équations $(max, +)$ linéaires.

Le graphe de la figure 2.6 peut être modélisé par les équations $(max, +)$ linéaires suivantes :

$$\begin{cases} x_1(k) &= 2 \otimes x_3(k-3) \oplus u(k), \\ x_2(k) &= 2 \otimes x_1(k) \oplus 2 \otimes x_3(k-6), \\ x_3(k) &= 1 \otimes x_2(k), \\ y(k) &= x_2(k). \end{cases}$$

2.3 Evaluation de performances des graphes d'événements temporisés dans l'algèbre $(\min, +)$

Soit un GET fortement connexe fonctionnant en régime autonome. Un tel graphe se représente par l'équation récurrente $X(t) = A \otimes X(t-1)$ dans l'algèbre $(\min, +)$. La valeur propre λ , associée à la matrice irréductible, A correspond au *taux de production* asymptotique du GET, défini comme le nombre moyen de tirs par unité de temps. Ce taux de production, qui représente aussi la fréquence de franchissement de chaque transition, est identique pour toutes les transitions du graphe. Pour un système de production, il correspond aux nombres moyens de pièces produites par unité de temps.

Définition 2.10 (Taux de production asymptotique [Gaubert, 1995]).

Soit $x(t)$ le compteur associé à la transition x . Son taux de production asymptotique, noté λ , est défini par :

$$\lambda = \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{x(t)}{t}.$$

Ce taux de production peut être calculé de deux façons : soit en appliquant une approche algébrique à travers le théorème suivant, soit en utilisant le théorème 2.12 qui permet de calculer λ à partir du graphe.

Théorème 2.11. [Gondran and Minoux, 1985]

Une matrice A irréductible admet une unique valeur propre, notée λ , égale au rayon spectral de la matrice A , soit :

$$\rho(A) = \bigoplus_{k=1}^n (tr A^k)^{\otimes 1/k},$$

où $tr A^k = \bigoplus_{i=1}^n (A^k)_{ii}$ correspond à la trace de la matrice A .

Théorème 2.12. [Gaubert, 1992] Le taux de production λ d'un GET fortement connexe est caractérisé par :

$$\lambda = \min_{c \text{ circuit élémentaire}} \frac{N(c)}{T(c)}, \quad (2.9)$$

où $N(c)$ correspond au nombre total de jetons du circuit c , équivalent au poids du circuit du graphe de précedence associé, et $T(c)$ correspond à la somme des temporisations des places du circuit c , équivalent à la longueur du circuit du graphe de précedence associé.

L'inverse de cette valeur propre correspond au *temps de cycle moyen* du graphe, c'est-à-dire le temps moyen séparant deux tirs consécutifs d'une transition. Pour un système de production, il correspond au

temps moyen séparant deux pièces produites consécutivement. Ce temps de cycle, noté TC , peut être calculé de la façon suivante :

$$TC = \max_{c \text{ circuit élémentaire}} \frac{T(c)}{N(c)}. \quad (2.10)$$

Relativement à l'évolution de l'état du système en régime autonome, si λ est la valeur propre de A et si le vecteur d'état initial $X(0)$ est un vecteur propre de A , on a :

$$\begin{aligned} X(t) &= AX(t-1) \\ &= A^t X(0) \\ &= A^{t-1} \otimes A \otimes X(0) = A^{t-1} \otimes \lambda \otimes X(0) \\ &= \lambda^t \otimes X(0) = \lambda X(t-1), \end{aligned}$$

ce qui est équivalent dans l'algèbre classique à :

$$X(t) = \lambda + X(t-1),$$

autrement dit, l'état du système est incrémenté de λ lorsque t est incrémenté de 1, ce qui signifie que, dès l'état initial, le GET fonctionne, en régime autonome, de façon périodique selon une période égale à 1.

L'établissement d'une valeur propre de A permet d'évaluer le comportement périodique d'un GET en régime autonome, lorsque la condition $X(0)$ correspond à un vecteur propre de A . Le théorème suivant fournit une réponse sur le comportement du graphe pour une condition initiale quelconque.

Théorème 2.13. [Baccelli et al., 1992] Soit A une matrice irréductible. Il existe deux entiers N et c tels que :

$$n \geq N \Rightarrow A^{n+c} = \lambda^c A^n,$$

où c est appelé cyclicité de A .

La matrice A étant irréductible, une fois le régime périodique atteint, on a :

$$\begin{aligned} X(t) &= A^{n+c} X(t-n-c) \\ &= \lambda^c \otimes X(t-c), \end{aligned}$$

autrement dit, en régime autonome, pour t suffisamment grand, il existe $c \in \mathbb{N}$ tel que :

$$X(t) = c \times \lambda + X(t-c).$$

En résumé, on peut dire qu'un GET en régime autonome atteint, après un régime transitoire fini, un régime périodique de période égale à c .

Graphes d'événements temporisés avec multiplieurs

Lorsque la taille d'un GET est importante, les techniques développées pour l'étude et l'analyse de ces modèles atteignent leurs limites. L'utilisation des graphes d'événements temporisés à arcs pondérés [Teruel et al., 1992], [Chao et al., 1993, Munier, 1993], encore appelés graphes d'événements temporisés avec multiplieurs (GETM), peut réduire la taille des modèles manipulés. De plus, pour un système de production, l'emploi de ces graphes permet de modéliser simplement l'assemblage et le désassemblage de lots de produits effectués durant la fabrication.

Dans cette partie, on s'intéresse à l'évaluation de performances des GETM. De part la présence des poids sur les arcs, ces graphes n'admettent pas une représentation $(\min,+)$ linéaire, d'où la difficulté d'appliquer les résultats développés pour l'analyse de performances des GET. Pour pallier à ce problème de non linéarité, des méthodes de linéarisation de ces modèles ont été proposés.

Ce chapitre est organisé comme suit : après la présentation des GETM et leur fonctionnement, on présente une méthode de linéarisation développée dans [Hamaci et al., 2005], dans le but d'une implémentation informatique, sous Matlab.

3.1 Présentation des graphes d'événements temporisés avec multiplieurs

Définition 3.1. Un GETM est un GET dans lequel des poids sont associés aux arcs. Ces graphes sont également appelés graphes d'événements *généralisés* ou *valués*.

Dans ce type de graphe, dont un exemple élémentaire est donné dans la figure 3.1, le poids $M_{pq'}$ rattaché à l'arc $n_{q'} \rightarrow p$ est tel que lors d'un franchissement de la transition $n_{q'}$, $M_{pq'}$ jetons sont ajoutés à la place p . Le poids M_{qp} associé à l'arc $p \rightarrow n_q$ implique que la transition n_q ne sera validée que si la place p contient au moins M_{qp} jetons. Lors du franchissement de cette transition, après un séjour de τ_p unités de temps dans la place p , M_{qp} jetons y seront retirés.

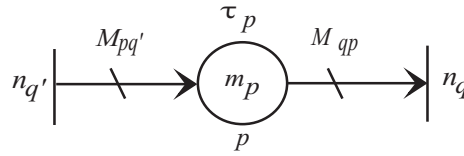


Figure 3.1 – GETM élémentaire.

La figure 3.2.a représente un GETM tel que l'arc $p_1 \rightarrow n_1$ a un poids de 3, et l'arc $n_1 \rightarrow p_2$ a un poids de 2. La transition n_1 est validée puisque la place p_1 contient 3 jetons. Après un séjour de deux unités de temps des jetons dans la place p_1 , le franchissement de n_1 consiste à retirer trois jetons de p_1 , et à ajouter deux jetons à p_2 . On obtient le marquage de la figure 3.2.b.

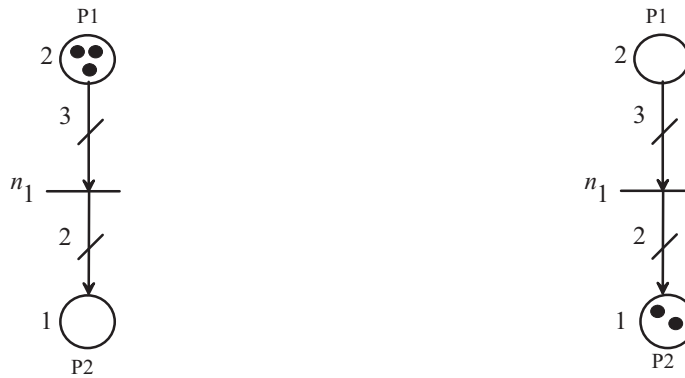
a- Avant franchissement de n_1 b- Après franchissement de n_1

Figure 3.2 – Evolution du marquage.

3.1.1 Equations récurrentes des graphes d'événements temporisés avec multipliers

Comme dans le cas des GET ordinaires, on se propose d'étudier les GETM à travers leurs représentations d'état de type compteur.

Assertion 1. L'évolution du compteur associé à la transition n_q du GETM élémentaire de la figure 3.1 est donnée par l'équation suivante :

$$n_q(t) = \lfloor M_{qp}^{-1}(m_p + M_{pq'}n_{q'}(t - \tau_p)) \rfloor. \quad (3.1)$$

La présence de la partie entière inférieure dans l'équation (3.1) assure la valeur discrète du compteur indépendamment de la valeur M_{qp} . En général, une transition n_q peut avoir plusieurs transitions en amont $\{n_{q'} \in \bullet\bullet q\}$, ce qui implique que l'équation compteur associée fasse intervenir le *min* entre les compteurs associés aux transitions en amont.

Exemple 3.2. La variable compteur associée à la transition n_q du GETM représenté par la figure 3.3 satisfait l'équation suivante :

$$n_q(t) = \lfloor \frac{2 + 3n_{q'}(t - 1)}{2} \rfloor.$$

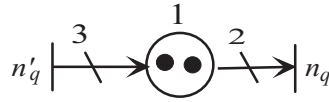


Figure 3.3 – Exemple de GETM élémentaire .

Exemple 3.3. L'évolution dynamique du GETM représenté par la figure 3.4 est décrite par les équations récurrentes suivantes :

$$\begin{cases} n_1(t) = \min(6 + 2n_2(t - 1), u(t - 3)), \\ n_2(t) = \min(\lfloor \frac{n_1(t-2)}{2} \rfloor, 3 + 3n_3(t - 3)) \\ n_3(t) = \lfloor \frac{n_2(t)}{3} \rfloor \\ y(t) = n_3(t - 1). \end{cases}$$

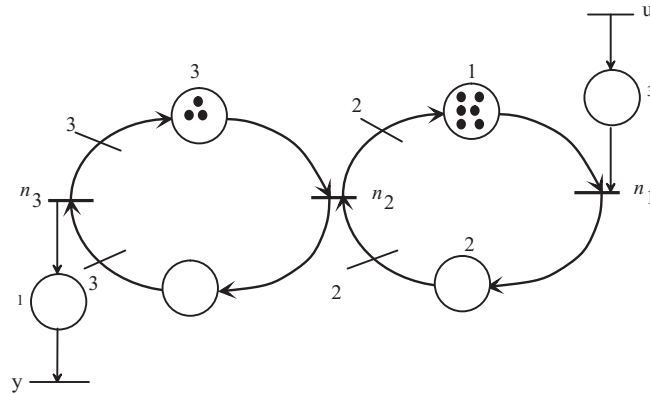


Figure 3.4 – Exemple de GETM .

3.2 Evaluation de performances des graphes d'événements temporisés avec multipliers

Comme dans le cas des GET, les performances d'un GETM fortement connexe sont obtenues dans le cas d'un fonctionnement au plus tôt et lorsque le régime permanent est établi [Munier, 1993]. Par contre, les fréquences de franchissement ne sont pas identiques pour toutes les transitions, mais sont proportionnelles au T-invariant élémentaire (cf. définition 2.5). Pour chaque transition, la fréquence de franchissement, notée λ_{m_q} , peut être définie de la façon suivante :

$$\lambda_{m_q} = \frac{\theta_q}{TC_m}, \tag{3.2}$$

où :

- θ_q est la composante du T-invariant associée à la transition n_q ,
- TC_m est le temps de cycle du graphe.

Dans le cas d'un graphe neutre et fortement connexe, ce temps de cycle peut être défini comme suit.

Définition 3.4. [Sauer, 2003] Le *temps de cycle*, noté TC_m , d'un GETM neutre et fortement connexe, obtenu à partir d'un marquage initial M_0 , est le temps moyen nécessaire pour franchir une fois le T-invariant minimal en mode de fonctionnement au plus tôt à partir de M_0 .

Si le calcul de performances des GET a pu être réalisé *via* la théorie des graphes le problème reste à notre connaissance, ouvert pour les GETM. La difficulté de ces types de graphes est due à la présence des poids sur les arcs qui empêche l'utilisation du théorème 2.12.

Avant de présenter notre contribution dans le domaine d'évaluation de performances des GETM, nous présentons, tout d'abord, quelques méthodes de linéarisation proposées dans la littérature.

1. Méthode proposée par Alix Munier

Cette technique est une extension des travaux de P. Chrétienne [Chretienne, 1983] et C. Ramchandani [Ramchandani, 1974], elle a pour objectif le calcul du temps de cycle moyen d'un graphe d'événements avec des poids sur les arcs. Dans le cas mono-serveur, A. Munier montre que le calcul du temps de cycle d'un graphe avec des poids sur les arcs peut se ramener à celui d'un graphe d'événements ordinaire. Pour cela, une méthode de linéarisation a été proposée. Cette méthode passe par une expansion du réseau initial. Cette expansion se fait en deux étapes : la première est la décomposition du graphe initial en un ensemble de composantes fortement connexes ; la seconde est la duplication des noeuds du graphe (places et transitions). Le lecteur intéressé par cette méthode peut trouver plus de détails dans [Munier, 1993].

2. Approche de fluidification proposée par Guy Cohen

Cette méthode prend en compte le problème de pondération sur les arcs en transformant le GETM discret en un GETM continu. Elle utilise un dioïde d'opérateurs pour la modélisation du GETCM. Son principe consiste à linéariser le modèle mathématique qui reflète l'évolution dynamique du modèle. Le modèle obtenu est $(\min, +)$ linéaire et permet d'utiliser certains éléments de la théorie spectrale pour l'analyse de performances des GET ordinaires. Cette méthode présente l'avantage de préserver la structure et la taille du graphe initial. Il a été montré que le comportement d'un GETM coïncide avec sa version continue si :

$$\forall q \in T, \forall p \in \bullet q, \frac{m_p}{M_{qp}} \in \theta_q \mathbb{N},$$

où m_p est le marquage de la place p , M_{qp} est le poids de l'arc sortant de la place p , θ_q est la composante de T-invariant associée à la transition n_q . Ainsi, sous cette condition, il est possible de linéariser un GETM en considérant sa version continue. Pour une présentation détaillée de cette méthode, nous renvoyons le lecteur à [Cohen et al., 1998].

3. Méthode proposée par Benoît Trouillet [Trouillet, 2003]

A l'aide d'une algèbre spécifique une méthode est proposée afin de transformer un GETM en un GET ordinaire, indépendamment du marquage initial. Cette méthode considère que les GETM sont fortement connexes, et que chaque circuit du graphe admet au moins une composante du T-invariant égale à 1. Une généralisation de cette méthode est proposée dans [Hamaci et al., 2004]

4. D'autres méthodes existent pour évaluer les performances des GETM. Des bornes inférieures et supérieures du temps de cycle moyen dans les cas déterministe et stochastique ont été proposées

par [Compos et al., 1991], ([Balbo and Silva, 1998, §17]) en utilisant des techniques de programmation linéaire.

Sont proposées également des méthodes de simulation, en faisant évoluer le graphe, pour déterminer le temps de cycle moyen d'un GETM [Sauer, 2004].

Il résulte de cette étude bibliographique qu'une possibilité, pour calculer analytiquement le temps de cycle moyen d'un GETM, sans hypothèse restrictive sur le marquage initial, consiste à construire un GET ordinaire équivalent. Par contre, les méthodes décrites précédemment ont pour conséquence d'étendre le nombre de transitions du graphe. Une telle expansion peut alors rendre l'étude du GET ordinaire, obtenu après linéarisation, laborieuse dans le cas où la taille du GETM est élevée.

Dans la suite, on va présenter, dans un premier temps, une méthode de linéarisation, dite par ajout/-retrait de jetons, développée dans [Hamaci et al., 2005], ceci dans le but d'une implémentation informatique, sous MatLab, pour évaluer les performances des GETM. Dans un second temps, on propose une nouvelle méthode de linéarisation du modèle mathématique régissant l'évolution dynamique des GETM. Cette méthode est originale, elle est applicable pour tous les graphes consistants et conservatifs, sans conditions restrictives sur le graphe.

3.3 Méthode de linéarisation des graphes d'événements temporisés avec multipliers

Cette méthode s'applique sur des GETM consistants (*cf.* définition 2.3) et conservatifs (*cf.* définition 2.4). On note N le vecteur d'état du GETM. On définit un vecteur X de même dimension que N . Chaque composante de X de type compteur satisfait une équation récurrente ($min, +$) linéaire.

Cette méthode a pour principe d'exprimer chaque composante de N en fonction d'une composante de X . Le fait que le GETM considéré soit consistant implique l'existence d'un T-invariant sur les transitions. Comme on a vu au chapitre 2, un T-invariant est un vecteur dont les composantes ne sont pas forcément unitaires, contrairement à un GET ordinaire où toutes les composantes du T-invariant sont unitaires. En effet, chaque compteur $n_q(t)$ associé à la transition n_q du GETM s'exprime comme suit :

$$\forall q \in \mathcal{T}, \forall t \in \mathbb{Z}, n_q(t) = \theta_q x_q(t), \quad (3.3)$$

où :

- $n_q(t)$ est le compteur associé à la transition n_q du GETM,
- θ_q est la composante ($\in \mathbb{N}^*$) du T-invariant associée à la transition n_q du GETM.

Contrairement à la méthode proposée par Alix Munier, où à chaque transition n_q du GETM correspond θ_q représentants dans le GET obtenu après linéarisation (ce qui provoque une expansion du graphe), le changement de variables (3.3) signifie que durant un cycle, chaque tir d'une transition x_q du GET est équivalent à θ_q tirs de la transition n_q dans le GETM, ce qui donne l'équivalence entre le comportement du GETM et le GET obtenu après linéarisation.

3.3.1 Linéarisation exacte des graphes d'événements temporisés avec multipliers

Pour que le changement de variable (3.3) soit possible, c'est-à-dire pour que le GETM soit linéarisable, chaque compteur $x_q(t)$ doit appartenir au dioïde \mathbb{Z}_{min} . La proposition suivante donne la condition

pour que le GETM soit linéarisable.

Proposition 3.5. *Un GETM est linéarisable si :*

$$\forall q \in \mathcal{T}, \forall p \in \bullet q, \quad \lfloor \frac{m_p}{M_{qp}} \rfloor \in \theta_q \mathbb{N}. \quad (3.4)$$

Preuve 1. *On a :*

$$n_q(t) = \min_{p \in \bullet q, q' \in \bullet p} \lfloor M_{qp}^{-1}(m_p + M_{pq'} n_{q'}(t - \tau_p)) \rfloor.$$

En utilisant le changement de variable (3.3) et la distributivité de la multiplication par rapport à l'opérateur *min*, on obtient l'expression $x_q(t)$ suivante :

$$x_q(t) = \min_{p \in \bullet q, q' \in \bullet p} \frac{1}{\theta_q} \lfloor (\frac{m_p}{M_{qp}} + \frac{M_{pq'}}{M_{qp}} n_{q'}(t - \tau_p)) \rfloor.$$

Notons $\theta = (\theta_1 \ \theta_2 \dots \theta_n)^t$ le vecteur T-invariant. Ce vecteur satisfait l'expression $C \times \theta = 0$, où C est la matrice d'incidence associée au GETM. Il en résulte, sachant que les graphes sont consistants et conservatifs [Munier, 1993], que :

$$\forall q', q \in \mathcal{T} \quad p \in P, M_{qp} \theta_q - \theta_{q'} M_{pq'} = 0.$$

De cette relation, on déduit que :

$$\frac{\theta_q}{M_{pq'}} = \frac{\theta_{q'}}{M_{qp}},$$

par conséquent,

$$x_q(t) = \min_{p \in \bullet q, q' \in \bullet p} \frac{1}{\theta_q} \lfloor (\frac{m_p}{M_{qp}} + \frac{\theta_q}{\theta_{q'}} n_{q'}(t - \tau_p)) \rfloor,$$

c'est-à-dire,

$$x_q(t) = \min_{p \in \bullet q, q' \in \bullet p} \frac{1}{\theta_q} \lfloor (\frac{m_p}{M_{qp}} + \theta_q x_{q'}(t - \tau_p)) \rfloor.$$

Puisque $\theta_q x_{q'}(t - \tau_p)$ est un entier, nous obtenons :

$$x_q(t) = \min_{p \in \bullet q, q' \in \bullet p} (\frac{1}{\theta_q} \lfloor \frac{m_p}{M_{qp}} \rfloor + x_{q'}(t - \tau_p)), \quad (3.5)$$

ce qui correspond à une équation récurrente (*min*, +) linéaire dès lors que $\frac{1}{\theta_q} \lfloor \frac{m_p}{M_{qp}} \rfloor \in \mathbb{N}$.

Aussi, si la condition (3.5) est vérifiée pour chacune des transitions du graphe, l'équation (3.1) s'exprime comme une équation récurrente (*min*, +) linéaire.

Remarque 3.6. Définissons une classe d'équivalence au niveau des marquages initiaux induite par la relation d'équivalence suivante :

$$m' \equiv m'' \Leftrightarrow \forall q \in \mathcal{T}, \forall p \in \bullet q, \quad \lfloor \frac{m'_p}{M_{qp}} \rfloor = \lfloor \frac{m''_p}{M_{qp}} \rfloor.$$

Tous les marquages initiaux appartenant à une même classe d'équivalence engendrent un même comportement au niveau des transitions du graphe. Aussi, pour ces mêmes marquages, le GETM admet, après linéarisation, un même modèle $(min, +)$ linéaire.

Cette linéarisation nous permet de déduire les performances du GETM. En effet, la fréquence de franchissement associée à la transition n_q du GETM, notée λ_{m_q} , peut se déduire du modèle $(min, +)$ linéaire obtenu, selon la relation suivante :

$$\lambda_{m_q} = \theta_q \lambda, \quad (3.6)$$

où λ est la valeur propre du modèle $(min, +)$ linéaire.

3.3.2 Linéarisation approchée par ajout/retrait de jetons

Dans le cas où la condition de linéarisation (3.5) n'est pas satisfaite, une solution alternative consiste à introduire la notion de la linéarisation *approchée* correspondant à un *ajout/retrait* de jetons dans le GETM.

• **Principe :** Cette méthode a pour principe d'approcher autant que possible, en utilisant la condition de linéarisation (3.5), le comportement du GETM initial. Il en résulte une approximation par valeur inférieure (resp., supérieure) obtenue par un retrait (resp., ajout) minimal de jetons dans les places ne satisfaisant pas la condition de linéarisation. Autrement dit, dans chaque place p pour laquelle $\lfloor \frac{m_p}{M_{qp}} \rfloor \notin \theta_q \mathbb{N}$, nous retirons, ou ajoutons, autant de jetons que nécessaire du marquage initial, afin que la condition de linéarisation soit vérifiée.

On note \underline{X} (resp., \overline{X}) le vecteur d'état du GET ordinaire obtenu à l'issue de la linéarisation approchée par retrait (resp., ajout) de jetons dans le GETM.

En reprenant le même raisonnement que celui permettant d'établir la proposition 3.5, nous obtenons :

$$\underline{x}_q(t) = \min_{p \in \bullet q, q' \in \bullet p} \left(\frac{1}{\theta_q} \lfloor \frac{(m_p - \underline{m}_p)}{M_{qp}} \rfloor + \underline{x}_{q'}(t - \tau_p) \right), \quad (3.7)$$

où \underline{m}_p est le nombre minimum de jetons retirés de la place p tel que $\lfloor \frac{m_p - \underline{m}_p}{M_{qp}} \rfloor \in \theta_q \mathbb{N}$.

De même, on a :

$$\overline{x}_q(t) = \min_{p \in \bullet q, q' \in \bullet p} \left(\frac{1}{\theta_q} \lfloor \frac{(m_p + \overline{m}_p)}{M_{qp}} \rfloor + \overline{x}_{q'}(t - \tau_p) \right), \quad (3.8)$$

où \overline{m}_p est le nombre minimum de jetons ajoutés dans la place p tel que $\lfloor \frac{m_p + \overline{m}_p}{M_{qp}} \rfloor \in \theta_q \mathbb{N}$.

Sachant que le retrait (resp., l'ajout) de jetons dans un GETM ralentit (resp., accélère) l'évolution du graphe, on a par conséquent :

$$\forall q, \quad \theta_q \underline{x}_q(t) = \underline{n}_q(t) \leq n_q(t) \leq \overline{n}_q(t) = \theta_q \overline{x}_q(t).$$

Contrairement au cas d'une linéarisation exacte, la linéarisation approchée nous permet seulement d'encadrer la fréquence de franchissement de la transition n_q , soit λ_{m_q} , on a :

$$\underline{\lambda}_{m_q} \leq \lambda_{m_q} \leq \bar{\lambda}_{m_q}, \quad (3.9)$$

où $\underline{\lambda}_{m_q}$ (resp., $\bar{\lambda}_{m_q}$) correspond à la fréquence de franchissement de la transition n_q obtenu par un retrait (resp., ajout) minimal de jetons dans les places du GETM pour lesquelles la condition de linéarisation (3.5) n'est pas satisfaite.

3.3.3 Exemple

Cet exemple est inspiré de la thèse de Samir Hamaci [Hamaci, 2005]. Le GETM de la figure 3.5 modélise une chaîne de production produisant deux types de produit, A et B .

Le produit A est composé de deux pièces A_1 et d'une pièce A_2 . Le premier composant est fabriqué par une machine de type p_{13} . La fabrication du deuxième composant nécessite les deux pièces de la machine p_{13} . La machine p_5 effectue l'assemblage de deux pièces A_1 et d'une pièce A_2 .

Le deuxième produit B est fabriqué par la machine p_{12} . La première opération est effectuée sur un lot de trois pièces sur la machine p_6 . La pièce produite sera ensuite traitée successivement sur les machines p_8 et p_{10} . Parallèlement, un lot de deux pièces est traité sur la machine p_7 , puis ensuite sur p_9 et p_{11} . Enfin, un lot de cinq pièces est constitué pour être traité sur la machine p_{12} .

Afin d'obtenir un GETM fortement connexe caractérisant le comportement cyclique du système, le modèle est rebouclé (arcs joignant la transition n_4 aux places p_1 et p_3 , et la place p_{12} à la transition n_5).

Equations récurrentes

En considérant le GETM représenté par la figure 3.5, nous déterminons les équation récurrentes régissant l'évolution dynamique de ce graphe, soit le système d'équations suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} n_1(t) = \min(2 + 2n_2(t-4), 2n_4(t-4)), \\ n_2(t) = \min(\lfloor \frac{n_1(t-3)}{2} \rfloor, n_4(t-3)), \\ n_3(t) = \min(\lfloor \frac{n_1(t-4)}{2} \rfloor, n_2(t-4), n_5(t-4)), \\ n_4(t) = \min(\lfloor \frac{3+3n_3(t-3)}{3} \rfloor, n_{10}(t-3)) \\ n_5(t) = \min(1 + n_3(t-2), n_{10}(t-2)), \\ n_6(t) = 3n_5(t-2), \\ n_7(t) = 2n_5(t-1), \\ n_8(t) = 3 + n_6(t-1), \\ n_9(t) = 2 + n_7(t-1), \\ n_{10}(t) = \min(\lfloor \frac{n_8(t-2)}{3} \rfloor, \lfloor \frac{n_9(t-2)}{2} \rfloor, 1 + n_4(t-2)). \end{array} \right.$$

Linéarisation exacte

Comme nous l'avons constaté précédemment, le système ainsi obtenu n'est pas $(\min, +)$ linéaire en raison de la présence de parties entières rendant les équations non linéaires. Pour linéariser ces équations, on commence par rechercher l'invariant total de transitions. Cet invariant correspond à $\theta^t = (2 \ 1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 3 \ 2 \ 3 \ 2 \ 1)$.

On vérifie que chaque marquage d'une place satisfait la condition (3.5), ce qui signifie que le GETM est linéarisable. En utilisant le changement de variable (3.3), on obtient le modèle $(\min, +)$ linéaire suivant, issu de l'équation (3.5) :

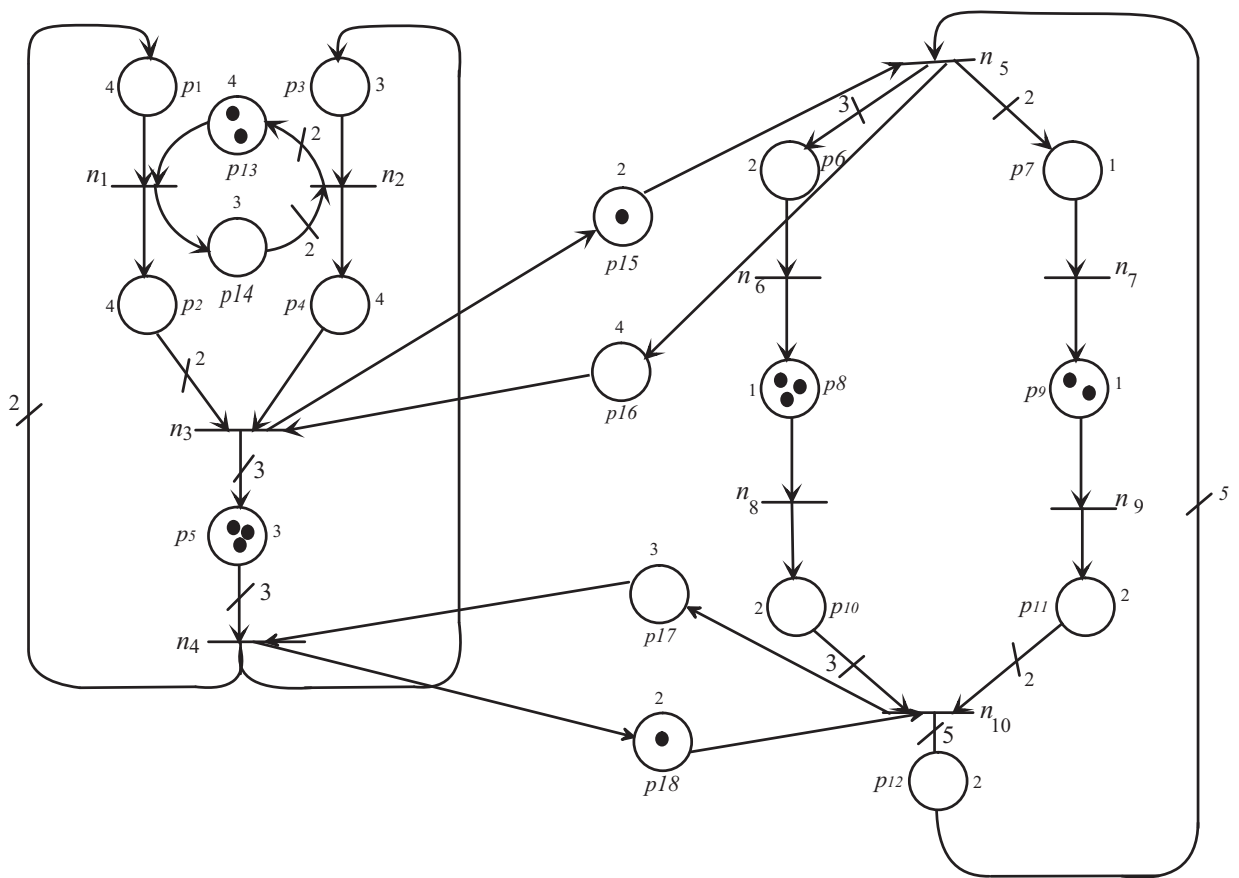


Figure 3.5 – Un GETM .

$$\left\{ \begin{array}{l} x_1(t) = \min(1 + x_2(t - 4), x_4(t - 4)), \\ x_2(t) = \min(x_1(t - 3), x_4(t - 3)), \\ x_3(t) = \min(x_1(t - 4), x_2(t - 4), x_5(t - 4)), \\ x_4(t) = \min(1 + x_3(t - 3), x_{10}(t - 3)), \\ x_5(t) = \min(1 + x_3(t - 2), x_{10}(t - 2)), \\ x_6(t) = x_5(t - 2), \\ x_7(t) = x_5(t - 1), \\ x_8(t) = 1 + x_6(t - 1), \\ x_9(t) = 1 + x_7(t - 1), \\ x_{10}(t) = \min(x_8(t - 2), x_9(t - 2), 1 + x_4(t - 2)). \end{array} \right.$$

Ces équations modélisent le comportement du GET représenté par la figure 3.6.

Pour évaluer les performances du GETM représenté par la figure 3.5, on utilise le modèle $(\min, +)$ linéaire associé pour déterminer les fréquences de franchissement de chacune de ses transitions et son temps de cycle.

En utilisant le théorème 2.12, on trouve un taux de production du GET de la figure 3.6, obtenu après linéarisation, égal à $\frac{1}{11}$. De l'équation (3.6), on déduit la fréquence de franchissement de chaque transition du GETM, soient

$$\lambda_{m_1} = \frac{2}{11}, \lambda_{m_2} = \lambda_{m_3} = \lambda_{m_4} = \lambda_{m_5} = \frac{1}{11}, \lambda_{m_6} = \frac{3}{11}, \lambda_{m_7} = \frac{2}{11}, \lambda_{m_8} = \frac{3}{11}, \lambda_{m_9} = \frac{2}{11}, \lambda_{m_{10}} = \frac{1}{11}.$$

Par conséquent, l'équation (3.2) permet de déduire que le temps de cycle TC_m du GETM de la figure 3.5 est égal à 11 unités de temps.

Linéarisation approchée par ajout/retrait de jetons

Pour le marquage initial suivant : $M(0) = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 3 \ 0 \ 0 \ 3 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1)$, on note que la place p_1 , marqué avec un jeton, ne satisfait pas la condition de linéarisation (3.5), ce qui motive l'utilisation de la méthode de *linéarisation approchée par ajout/retrait de jetons* dans le graphe. Le retrait d'un jeton dans la place p_1 permet de vérifier la condition (3.5), de même que l'ajout d'un jeton dans cette place.

L'utilisation des équations (3.7) et (3.8) permet d'obtenir les modèles linéaires approchés suivants :

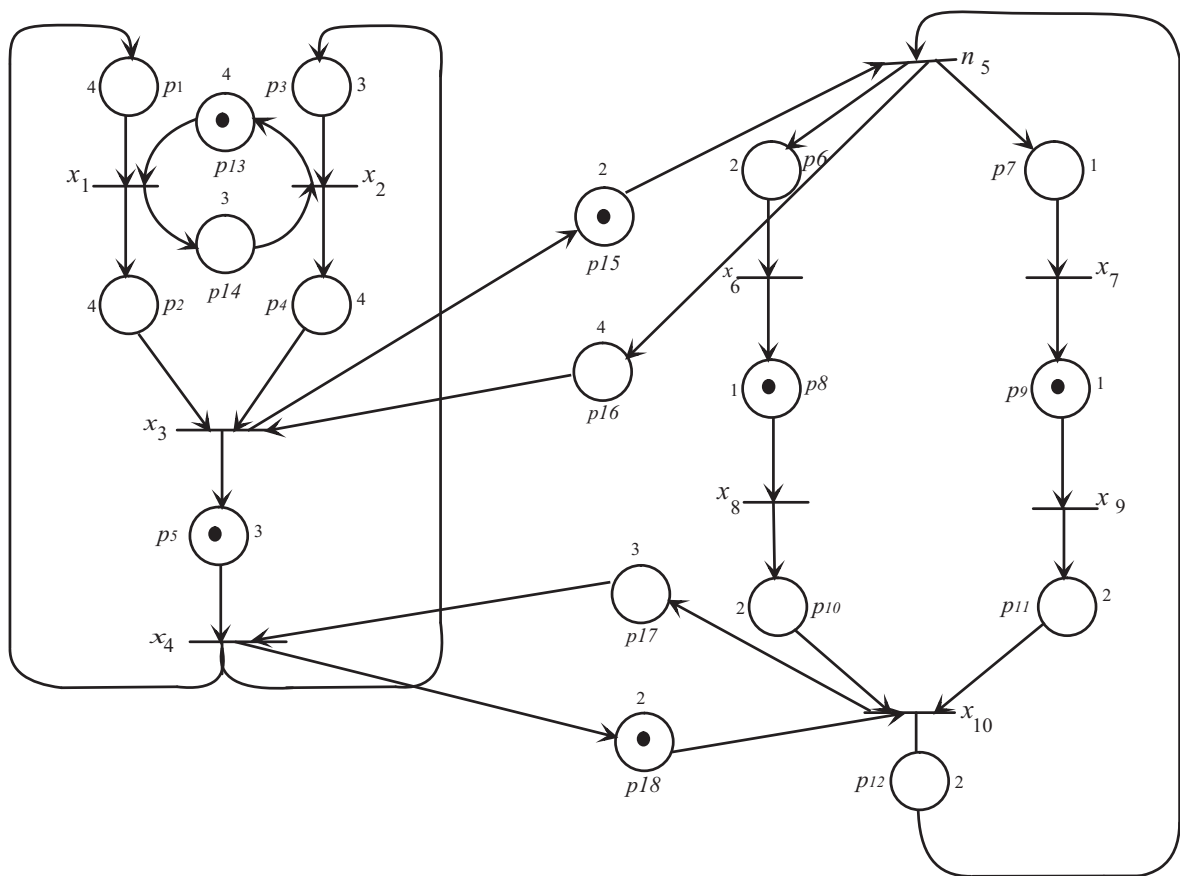


Figure 3.6 – GETM linéarisé.

$$\left\{ \begin{array}{l} \underline{x}_1(t) = \min(1 + \underline{x}_2(t-4), \underline{x}_4(t-4)), \\ \underline{x}_2(t) = \min(\underline{x}_1(t-3), \underline{x}_4(t-3)), \\ \underline{x}_3(t) = \min(\underline{x}_1(t-4), \underline{x}_2(t-4), \underline{x}_5(t-4)), \\ \underline{x}_4(t) = \min(1 + \underline{x}_3(t-3), \underline{x}_{10}(t-3)), \\ \underline{x}_5(t) = \min(1 + \underline{x}_3(t-2), \underline{x}_{10}(t-2)), \\ \underline{x}_6(t) = \underline{x}_5(t-2), \\ \underline{x}_7(t) = \underline{x}_5(t-1), \\ \underline{x}_8(t) = 1 + \underline{x}_6(t-1), \\ \underline{x}_9(t) = 1 + \underline{x}_7(t-1), \\ \underline{x}_{10}(t) = \min(\underline{x}_8(t-2), \underline{x}_9(t-2), 1 + \underline{x}_4(t-2)). \end{array} \right.$$

et

$$\left\{ \begin{array}{l} \bar{x}_1(t) = \min(1 + \bar{x}_2(t-4), 1 + \bar{x}_4(t-4)), \\ \bar{x}_2(t) = \min(\bar{x}_1(t-3), \bar{x}_4(t-3)), \\ \bar{x}_3(t) = \min(\bar{x}_1(t-4), \bar{x}_2(t-4), \bar{x}_5(t-4)), \\ \bar{x}_4(t) = \min(1 + \bar{x}_3(t-3), \bar{x}_{10}(t-3)), \\ \bar{x}_5(t) = \min(1 + \bar{x}_3(t-2), \bar{x}_{10}(t-2)), \\ \bar{x}_6(t) = \bar{x}_5(t-2), \\ \bar{x}_7(t) = \bar{x}_5(t-1), \\ \bar{x}_8(t) = 1 + \bar{x}_6(t-1), \\ \bar{x}_9(t) = 1 + \bar{x}_7(t-1), \\ \bar{x}_{10}(t) = \min(\bar{x}_8(t-2), \bar{x}_9(t-2), 1 + \bar{x}_4(t-2)). \end{array} \right.$$

Dans le cas où un jeton est retiré de la place p_1 dans le GETM, on obtient un GET avec une valeur propre λ égale à $\frac{1}{11}$. L'équation (3.6) permet de déduire la fréquence de franchissement de chaque transition du GETM : $\lambda_{m_1} = \frac{2}{11}$, $\lambda_{m_2} = \lambda_{m_3} = \lambda_{m_4} = \lambda_{m_5} = \frac{1}{11}$, $\lambda_{m_6} = \frac{3}{11}$, $\lambda_{m_7} = \frac{2}{11}$, $\lambda_{m_8} = \frac{3}{11}$, $\lambda_{m_9} = \frac{2}{11}$, $\lambda_{m_{10}} = \frac{1}{11}$. Par conséquent, on déduit de l'équation (3.2) que le temps de cycle \underline{TC}_m est égal à 11 unités de temps.

Dans le cas où on a ajouté un jeton dans la place p_1 dans le GETM, le taux de production du GET obtenu λ est égale à $\frac{1}{10}$. De l'équation (3.6), on déduit la fréquence de franchissement de chaque transition du GETM : $\bar{\lambda}_{m_1} = \frac{2}{10}$, $\bar{\lambda}_{m_2} = \bar{\lambda}_{m_3} = \bar{\lambda}_{m_4} = \bar{\lambda}_{m_5} = \frac{1}{10}$, $\bar{\lambda}_{m_6} = \frac{3}{10}$, $\bar{\lambda}_{m_7} = \frac{2}{10}$, $\bar{\lambda}_{m_8} = \frac{3}{10}$, $\bar{\lambda}_{m_9} = \frac{2}{10}$, $\bar{\lambda}_{m_{10}} = \frac{1}{10}$. Par conséquent, l'équation (3.2) permet de déduire que le temps de cycle \bar{TC}_m est égal à 10 unités de temps.

Finalement, on obtient pour $M(0) = (1 \ 0 \ 0 \ 0 \ 3 \ 0 \ 0 \ 3 \ 2 \ 0 \ 0 \ 0 \ 2 \ 0 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1)$ les résultat suivant :

$$10 \leq TC_m \leq 11,$$

$$\frac{3}{11} \leq \lambda_{m_1} \leq \frac{2}{10}, \quad \frac{1}{11} \leq \lambda_{m_2} \leq \frac{1}{10}, \quad \frac{1}{11} \leq \lambda_{m_3} \leq \frac{1}{10}, \quad \frac{1}{11} \leq \lambda_{m_4} \leq \frac{1}{10}, \quad \frac{1}{11} \leq \lambda_{m_5} \leq \frac{1}{10}, \\ \frac{3}{11} \leq \lambda_{m_6} \leq \frac{3}{10}, \quad \frac{2}{11} \leq \lambda_{m_7} \leq \frac{2}{10}, \quad \frac{3}{11} \leq \lambda_{m_8} \leq \frac{3}{10}, \quad \frac{2}{11} \leq \lambda_{m_9} \leq \frac{2}{10}, \quad \frac{1}{11} \leq \lambda_{m_{10}} \leq \frac{1}{10}.$$

3.4 Algorithme de linéarisation

3.4.1 Description des variables

1. **Variables globales :**
 - k : nombre de circuits du graphe
 - n : nombre de transitions du graphe
 - x : T-invariant global
2. **Variables locales :**
 - M : marquage de chaque circuit du graphe
 - W : poids de chaque arcs sortants
 - S : T-invariant local
 - T : temporisations associées à chaque circuit
 - m : nombre de places dans chaque circuit

3.4.2 Programme Matlab correspondant à l'algorithme de linéarisation

```

k = input ('Introduire nombre de circuit du graphe :');
n = input ('Introduire nombre de transitions du graphe :');
x = input ('Introduire le T-Invariant global:');

for j = 1 : k
disp ('Introduire les données :')
circuit = j
M = input ('Introduire le vecteur M :' );
W = input ('Introduire le poids de chaque arc sortant :');
S = input ('Introduire le T-invariant :');
T = input ('Introduire les temporisations de chaque circuit :');
m = input ('Introduire nombre de places dans chaque circuit :');

for i = 1 : m
k1(i) = M(i)/W(i);
g1(i) = floor(k1(i));
Z1(i) = g1(i)/S(i);      (% condition de linéarisation )
end

Z1;
K1 = floor(Z1);      (% retrait minimum de jetons dans les places )
H1 = ceil(Z1);      (% ajout minimum de jetons dans les places )

A1(j) = sum(T)/sum(H1);    (% Temps de cycle associé à chaque circuit avec retrait de jetons)
B1(j) = sum(T)/sum(K1);    (% Temps de cycle associé à chaque circuit avec ajout de jetons)

end
TCi = max(A1);    (% Temps de cycle du graphe lors du retrait de jetons)
TCs = max(B1);    (% Temps de cycle du graphe lors de l'ajout de jetons)

```

```

if  $TC_i == TC_s$ 
 $TC = TC_s$     (% Temps de cycle du graphe sans ajout ni retrait de jetons)
for  $v = 1 : n$ 
 $F(v) = x(v)/TC$ ;
end
 $F$ 
else

sprintf ('%6.3f <= TC <= %6.3f',  $TC_i, TC_s$ )    (%  $TC_i <= TC <= TC_s$ )
for  $v = 1 : n$ 
 $F_i(v) = x(v)/TC_i$ ;
 $F_s(v) = x(v)/TC_s$ ;
disp (' Fréquence de franchissement ')
transition =  $v$ 
sprintf ('%6.3f <= F <= %6.3f',  $F_s(v), F_i(v)$ )    (%  $F_i <= F <= F_s$ )
end
end

```

3.5 Conclusion

Dans ce chapitre, nous nous sommes intéressés à l'évaluation de performances des GETM. Pour pouvoir appliquer les résultats développés dans le cadre de l'analyse de performances des GET, dans un premier temps, on a implémenté, dans Matlab, une méthode de linéarisation applicable dans le cas de condition particulière sur le marquage initiale.

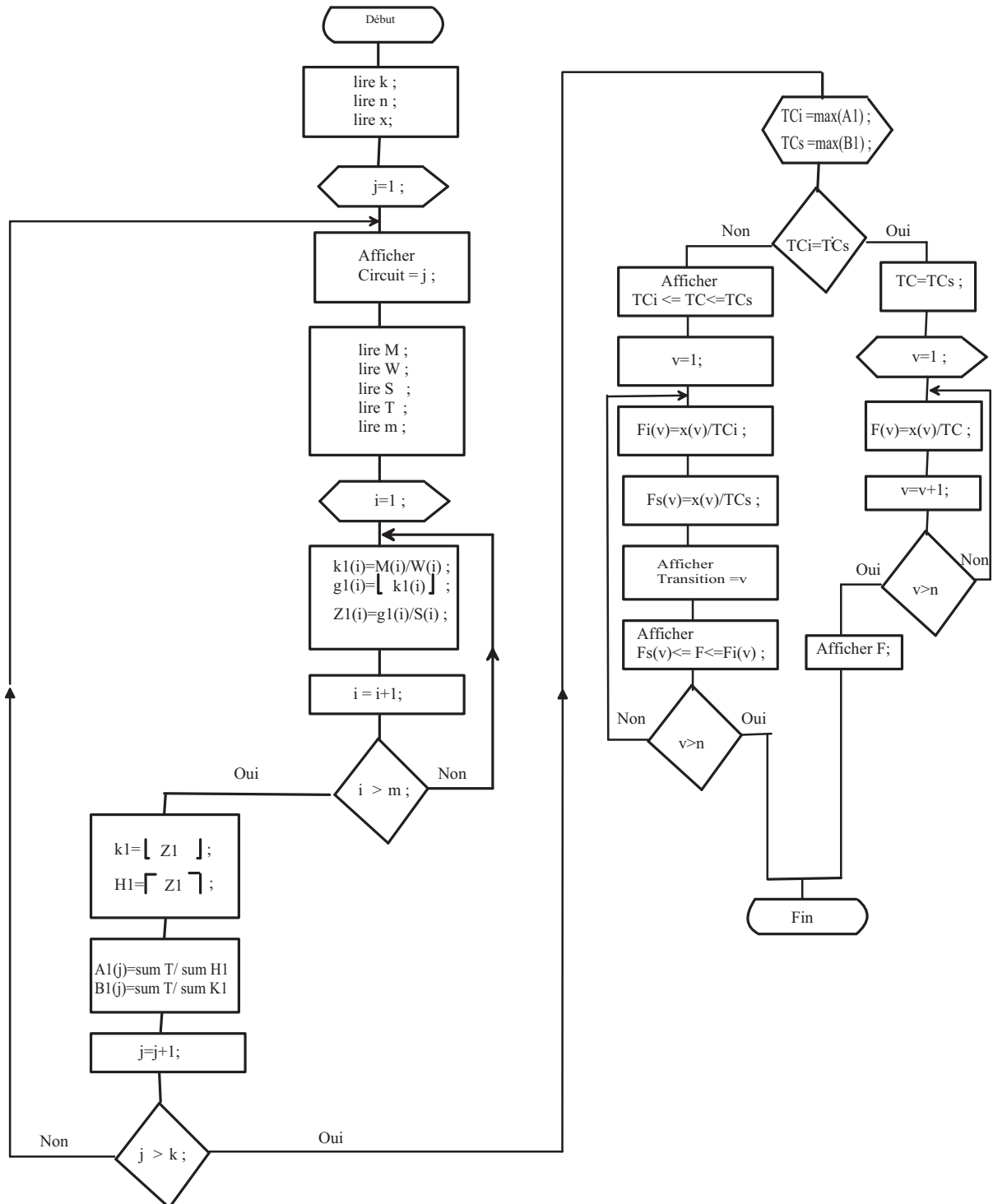


Figure 3.7 – Organigramme .

CHAPITRE 4

Conclusion

Le travail présenté dans ce mémoire a pour objectif d'étendre certains résultats établis sur l'analyse de performances des graphes d'événements temporisés, classiquement étudiés dans le cadre de l'algèbre des dioïdes, aux graphes d'événements temporisés avec multiplieurs.

Ce mémoire s'articule autour de trois chapitres. Dans le premier chapitre figurent les rappels fondamentaux concernant les propriétés mathématiques des dioïdes. Les résultats décrits dans ce chapitre sont classiques, et sont présentés en détail dans [Baccelli et al., 1992].

Le deuxième chapitre porte sur les GET, il a été rappelé que ces derniers peuvent être représentés par des équations récurrentes linéaire dans l'algèbre $(\min,+)$.

Les graphes d'événements temporisés avec multiplieurs font l'objet du troisième chapitre. On a présenté une méthode de linéarisation développée dans [Hamaci et al., 2005], dans le but d'une implémentation informatique, sous Matlab.

Bibliographie

- [Baccelli et al., 1992] Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G.-J., and Quadrat, J.-P. (1992). *Synchronization and Linearity: An Algebra for Discrete Event Systems*. Wiley and Sons.
- [Balbo and Silva, 1998] Balbo, G. and Silva, M. (1998). *Performance Models for Discrete Event Systems with Synchronizations*. MATCH Advanced Schools, Editorial Kronos, Zaragoza, Espagne.
- [Chao et al., 1993] Chao, D., Zhou, M., and Wang, D. (1993). Multiple Weighted Marked Graphs. In *IFAC 12th Triennial World Congress*, pages 371–374, Sydney, Australie.
- [Chretienne, 1983] Chretienne, P. (1983). *Les réseaux de Petri temporisés*. Thèse d'état, Université de Paris VI.
- [Cohen et al., 1998] Cohen, G., Gaubert, S., and Quadrat, J.-P. (1998). Timed-Event Graphs with Multipliers and Homogenous Min-Plus Systems. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 43(9):1296–1302.
- [Compos et al., 1991] Compos, J., Chiola, G., and Silva, M. (1991). Properties and Performance Bounds for Closed Free Choice Synchronized Monoclass Queueing Networks. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 36(12):1368–1382.
- [David and Alla, 1992] David, R. and Alla, H. (1992). *Du Grafset au réseaux de Petri*. Editions Hermès, Paris.
- [Gaubert, 1992] Gaubert, S. (1992). *Théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes*. Thèse, Ecole des Mines de Paris.
- [Gaubert, 1995] Gaubert, S. (1995). Resource Optimization and (min,+) Spectral Theory. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 40(11):1931–1934.
- [Gondran and Minoux, 1985] Gondran, M. and Minoux, M. (1985). *Graphes et algorithmes*. Eyrolles, Paris, France.
- [Hamaci, 2005] Hamaci, S. (2005). *Etude des graphes d'événements temporisés avec multiplieurs dans l'algèbre (min,+)*. Thèse, LISA - Université d'Angers.
- [Hamaci et al., 2005] Hamaci, S., Boimond, J.-L., and Lahaye, S. (2005). Performance Analysis of Timed Event Graphs with Multipliers Using (min, +) Algebra. In *2st International Conference on Informatics in Control Automation and Robotics (ICINCO'05)*, volume 4, pages 16–21, Barcelone, Espagne.
- [Hamaci et al., 2004] Hamaci, S., Boimond, J.-L., Lahaye, S., and Mostefaoui, M. (2004). On the Linearizability of Discrete Timed Event Graphs with Multipliers Using (min,+) Algebra. In *7th international Workshop on Discrete Event Systems (WODES'04)*, pages 367–372, France.
- [Munier, 1993] Munier, A. (1993). Régime asymptotique optimal d'un graphe d'événements temporisé généralisé: application à un problème d'assemblage. *APII*, 27(5):487–513.
- [Ramchandani, 1974] Ramchandani, C. (1974). *Analysis of Asynchronous Concurrent Systems by Timed Petri Nets*. Thèse d'état, Université de Paris VI.
- [Sauer, 2003] Sauer, N. (2003). Marking Optimization of Weighted Marked Graphs. *Journal of Discrete Event Dynamic Systems*, 13:245–262.

-
- [Sauer, 2004] Sauer, N. (2004). *Contribution à l'évaluation et l'optimisation des systèmes de production*. Rapport d'habilitation à diriger des recherches, Ecole des mines de Nantes.
- [Teruel et al., 1992] Teruel, E., Chrzastowski-Wachtel, P., Colom, J., and Silva, M. (1992). On Weighted T-Systems. In *Advances in Petri nets, Lecture Notes in Computer Science*, volume 616, pages 348–367.
- [Trouillet, 2003] Trouillet, B. (2003). *Contribution à la commande des systèmes linéaires dans les dioïdes*. Thèse, Ecole Centrale de Lille, France.

Algorithme de linéarisation des Graphes d'Evénements Temporisés avec Multiplieurs dans l'algèbre (min,+).

Ahmad ALSAYED