

**REPRÉSENTATION, COMMANDE ET IDENTIFICATION
DE SYSTÈMES HYBRIDES**

THÈSE DE DOCTORAT

Spécialité : Automatique

ÉCOLE DOCTORALE D'ANGERS

Présentée et soutenue publiquement

le : 18 novembre 2005

à : Angers

par : **Muriel GAPAILLARD**

Devant le jury ci-dessous :

Jacques BURGER (examineur), professeur émérite, université d'Angers
Jean-Louis FERRIER (président du jury), professeur, université d'Angers
Marie-Noëlle LE ROUX (rapporteur), professeur, université de Bordeaux
Jean-Jacques LOISEAU (rapporteur), directeur de recherche CNRS, IRCCyN
Marc POGU (examineur), professeur, École Centrale de Nantes
Janan ZAYTOON (rapporteur), professeur, université de Reims

Directeur de thèse : Jacques BURGER

Co-encadrant : Marc POGU

**Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés, CNRS FRE 2656
62, avenue Notre-Dame du Lac, 49000 Angers, France**

ED 363

À la mémoire de ma mère

Remerciements

Je tiens à remercier les professeurs Jacques Burger et Marc Pogu, respectivement directeur de thèse et co-encadrant, pour leur disponibilité et leur aide précieuse. C'est grâce à leurs conseils judicieux et à leurs encouragements constants que j'ai pu mener à bien ce travail.

Je remercie également le professeur Jean-Louis Ferrier, directeur du LISA, de m'avoir accueillie au sein de son laboratoire et d'avoir accepté d'être examinateur de cette thèse.

Je suis honorée que les professeurs et directeur de recherche Marie-Noëlle Le Roux, Jean-Jacques Loiseau et Janan Zaytoon aient bien voulu être rapporteurs de mon travail de thèse. Je les en remercie.

Enfin, je suis reconnaissante à Olivier, à ma famille et à mes amis pour la patience dont ils ont fait preuve durant ces trois années et je remercie particulièrement mon père pour son soutien. Que tous me pardonnent de les avoir parfois un peu négligés.

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Motivations	1
1.2	Principaux résultats	2
1.3	Plan du mémoire	3
2	Systèmes hybrides étudiés et représentations associées	5
2.1	Systèmes hybrides à sauts et commutations commandés	5
2.1.1	Description des systèmes	6
2.1.2	Nouvelle formulation	8
2.1.3	Représentation	9
2.1.4	Lien entre les états des systèmes	13
2.2	Systèmes hybrides à commutation autonome	20
2.2.1	Description des systèmes	20
2.2.2	Représentation	21
2.2.3	Lien entre les états des systèmes	22
2.3	Conclusion	27
3	Problèmes de commande et d'identification	29
3.1	Commutations commandées	29
3.1.1	Problème à temps final fixé	30
3.1.2	Problème à temps final libre	35
3.1.3	Poursuite de trajectoire	39
3.2	Commutation autonome	41
3.2.1	Poursuite de trajectoire	42
3.2.2	Identification de paramètres	44
3.2.3	Identification d'un seuil	46
3.3	Conclusion	46
4	Méthodes de résolution	47
4.1	Calcul des variations	47
4.1.1	Problème à temps final fixé	48
4.1.2	Poursuite de trajectoire	52
4.1.3	Identification de paramètres	56
4.1.4	Identification d'un seuil	61
4.2	Optimisation stochastique	64
4.2.1	Problèmes hybride et issu de la représentation	64
4.2.2	Continuité des fonctions coût	65
4.2.3	Présentation de la méthode	66
4.2.4	Avantages et limites de la méthode	68

4.3	Équation de Hamilton-Jacobi-Bellman	69
4.3.1	Problème hybride de poursuite de trajectoire	70
4.3.2	Méthode de résolution	70
4.4	Conclusion	72
5	Applications numériques	73
5.1	Problème à temps final libre	73
5.1.1	Problème hybride	74
5.1.2	Problème issu de la représentation	75
5.1.3	Résultats numériques	75
5.1.4	Avantages apportés par la représentation	77
5.2	Problème à temps final fixé	77
5.2.1	Problème hybride	77
5.2.2	Problème issu de la représentation	79
5.2.3	Résultats numériques	79
5.2.4	Avantages apportés par la représentation	81
5.3	Poursuite de trajectoire	81
5.3.1	Problème hybride	81
5.3.2	Problème issu de la représentation	82
5.3.3	Résultats numériques	83
5.3.4	Avantages apportés par la représentation	84
5.4	Identification de paramètres	84
5.4.1	Problème hybride	84
5.4.2	Problème issu de la représentation	85
5.4.3	Résultats numériques	86
5.4.4	Avantages apportés par la représentation	87
5.5	Identification d'un seuil	87
5.5.1	Problème hybride	87
5.5.2	Problème issu de la représentation	88
5.5.3	Résultats numériques	89
5.5.4	Avantages apportés par la représentation	90
5.6	Conclusion	90
	Conclusion et perspectives	91
	Annexes	93
A	Énoncés de résultats classiques	93
A.1	Lemme de Gronwall	93
A.2	Théorème de	

Chapitre 1

Introduction

Les systèmes hybrides peuvent être définis comme des systèmes continus dans lesquels interviennent des événements discrets, commandés ou autonomes (voir par exemple [1, 46, 53]). Ils permettent de décrire de nombreux phénomènes physiques : réactions chimiques [39], mouvement d'une voiture [32, 21], fonctionnement d'un thermostat [40], trafic aérien [45], etc. Ces systèmes suscitent de ce fait de plus en plus d'intérêt.

L'étude des systèmes hybrides porte principalement sur la modélisation, sous forme de réseaux de Petri hybrides [22], d'automates hybrides [33] ou d'équations différentielles [14], la stabilité [51, 11, 23], la commande [7, 43] et l'identification [47, 41]. Ce mémoire contribue à la modélisation des systèmes hybrides en introduisant des représentations continues pour deux classes de systèmes hybrides. Des problèmes de commande et d'identification sont également étudiés, à l'aide de ces représentations, et des méthodes de résolution sont proposées.

1.1 Motivations

La nature même des systèmes hybrides rend leur étude, aussi bien théorique que pratique, plus délicate que celle des systèmes continus. En particulier, dans le cadre de la commande optimale, la théorie classique pour les systèmes continus, qui a donné lieu depuis les années 60 à de nombreuses contributions (voir par exemple [6, 2] et plus récemment [37, 48]), ne peut pas s'appliquer directement aux problèmes hybrides : les résultats doivent être adaptés pour prendre en compte les discontinuités apparaissant dans les systèmes hybrides. Par exemple, dans [44], une version hybride du principe du maximum est proposée et dans [13], des équations quasi-variationnelles généralisées sont introduites. De même, de nombreux résultats existent sur l'identification des systèmes continus (voir par exemple [26, 38]) mais la résolution des problèmes hybrides d'identification doit faire appel à des méthodes spécifiques. Ainsi, dans [47], on utilise une contrainte polynomiale qui découple l'identification des paramètres du modèle et l'estimation de l'état hybride, tandis que dans [41], on fait appel à la programmation mixte en nombres entiers. D'un point de vue pratique, le caractère hybride des systèmes génère également des difficultés dans la résolution de problèmes. Par exemple, pour les problèmes de commande optimale, lorsqu'on utilise le calcul des variations, des discontinuités apparaissent dans l'état adjoint du système, ce qui complique le formalisme [16]. Un autre exemple est donné par la programmation dynamique hybride [9] et les équations ou inéquations de Hamilton-Jacobi-Bellman qui sont difficiles à résoudre efficacement [32].

Des études visant à faciliter la résolution de problèmes hybrides ont déjà été effectuées. En effet, il est possible, dans certains cas, de remplacer des problèmes par d'autres faisant intervenir des systèmes plus simples. Ainsi, Bengea et DeCarlo [8] ont plongé des systèmes hybrides à commutations commandées dans une classe de systèmes paramétrés ne comportant

plus de commutation. Des problèmes de commande optimale ont pu être étudiés à l'aide de ce plongement.

Nous proposons un autre moyen de simplifier l'étude de problèmes hybrides. Afin d'éviter les difficultés liées aux discontinuités, nous nous sommes en effet intéressés à la possibilité, d'une part, de représenter des classes de systèmes hybrides, plus générales que celle étudiée dans [8], par des systèmes continus et, d'autre part, d'utiliser ces représentations pour la résolution de problèmes hybrides. Cette approche est développée dans ce mémoire, tout au long duquel seront mis en évidence les avantages apportés par l'utilisation des systèmes continus.

1.2 Principaux résultats

Les systèmes hybrides considérés ici sont des systèmes à sauts d'état et commutations de modèle commandés et des systèmes à commutation de modèle autonome. Ce mémoire développe une méthode pour obtenir des représentations continues de ces systèmes hybrides. Un choix convenable d'espaces de fonctions – espaces de Lebesgue ou espace des fonctions C^1 par morceaux, par exemple – permet d'obtenir ces résultats. En effet, on introduit des suites de systèmes continus dont les états convergent, de façon globale ou ponctuelle, vers ceux des systèmes hybrides considérés. On montre ensuite, avec des résultats de convergence vers des minima classiques ou à ε près (voir par exemple [3] pour cette notion), que la résolution de différents types de problèmes hybrides de commande et d'identification peut être remplacée par celle des problèmes issus des représentations. Des méthodes de résolution de problèmes continus peuvent donc être utilisées pour résoudre des problèmes hybrides.

Trois méthodes de résolution, permettant de minimiser les fonctions coût associées aux problèmes issus des représentations, sont présentées dans ce mémoire.

La première méthode, basée sur le formalisme du calcul des variations (voir par exemple [10, 15]), consiste à déterminer les expressions des gradients des fonctions coût, utiles à la mise en œuvre de méthodes de descente. Sur le plan fonctionnel, l'utilisation du calcul des variations, pour obtenir les minima de fonctionnelles, n'est justifiée que sous des hypothèses de convexité (voir par exemple [19, 54]). Néanmoins, pour l'approche numérique, bien que ces hypothèses ne soient pas vérifiées, on utilise le calcul des variations en admettant que les expressions ont un sens. Des calculs formels ont ainsi déjà été utilisés, par exemple dans [25] et [15]. Afin de montrer les simplifications apportées par les représentations, les calculs des gradients sont effectués ici pour les problèmes hybrides et issus des représentations. En particulier, on montre que les représentations permettent d'éviter les discontinuités de l'état adjoint, évoquées ci-dessus.

Pour minimiser de façon globale des fonctions coût, généralement non convexes, il peut être utile de faire appel à des méthodes stochastiques, qui assurent la convergence en probabilité vers un minimum global. La méthode du recuit simulé (voir par exemple [17, 5]) en est un exemple. D'un point de vue pratique, le recuit simulé est efficace, mais son implémentation impose à l'utilisateur de fixer des paramètres. Une autre méthode [18], basée sur des calculs de moyennes de niveau, est relativement simple à mettre en œuvre [36]. Cependant, elle peut conduire à des temps de calcul élevés. Dans ces conditions, une méthode stochastique, de mise en œuvre plus simple et dont la convergence est démontrée moyennant la continuité de la fonction à minimiser, est présentée ici. Cette méthode sera appliquée à un problème hybride et au problème issu de la représentation. Elle permettra de confirmer la convergence entre les solutions.

La dernière méthode de résolution est un exemple d'utilisation de résultats spécifiques aux problèmes continus de commande. Grâce aux représentations, ces résultats peuvent en effet être utilisés pour la résolution de problèmes hybrides. On s'est ainsi intéressé aux résultats concernant les équations de Hamilton-Jacobi-Bellman (voir par exemple [37]). Des études ont été faites pour adapter l'utilisation de ces équations à un cadre hybride (voir par exemple [52, 13, 50]) mais, dans

la pratique, des difficultés, liées aux justifications théoriques, subsistent [32, 49]. La continuité de la représentation permet en revanche d'utiliser ces équations dans le cadre classique des problèmes continus. On introduit ici l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman pour un problème de poursuite de trajectoire issu d'une représentation. La connaissance d'une solution de cette équation permet de résoudre le problème hybride associé.

Afin de montrer l'intérêt pratique des représentations, on propose des mises en œuvre numériques pour les deux premières méthodes. Les exemples choisis proviennent pour la plupart d'équations physiques non linéaires. Les mouvements d'une voiture à deux rapports de transmission et d'un pendule amorti sont ainsi étudiés.

1.3 Plan du mémoire

Le chapitre 2 introduit les classes de systèmes hybrides étudiées et les représentations associées. Des résultats de convergence entre les solutions sont établis.

Dans le chapitre 3, on présente des problèmes hybrides de commande et d'identification ainsi que les problèmes issus des représentations. Des convergences entre les solutions des problèmes continus et celles des problèmes hybrides sont démontrées.

Le chapitre 4 est consacré aux trois méthodes de résolution évoquées plus haut.

Des applications numériques sont détaillées dans le chapitre 5.

Le lecteur trouvera en annexe les résultats mathématiques classiques utilisés dans les démonstrations des chapitres 2, 3 et 4.

Chapitre 2

Systemes hybrides étudiés et représentations associées

Deux classes de systèmes hybrides sont étudiées dans ce mémoire. La première classe est constituée de systèmes hybrides à sauts d'état et à commutations de modèle commandés. C'est le cas lorsqu'une commande extérieure au système provoque le saut ou la commutation. La seconde classe comprend des systèmes hybrides à commutation de modèle autonomes. Dans ce cas, la commutation intervient lorsque l'état atteint une valeur donnée qu'on appellera *seuil*.

Les discontinuités d'état ou de modèle sont à l'origine de difficultés théoriques et numériques, déjà évoquées dans le premier chapitre, que l'on rencontre lors de la simulation et lors de la résolution de problèmes de commande optimale ou d'identification de paramètres. C'est pour tenter de pallier ces difficultés que l'on propose une méthode qui consiste à associer à chaque système hybride une suite de systèmes continus qu'on appellera *représentation continue* du système ou, plus brièvement, *représentation*. La résolution des problèmes de commande optimale et d'identification pour ces représentations peut alors être abordée avec les formalismes classiques des systèmes continus.

Dès lors, la question centrale est de savoir quelles sont les relations entre le système hybride initial et sa représentation. La même question se pose pour les problèmes de commande et d'identification : une commande optimale d'une représentation est-elle proche, et en quel sens, de celle du système hybride ?

Une réponse à la première question est apportée dans ce chapitre où l'on montre, à l'aide de régularisations de la fonction de Heaviside et de résultats utilisant le lemme de Gronwall et le théorème de convergence dominée de Lebesgue, la convergence, ponctuelle ou globale, des solutions d'une suite de systèmes continus vers la solution du système hybride. Ces résultats justifient, *a posteriori*, le terme de représentation introduit précédemment, et permettent, dans les applications et sous des hypothèses peu restrictives dûment précisées, de remplacer un système discontinu par un système continu.

2.1 Systèmes hybrides à sauts et commutations commandés

La première classe de systèmes hybrides, à sauts et commutations commandés, est présentée dans ce paragraphe. Afin de définir plus facilement la représentation, on montre dans un premier temps que ces systèmes peuvent se ramener, grâce à un changement de variable, à des systèmes hybrides à sauts ne comportant plus de commutation. À l'aide d'une approximation continue de la fonction de Heaviside, la représentation, constituée de systèmes continus, est ensuite introduite, et des résultats de convergences locales et globales entre les états des systèmes continus et hybrides sont démontrés.

2.1.1 Description des systèmes

On étudie des systèmes hybrides à sauts et commutations commandés, dans lesquels, pour simplifier l'écriture et sans perte de généralité, le temps t n'apparaît pas explicitement dans les seconds membres. Les systèmes considérés sont les suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_1(u(t), \mathbf{x}(t)) \quad \text{si } t \in [t_0, \tau_1[\\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_{i+1}(u(t), \mathbf{x}(t)) \quad \text{si } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}[, \quad i = 1, \dots, m-1 \\ \mathbf{x}(\tau_i) = \mathbf{x}(\tau_i^-) + \boldsymbol{\eta}_i \\ \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_{m+1}(u(t), \mathbf{x}(t)) \quad \text{si } t \in [\tau_m, t_f] \\ \mathbf{x}(\tau_m) = \mathbf{x}(\tau_m^-) + \boldsymbol{\eta}_m \end{array} \right. \quad (2.1)$$

où la partie intermédiaire n'est pas prise en compte si l'entier m est égal à 1.

Les fonctions \mathbf{f}_i , $i = 1, \dots, m+1$, sont définies sur $I \times \mathbb{R}^d$, où $d \geq 1$, à valeurs dans \mathbb{R}^d , I étant un intervalle ouvert de \mathbb{R} contenant l'ensemble fermé borné U . De plus, on suppose que les fonctions \mathbf{f}_i sont de classe \mathcal{C}^1 sur $I \times \mathbb{R}^d$ et qu'elles vérifient :

$$\exists C_1 > 0 \quad \exists C_2 > 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m+1\} \quad \forall (u, \mathbf{x}) \in I \times \mathbb{R}^d \quad \|\mathbf{f}_i(u, \mathbf{x})\|_d \leq C_1 \|\mathbf{x}\|_d + C_2 \quad (2.2)$$

où $\|\cdot\|_d$ représente la norme euclidienne de \mathbb{R}^d .

La fonction u est une fonction continue définie sur $[t_0, t_f]$ à valeurs dans U . Le nombre m de commutations est fixé dans \mathbb{N} . Les instants t_0 , t_f et τ_i sont donnés dans \mathbb{R}^+ et sont tels que

$$t_0 < t_f \quad \text{et} \quad t_0 \leq \tau_1 \leq \dots \leq \tau_i \leq \tau_{i+1} \leq \dots \leq \tau_m \leq t_f .$$

L'état initial \mathbf{x}_0 et les sauts $\boldsymbol{\eta}_i$, $i = 1, \dots, m$, sont donnés dans \mathbb{R}^d .

Lorsque $\tau_1 = t_0$, l'état $\mathbf{x}(t_0^-)$ intervient dans (2.1). Par convention, on le suppose égal à \mathbf{x}_0 .

Pour démontrer l'existence et l'unicité d'une solution pour le système (2.1), nous allons utiliser le théorème suivant qui donne des conditions suffisantes assurant l'existence et l'unicité d'une solution globale pour un problème de Cauchy.

Théorème 2.1. *Soit I un intervalle ouvert non vide de \mathbb{R} et t_0 un point fixé dans I . On considère une fonction \mathbf{f} définie sur $I \times \mathbb{R}^d$, à valeurs dans \mathbb{R}^d et \mathbf{x}_0 un point de \mathbb{R}^d .*

On suppose que la fonction \mathbf{f} vérifie les conditions suivantes :

(a) \mathbf{f} est de classe \mathcal{C}^1 sur $I \times \mathbb{R}^d$;

(b) $\exists C_1 > 0 \quad \exists C_2 > 0 \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in I \times \mathbb{R}^d \quad \|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})\|_d \leq C_1 \|\mathbf{x}\|_d + C_2 .$

Alors il existe une unique solution globale \mathbf{x} de classe \mathcal{C}^1 sur I au problème de Cauchy

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 . \end{array} \right. \quad (2.3)$$

Démonstration. La fonction \mathbf{f} est de classe \mathcal{C}^1 sur $I \times \mathbb{R}^d$. Elle est donc localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable, de sorte que les hypothèses du théorème A.2 de Cauchy-Lipschitz (voir annexe A) sont vérifiées. Le théorème A.3 (voir annexe A) nous permet alors d'assurer, pour le problème (2.3), l'existence et l'unicité d'une solution maximale \mathbf{x} de classe \mathcal{C}^1 , définie sur un intervalle ouvert J inclus dans I .

On pose $I =]a, b[$ et $J =]\tilde{a}, \tilde{b}[$ et on suppose $\tilde{b} < b$. On va montrer que la solution \mathbf{x} est bornée sur $[t_0, \tilde{b}[$ et qu'il en résulte la possibilité de prolonger \mathbf{x} au-delà de \tilde{b} . La définition de \mathbf{x} comme solution maximale est alors contredite, ce qui entraîne $\tilde{b} = b$.

Soit $t \in [t_0, \tilde{b}[$. Comme \mathbf{x} est solution de (2.3), on peut écrire

$$\|\mathbf{x}(t)\|_d \leq \|\mathbf{x}_0\|_d + \int_{t_0}^t \|\mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s))\|_d ds .$$

Grâce à l'hypothèse (b), on a alors

$$\|\mathbf{x}(t)\|_d \leq \|\mathbf{x}_0\|_d + C_1 \int_{t_0}^t \|\mathbf{x}(s)\|_d ds + C_2(\tilde{b} - t_0)$$

et le lemme de Gronwall (voir annexe A) implique

$$\|\mathbf{x}(t)\|_d \leq (\|\mathbf{x}_0\|_d + C_2(\tilde{b} - t_0)) \exp(C_1(\tilde{b} - t_0)) .$$

La solution \mathbf{x} est donc bornée sur $[t_0, \tilde{b}[$.

Montrons maintenant que \mathbf{x} admet une limite en \tilde{b} .

Soit $(t_k)_{k>0}$ une suite dans $[t_0, \tilde{b}[$ et qui converge vers \tilde{b} .

On a alors

$$\forall p > 0 \quad \forall q > 0 \quad \mathbf{x}(t_p) - \mathbf{x}(t_q) = \int_{t_q}^{t_p} \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) ds .$$

Or \mathbf{x} est bornée sur $[t_0, \tilde{b}[$ et \mathbf{f} est continue. Il existe donc une constante $K > 0$ telle que

$$\forall s \in [t_0, \tilde{b}[\quad \|\mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s))\|_d \leq K ,$$

et il en résulte

$$\forall p > 0 \quad \forall q > 0 \quad \|\mathbf{x}(t_p) - \mathbf{x}(t_q)\|_d \leq K|t_p - t_q| . \quad (2.4)$$

Or $(t_k)_{k>0}$, suite convergente dans \mathbb{R} , est une suite de Cauchy. On déduit donc de (2.4) que la suite $(\mathbf{x}(t_k))_{k>0}$ est une suite de Cauchy dans \mathbb{R}^d . L'espace \mathbb{R}^d étant complet, $(\mathbf{x}(t_k))_{k>0}$ admet une limite dans \mathbb{R}^d .

On peut donc définir $\mathbf{x}(\tilde{b})$ comme suit

$$\mathbf{x}(\tilde{b}) = \lim_{t \rightarrow \tilde{b}^-} \mathbf{x}(t) .$$

D'après le théorème A.2, le problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{y}(t)) \\ \mathbf{y}(\tilde{b}) = \mathbf{x}(\tilde{b}) \end{cases}$$

admet une solution \mathbf{y} définie et de classe \mathcal{C}^1 sur un voisinage de \tilde{b} .

Cette solution permet de prolonger de manière \mathcal{C}^1 la solution \mathbf{x} .

En effet, on a

$$\lim_{t \rightarrow \tilde{b}^-} \mathbf{x}(t) = \mathbf{y}(\tilde{b})$$

et, grâce à la continuité de \mathbf{f} , on obtient

$$\lim_{t \rightarrow \tilde{b}^-} \dot{\mathbf{x}}(t) = \lim_{t \rightarrow \tilde{b}^-} \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) = \mathbf{f}(\tilde{b}, \mathbf{x}(\tilde{b})) = \dot{\mathbf{y}}(\tilde{b}) .$$

La solution \mathbf{x} n'est donc pas maximale, ce qui contredit la définition de \mathbf{x} .

Il s'ensuit

$$\tilde{b} = b .$$

On procède de la même façon pour établir $\tilde{a} = a$.

□

Remarque 2.2. Dans l'énoncé du théorème 2.1, on peut remplacer, dans la fonction \mathbf{f} , la première variable t par $u(t)$ où u est une fonction continue à valeurs dans un compact de \mathbb{R} . La démonstration s'adapte sans difficulté et le résultat est conservé.

Les fonctions \mathbf{f}_i du système (2.1) vérifient les hypothèses (a) et (b) du théorème 2.1, ce qui assure l'existence et l'unicité d'une solution de classe \mathcal{C}^1 sur chaque intervalle $[t_0, \tau_1[$, $[\tau_1, \tau_2[$, \dots , $[\tau_m, t_f]$.

Finalement, le système (2.1) admu

Le système (2.1) est alors équivalent au système suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \nu(t) = \nu_1 & \text{si } t \in [t_0, \tau_1[\\ \nu(t) = \nu(\tau_i^-) + \nu_{i+1} - \nu_i & \text{si } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}[, \quad i = 1, \dots, m-1 \\ \nu(t) = \nu(\tau_m^-) + \nu_{m+1} - \nu_m & \text{si } t \in [\tau_m, t_f] \\ \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(u(t), \mathbf{x}(t), \nu(t)) & \text{si } t \in [t_0, \tau_1[\\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 & \\ \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(u(t), \mathbf{x}(t), \nu(t)) & \text{si } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}[, \quad i = 1, \dots, m-1 \\ \mathbf{x}(\tau_i) = \mathbf{x}(\tau_i^-) + \boldsymbol{\eta}_i & \\ \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(u(t), \mathbf{x}(t), \nu(t)) & \text{si } t \in [\tau_m, t_f] \\ \mathbf{x}(\tau_m) = \mathbf{x}(\tau_m^-) + \boldsymbol{\eta}_m & \end{array} \right. \quad (2.7)$$

où, pour uniformiser l'écriture, on a récrit (2.6) en faisant apparaître des sauts.

La fonction ν est constante par morceaux sur $[t_0, t_f]$. Elle vérifie donc l'équation différentielle $\dot{\nu}(t) = 0$ sur chacun des intervalles $[t_0, \tau_1[$, $[\tau_1, \tau_2[$, \dots , $[\tau_m, t_f]$.

En posant $\mathbf{X} = (\mathbf{x}, \nu)^\top$, ce changement de variable étant inspiré de formulations exposées dans [9], on récrit alors le système (2.7) comme suit :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(u(t), \mathbf{X}(t)) & \text{si } t \in [t_0, \tau_1[\\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 & \\ \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(u(t), \mathbf{X}(t)) & \text{si } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}[, \quad i = 1, \dots, m-1 \\ \mathbf{X}(\tau_i) = \mathbf{X}(\tau_i^-) + \boldsymbol{\mu}_i & \\ \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(u(t), \mathbf{X}(t)) & \text{si } t \in [\tau_m, t_f] \\ \mathbf{X}(\tau_m) = \mathbf{X}(\tau_m^-) + \boldsymbol{\mu}_m & \end{array} \right. \quad (2.8)$$

où l'on a posé $\mathbf{F} = (\mathbf{f}, 0)^\top$, $\mathbf{X}_0 = (\mathbf{x}_0, \nu_1)^\top$ et $\boldsymbol{\mu}_i = (\boldsymbol{\eta}_i, \nu_{i+1} - \nu_i)^\top$, $i = 1, \dots, m$.

Le système (2.8), équivalent à (2.1), est un système hybride à sauts commandés ne comportant plus explicitement de commutation. Il admet, tout comme (2.1), une unique solution globale, définie sur $[t_0, t_f]$ et de classe \mathcal{C}^1 par morceaux. Cette solution sera notée \mathbf{X} .

En intégrant (2.8) entre t_0 et t_f , on obtient l'équation suivante qui caractérise de manière globale la solution \mathbf{X} :

$$\forall t \in [t_0, t_f] \quad \mathbf{X}(t) = \mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{F}(u(s), \mathbf{X}(s)) ds + \sum_{i=1}^m H(t - \tau_i) \boldsymbol{\mu}_i \quad (2.9)$$

où H est la fonction de Heaviside définie sur \mathbb{R} par

$$\begin{cases} H(t) = 1 & \text{si } t \geq 0 \\ H(t) = 0 & \text{si } t < 0 \end{cases} \quad (2.10)$$

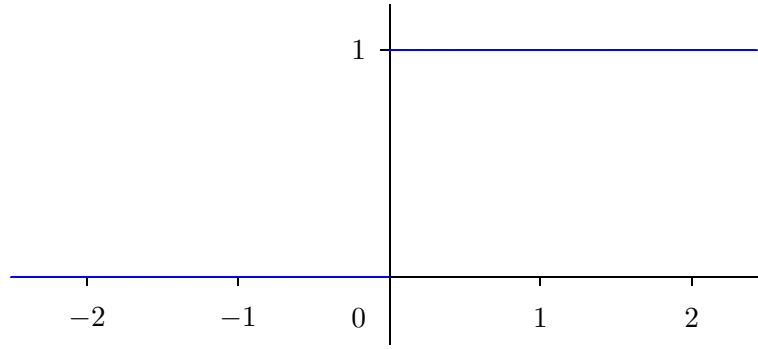
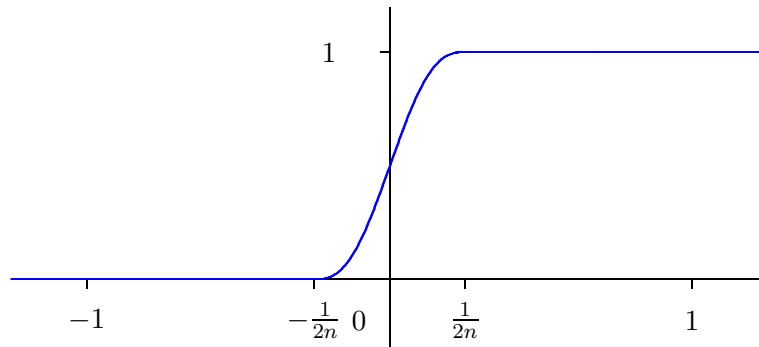
et représentée sur la figure 2.1.

2.1.3 Représentation

Afin de représenter les systèmes hybrides introduits au paragraphe précédent par des systèmes continus, on décide d'approcher la fonction de Heaviside par une suite de fonctions régulières.

Différentes suites de fonctions peuvent être utilisées (voir annexe B). Par exemple, on peut choisir une suite de fonctions polynomiales $(P_n)_{n>0}$ où P_n – représentée sur la figure 2.2 – est définie sur \mathbb{R} par

$$\begin{cases} P_n(t) = 0 & \text{si } t < -1/2n \\ P_n(t) = 6n^5(t + 1/2n)^5 - 15n^4(t + 1/2n)^4 + 10n^3(t + 1/2n)^3 & \text{si } t \in [-1/2n, 1/2n] \\ P_n(t) = 1 & \text{si } t > 1/2n. \end{cases}$$

FIG. 2.1 – Représentation de la fonction H FIG. 2.2 – Représentation de la fonction P_n pour $n = 2$

Toute autre suite de fonctions vérifiant les conditions suivantes convient :

- Les fonctions sont croissantes et de classe \mathcal{C}^2 ;
- La suite converge uniformément vers la fonction de Heaviside sur tout compact de \mathbb{R} ne contenant pas 0 ;
- Les fonctions valent $1/2$ à l'origine.

Ces propriétés, requises dans les démonstrations de convergence du paragraphe 2.1.4 ainsi que dans le chapitre 3, sont en effet suffisantes pour établir les résultats de ce mémoire relatifs aux systèmes hybrides à sauts et commutations commandés.

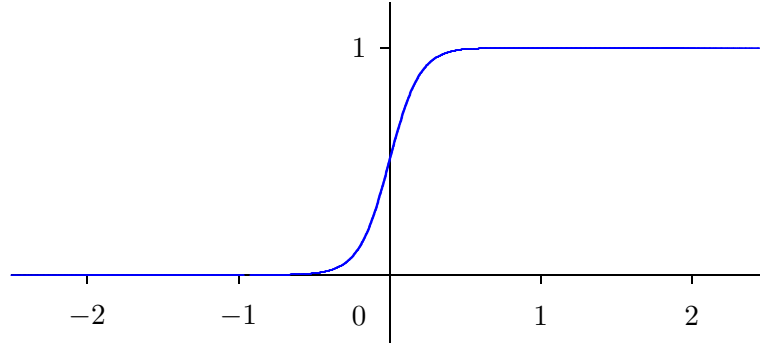
Pour des raisons de simplicité de mise en œuvre numérique, nous choisissons la suite de fonctions $(H_n)_{n>0}$ où H_n – représentée sur la figure 2.3 – est définie sur \mathbb{R} par

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad H_n(t) = \frac{1}{1 + \exp(-nt)} . \quad (2.11)$$

En effet, la fonction H_n est définie de façon globale sur \mathbb{R} et ses dérivées première et seconde s'expriment simplement en fonction de H_n , ce qui allégera les expressions utiles aux mises en œuvre numériques présentées dans les chapitres 4 et 5.

Nous pouvons maintenant introduire la représentation du système hybride (2.1).

En remplaçant H par H_n dans (2.9) et en dérivant cette nouvelle égalité par rapport à t , on

FIG. 2.3 – Représentation de la fonction H_n pour $n = 10$

obtient le système continu suivant :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(u(t), \mathbf{X}(t)) + \sum_{i=1}^m \dot{H}_n(t - \tau_i) \boldsymbol{\mu}_i, & t \in [t_0, t_f] \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 + \sum_{i=1}^m H_n(t_0 - \tau_i) \boldsymbol{\mu}_i. \end{cases} \quad (2.12)$$

Montrons que ce système admet une unique solution globale.

À cet effet, on s'inspire, en inversant le processus, du passage de (2.7) à (2.8), et on décompose (2.12) en deux systèmes :

$$\begin{cases} \dot{\nu}(t) = \sum_{i=1}^m \dot{H}_n(t - \tau_i) (\nu_{i+1} - \nu_i), & t \in [t_0, t_f] \\ \nu(t_0) = \nu_1 + \sum_{i=1}^m H_n(t_0 - \tau_i) (\nu_{i+1} - \nu_i) \end{cases} \quad (2.13)$$

et

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(u(t), \mathbf{x}(t), \nu(t)) + \sum_{i=1}^m \dot{H}_n(t - \tau_i) \boldsymbol{\eta}_i, & t \in [t_0, t_f] \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 + \sum_{i=1}^m H_n(t_0 - \tau_i) \boldsymbol{\eta}_i \end{cases} \quad (2.14)$$

où $(\mathbf{x}, \nu)^\top = \mathbf{X}$, avec $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ et $\nu \in \mathbb{R}$.

Le système (2.13) admet une unique solution globale, notée ν_n , donnée par

$$\forall t \in [t_0, t_f] \quad \nu_n(t) = \nu_1 + \sum_{i=1}^m H_n(t - \tau_i) (\nu_{i+1} - \nu_i).$$

De plus, cette solution est bornée. En effet, on peut écrire

$$\forall t \in [t_0, t_f] \quad |\nu_n(t)| \leq N \quad (2.15)$$

avec

$$N = |\nu_1| + \sum_{i=1}^m |\nu_{i+1} - \nu_i|.$$

Montrons maintenant, à l'aide du théorème 2.1, que le système (2.14) admet également une unique solution globale.

Le second membre de l'équation différentielle est de classe \mathcal{C}^1 et l'hypothèse (a) du théorème est donc vérifiée. Il reste à montrer que le second membre vérifie l'hypothèse (b).

Soit $t \in [t_0, t_f]$, $u \in U$, $\nu \in [-N, N]$ et $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$. On a

$$\left\| \mathbf{f}(u, \mathbf{x}, \nu) + \sum_{i=1}^m \dot{H}_n(t - \tau_i) \boldsymbol{\eta}_i \right\|_d \leq \left\| \mathbf{f}(u, \mathbf{x}, \nu) \right\|_d + \sum_{i=1}^m \left\| \boldsymbol{\eta}_i \right\|_d \dot{H}_n(t - \tau_i).$$

Or $t \in [t_0, t_f]$ et \dot{H}_n est continue. Il existe donc une constante M_n telle que

$$\sum_{i=1}^m \left\| \boldsymbol{\eta}_i \right\|_d \dot{H}_n(t - \tau_i) \leq M_n.$$

D'autre part, d'après (2.5), on a

$$\left\| \mathbf{f}(u, \mathbf{x}, \nu) \right\|_d \leq \sum_{i=1}^{m+1} \left\| \mathbf{f}_i(u, \mathbf{x}) \right\|_d \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m+1} (N + j)$$

où N est donné en (2.15), et grâce à (2.2), on obtient

$$\left\| \mathbf{f}(u, \mathbf{x}, \nu) \right\|_d \leq \left(C_1 \|\mathbf{x}\|_d + C_2 \right) \sum_{i=1}^{m+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m+1} (N + j). \quad (2.16)$$

Il en résulte

$$\left\| \mathbf{f}(u, \mathbf{x}, \nu) + \sum_{i=1}^m \dot{H}_n(t - \tau_i) \boldsymbol{\eta}_i \right\|_d \leq K \|\mathbf{x}\|_d + K_n \quad (2.17)$$

où

$$K = C_1 \sum_{i=1}^{m+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m+1} (N + j)$$

et

$$K_n = M_n + C_2 \sum_{i=1}^{m+1} \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{m+1} (N + j).$$

L'inégalité (2.17) nous permet alors d'appliquer le théorème 2.1. Le système (2.14) admet donc une unique solution globale.

Finalement, le système (2.12) admet une unique solution globale, qui sera notée $\mathbf{X}_n = (\mathbf{x}_n, \nu_n)^\top$. Elle vérifie l'équation suivante :

$$\forall t \in [t_0, t_f] \quad \mathbf{X}_n(t) = \mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{F}(u(s), \mathbf{X}_n(s)) ds + \sum_{i=1}^m H_n(t - \tau_i) \boldsymbol{\mu}_i. \quad (2.18)$$

On choisit d'associer au système hybride (2.1) la suite, indexée par n , des systèmes de type (2.12). Cette suite constitue la représentation du système (2.1). En effet, la relation entre les systèmes (2.12) et (2.1) est établie, dans le paragraphe suivant, à l'aide de résultats de convergence entre l'état du système hybride et les états des systèmes continus associés.

2.1.4 Lien entre les états des systèmes

On s'intéresse aux états \mathbf{X} et \mathbf{X}_n des systèmes (2.8) et (2.12). Des résultats de convergences ponctuelles et globales sont démontrés dans ce paragraphe. Ils permettront, au chapitre 3, dans le cadre de la commande optimale, d'établir des convergences qui concerneront cette fois les solutions de problèmes de commande.

Résultats locaux

Les convergences énoncées dans le théorème qui suit et démontrées dans un cadre plus simple pour la clarté de l'exposé, permettront de ramener l'étude du système hybride (2.1) à celle plus aisée des systèmes continus de type (2.12).

Théorème 2.3. 1. La suite $(\mathbf{X}_n)_{n>0}$ converge uniformément vers \mathbf{X} sur tout intervalle fermé I vérifiant

$$I \subset [t_0, t_f] \setminus \{\tau_i ; i = 1, \dots, m\} ;$$

2. Pour tout i appartenant à $\{1, \dots, m\}$, la suite $(\mathbf{X}_n(\tau_i))_{n>0}$ converge vers $\mathbf{X}(\tau_i) - \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}_i$.

Le théorème ci-dessus montre que l'état $\mathbf{X}_n = (\mathbf{x}_n, \nu_n)^\top$ du système (2.12) est le régularisé de l'état hybride \mathbf{X} du système (2.8). En particulier, comme l'énonce le corollaire suivant, la composante \mathbf{x}_n est le régularisé de l'état \mathbf{x} du système (2.1), et c'est grâce à ce résultat que les systèmes (2.12) peuvent être vus comme la représentation du système (2.1). De même, on pourrait énoncer un résultat de convergence analogue entre la composante ν_n et la fonction constante par morceaux ν .

Corollaire 2.4. 1. La suite $(\mathbf{x}_n)_{n>0}$ converge uniformément vers \mathbf{x} sur tout intervalle fermé I vérifiant

$$I \subset [t_0, t_f] \setminus \{\tau_i ; i = 1, \dots, m\} ;$$

2. Pour tout i appartenant à $\{1, \dots, m\}$, la suite $(\mathbf{x}_n(\tau_i))_{n>0}$ converge vers $\mathbf{x}(\tau_i) - \frac{1}{2}\boldsymbol{\eta}_i$.

La figure 2.4 illustre ce corollaire. L'état d'un système hybride avec un saut et une commutation est représenté ainsi que les états de la représentation pour $n = 5$ et $n = 50$. On voit que plus n est grand et plus l'état continu se rapproche de l'état hybride.

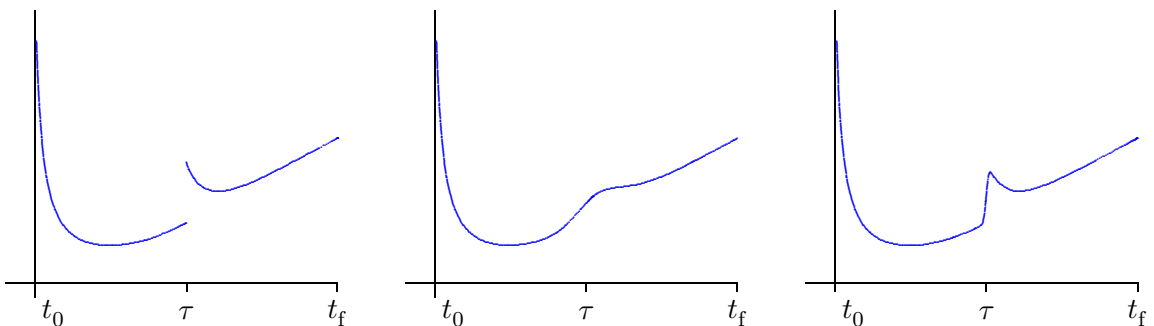


FIG. 2.4 – Représentation de \mathbf{x} , \mathbf{x}_5 et \mathbf{x}_{50} sur $[t_0, t_f]$

Afin de simplifier la rédaction, on reformule et on démontre le théorème 2.3 dans le cas $m = 1$, à la proposition 2.6 ci-dessous. Pour m quelconque, la démonstration est analogue et ne sera pas détaillée ici.

On suppose donc, jusqu'à la fin du paragraphe, qu'il n'y a qu'un seul instant de commutation, noté τ , associé au saut $\boldsymbol{\mu}$. Les équations (2.9) et (2.18) seront utilisées dans le cas $m = 1$, pour démontrer le lemme 2.5 et la proposition 2.6 ci-dessous, avec les notations τ et $\boldsymbol{\mu}$.

Démontrons d'abord le résultat suivant, encore valable pour m quelconque

Lemme 2.5. *Il existe des constantes positives M et M' telles que*

$$(a) \quad \forall t \in [t_0, t_f] \quad \forall n > 0 \quad \|\mathbf{X}_n(t)\|_{d+1} \leq M ;$$

$$(b) \quad \forall t \in [t_0, t_f] \quad \|\mathbf{X}(t)\|_{d+1} \leq M'$$

où $\|\cdot\|_{d+1}$ désigne la norme euclidienne de \mathbb{R}^{d+1} .

Démonstration.

(a) Soit $n > 0$ et $t \in [t_0, t_f]$. Comme $\mathbf{X}_n = (\mathbf{x}_n, \nu_n)^\top$, on a l'inégalité suivante :

$$\|\mathbf{X}_n\|_{d+1} \leq \|\mathbf{x}_n\|_d + |\nu_n| .$$

Il suffit donc de majorer les termes $\|\mathbf{x}_n\|_d$ et $|\nu_n|$.

La solution $\mathbf{X}_n = (\mathbf{x}_n, \nu_n)^\top$ vérifie (2.18) où $\mathbf{F} = (\mathbf{f}, 0)^\top$ et où $\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{\eta}, \nu_2 - \nu_1)^\top$. On a donc, de la même façon qu'en (2.15),

$$|\nu_n(t)| \leq N \tag{2.19}$$

où $N = |\nu_1| + |\nu_2 - \nu_1|$.

De plus, comme en (2.16), on obtient

$$\|\mathbf{f}(u(s), \mathbf{x}_n(s), \nu_n(s))\|_d \leq (3 + 2N)C_1 \|\mathbf{x}_n(s)\|_d + (3 + 2N)C_2$$

pour tout s appartenant à $[t_0, t_f]$.

D'autre part, on peut écrire

$$\|\mathbf{x}_n(t)\|_d \leq \|\mathbf{x}_0\|_d + H_n(t - \tau) \|\boldsymbol{\eta}\|_d + \int_{t_0}^t \|\mathbf{f}(u(s), \mathbf{x}_n(s), \nu_n(s))\|_d ds ,$$

ce qui entraîne

$$\|\mathbf{x}_n(t)\|_d \leq \|\mathbf{x}_0\|_d + \|\boldsymbol{\eta}\|_d + (3 + 2N)C_1 \int_{t_0}^t \|\mathbf{x}_n(s)\|_d ds + (3 + 2N)C_2(t_f - t_0) .$$

Puisque \mathbf{x}_n est une fonction continue, le lemme de Gronwall (voir annexe A) permet d'obtenir

$$\|\mathbf{x}_n(t)\|_d \leq (\|\mathbf{x}_0\|_d + \|\boldsymbol{\eta}\|_d + (3 + 2N)C_2(t_f - t_0)) \exp((3 + 2N)C_1(t_f - t_0)) . \tag{2.20}$$

Les inégalités (2.19) et (2.20) montrent que ν_n et \mathbf{x}_n sont bornées. Le résultat s'en déduit.

(b) Comme $\mathbf{X} = (\mathbf{x}, \nu)^\top$, il suffit de montrer que les fonctions \mathbf{x} et ν sont bornées sur $[t_0, t_f]$.

Soit $t \in [t_0, t_f]$.

D'après (2.6), on peut écrire

$$|\nu(t)| \leq \max(|\nu_1|, |\nu_2|) . \tag{2.21}$$

Supposons $t < \tau$. Par définition de \mathbf{x} , on a

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}_1(u(s), \mathbf{x}(s)) ds$$

et, comme \mathbf{f}_1 vérifie (2.2), on obtient

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t)\|_d &\leq \|\mathbf{x}_0\|_d + \int_{t_0}^t C_1 \|\mathbf{x}(s)\|_d + C_2 ds \\ &\leq \|\mathbf{x}_0\|_d + C_2(t_f - t_0) + C_1 \int_{t_0}^t \|\mathbf{x}(s)\|_d ds . \end{aligned}$$

La fonction \mathbf{x} est continue sur $[t_0, \tau[$ donc le lemme de Gronwall permet d'écrire

$$\|\mathbf{x}(t)\|_d \leq K_1$$

où $K_1 = (\|\mathbf{x}_0\|_d + C_2(t_f - t_0)) \exp(C_1(t_f - t_0))$.

Supposons $t \geq \tau$. Par définition de \mathbf{x} , on a

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(\tau^-) + \boldsymbol{\eta} + \int_{\tau}^t \mathbf{f}_2(u(s), \mathbf{x}(s)) ds$$

et, grâce à (2.2), on obtient

$$\|\mathbf{x}(t)\|_d \leq K_1 + \|\boldsymbol{\eta}\|_d + C_2(t_f - \tau) + C_1 \int_{\tau}^t \|\mathbf{x}(s)\|_d ds .$$

Comme \mathbf{x} est continue sur $[\tau, t_f]$, le lemme de Gronwall entraîne

$$\|\mathbf{x}(t)\|_d \leq K_2$$

où $K_2 = (K_1 + \|\boldsymbol{\eta}\|_d + C_2(t_f - \tau)) \exp(C_1(t_f - \tau))$.

Finalement, on a

$$\forall t \in [t_0, t_f] \quad \|\mathbf{x}(t)\|_d \leq \max(K_1, K_2) . \quad (2.22)$$

Le résultat se déduit de (2.21) et (2.22). \square

Il reste à démontrer les convergences suivantes qui correspondent à celles énoncées au théorème 2.3 dans le cas d'un seul instant de commutation.

Proposition 2.6. 1. Pour tout $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon \leq \tau - t_0$, la suite $(\mathbf{X}_n)_{n>0}$ converge uniformément vers \mathbf{X} sur $[t_0, \tau - \varepsilon]$;

2. La suite $(\mathbf{X}_n(\tau))_{n>0}$ converge vers $\mathbf{X}(\tau) - \frac{1}{2}\boldsymbol{\mu}$;

3. Pour tout $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon \leq t_f - \tau$, la suite $(\mathbf{X}_n)_{n>0}$ converge uniformément vers \mathbf{X} sur $[\tau + \varepsilon, t_f]$.

Démonstration.

1. Lorsque $\tau = t_0$, ce point n'est pas à considérer ; on suppose donc $\tau > t_0$. Soit alors $\varepsilon > 0$, tel que $\varepsilon \leq \tau - t_0$, $n > 0$ et $t \in [t_0, \tau - \varepsilon]$.

D'après (2.9) et (2.18), on a

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X}_n(t) - \mathbf{X}(t)\|_{d+1} &\leq \int_{t_0}^t \|\mathbf{F}(u(s), \mathbf{X}_n(s)) - \mathbf{F}(u(s), \mathbf{X}(s))\|_{d+1} ds \\ &\quad + H_n(t - \tau) \|\boldsymbol{\mu}\|_{d+1} . \end{aligned} \quad (2.23)$$

Or, grâce au lemme 2.5 et comme \mathbf{F} est de classe \mathcal{C}^1 , l'inégalité des accroissements finis permet d'écrire

$$\forall s \in [t_0, t_f] \quad \|\mathbf{F}(u(s), \mathbf{X}_n(s)) - \mathbf{F}(u(s), \mathbf{X}(s))\|_{d+1} \leq C \|\mathbf{X}_n(s) - \mathbf{X}(s)\|_{d+1} \quad (2.24)$$

où C est une constante positive.

L'inégalité (2.23) entraîne alors

$$\|\mathbf{X}_n(t) - \mathbf{X}(t)\|_{d+1} \leq C \int_{t_0}^t \|\mathbf{X}_n(s) - \mathbf{X}(s)\|_{d+1} ds + H_n(-\varepsilon) \|\boldsymbol{\mu}\|_{d+1}.$$

Comme $t \in [t_0, \tau - \varepsilon]$, $\mathbf{X}_n - \mathbf{X}$ est continue et le lemme de Gronwall (voir annexe A) implique

$$\|\mathbf{X}_n(t) - \mathbf{X}(t)\|_{d+1} \leq H_n(-\varepsilon) \|\boldsymbol{\mu}\|_{d+1} \exp(C(t_f - t_0)).$$

En remarquant que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n(-\varepsilon) \|\boldsymbol{\mu}\|_{d+1} = 0,$$

on obtient la convergence uniforme indiquée.

2. Soit $n > 0$. Les équations (2.9) et (2.18) entraînent respectivement

$$\mathbf{X}(\tau) = \mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^{\tau} \mathbf{F}(u(s), \mathbf{X}(s)) ds + \boldsymbol{\mu}$$

et

$$\mathbf{X}_n(\tau) = \mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^{\tau} \mathbf{F}(u(s), \mathbf{X}_n(s)) ds + \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}.$$

Il vient

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X}_n(\tau) - \mathbf{X}(\tau) + \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}\|_{d+1} &\leq \int_{t_0}^{\tau} \|\mathbf{F}(u(s), \mathbf{X}_n(s)) - \mathbf{F}(u(s), \mathbf{X}(s))\|_{d+1} ds \\ &\leq C \int_{t_0}^{\tau} \|\mathbf{X}_n(s) - \mathbf{X}(s)\|_{d+1} ds. \end{aligned}$$

Le point 1 implique

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mathbf{X}_n - \mathbf{X}\|_{d+1} \chi_{[t_0, \tau]} = 0 \quad \text{p.p.}$$

où $\chi_{[t_0, \tau]}$ désigne la fonction indicatrice de $[t_0, \tau]$ et où p.p. signifie presque partout, c'est-à-dire en tout point de $[t_0, \tau]$ sauf aux points d'un ensemble de mesure nulle. En l'occurrence, l'ensemble exceptionnel est le singleton $\{\tau\}$.

D'après le lemme 2.5, on a

$$\forall s \in \mathbb{R} \quad \|\mathbf{X}_n(s) - \mathbf{X}(s)\|_{d+1} \chi_{[t_0, \tau]}(s) \leq (M + M') \chi_{[t_0, \tau]}(s).$$

Le théorème de convergence dominée de Lebesgue (voir annexe A) entraîne alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^{\tau} \|\mathbf{X}_n(s) - \mathbf{X}(s)\|_{d+1} ds = 0$$

et le résultat annoncé en découle.

3. Si $\tau = t_f$, ce point n'est pas considéré. On suppose donc $\tau < t_f$. Soit alors $\varepsilon > 0$, tel que $\varepsilon \leq t_f - \tau$, et soit $\alpha > 0$.

Grâce au lemme 2.5, on choisit $\varepsilon' > 0$ tel que

$$\forall n > 0 \quad \int_{\tau}^{\tau+\varepsilon'} \|\mathbf{X}_n(s) - \mathbf{X}(s)\|_{d+1} ds < \alpha \quad (2.25)$$

et

$$\varepsilon' \leq \varepsilon .$$

Soit $n > 0$ et $t \in [\tau + \varepsilon', t_f]$.

Les équations (2.9) et (2.18) donnent

$$\mathbf{X}(t) = \mathbf{X}(\tau) + \int_{\tau}^{\tau+\varepsilon'} \mathbf{F}(u(s), \mathbf{X}(s)) ds + \int_{\tau+\varepsilon'}^t \mathbf{F}(u(s), \mathbf{X}(s)) ds \quad (2.26)$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_n(t) = \mathbf{X}_n(\tau) + \int_{\tau}^{\tau+\varepsilon'} \mathbf{F}(u(s), \mathbf{X}_n(s)) ds + \int_{\tau+\varepsilon'}^t \mathbf{F}(u(s), \mathbf{X}_n(s)) ds \\ + H_n(t - \tau) \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu} . \end{aligned} \quad (2.27)$$

On déduit de (2.25), (2.26) et (2.27)

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X}_n(t) - \mathbf{X}(t)\|_{d+1} \leq \|\mathbf{X}_n(\tau) - \mathbf{X}(\tau) + H_n(t - \tau) \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}\|_{d+1} + C\alpha \\ + C \int_{\tau+\varepsilon'}^t \|\mathbf{X}_n(s) - \mathbf{X}(s)\|_{d+1} ds . \end{aligned}$$

D'après (2.11), H_n est croissante et par suite

$$H_n(\varepsilon') \leq H_n(t - \tau) \leq 1 ,$$

ce qui entraîne la convergence uniforme de $H_n(\cdot - \tau)$ vers 1 sur $[\tau + \varepsilon', t_f]$ quand n tend vers l'infini.

Il résulte alors du point 2 que $\|\mathbf{X}_n(\tau) - \mathbf{X}(\tau) + H_n(\cdot - \tau) \boldsymbol{\mu} - \frac{1}{2} \boldsymbol{\mu}\|_{d+1}$ converge vers 0 uniformément sur $[\tau + \varepsilon', t_f]$ quand n tend vers l'infini.

Il existe donc $N > 0$ tel que

$$\begin{aligned} \forall n \geq N \quad \forall t \in [\tau + \varepsilon', t_f] \quad \|\mathbf{X}_n(t) - \mathbf{X}(t)\|_{d+1} \leq \alpha + C\alpha \\ + C \int_{\tau+\varepsilon'}^t \|\mathbf{X}_n(s) - \mathbf{X}(s)\|_{d+1} ds . \end{aligned}$$

D'après le lemme de Gronwall, on obtient alors

$$\forall n \geq N \quad \forall t \in [\tau + \varepsilon', t_f] \quad \|\mathbf{X}_n(t) - \mathbf{X}(t)\|_{d+1} \leq \alpha (1 + C) \exp(C(t_f - \tau)) . \quad (2.28)$$

En particulier, (2.28) est vrai pour tout t appartenant à $[\tau + \varepsilon, t_f]$.

Comme α peut être choisi de façon arbitraire, on conclut que \mathbf{X}_n converge vers \mathbf{X} uniformément sur $[\tau + \varepsilon, t_f]$ quand n tend vers l'infini. \square

Remarque 2.7. Lorsqu'il y a plusieurs instants de commutation ($m > 1$), la démonstration de la convergence sur un intervalle du type $[\tau_i + \varepsilon, \tau_{i+1} - \varepsilon]$, où $i \in \{1, \dots, m-1\}$, se fait en combinant les démonstrations des points 1 et 3 de la proposition 2.6.

Les convergences établies au théorème 2.3 donnent des résultats précis mais obligent à éviter les instants de commutation pour avoir la convergence des états des systèmes continus vers l'état du système hybride. Il semble donc intéressant d'établir des résultats globaux.

Résultats globaux

Le résultat de convergence suivant prend en compte de manière globale les instants de commutation. Il sera utilisé dans le chapitre 3 pour l'étude de problèmes de poursuite de trajectoire.

Théorème 2.8. *La suite $(\mathbf{X}_n)_{n>0}$ converge vers \mathbf{X} dans l'ensemble des fonctions de puissance p -ième intégrable $L^p(t_0, t_f)$, $p \geq 1$.*

Démonstration. Soit $n > 0$ et $p \geq 1$.

Le théorème 2.3 entraîne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mathbf{X}_n - \mathbf{X}\|_{d+1}^p \chi_{[t_0, t_f]} = 0 \quad \text{p.p.}$$

D'après le lemme 2.5, avec m quelconque, on a

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad \|\mathbf{X}_n(t) - \mathbf{X}(t)\|_{d+1}^p \chi_{[t_0, t_f]}(t) \leq (M + M')^p \chi_{[t_0, t_f]}(t).$$

Du théorème de convergence dominée de Lebesgue (voir annexe A) résulte alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^{t_f} \|\mathbf{X}_n(t) - \mathbf{X}(t)\|_{d+1}^p dt = 0.$$

□

Corollaire 2.9. *La suite $(\mathbf{x}_n)_{n>0}$ converge vers \mathbf{x} dans l'ensemble des fonctions de puissance p -ième intégrable $L^p(t_0, t_f)$, $p \geq 1$.*

Nous énonçons ci-dessous un résultat qui permet d'obtenir une écriture globale du système (2.1).

On considère les fonctions \mathbf{f} et ν définies en (2.5) et (2.7) respectivement.

Pour toute fonction \mathbf{y} définie sur $[t_0, t_f]$ et à valeurs dans \mathbb{R}^d , on pose

$$E(\mathbf{y}) = \dot{\mathbf{y}} - \mathbf{f}(u, \mathbf{y}, \nu) - \sum_{i=1}^m \delta(\cdot - \tau_i) \boldsymbol{\eta}_i$$

où δ représente la distribution de Dirac.

Théorème 2.10. *La solution \mathbf{x} du système (2.1) vérifie $E(\mathbf{x}) = 0$ dans l'espace des distributions $\mathcal{D}'(t_0, t_f)$.*

Démonstration. Soit $(\mathbf{x}_n, \nu_n)^\top$ solution du système (2.12). On pose

$$E_n(\mathbf{x}_n) = \dot{\mathbf{x}}_n - \mathbf{f}(u, \mathbf{x}_n, \nu_n) - \sum_{i=1}^m \dot{H}_n(\cdot - \tau_i) \boldsymbol{\eta}_i.$$

On va montrer que $(E_n(\mathbf{x}_n))_{n>0}$ converge vers $E(\mathbf{x})$ au sens des distributions. Le résultat s'en déduira puisque

$$E_n(\mathbf{x}_n) = 0$$

pour tout $n \geq 1$.

Soit $\phi \in C_0^\infty(t_0, t_f)$, où $C_0^\infty(t_0, t_f)$ désigne l'espace des fonctions de classe C^∞ à support compact inclus dans $[t_0, t_f]$. On a alors

$$\langle E_n(\mathbf{x}_n), \phi \rangle = \langle \dot{\mathbf{x}}_n, \phi \rangle - \langle \mathbf{f}(u, \mathbf{x}_n, \nu_n), \phi \rangle - \sum_{i=1}^m \langle \dot{H}_n(\cdot - \tau_i) \boldsymbol{\eta}_i, \phi \rangle ,$$

soit encore

$$\langle E_n(\mathbf{x}_n), \phi \rangle = - \langle \mathbf{x}_n, \dot{\phi} \rangle - \langle \mathbf{f}(u, \mathbf{x}_n, \nu_n), \phi \rangle + \sum_{i=1}^m \langle H_n(\cdot - \tau_i) \boldsymbol{\eta}_i, \dot{\phi} \rangle . \quad (2.29)$$

D'après le corollaire 2.9, \mathbf{x}_n converge vers \mathbf{x} dans $\mathcal{D}'(t_0, t_f)$ car $L^p(t_0, t_f)$, $p \geq 1$, s'injecte continûment dans $\mathcal{D}'(t_0, t_f)$.

Il s'ensuit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle \mathbf{x}_n, \dot{\phi} \rangle = \langle \mathbf{x}, \dot{\phi} \rangle . \quad (2.30)$$

D'autre part, comme $\mathbf{F} = (\mathbf{f}, 0)^\top$, l'inégalité (2.24) entraîne

$$\begin{aligned} & | \langle \mathbf{f}(u, \mathbf{x}_n, \nu_n), \phi \rangle - \langle \mathbf{f}(u, \mathbf{x}, \nu), \phi \rangle | \\ & \leq \int_{t_0}^{t_f} \| \mathbf{f}(u(t), \mathbf{x}_n(t), \nu_n) - \mathbf{f}(u(t), \mathbf{x}(t), \nu) \|_d \| \phi(t) \|_d dt \\ & \leq C \int_{t_0}^{t_f} \| \mathbf{X}_n(t) - \mathbf{X}(t) \|_{d+1} \| \phi(t) \|_d dt \\ & \leq C \| \phi \|_\infty \int_{t_0}^{t_f} \| \mathbf{X}_n(t) - \mathbf{X}(t) \|_{d+1} dt \end{aligned}$$

où l'on a noté $\mathbf{X}_n = (\mathbf{x}_n, \nu_n)^\top$ et $\mathbf{X} = (\mathbf{x}, \nu)^\top$.

Or \mathbf{X}_n converge vers \mathbf{X} dans $L^1(t_0, t_f)$ d'après le théorème 2.8, et il en résulte

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle \mathbf{f}(u, \mathbf{x}_n, \nu_n), \phi \rangle = \langle \mathbf{f}(u, \mathbf{x}, \nu), \phi \rangle . \quad (2.31)$$

Soit $i \in \{1, \dots, m\}$. On peut écrire

$$\begin{aligned} | \langle H_n(\cdot - \tau_i) - H(\cdot - \tau_i), \dot{\phi} \rangle | & \leq \int_{t_0}^{t_f} | H_n(t - \tau_i) - H(t - \tau_i) | \| \dot{\phi}(t) \|_d dt \\ & \leq \| \dot{\phi} \|_\infty \int_{t_0}^{t_f} | H_n(t - \tau_i) - H(t - \tau_i) | dt . \end{aligned}$$

Par définition des fonctions H_n et H , on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} | H_n(\cdot - \tau_i) - H(\cdot - \tau_i) | \chi_{[t_0, t_f]} = 0 \quad \text{p.p.}$$

et de plus

$$\forall t \in \mathbb{R} \quad | H_n(t - \tau_i) - H(t - \tau_i) | \chi_{[t_0, t_f]}(t) \leq 2 \chi_{[t_0, t_f]}(t) .$$

D'après le théorème de convergence dominée de Lebesgue (voir annexe A), on obtient alors

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{t_0}^{t_f} |H_n(t - \tau_i) - H(t - \tau_i)| dt = 0 ,$$

d'où

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle H_n(\cdot - \tau_i), \dot{\phi} \rangle = \langle H(\cdot - \tau_i), \dot{\phi} \rangle . \tag{2.32}$$

De (2.29), on déduit, grâce aux convergences (2.30), (2.31) et (2.32) :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle E_n(\mathbf{x}_n), \phi \rangle = - \langle \mathbf{x}, \dot{\phi} \rangle - \langle \mathbf{f}(u, \mathbf{x}, \nu), \phi \rangle + \sum_{i=1}^m \langle H(\cdot - \tau_i) \boldsymbol{\eta}_i, \dot{\phi} \rangle ,$$

soit encore

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \langle E_n(\mathbf{x}_n), \phi \rangle &= \langle \dot{\mathbf{x}}, \phi \rangle - \langle \mathbf{f}(u, \mathbf{x}, \nu), \phi \rangle - \sum_{i=1}^m \langle \dot{H}(\cdot - \tau_i) \boldsymbol{\eta}_i, \phi \rangle \\ &= \langle E(\mathbf{x}, \phi) \end{aligned}$$

puisque

$$\dot{H} = \delta .$$

□

2.2 Systèmes hybrides à commutation autonome s'écrit maintenant

On s'intéresse maintenant à une classe de systèmes (2.20) s'écrit maintenant (2.20) s'écrit maintenant

Enfin, pour assurer l'unicité de la commutation, on suppose \mathbf{f}_1 et \mathbf{f}_2 à valeurs strictement positives.

L'inégalité $\mathbf{x}(t) \leq \mathbf{a}$ signifie

$$\forall i \in \{1, \dots, d\} \quad x_i(t) \leq a_i .$$

Pour la simplicité de l'exposé et sans perte de généralité, on suppose que l'état initial \mathbf{x}_0 , fixé dans \mathbb{R}^d , est tel que $\mathbf{x}_0 \leq \mathbf{a}$.

Les fonctions \mathbf{f}_1 et \mathbf{f}_2 vérifient les conditions (a) et (b) du théorème 2.1. Alors, si le système (2.33) ne commute pas, on a l'existence et l'unicité d'une solution globale de classe \mathcal{C}^1 , et s'il y a une commutation à l'instant τ , on a l'existence et l'unicité d'une solution globale qui est de classe \mathcal{C}^1 sur chacun des intervalles $[t_0, \tau[$ et $[\tau, t_f]$. Dans la suite, on notera \mathbf{x} la solution de (2.33).

2.2.2 Représentation

Comme pour les systèmes hybrides à sauts et commutations commandés, nous allons utiliser une approximation continue de la fonction de Heaviside pour introduire une représentation.

Le système hybride (2.33) peut être réécrit de la façon suivante

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \prod_{i=1}^d H(a_i - x_i(t)) \mathbf{f}_1(u(t), \mathbf{x}(t)) \\ \quad + \left(1 - \prod_{i=1}^d H(a_i - x_i(t))\right) \mathbf{f}_2(u(t), \mathbf{x}(t)), \quad t \in [t_0, t_f] \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{array} \right. \quad (2.35)$$

où H représente la fonction de Heaviside définie par (2.10).

On choisit d'approcher H par la suite de fonctions $(\tilde{H}_n)_{n \geq 1}$ où la fonction \tilde{H}_n est définie sur \mathbb{R} par

$$\left\{ \begin{array}{l} \tilde{H}_n(t) = 0 \quad \text{si } t < -1/n \\ \tilde{H}_n(t) = \frac{1}{2}(1 + \cos(n\pi t)) \quad \text{si } t \in [-1/n, 0] \\ \tilde{H}_n(t) = 1 \quad \text{si } t > 0 \end{array} \right.$$

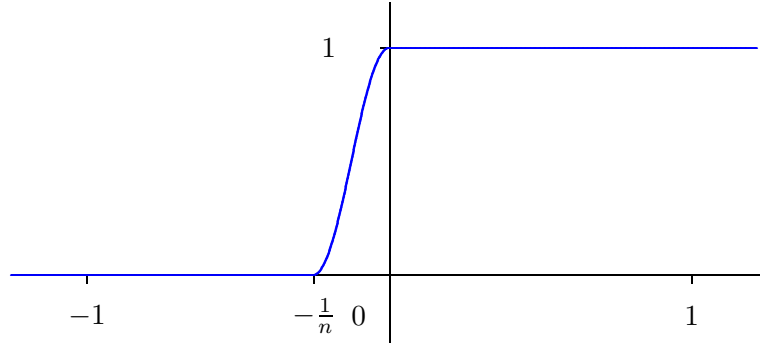
et représentée sur la figure 2.5.

On trouvera, dans l'annexe B, une autre définition possible pour \tilde{H}_n .

L'utilisation des fonctions H_n , introduites en (2.11), n'est pas possible ici car les démonstrations du paragraphe suivant nécessitent l'annulation de $1 - \tilde{H}_n$ sur l'intervalle $[0, +\infty[$. Inversement, les fonctions \tilde{H}_n , n'étant pas de classe \mathcal{C}^2 et ne vérifiant pas $\tilde{H}_n(0) = \frac{1}{2}$, ne peuvent pas être utilisées pour la représentation des systèmes hybrides à sauts et commutations commandés.

En remplaçant H par \tilde{H}_n dans le système (2.35), on obtient le système continu sans commutation suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \prod_{i=1}^d \tilde{H}_n(a_i - x_i(t)) \mathbf{f}_1(u(t), \mathbf{x}(t)) \\ \quad + \left(1 - \prod_{i=1}^d \tilde{H}_n(a_i - x_i(t))\right) \mathbf{f}_2(u(t), \mathbf{x}(t)), \quad t \in [t_0, t_f] \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 . \end{array} \right. \quad (2.36)$$

FIG. 2.5 – Représentation de \tilde{H}_n pour $n = 4$

Grâce au théorème 2.1, on peut affirmer que ce système admet une unique solution globale de classe \mathcal{C}^1 sur $[t_0, t_f]$.

En effet, le second membre de (2.36) est de classe \mathcal{C}^1 et, à l'aide de (2.34), on peut écrire

$$\forall (t, \mathbf{x}) \in I \times \mathbb{R}^d$$

$$\left\| \prod_{i=1}^d \tilde{H}_n(a_i - x_i(t)) \mathbf{f}_1(u(t), \mathbf{x}(t)) + \left(1 - \prod_{i=1}^d \tilde{H}_n(a_i - x_i(t))\right) \mathbf{f}_2(u(t), \mathbf{x}(t)) \right\|_d \leq 2C_1 \|\mathbf{x}\|_d + 2C_2,$$

ce qui signifie que les hypothèses du théorème 2.1 sont vérifiées.

La suite, qui dépend de n , formée par les systèmes (2.36), est la représentation du système hybride (2.33). La convergence entre l'état du système (2.36), noté \mathbf{x}_n , et l'état \mathbf{x} du système hybride, est détaillée dans le paragraphe suivant.

2.2.3 Lien entre les états des systèmes

Avant d'établir le principal résultat de ce paragraphe, nous avons besoin de démontrer le lemme énoncé ci-dessous qui est à rapprocher du lemme 2.5 du paragraphe précédent.

Lemme 2.11. *Il existe des constantes positives M et M' telles que*

$$(a) \quad \forall t \in [t_0, t_f] \quad \forall n > 0 \quad \|\mathbf{x}_n(t)\|_d \leq M;$$

$$(b) \quad \forall t \in [t_0, t_f] \quad \|\mathbf{x}(t)\|_d \leq M'.$$

Démonstration.

(a) Soit $n > 0$ et $t \in [t_0, t_f]$.

On a

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_n(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \prod_{i=1}^d \tilde{H}_n(a_i - x_n^{(i)}(s)) \mathbf{f}_1(u(s), \mathbf{x}_n(s)) ds \\ + \int_{t_0}^t \left(1 - \prod_{i=1}^d \tilde{H}_n(a_i - x_n^{(i)}(s))\right) \mathbf{f}_2(u(s), \mathbf{x}_n(s)) ds, \end{aligned}$$

d'où

$$\|\mathbf{x}_n(t)\|_d \leq \|\mathbf{x}_0\|_d + \int_{t_0}^t \|\mathbf{f}_1(u(s), \mathbf{x}_n(s))\|_d ds + \int_{t_0}^t \|\mathbf{f}_2(u(s), \mathbf{x}_n(s))\|_d ds.$$

De plus, grâce à (2.34), on peut écrire

$$\|\mathbf{x}_n(t)\|_d \leq \|\mathbf{x}_0\|_d + \int_{t_0}^t \left(2C_1 \|\mathbf{x}_n(s)\|_d + 2C_2 \right) ds .$$

On obtient donc

$$\|\mathbf{x}_n(t)\|_d \leq \|\mathbf{x}_0\|_d + 2C_2(t_f - t_0) + 2C_1 \int_{t_0}^t \|\mathbf{x}_n(s)\|_d ds$$

et, finalement, le lemme de Gronwall (voir annexe A) permet d'obtenir

$$\|\mathbf{x}_n(t)\|_d \leq \left(\|\mathbf{x}_0\|_d + 2C_2(t_f - t_0) \right) \exp \left(2C_1(t_f - t_0) \right) .$$

(b) Soit $\tau = \inf\{t \geq 0; \prod_{i=1}^d (a_i - x_i(t)) = 0\}$ et $t \in [t_0, \min(\tau, t_f)]$.

On a, par définition de \mathbf{x}

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{f}_1(u(s), \mathbf{x}(s)) ds$$

et, grâce à (2.34), on obtient

$$\|\mathbf{x}(t)\|_d \leq \|\mathbf{x}_0\|_d + C_2(t_f - t_0) + C_1 \int_{t_0}^t \|\mathbf{x}(s)\|_d ds .$$

Comme \mathbf{x} est continue sur $[t_0, t_f]$, le lemme de Gronwall permet d'écrire

$$\|\mathbf{x}(t)\|_d \leq K_1$$

où $K_1 = (\|\mathbf{x}_0\|_d + C_2(t_f - t_0)) \exp(C_1(t_f - t_0))$.

Si $\tau \geq t_f$, le résultat est démontré.

Supposons $\tau < t_f$ et soit $t \in [\tau, t_f]$.

On a

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(\tau) + \int_{\tau}^t \mathbf{f}_2(u(s), \mathbf{x}(s)) ds$$

donc (2.34) entraîne

$$\|\mathbf{x}(t)\|_d \leq K_1 + C_2(t_f - t_0) + C_1 \int_{\tau}^t \|\mathbf{x}(s)\|_d ds$$

et le lemme de Gronwall implique

$$\|\mathbf{x}(t)\|_d \leq K_2$$

où $K_2 = (K_1 + C_2(t_f - t_0)) \exp(C_1(t_f - t_0))$.

Finalement, on peut écrire

$$\forall t \in [t_0, t_f] \quad \|\mathbf{x}(t)\|_d \leq \max(K_1, K_2) .$$

□

Le théorème suivant établit le lien entre le système hybride (2.33) et sa représentation (2.36).

Théorème 2.12. *La suite $(\mathbf{x}_n)_{n>0}$ converge uniformément vers \mathbf{x} sur $[t_0, t_f]$.*

Démonstration. Soit $n > 0$. Par définition de \tilde{H}_n , on a

$$\forall i \in \{1, \dots, d\} \quad \tilde{H}_n(\mathbf{a}_i - \mathbf{x}_i) = 1 \Leftrightarrow x_i \leq a_i .$$

Il s'ensuit, en remarquant que $\mathbf{x}_0 \leq \mathbf{a}$, que le système continu évolue initialement comme le système hybride jusqu'à l'instant τ où

$$\tau = \inf\{t \geq t_0; \prod_{i=1}^d (\mathbf{a}_i - \mathbf{x}_i(t)) = 0\} .$$

Si $\tau \geq t_f$ alors $\mathbf{x}_n \equiv \mathbf{x}$ sur $[t_0, t_f]$ et le théorème est démontré. Supposons maintenant $\tau < t_f$. On a

$$\forall t \in [t_0, \tau] \quad \mathbf{x}_n(t) = \mathbf{x}(t) . \quad (2.37)$$

Il reste à montrer la convergence de \mathbf{x}_n vers \mathbf{x} sur $[\tau, t_f]$.

Soit $t \in [\tau, t_f]$. On a

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{x}(\tau) + \int_{\tau}^t \mathbf{f}_2(u(s), \mathbf{x}(s)) ds$$

et

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_n(t) = \mathbf{x}(\tau) + \int_{\tau}^t \prod_{i=1}^d \tilde{H}_n(\mathbf{a}_i - \mathbf{x}_n^{(i)}(s)) \mathbf{f}_1(u(s), \mathbf{x}_n(s)) ds \\ + \int_{\tau}^t \left(1 - \prod_{i=1}^d \tilde{H}_n(\mathbf{a}_i - \mathbf{x}_n^{(i)}(s))\right) \mathbf{f}_2(u(s), \mathbf{x}_n(s)) ds , \end{aligned}$$

d'où

$$\begin{aligned} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_n(t)\|_d \leq \int_{\tau}^t \|\mathbf{f}_2(u(s), \mathbf{x}(s)) - \mathbf{f}_2(u(s), \mathbf{x}_n(s))\|_d ds \\ + \int_{\tau}^t \prod_{i=1}^d \tilde{H}_n(\mathbf{a}_i - \mathbf{x}_n^{(i)}(s)) \|\mathbf{f}_1(u(s), \mathbf{x}_n(s))\|_d ds \\ + \int_{\tau}^t \prod_{i=1}^d \tilde{H}_n(\mathbf{a}_i - \mathbf{x}_n^{(i)}(s)) \|\mathbf{f}_2(u(s), \mathbf{x}_n(s))\|_d ds . \quad (2.38) \end{aligned}$$

Or, grâce au lemme 2.11 et comme \mathbf{f}_2 est de classe \mathcal{C}^1 , l'inégalité des accroissements finis donne

$$\forall s \in [t_0, t_f] \quad \|\mathbf{f}_2(u(s), \mathbf{x}(s)) - \mathbf{f}_2(u(s), \mathbf{x}_n(s))\|_n \leq C \|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_n(s)\|_d$$

où C est une constante positive.

On déduit alors de (2.38)

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_n(t)\|_d \leq C \int_{\tau}^t \|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_n(s)\|_d ds + (M_1 + M_2) \int_{\tau}^t \prod_{i=1}^d \tilde{H}_n(\mathbf{a}_i - \mathbf{x}_n^{(i)}(s)) ds \quad (2.39)$$

où on a posé

$$M_i = \sup_{U \times [-M, M]^d} \|\mathbf{f}_i\|, \quad i = 1, 2,$$

avec M donné par le lemme 2.11.

L'équation différentielle vérifiée par \mathbf{x}_n permet d'écrire

$$\forall s \in [\tau, t] \quad \dot{\mathbf{x}}_n(s) \geq \prod_{i=1}^d \tilde{H}_n(\mathbf{a}_i - \mathbf{x}_n^{(i)}(s)) \mathbf{m}_1 + \left(1 - \prod_{i=1}^d \tilde{H}_n(\mathbf{a}_i - \mathbf{x}_n^{(i)}(s))\right) \mathbf{m}_2 \quad (2.40)$$

$$(2.41)$$

avec

$$\mathbf{m}_i = \left(\inf_{U \times [-M, M]^d} f_i^{(k)} \right)_{1 \leq k \leq d}, \quad i = 1, 2.$$

Comme \mathbf{f}_1 et \mathbf{f}_2 sont continues, elles atteignent leur minimum sur tout ensemble fermé borné, et comme elles sont strictement positives, on déduit de (2.40)

$$\forall s \in [\tau, t] \quad \dot{\mathbf{x}}_n(s) \geq \tilde{\mathbf{m}} > 0$$

où

$$\tilde{\mathbf{m}} = \left(\min(m_1^{(k)}, m_2^{(k)}) \right)_{1 \leq k \leq d}.$$

Par définition de τ et d'après (2.37), on a j tel que $\mathbf{x}_n^{(j)}(\tau) = \mathbf{a}_j$. On peut alors écrire

$$\int_{\tau}^t \tilde{H}_n(\mathbf{a}_j - \mathbf{x}_n^{(j)}(s)) ds \leq \frac{1}{\tilde{m}_j} \int_{\tau}^t \tilde{H}_n(\mathbf{a}_j - \mathbf{x}_n^{(j)}(s)) \dot{\mathbf{x}}_n^{(j)}(s) ds.$$

En effectuant, dans la dernière intégrale, le changement de variable $T = \mathbf{a}_j - \mathbf{x}_n^{(j)}(s)$, on obtient

$$\int_{\tau}^t \tilde{H}_n(\mathbf{a}_j - \mathbf{x}_n^{(j)}(s)) ds \leq \frac{1}{\tilde{m}_j} \int_{\mathbf{a}_j - \mathbf{x}_n^{(j)}(t)}^0 \tilde{H}_n(T) dT \leq \frac{1}{\tilde{m}_j} \int_{-1/n}^0 \tilde{H}_n(T) dT \leq \frac{1}{n \tilde{m}_j}.$$

Il vient alors

$$\int_{\tau}^t \prod_{i=1}^d \tilde{H}_n(\mathbf{a}_i - \mathbf{x}_n^{(i)}(s)) ds \leq \int_{\tau}^t \tilde{H}_n(\mathbf{a}_j - \mathbf{x}_n^{(j)}(s)) ds \leq \frac{1}{n \tilde{m}_j}.$$

Finalement, on a d'après (2.39)

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_n(t)\|_d \leq C \int_{\tau}^t \|\mathbf{x}(s) - \mathbf{x}_n(s)\|_d ds + \frac{M_1 + M_2}{n \tilde{m}_j}$$

et, comme \mathbf{x} se raccorde continûment, le lemme de Gronwall (voir annexe A) permet d'obtenir

$$\|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_n(t)\|_d \leq \frac{M_1 + M_2}{n \tilde{m}_j} \exp(C(t_f - \tau)),$$

ce qui achève la démonstration. □

Remarque 2.13. Le lemme 2.11 et le théorème 2.12 sont encore valides si on remplace le système hybride (2.33) par le système suivant

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_1(\mathbf{u}_1(t), \mathbf{x}(t)) & \text{si } \mathbf{x}(t) \leq \mathbf{a} \\ \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_2(\mathbf{u}_2(t), \mathbf{x}(t)) & \text{sinon} \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

où les fonctions de commande \mathbf{u}_1 et \mathbf{u}_2 , définies sur $[t_0, t_f]$ et respectivement à valeurs dans des ensembles fermés bornés U_1 et U_2 de \mathbb{R}^ℓ , $\ell \geq 1$, sont supposées continues. En particulier, les résultats sont conservés pour le système hybride ci-dessous

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}(t)) & \text{si } \mathbf{x}(t) \leq \mathbf{a} \\ \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_2(\mathbf{p}_2, \mathbf{x}(t)) & \text{sinon} \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (2.42)$$

où les paramètres \mathbf{p}_1 et \mathbf{p}_2 appartiennent respectivement à des ensembles fermés bornés K_1 et K_2 de \mathbb{R}^ℓ . Le système (2.42) sera d'ailleurs étudié dans le chapitre 3 dans le cadre d'un problème d'identification de paramètres.

Afin d'illustrer le théorème 2.12, on a représenté sur la figure 2.6 l'état hybride \mathbf{x} et un état continu associé \mathbf{x}_n où l'on a choisi $d = 1$, $u \equiv \text{id}$ et où les fonctions \mathbf{f}_1 et \mathbf{f}_2 sont définies par

$$\forall (t, x) \in [t_0, t_f] \times \mathbb{R} \quad \mathbf{f}_1(t, x) = \exp(1,5tx) \quad \mathbf{f}_2(t, x) = \exp(0,1t).$$

De plus, on a posé $t_0 = 0$ et $t_f = 3$.

Les valeurs pour le seuil et l'état initial sont respectivement $\mathbf{a} = 3$ et $\mathbf{x}_0 = 0$.

La lecture de la figure 2.6 montre que, pour $n = 25$, les graphes de \mathbf{x}_n et de \mathbf{x} sont pratiquement confondus, à l'échelle de la figure.

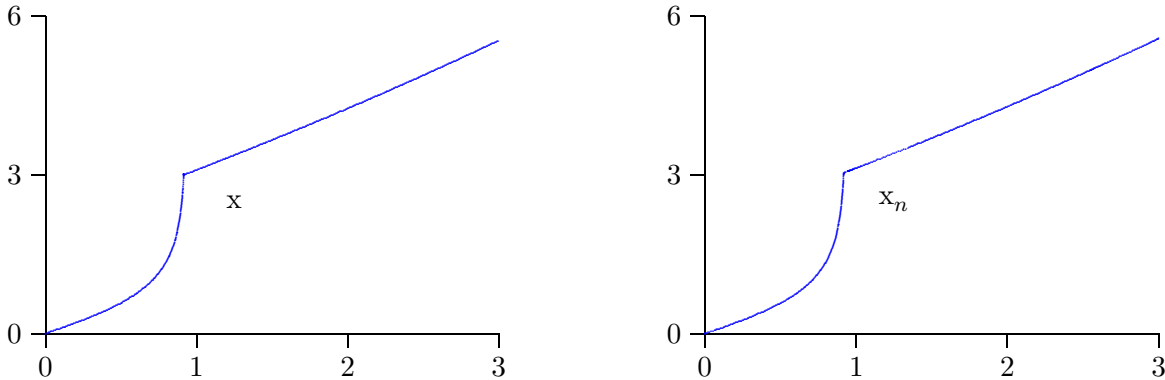


FIG. 2.6 – Représentations des états \mathbf{x} et \mathbf{x}_n pour $n = 25$

Le résultat ci-dessous est démontré dans un cadre général dans lequel on ne suppose plus la positivité des fonctions \mathbf{f}_1 et \mathbf{f}_2 .

Proposition 2.14. *La suite $(\mathbf{x}_n)_{n>0}$ est bornée dans l'ensemble $H^1(t_0, t_f)$ des fonctions de $L^2(t_0, t_f)$ dont la dérivée au sens des distributions appartient à $L^2(t_0, t_f)$.*

Démonstration. Soit $n > 0$ et $t \in [t_0, t_f]$. Par définition de \mathbf{x}_n , on a

$$\begin{aligned} \|\dot{\mathbf{x}}_n(t)\|_d &\leq 2\|\mathbf{f}_1(u(t), \mathbf{x}_n(t))\|_d + \|\mathbf{f}_2(u(t), \mathbf{x}_n(t))\|_d \\ &\leq 3C_1\|\mathbf{x}_n(t)\|_d + 3C_2 \\ &\leq 3C_1M + 3C_2 \end{aligned}$$

où la constante M est donnée par le lemme 2.11.

La suite $(\dot{\mathbf{x}}_n)_{n>0}$ est donc uniformément bornée dans $[t_0, t_f]$, d'où la proposition grâce au lemme 2.11. □

Corollaire 2.15. *La suite $(\mathbf{x}_n)_{n>0}$ possède une sous-suite qui converge dans $L^2(t_0, t_f)$ vers une fonction \mathbf{z} de $H^1(t_0, t_f)$.*

Démonstration. La boule unité de $H^1(t_0, t_f)$ est relativement compacte dans l'ensemble $C(t_0, t_f)$ des fonctions continues sur $[t_0, t_f]$ (voir par exemple [4]). Le résultat découle alors de la proposition 2.14. □

Remarque 2.16.

1. On peut extraire de la sous-suite de $(\mathbf{x}_n)_{n>0}$ ci-dessus une sous-suite qui converge presque partout vers \mathbf{z} . En revanche, la convergence presque partout vers \mathbf{x} n'est pas assurée ;
2. Le point précédent peut être illustré en considérant le cas $d = 1$ avec $x_0 < a$, $f_1 > 0$ et $f_2 < 0$. Lorsque le système atteint le seuil a , la fonction f_2 intervient et fait repasser le système en dessous du seuil, c'est-à-dire que f_1 intervient de nouveau, etc. Ceci signifie que le système hybride ainsi décrit n'a pas de sens, tant physique que mathématique. En revanche, les systèmes continus associés sont mathématiquement correctement définis. C'est ce qu'illustre la courbe représentée sur la figure 2.7 où l'on a pris $x_0 = 0$, $a = 2$, $[t_0, t_f] = [0, 3]$, $f_1 \equiv 1$ et $f_2 \equiv -1$.

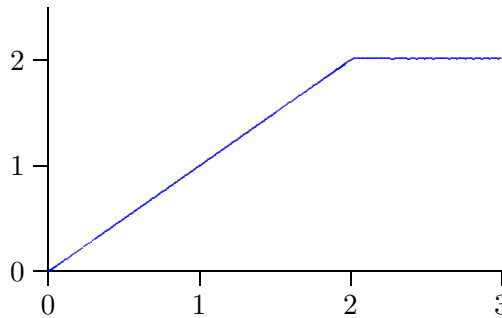


FIG. 2.7 – Représentation de l'état x_n où $n = 30$

2.3 Conclusion

Dans ce chapitre, des représentations pour deux classes de systèmes hybrides ont été introduites. Elles sont basées sur des théorèmes de convergence qui montrent que les états hybrides sont approchés par les états non hybrides des représentations. Celles-ci vont être utilisées dans le chapitre suivant pour l'étude de problèmes hybrides de commande et d'identification. Des convergences, portant cette fois sur les solutions des problèmes, vont être établies. Les démonstrations feront appel à celles qui ont été développées dans le présent chapitre.

Chapitre 3

Problèmes de commande et d'identification

L'étude et la résolution de problèmes hybrides de commande optimale ou d'identification est au centre de ce mémoire. Les problèmes auxquels on s'intéresse font intervenir les deux classes de systèmes hybrides introduites au chapitre précédent. Certains problèmes doivent donc prendre en compte des sauts et commutations commandés tandis que d'autres doivent traiter une commutation autonome.

Différents types de problèmes de commande optimale ou d'identification, se traduisant par la minimisation d'une fonction coût, sont envisagés. Pour la commande optimale, on étudie des problèmes à coût final dans lesquels l'instant final est libre ou non. Il s'agit, par exemple, de déterminer des instants de commutation permettant d'approcher au mieux un état désiré à l'instant final. Des problèmes de poursuite de trajectoire sont également exposés. D'autre part, une classe de problèmes d'identification de paramètres pour des systèmes hybrides à commutation autonome est introduite. Les paramètres à identifier, à partir de mesures réalisées sur les systèmes, interviennent dans les systèmes hybrides et agissent sur la commutation. L'identification du seuil de commutation est aussi étudiée.

Afin d'éviter, lors de la résolution des problèmes de commande ou d'identification, les difficultés liées au caractère hybride des systèmes, on choisit d'utiliser leur représentation. Cette approche est justifiée dans ce chapitre. Des résultats de convergence ponctuelle, combinés à la notion de minima à ε près, montrent en effet que les solutions – commandes optimales ou paramètres à identifier – obtenues en résolvant un problème issu d'une représentation, convergent, en un sens qui sera précisé, vers les solutions du problème hybride correspondant. De plus, ces résultats sont établis sous des hypothèses peu restrictives, la convexité des fonctions coût introduites n'étant pas exigée.

3.1 Commutations commandées

On s'intéresse à trois problèmes de commande optimale. Le premier consiste à trouver des instants de commutation qui permettent d'approcher au mieux un état désiré à un instant final donné. Dans le deuxième, on recherche des instants de commutation et un instant final permettant d'approcher en un temps minimum un état final désiré. Le troisième problème est un problème de poursuite de trajectoire dans lequel on recherche des instants de commutation optimaux et une commande continue optimale. Pour chacun de ces problèmes, on présente le problème hybride puis le problème issu de la représentation ainsi que les fonctions coût à minimiser. Enfin, la convergence entre les solutions est exposée. Dans les deuxième et troisième problèmes, l'absence de compacité nous oblige à introduire des minima à ε près pour établir cette convergence.

3.1.1 Problème à temps final fixé

Problème hybride

On considère le système hybride suivant, qui a été décrit au chapitre précédent :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_1(u(t), \mathbf{x}(t)) \quad \text{si } t \in [t_0, \tau_1[\\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_{i+1}(u(t), \mathbf{x}(t)) \quad \text{si } t \in [\tau_i, \tau_{i+1}[, \quad i = 1, \dots, m-1 \\ \mathbf{x}(\tau_i) = \mathbf{x}(\tau_i^-) + \boldsymbol{\eta}_i \\ \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_{m+1}(u(t), \mathbf{x}(t)) \quad \text{si } t \in [\tau_m, t_f] \\ \mathbf{x}(\tau_m) = \mathbf{x}(\tau_m^-) + \boldsymbol{\eta}_m. \end{array} \right. \quad (3.1)$$

On fait les mêmes hypothèses qu'au paragraphe 2.1.1 sur les fonctions u et \mathbf{f}_i , $i = 1, \dots, m+1$.

Les fonctions \mathbf{f}_i sont donc définies sur $I \times \mathbb{R}^d$, à valeurs dans \mathbb{R}^d , où I est un intervalle ouvert de \mathbb{R} contenant l'ensemble fermé borné U . De plus, comme au chapitre 2, on suppose que les fonctions \mathbf{f}_i sont de classe \mathcal{C}^1 sur $I \times \mathbb{R}^d$ et qu'elles vérifient

$$\exists C_1 > 0 \quad \exists C_2 > 0 \quad \forall i \in \{1, \dots, m+1\} \quad \forall (u, \mathbf{x}) \in I \times \mathbb{R}^d \quad \|\mathbf{f}_i(u, \mathbf{x})\|_d \leq C_1 \|\mathbf{x}\|_d + C_2.$$

La fonction de commande u , à valeurs dans U , est supposée continue sur $[t_0, t_f]$.

Les instants de commutation τ_i , $i = 1, \dots, m$, ne sont plus fixés et la solution du système (3.1), définie sur $[t_0, t_f]$, est notée ici $\mathbf{x}(\boldsymbol{\tau}, \cdot)$ où $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_m)$.

Soit $\mathbf{x}_d \in \mathbb{R}^d$ un état désiré. Le problème consiste à trouver des instants de commutation $\tau_1^*, \tau_2^*, \dots, \tau_m^*$ appartenant à $[t_0, t_f]$, tels que $\tau_1^* \leq \tau_2^* \leq \dots \leq \tau_m^*$, et qui permettent d'approcher au mieux à l'instant final t_f cet état désiré. On traduit ce problème par la minimisation sur \mathcal{T} de la fonction coût définie par

$$\forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{T} \quad J(\boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}(\boldsymbol{\tau}, t_f) - \mathbf{x}_d\|_d^2$$

où l'on a posé

$$\mathcal{T} = \left\{ \boldsymbol{\tau} \in [t_0, t_f]^m, \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_m \right\}. \quad (3.2)$$

Problème issu de la représentation

On considère la représentation du système (3.1) introduite au chapitre 2

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(u(t), \mathbf{X}(t)) + \sum_{i=1}^m \dot{H}_n(t - \tau_i) \boldsymbol{\mu}_i, \quad t \in [t_0, t_f] \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 + \sum_{i=1}^m H_n(t_0 - \tau_i) \boldsymbol{\mu}_i \end{array} \right. \quad (3.3)$$

où $\mathbf{X} = (\mathbf{x}, \nu)^\top$.

On note $\mathbf{X}_n(\boldsymbol{\tau}, \cdot)$ la solution de (3.3) et on associe au problème hybride décrit ci-dessus le problème qui consiste à minimiser sur \mathcal{T} la fonction coût définie par

$$\forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{T} \quad J_n(\boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{X}_n(\boldsymbol{\tau}, t_f) - \mathbf{X}_d\|_{d+1}^2,$$

où $\mathbf{X}_d = (\mathbf{x}_d, \nu_{m+1})^\top$ avec ν_{m+1} correspondant à l'état final de la fonction ν introduite en (2.6).

Convergence entre les solutions

On admet, dans ce paragraphe, la continuité des fonctions coût J et J_n . Ce résultat sera montré au paragraphe 4.2 à l'aide de théorèmes classiques, rappelés dans l'annexe A, sur la continuité des solutions d'équations différentielles par rapport à des paramètres.

Comme l'ensemble \mathcal{T} est fermé et borné, les fonctions J et J_n atteignent leur minimum sur \mathcal{T} en $\boldsymbol{\tau}^* = (\tau_1^*, \dots, \tau_m^*)$ et $\boldsymbol{\tau}_n^* = (\tau_{n,1}^*, \dots, \tau_{n,m}^*)$ respectivement.

La suite $(\boldsymbol{\tau}_n^*)_{n>0}$ est bornée. On peut donc en extraire une sous-suite, encore notée $(\boldsymbol{\tau}_n^*)_{n>0}$, qui converge vers $\bar{\boldsymbol{\tau}} = (\bar{\tau}_1, \dots, \bar{\tau}_m)$, c'est-à-dire

$$\forall i \in \{1, \dots, m\} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_{n,i}^* = \bar{\tau}_i .$$

Le théorème suivant est à rapprocher du théorème 2.3. Il relie les fonctions $\mathbf{X}_n(\boldsymbol{\tau}_n^*, \cdot)$ et $\mathbf{X}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \cdot)$.

Théorème 3.1. 1. La suite $(\mathbf{X}_n(\boldsymbol{\tau}_n^*, \cdot))_{n>0}$ converge uniformément vers $\mathbf{X}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \cdot)$ sur tout intervalle I vérifiant

$$I \subset [t_0, t_f] \setminus \{\bar{\tau}_i ; i = 1, \dots, m\} ;$$

2. Pour tout i appartenant à $\{1, \dots, m\}$, la suite $(\mathbf{X}_n(\boldsymbol{\tau}_n^*, \bar{\tau}_i) - H_n(\bar{\tau}_i - \tau_{n,i}^*)\boldsymbol{\mu}_i)_{n>0}$ converge vers $\mathbf{X}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\tau}_i) - \boldsymbol{\mu}_i$.

Afin d'alléger l'écriture, et sans perte de généralité, on choisit de démontrer ce théorème, reformulé à la proposition ci-dessous, dans le cas $m = 1$.

Les instants de commutation sont notés τ_n^* et $\bar{\tau}$ et le saut de l'état est noté $\boldsymbol{\mu}$.

Proposition 3.2. 1. Pour tout $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon \leq \bar{\tau} - t_0$, la suite $(\mathbf{X}_n(\tau_n^*, \cdot))_{n>0}$ converge uniformément vers $\mathbf{X}(\bar{\tau}, \cdot)$ sur $[t_0, \bar{\tau} - \varepsilon]$;

2. La suite $(\mathbf{X}_n(\tau_n^*, \bar{\tau}) - H_n(\bar{\tau} - \tau_n^*)\boldsymbol{\mu})_{n>0}$ converge vers $\mathbf{X}(\bar{\tau}, \bar{\tau}) - \boldsymbol{\mu}$;

3. Pour tout $\varepsilon > 0$ tel que $\varepsilon \leq t_f - \bar{\tau}$, la suite $(\mathbf{X}_n(\tau_n^*, \cdot))_{n>0}$ converge uniformément vers $\mathbf{X}(\bar{\tau}, \cdot)$ sur $[\bar{\tau} + \varepsilon, t_f]$.

Démonstration.

1. On suppose, pour ce point, $\bar{\tau} > t_0$. Soit alors $\varepsilon > 0$, tel que $\varepsilon \leq \bar{\tau} - t_0$, $n > 0$ et $t \in [t_0, \bar{\tau} - \varepsilon]$.

Les équations (2.9) et (2.18) adaptées au cas présent s'écrivent

$$\forall t \in [t_0, t_f] \quad \mathbf{X}(\bar{\tau}, t) = \mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{F}(u(s), \mathbf{X}(\bar{\tau}, s)) ds + H(t - \bar{\tau})\boldsymbol{\mu} \quad (3.4)$$

et

$$\forall t \in [t_0, t_f] \quad \mathbf{X}_n(\tau_n^*, t) = \mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^t \mathbf{F}(u(s), \mathbf{X}_n(\tau_n^*, s)) ds + H_n(t - \tau_n^*)\boldsymbol{\mu} . \quad (3.5)$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X}_n(\tau_n^*, t) - \mathbf{X}(\bar{\tau}, t)\|_{d+1} &\leq \int_{t_0}^t \|\mathbf{F}(u(s), \mathbf{X}_n(\tau_n^*, s)) - \mathbf{F}(u(s), \mathbf{X}(\bar{\tau}, s))\|_{d+1} ds \\ &\quad + H_n(t - \tau_n^*)\|\boldsymbol{\mu}\| . \end{aligned}$$

Le lemme 2.5 étant encore vrai pour $\mathbf{X}_n(\tau_n^*, \cdot)$ et $\mathbf{X}(\bar{\tau}, \cdot)$, on peut écrire comme pour (2.24)

$$\forall s \in [t_0, t_f] \quad \|\mathbf{F}(u(s), \mathbf{X}_n(\tau_n^*, s)) - \mathbf{F}(u(s), \mathbf{X}(\bar{\tau}, s))\|_{d+1} \leq C \|\mathbf{X}_n(\tau_n^*, s) - \mathbf{X}(\bar{\tau}, s)\|_{d+1}$$

où C est une constante positive.

On en déduit

$$\|\mathbf{X}_n(\tau_n^*, t) - \mathbf{X}(\bar{\tau}, t)\|_{d+1} \leq C \int_{t_0}^t \|\mathbf{X}_n(\tau_n^*, s) - \mathbf{X}(\bar{\tau}, s)\|_{d+1} ds + H_n(t - \tau_n^*) \|\boldsymbol{\mu}\|_{d+1}.$$

Soit maintenant $N > 0$ tel que

$$\forall n \geq N \quad |\tau_n^* - \bar{\tau}| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Il vient

$$\begin{aligned} \forall n \geq N \quad \|\mathbf{X}_n(\tau_n^*, t) - \mathbf{X}(\bar{\tau}, t)\|_{d+1} &\leq C \int_{t_0}^t \|\mathbf{X}_n(\tau_n^*, s) - \mathbf{X}(\bar{\tau}, s)\|_{d+1} ds \\ &\quad + H_n\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right) \|\boldsymbol{\mu}\|_{d+1} \end{aligned}$$

et le lemme de Gronwall (voir annexe A) entraîne

$$\forall n \geq N \quad \|\mathbf{X}_n(\tau_n^*, t) - \mathbf{X}(\bar{\tau}, t)\|_{d+1} \leq H_n\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right) \|\boldsymbol{\mu}\|_{d+1} \exp(C(t_f - t_0)).$$

Comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right) \|\boldsymbol{\mu}\|_{d+1} = 0,$$

on obtient le résultat.

2. Soit $n > 0$. D'après (3.4) et (3.5), on a

$$\mathbf{X}_n(\tau_n^*, \bar{\tau}) = \mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^{\bar{\tau}} \mathbf{F}(u(s), \mathbf{X}_n(\tau_n^*, s)) ds + H_n(\bar{\tau} - \tau_n^*) \boldsymbol{\mu}$$

et

$$\mathbf{X}(\bar{\tau}, \bar{\tau}) = \mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^{\bar{\tau}} \mathbf{F}(u(s), \mathbf{X}(\bar{\tau}, s)) ds + \boldsymbol{\mu}.$$

On en déduit

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{X}_n(\tau_n^*, \bar{\tau}) - H_n(\bar{\tau} - \tau_n^*) \boldsymbol{\mu} - \mathbf{X}(\bar{\tau}, \bar{\tau}) + \boldsymbol{\mu}\|_{d+1} \\ &\leq \int_{t_0}^{\bar{\tau}} \|\mathbf{F}(u(s), \mathbf{X}_n(\tau_n^*, s)) - \mathbf{F}(u(s), \mathbf{X}(\bar{\tau}, s))\|_{d+1} ds \\ &\leq C \int_{t_0}^{\bar{\tau}} \|\mathbf{X}_n(\tau_n^*, s) - \mathbf{X}(\bar{\tau}, s)\|_{d+1} ds. \end{aligned}$$

Le point 1 implique

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mathbf{X}_n(\tau_n^*, \cdot) - \mathbf{X}(\bar{\tau}, \cdot)\|_{d+1} \chi_{[t_0, \bar{\tau}]} = 0 \quad \text{p.p.}$$

où $\chi_{[t_0, \bar{\tau}]}$ désigne la fonction indicatrice de $[t_0, \bar{\tau}]$.

D'après le lemme 2.5, on a

$$\forall s \in \mathbb{R} \quad \|\mathbf{X}_n(\tau_n^*, s) - \mathbf{X}(\bar{\tau}, s)\|_{d+1} \chi_{[t_0, \bar{\tau}]}(s) \leq (M + M') \chi_{[t_0, \bar{\tau}]}(s)$$

et le théorème de convergence dominée de Lebesgue (voir annexe A) permet alors d'écrire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{t_0}^{\bar{\tau}} \|\mathbf{X}_n(\tau_n^*, s) - \mathbf{X}(\bar{\tau}, s)\|_{d+1} ds = 0.$$

Le résultat s'en déduit.

3. On suppose pour ce point $\bar{\tau} < t_f$. Soit $\varepsilon > 0$, tel que $\varepsilon \leq t_f - \bar{\tau}$, et soit $\alpha > 0$.

Grâce au lemme 2.5, on choisit $\varepsilon' > 0$ tel que

$$\forall n > 0 \quad \int_{\bar{\tau}}^{\bar{\tau} + \varepsilon'} \|\mathbf{X}_n(\tau_n^*, s) - \mathbf{X}(\bar{\tau}, s)\|_{d+1} ds < \alpha$$

et

$$\varepsilon' \leq \varepsilon.$$

Soit $n > 0$ et $t \in [\bar{\tau} + \varepsilon', t_f]$.

Les équations (3.4) et (3.5) donnent

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_n(\tau_n^*, t) &= \mathbf{X}_n(\tau_n^*, \bar{\tau}) + \int_{\bar{\tau}}^{\bar{\tau} + \varepsilon'} \mathbf{F}(u(s), \mathbf{X}_n(\tau_n^*, s)) ds \\ &\quad + \int_{\bar{\tau} + \varepsilon'}^t \mathbf{F}(u(s), \mathbf{X}_n(\tau_n^*, s)) ds + H_n(t - \tau_n^*) \boldsymbol{\mu} - H_n(\bar{\tau} - \tau_n^*) \boldsymbol{\mu} \end{aligned}$$

et

$$\mathbf{X}(\bar{\tau}, t) = \mathbf{X}(\bar{\tau}, \bar{\tau}) + \int_{\bar{\tau}}^{\bar{\tau} + \varepsilon'} \mathbf{F}(u(s), \mathbf{X}(\bar{\tau}, s)) ds + \int_{\bar{\tau} + \varepsilon'}^t \mathbf{F}(u(s), \mathbf{X}(\bar{\tau}, s)) ds.$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X}_n(\tau_n^*, t) - \mathbf{X}(\bar{\tau}, t)\|_{d+1} &\leq \\ &\|\mathbf{X}_n(\tau_n^*, \bar{\tau}) + H_n(t - \tau_n^*) \boldsymbol{\mu} - H_n(\bar{\tau} - \tau_n^*) \boldsymbol{\mu} - \mathbf{X}(\bar{\tau}, \bar{\tau}) + \boldsymbol{\mu} - \boldsymbol{\mu}\|_{d+1} \\ &\quad + C\alpha + C \int_{\bar{\tau} + \varepsilon'}^t \|\mathbf{X}_n(\tau_n^*, s) - \mathbf{X}(\bar{\tau}, s)\|_{d+1} ds, \end{aligned}$$

soit encore

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X}_n(\tau_n^*, t) - \mathbf{X}(\bar{\tau}, t)\|_{d+1} &\leq \|\mathbf{X}_n(\tau_n^*, \bar{\tau}) - H_n(\bar{\tau} - \tau_n^*) \boldsymbol{\mu} - \mathbf{X}(\bar{\tau}, \bar{\tau}) + \boldsymbol{\mu}\|_{d+1} \\ &\quad + \|\boldsymbol{\mu}\|_{d+1} |H_n(t - \tau_n^*) - 1| + C\alpha \\ &\quad + C \int_{\bar{\tau} + \varepsilon'}^t \|\mathbf{X}_n(\tau_n^*, s) - \mathbf{X}(\bar{\tau}, s)\|_{d+1} ds. \end{aligned}$$

D'après le point 2, on choisit $N_1 > 0$ tel que

$$\forall n \geq N_1 \quad \|\mathbf{X}_n(\tau_n^*, \bar{\tau}) - H_n(\bar{\tau} - \tau_n^*) \boldsymbol{\mu} - \mathbf{X}(\bar{\tau}, \bar{\tau}) + \boldsymbol{\mu}\|_{d+1} < \alpha.$$

Soit maintenant $N_2 > 0$ tel que

$$\forall n \geq N_2 \quad |\tau_n^* - \bar{\tau}| \leq \frac{\varepsilon'}{2}.$$

Alors on a

$$\forall n \geq N_2 \quad H_n\left(\frac{\varepsilon'}{2}\right) \leq H_n(t - \tau_n^*) \leq H_n(t_f - t_0),$$

ce qui entraîne

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} H_n(t - \tau_n^*) = 1.$$

Soit donc $N_3 > 0$ tel que

$$\forall n \geq N_3 \quad |H_n(t - \tau_n^*) - 1| < \alpha.$$

Finalement, en notant $N = \max(N_1, N_3)$, on a

$$\forall n \geq N \quad \forall t \in [\bar{\tau} + \varepsilon', t_f]$$

$$\|\mathbf{X}_n(\tau_n^*, t) - \mathbf{X}(\bar{\tau}, t)\|_{d+1} \leq \alpha + \alpha \|\boldsymbol{\mu}\|_{d+1} + C\alpha + C \int_{\bar{\tau} + \varepsilon'}^t \|\mathbf{X}_n(\tau_n^*, s) - \mathbf{X}(\bar{\tau}, s)\|_{d+1} ds.$$

D'après le lemme de Gronwall, on obtient

$$\forall n \geq N \quad \forall t \in [\bar{\tau} + \varepsilon', t_f]$$

$$\|\mathbf{X}_n(\tau_n^*, t) - \mathbf{X}(\bar{\tau}, t)\|_{d+1} \leq \alpha (1 + \|\boldsymbol{\mu}\|_{d+1} + C) \exp(C(t_f - \bar{\tau})).$$

En particulier, cette inégalité est vraie pour tout t appartenant à $[\bar{\tau} + \varepsilon, t_f]$.

Comme α peut être choisi de façon arbitraire, on conclut que $\mathbf{X}_n(\tau_n^*, \cdot)$ converge vers $\mathbf{X}(\bar{\tau}, \cdot)$ uniformément sur $[\bar{\tau} + \varepsilon, t_f]$ quand n tend vers l'infini. □

Remarque 3.3. Le théorème 3.1 se déduit de la proposition 3.2. En effet, si $m > 1$, les arguments des points 1 et 3 de la proposition permettent de démontrer la convergence sur tout intervalle du type $[\tau_i + \varepsilon, \tau_{i+1} - \varepsilon]$, où $i \in \{1, \dots, m-1\}$.

Le théorème 3.1 permet d'obtenir un résultat de convergence, exposé au corollaire ci-dessous, qui relie $J_n(\boldsymbol{\tau}_n^*)$ et $J(\bar{\boldsymbol{\tau}})$.

Corollaire 3.4. *Si $\bar{\tau}_m < t_f$, alors $J_n(\boldsymbol{\tau}_n^*)$ tend vers $J(\bar{\boldsymbol{\tau}})$ lorsque n tend vers l'infini.*

Démonstration. Si $\bar{\tau}_m < t_f$, alors

$$\mathbf{X}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, t_f) = (\mathbf{x}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, t_f), \nu_{m+1})^\top$$

et par suite

$$J(\bar{\boldsymbol{\tau}}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{X}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, t_f) - \mathbf{X}_d\|_{d+1}^2.$$

Or, d'après le théorème 3.1, on a aussi

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{X}_n(\boldsymbol{\tau}_n^*, t_f) = \mathbf{X}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, t_f)$$

qui permet, grâce à la continuité de $\|\cdot\|_{d+1}$, d'obtenir le résultat. \square

Le résultat énoncé ci-dessous montre qu'on peut remplacer, lors d'une résolution, le problème hybride par le problème issu de la représentation.

Théorème 3.5. *Si $\bar{\tau}_m < t_f$ et $\tau_m^* < t_f$, alors $J(\bar{\boldsymbol{\tau}}) = J(\boldsymbol{\tau}^*)$. De plus, si $\boldsymbol{\tau}^*$ est unique, alors $\bar{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\tau}^*$.*

Démonstration. Soit $n > 0$. Par définition de $\boldsymbol{\tau}_n^*$, on a

$$\forall \boldsymbol{\tau} \in \mathcal{T} \quad J_n(\boldsymbol{\tau}_n^*) \leq J_n(\boldsymbol{\tau}). \quad (3.6)$$

Si $\tau_m < t_f$, alors

$$J(\boldsymbol{\tau}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{X}(\boldsymbol{\tau}, t_f) - \mathbf{X}_d\|_{d+1}^2$$

et, d'après le théorème 2.3,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{X}_n(\boldsymbol{\tau}, t_f) = \mathbf{X}(\boldsymbol{\tau}, t_f).$$

On en déduit que J_n converge vers J sur $\{\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{T}, \tau_m \neq t_f\}$. Par passage à la limite dans (3.6) et d'après le corollaire 3.4, on obtient alors

$$\forall \boldsymbol{\tau} \in \{\boldsymbol{\tau} \in \mathcal{T}, \tau_m \neq t_f\} \quad J(\bar{\boldsymbol{\tau}}) \leq J(\boldsymbol{\tau})$$

et l'hypothèse $\tau_m^* \neq t_f$ permet d'écrire

$$J(\bar{\boldsymbol{\tau}}) = J(\boldsymbol{\tau}^*).$$

Si $\boldsymbol{\tau}^*$ est unique, alors $\bar{\boldsymbol{\tau}} = \boldsymbol{\tau}^*$. \square

Nous venons de montrer que $\boldsymbol{\tau}_n^*$, obtenu en résolvant le problème issu de la représentation, converge vers une solution du problème hybride. Cela signifie donc qu'à condition de choisir n suffisamment grand, on peut remplacer la résolution du problème hybride par celle du problème issu de la représentation.

3.1.2 Problème à temps final libre

Problème hybride

On reprend le problème précédent en supposant cette fois que l'instant final t_f est libre et appartient à $[t_0, T]$ où $T > t_0$ est fixé.

Le problème consiste ici à trouver des instants de commutations $\tau_1^*, \tau_2^*, \dots, \tau_m^*$ appartenant à $[t_0, T]$ et un instant final minimum t_f^* , tels que $\tau_1^* \leq \tau_2^* \leq \dots \leq \tau_m^* < t_f^*$, qui permettent d'approcher au mieux à l'instant final l'état désiré \mathbf{x}_d .

On pose

$$\mathcal{T}' = \{(\tau_1, \dots, \tau_m, t_f) \in [t_0, T]^{m+1}, \tau_1 \leq \dots \leq \tau_m < t_f\}$$

et on note $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_m)$.

On traduit le problème par la minimisation sur \mathcal{T}' de la fonction coût J définie par

$$\forall (\boldsymbol{\tau}, t_f) \in \mathcal{T}' \quad J(\boldsymbol{\tau}, t_f) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}(\boldsymbol{\tau}, t_f) - \mathbf{x}_d\|_d^2 + \zeta t_f$$

où $\zeta > 0$ correspond au coût de la commande.

Problème issu de la représentation

Le problème associé à la représentation (3.3) de (3.1) consiste à minimiser sur \mathcal{T}' la fonction coût J_n définie par

$$\forall (\boldsymbol{\tau}, t_f) \in \mathcal{T}' \quad J_n(\boldsymbol{\tau}, t_f) = \frac{1}{2} \|\mathbf{X}_n(\boldsymbol{\tau}, t_f) - \mathbf{X}_d\|_{d+1}^2 + \zeta t_f$$

où l'on a conservé les mêmes notations qu'au paragraphe 3.1.1.

Convergence entre les solutions

La définition de \mathcal{T}' impose la condition $\tau_m < t_f$. Or cette condition, nécessaire d'après le théorème 1 pour obtenir une convergence entre les fonctions coût J_n et J , n'est pas conservée lorsqu'on travaille avec les bornes inférieures de ces mêmes fonctions. Il n'est donc pas possible d'obtenir ici les mêmes types de convergence que ceux démontrés pour le problème précédent. C'est pour cette raison que nous introduisons dans ce paragraphe la notion de minimum à ε près qui est à rapprocher de celle de solution à ε près introduite lorsque les fonctions coût sont semi-continues inférieurement (voir par exemple [3] ou [54]).

Soit $\varepsilon > 0$ et $n > 0$.

On pose

$$m_n = \inf_{(\boldsymbol{\tau}, t_f) \in \mathcal{T}'} J_n(\boldsymbol{\tau}, t_f)$$

et on considère $(\boldsymbol{\tau}_n, t_f^{(n)}) \in \mathcal{T}'$, avec $\boldsymbol{\tau}_n = (\tau_n^{(1)}, \dots, \tau_n^{(m)})$, qui réalise un minimum à ε près pour la fonction coût J_n , soit par définition

$$J_n(\boldsymbol{\tau}_n, t_f^{(n)}) < m_n + \varepsilon.$$

La suite $(\boldsymbol{\tau}_n, t_f^{(n)})_{n>0}$ est bornée. Elle admet donc une sous-suite, notée de la même façon, qui converge vers $(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{t}_f) \in \overline{\mathcal{T}'}$ où, par conséquent, $\bar{\tau}_m \leq \bar{t}_f$.

Le théorème 3.6 formule des convergences qui relient les fonctions $\mathbf{X}_n(\boldsymbol{\tau}_n, \cdot)$ et $\mathbf{X}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \cdot)$ et qui seront utilisées pour démontrer la convergence de $J_n(\boldsymbol{\tau}_n, t_f^{(n)})$ vers $J(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{t}_f)$ à la proposition 3.7.

Théorème 3.6. 1. La suite $(\mathbf{X}_n(\boldsymbol{\tau}_n, \cdot))_{n>0}$ converge uniformément vers $\mathbf{X}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \cdot)$ sur tout intervalle I vérifiant

$$I \subset [t_0, \bar{t}_f] \setminus \{\bar{\tau}_i ; i = 1, \dots, m\} ;$$

2. Pour tout i appartenant à $\{1, \dots, m\}$, la suite $(\mathbf{X}_n(\boldsymbol{\tau}_n, \bar{\tau}_i) - H_n(\bar{\tau}_i - \tau_{n,i})\boldsymbol{\mu}_i)_{n>0}$ converge vers $\mathbf{X}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{\tau}_i) - \boldsymbol{\mu}_i$.

Démonstration. La démonstration est la même que pour le théorème 3.1, à condition de remplacer t_f et $\boldsymbol{\tau}_n^*$ par \bar{t}_f et $\boldsymbol{\tau}_n$ respectivement. □

Proposition 3.7. Si $\bar{\tau}_m < \bar{t}_f$, alors $J_n(\boldsymbol{\tau}_n, t_f^{(n)})$ converge vers $J(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{t}_f)$ quand n tend vers l'infini.

Démonstration. Supposons $\bar{\tau}_m < \bar{t}_f$. Alors

$$J(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{t}_f) = \frac{1}{2} \|\mathbf{X}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{t}_f) - \mathbf{X}_d\|_{d+1}$$

et il suffit de montrer que $\mathbf{X}_n(\boldsymbol{\tau}_n, t_f^{(n)})$ tend vers $\mathbf{X}(\bar{\boldsymbol{\tau}}, \bar{t}_f)$ lorsque n tend vers l'infini.

Soit $n > 0$. On a

$$\|\mathbf{X}_n(\tau_n, t_f^{(n)}) - \mathbf{X}(\bar{\tau}, \bar{t}_f)\|_{d+1} \leq \|\mathbf{X}_n(\tau_n, t_f^{(n)}) - \mathbf{X}_n(\tau_n, \bar{t}_f)\|_{d+1} + \|\mathbf{X}_n(\tau_n, \bar{t}_f) - \mathbf{X}(\bar{\tau}, \bar{t}_f)\|_{d+1}.$$

Or, d'après le théorème 3.6, le second terme de la somme ci-dessus tend vers 0 quand n tend vers l'infini. Il reste donc à montrer

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mathbf{X}_n(\tau_n, t_f^{(n)}) - \mathbf{X}_n(\tau_n, \bar{t}_f)\|_{d+1} = 0.$$

D'après (2.18), on a

$$\mathbf{X}_n(\tau_n, t_f^{(n)}) = \mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^{t_f^{(n)}} \mathbf{F}(u(s), \mathbf{X}_n(\tau_n, s)) ds + \sum_{i=1}^m H_n(t_f^{(n)} - \tau_i) \boldsymbol{\mu}_i$$

et

$$\mathbf{X}_n(\tau_n, \bar{t}_f) = \mathbf{X}_0 + \int_{t_0}^{\bar{t}_f} \mathbf{F}(u(s), \mathbf{X}_n(\tau_n, s)) ds + \sum_{i=1}^m H_n(\bar{t}_f - \tau_i) \boldsymbol{\mu}_i,$$

d'où

$$\begin{aligned} \|\mathbf{X}_n(\tau_n, t_f^{(n)}) - \mathbf{X}_n(\tau_n, \bar{t}_f)\|_{d+1} &\leq \left| \int_{\bar{t}_f}^{t_f^{(n)}} \|\mathbf{F}(u(s), \mathbf{X}_n(\tau_n, s))\|_{d+1} ds \right| \\ &\quad + \sum_{i=1}^m \|\boldsymbol{\mu}_i\|_{d+1} |H_n(t_f^{(n)} - \tau_n^{(i)}) - H_n(\bar{t}_f - \tau_n^{(i)})|. \end{aligned}$$

Soit $\alpha > 0$. Grâce au lemme 2.5 encore valable ici, on choisit $N_1 > 0$ tel que

$$\forall n \geq N_1 \quad \left| \int_{\bar{t}_f}^{t_f^{(n)}} \|\mathbf{F}(u(s), \mathbf{X}_n(\tau_n, s))\|_{d+1} ds \right| < \alpha.$$

Soit $\varepsilon' > 0$ tel que $\varepsilon' < \bar{t}_f - \bar{\tau}_m$.

Comme

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (\tau_n, t_f^{(n)}) = (\bar{\tau}, \bar{t}_f),$$

soit encore

$$\forall i \in \{1, \dots, m\} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \tau_n^{(i)} = \bar{\tau}_i$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} t_f^{(n)} = \bar{t}_f,$$

on choisit $N_2 > 0$ tel que

$$\forall n \geq N_2 \quad |t_f^{(n)} - \bar{t}_f| < \frac{\varepsilon'}{2}$$

et

$$\forall i \in \{1, \dots, m\} \quad \forall n \geq N_2 \quad |\tau_n^{(i)} - \bar{\tau}_i| < \frac{\varepsilon'}{2}.$$

On peut alors écrire

$$\forall i \in \{1, \dots, m\} \quad \forall n \geq N_2$$

$$|H_n(t_f^{(n)} - \tau_n^{(i)}) - H_n(\bar{t}_f - \tau_n^{(i)})| \leq H_n(\bar{t}_f - \bar{\tau}_i + \varepsilon') - H_n(\bar{t}_f - \bar{\tau}_i - \varepsilon').$$

Comme $\bar{t}_f - \bar{\tau}_i + \varepsilon'$ et $\bar{t}_f - \bar{\tau}_i - \varepsilon'$ sont strictement positifs, on en déduit

$$\forall i \in \{1, \dots, m\} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} |H_n(t_f^{(n)} - \tau_n^{(i)}) - H_n(\bar{t}_f - \tau_n^{(i)})| = 0.$$

Soit alors $N_3 > 0$ tel que

$$\forall n \geq N_3 \quad \sum_{i=1}^m \|\mu_i\|_{d+1} |H_n(t_f^{(n)} - \tau_n^{(i)}) - H_n(\bar{t}_f - \tau_n^{(i)})| < \alpha.$$

On a donc, en posant $N = \max(N_1, N_3)$

$$\forall n \geq N \quad \|\mathbf{X}_n(\tau_n, t_f^{(n)}) - \mathbf{X}_n(\tau_n, \bar{t}_f)\| < 2\alpha.$$

Le réel α étant choisi arbitrairement, on en déduit la convergence annoncée. \square

Comme pour le problème précédent, la résolution du problème hybride peut se faire en utilisant la représentation. Cette méthode est justifiée par le théorème 3.8 ci-dessous.

Théorème 3.8. *Si $\bar{\tau}_m < \bar{t}_f$, alors le couple $(\bar{\tau}, \bar{t}_f)$ réalise un minimum à ε près pour la fonction coût J , c'est-à-dire*

$$m \leq J(\bar{\tau}, \bar{t}_f) \leq m + \varepsilon$$

où ε a été fixé au début du paragraphe et où on a posé

$$m = \inf_{(\tau, t_f) \in \mathcal{T}'} J(\tau, t_f).$$

Démonstration. Soit $n > 0$. Par définition de $(\tau_n, t_f^{(n)})$, on a

$$\forall (\tau, t_f) \in \mathcal{T}' \quad J_n(\tau_n, t_f^{(n)}) < J_n(\tau, t_f) + \varepsilon.$$

En remarquant (voir le théorème 2.3) que

$$\forall (\tau, t_f) \in \mathcal{T}' \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \mathbf{X}_n(\tau, t_f) = \mathbf{X}(\tau, t_f),$$

soit encore

$$\forall (\tau, t_f) \in \mathcal{T}' \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} J_n(\tau, t_f) = J(\tau, t_f),$$

on obtient, grâce à la proposition 3.7,

$$\forall (\tau, t_f) \in \mathcal{T}' \quad J(\bar{\tau}, \bar{t}_f) \leq J(\tau, t_f) + \varepsilon.$$

Il en résulte

$$m \leq J(\bar{\tau}, \bar{t}_f) \leq m + \varepsilon,$$

ce qui signifie que $J(\bar{\tau}, \bar{t}_f)$ est un minimum à ε près pour J . \square

3.1.3 Poursuite de trajectoire

Problème hybride

Comme au paragraphe 3.1.1, on considère un système de type (3.1) avec l'instant final t_f fixé. En revanche, la commande u n'est plus fixée : on suppose $u \in \mathcal{U}$ où

$$\mathcal{U} = \{u : [t_0, t_f] \rightarrow U, u \text{ continue}\} . \quad (3.7)$$

La solution du système (3.1), définie sur $[t_0, t_f]$, est notée $\mathbf{x}(\boldsymbol{\tau}, u, \cdot)$ où $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \dots, \tau_m)$. Le problème consiste à trouver des instants de commutation $\tau_1^*, \dots, \tau_m^*$, tels que

$$\tau_1^* \leq \dots \leq \tau_m^* < t_f ,$$

et une fonction continue u^* permettant d'approcher au mieux, dans $L^2(t_0, t_f)$, un état désiré \mathbf{x}_d , que l'on s'est fixé, continu par morceaux sur $[t_0, t_f]$ et à valeurs dans \mathbb{R}^d . Cela revient, par exemple, à minimiser sur $\mathcal{T}'' \times \mathcal{U}$ la fonction coût définie par

$$\forall (\boldsymbol{\tau}, u) \in \mathcal{T}'' \times \mathcal{U}$$

$$\begin{aligned} J(\boldsymbol{\tau}, u) &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \|\mathbf{x}(\boldsymbol{\tau}, u, t) - \mathbf{x}_d(t)\|_d^2 dt + \frac{\rho}{2} \int_{t_0}^{t_f} u^2(t) dt \\ &= \frac{1}{2} \|\mathbf{x}(\boldsymbol{\tau}, u, \cdot) - \mathbf{x}_d\|_{L^2(t_0, t_f)}^2 + \frac{\rho}{2} \|u\|_{L^2(t_0, t_f)}^2 \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\mathcal{T}'' = \{\boldsymbol{\tau} \in [t_0, t_f]^m, \tau_1 \leq \tau_2 \leq \dots \leq \tau_m < t_f\}$$

et où $\rho > 0$ correspond au coût de la commande.

Problème issu de la représentation

On considère la représentation (3.3) du système hybride (3.1). La solution de la représentation s'écrit

$$\mathbf{X}_n(\boldsymbol{\tau}, u, \cdot) = (\mathbf{x}_n(\boldsymbol{\tau}, u, \cdot), \nu_n(\boldsymbol{\tau}, u, \cdot))^\top$$

où $\mathbf{x}_n(\boldsymbol{\tau}, u, \cdot)$ et $\nu_n(\boldsymbol{\tau}, u, \cdot)$ sont à valeurs dans \mathbb{R}^d et \mathbb{R} respectivement.

Le problème associé à la représentation consiste à minimiser, sur $\mathcal{T}'' \times \mathcal{U}$, la fonction coût J_n définie par

$$\forall (\boldsymbol{\tau}, u) \in \mathcal{T}'' \times \mathcal{U} \quad J_n(\boldsymbol{\tau}, u) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_n(\boldsymbol{\tau}, u, \cdot) - \mathbf{x}_d\|_{L^2(t_0, t_f)}^2 + \frac{\rho}{2} \|u\|_{L^2(t_0, t_f)}^2 .$$

Convergence entre les solutions

La non compacité de \mathcal{T}'' nous oblige, comme pour le problème à temps final libre, à travailler avec des minima à ε près.

On pose

$$m_n = \inf_{(\boldsymbol{\tau}, u) \in \mathcal{T}'' \times \mathcal{U}} J_n(\boldsymbol{\tau}, u) .$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $(\boldsymbol{\tau}_n, u_n) \in \mathcal{T}'' \times \mathcal{U}$ tel que

$$J_n(\boldsymbol{\tau}_n, u_n) < m_n + \frac{\varepsilon}{4} .$$

La suite $(\tau_n)_{n>0}$ est bornée et admet donc une sous-suite convergente, notée encore $(\tau_n)_{n>0}$, qui converge vers $\bar{\tau} \in \mathcal{T}$ où \mathcal{T} est défini comme en (3.2).

Nous allons montrer au théorème 3.10, comme précédemment, que la résolution du problème continu permet d'obtenir un minimum à ε près pour la fonction coût du problème hybride. Démontrons tout d'abord la proposition suivante.

Proposition 3.9. *Si $\bar{\tau}_m < t_f$, alors la suite $(J(\bar{\tau}, u_n) - J_n(\tau_n, u_n))_{n>0}$ converge vers 0.*

Démonstration. La démonstration du théorème 3.1, dans laquelle il suffit d'adapter les notations, permet d'obtenir les résultats de convergence suivants :

1. La suite $(\mathbf{X}_n(\tau_n, u_n, \cdot))_{n>0}$ converge uniformément vers $\mathbf{X}(\bar{\tau}, u_n, \cdot)$ sur tout intervalle I vérifiant

$$I \subset [t_0, t_f] \setminus \{\bar{\tau}_i ; i = 1, \dots, m\} ;$$

2. Pour tout i appartenant à $\{1, \dots, m\}$, la suite $(\mathbf{X}_n(\tau_n, u_n, \bar{\tau}_i) - H_n(\bar{\tau}_i - \tau_n^{(i)})\boldsymbol{\mu}_i)_{n>0}$ converge vers $\mathbf{X}(\bar{\tau}, u_n, \bar{\tau}_i) - \boldsymbol{\mu}_i$.

On en déduit

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mathbf{X}_n(\tau_n, u_n, \cdot) - \mathbf{X}(\bar{\tau}, u_n, \cdot)\|_{d+1}^2 \chi_{[t_0, t_f]} = 0 \quad \text{p.p.}$$

D'après le lemme 2.5, dont la démonstration est encore valable dans le cas présent, le théorème de convergence dominée de Lebesgue (voir annexe A) permet d'obtenir

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mathbf{X}_n(\tau_n, u_n, \cdot) - \mathbf{X}(\bar{\tau}, u_n, \cdot)\|_{L^2(t_0, t_f)} = 0 .$$

Finalement, comme

$$\begin{aligned} & \left| \|\mathbf{x}_n(\tau_n, u_n, \cdot) - \mathbf{x}_d\|_{L^2(t_0, t_f)} - \|\mathbf{x}(\bar{\tau}, u_n, \cdot) - \mathbf{x}_d\|_{L^2(t_0, t_f)} \right| \\ & \leq \|\mathbf{x}_n(\tau_n, u_n, \cdot) - \mathbf{x}(\bar{\tau}, u_n, \cdot)\|_{L^2(t_0, t_f)} \\ & \leq \|\mathbf{X}_n(\tau_n, u_n, \cdot) - \mathbf{X}(\bar{\tau}, u_n, \cdot)\|_{L^2(t_0, t_f)} , \end{aligned}$$

on obtient la convergence annoncée. □

Énonçons maintenant le principal résultat de ce paragraphe.

Théorème 3.10. *Il existe $N > 0$ tel que, pour tout $n \geq N$, le couple $(\bar{\tau}, u_n)$ réalise un minimum à ε près pour la fonction coût J , c'est-à-dire*

$$m \leq J(\bar{\tau}, u_n) \leq m + \varepsilon$$

où ε a été fixé précédemment et où l'on a posé

$$m = \inf_{(\boldsymbol{\tau}, u) \in \mathcal{T}'' \times \mathcal{U}} J(\boldsymbol{\tau}, u) .$$

Démonstration. Soit $n > 0$. Par définition de m_n et (τ_n, u_n) , on a

$$\forall (\boldsymbol{\tau}, u) \in \mathcal{T}'' \times \mathcal{U} \quad J_n(\tau_n, u_n) < J_n(\boldsymbol{\tau}, u) + \frac{\varepsilon}{4} . \quad (3.8)$$

Soit $N_1 > 0$, donné par la proposition 3.9, tel que

$$\forall n \geq N_1 \quad J(\bar{\tau}, u_n) - \frac{\varepsilon}{4} < J_n(\tau_n, u_n).$$

D'après (3.8), on obtient alors

$$\forall (\tau, u) \in \mathcal{T}'' \times \mathcal{U} \quad \forall n \geq N_1 \quad J(\bar{\tau}, u_n) < J_n(\tau, u) + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.9)$$

Soit maintenant $(\tilde{\tau}, \tilde{u}) \in \mathcal{T}'' \times \mathcal{U}$ tel que

$$J(\tilde{\tau}, \tilde{u}) < m + \frac{\varepsilon}{4}.$$

L'inégalité (3.9) permet d'écrire

$$\forall n \geq N_1 \quad J(\bar{\tau}, u_n) < J_n(\tilde{\tau}, \tilde{u}) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Or, en remarquant que

$$\begin{aligned} \left| \|\mathbf{x}_n(\tilde{\tau}, \tilde{u}, \cdot) - \mathbf{x}_d\|_{L^2(t_0, t_f)} - \|\mathbf{x}(\tilde{\tau}, \tilde{u}, \cdot) - \mathbf{x}_d\|_{L^2(t_0, t_f)} \right| &\leq \|\mathbf{x}_n(\tilde{\tau}, \tilde{u}, \cdot) - \mathbf{x}(\tilde{\tau}, \tilde{u}, \cdot)\|_{L^2([t_0, t_f])} \\ &\leq \|\mathbf{X}_n(\tilde{\tau}, \tilde{u}, \cdot) - \mathbf{X}(\tilde{\tau}, \tilde{u}, \cdot)\|_{L^2([t_0, t_f])}, \end{aligned}$$

le théorème 2.8 permet d'écrire

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n(\tilde{\tau}, \tilde{u}) = J(\tilde{\tau}, \tilde{u}).$$

Soit donc $N_2 > 0$ tel que

$$\forall n \geq N_2 \quad J_n(\tilde{\tau}, \tilde{u}) < J(\tilde{\tau}, \tilde{u}) + \frac{\varepsilon}{4}.$$

En posant $N = \max(N_1, N_2)$, on obtient alors

$$\forall n \geq N \quad J(\bar{\tau}, u_n) < J(\tilde{\tau}, \tilde{u}) + \frac{3\varepsilon}{4} < m + \varepsilon.$$

□

3.2 Commutation autonome

On présente trois problèmes faisant intervenir les systèmes hybrides à commutation autonome introduits au chapitre 2. Ils se traduisent par la minimisation d'une fonction coût. Le premier problème est un problème de commande optimale de type poursuite de trajectoire. Il consiste à déterminer une commande continue permettant d'approcher au mieux, entre l'instant initial et l'instant final, un état désiré. Le second problème est un problème d'identification de paramètres qui agissent sur le modèle et la commutation. Le dernier problème consiste à identifier, en plus d'autres paramètres, le seuil de commutation. Comme au paragraphe précédent, on décrit les problèmes hybrides et les problèmes issus de la représentation puis on démontre des résultats de convergence entre les solutions.

3.2.1 Poursuite de trajectoire

Problème hybride

Soit $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^d$ une valeur seuil. Pour $t \in [t_0, t_f]$, on considère le système à commutation autonome introduit au chapitre 2

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_1(u(t), \mathbf{x}(t)) & \text{si } \mathbf{x}(t) \leq \mathbf{a} \\ \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_2(u(t), \mathbf{x}(t)) & \text{sinon} \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (3.10)$$

où $\mathbf{x}(t) \leq \mathbf{a}$ signifie

$$\forall i \in \{1, \dots, d\} \quad x_i(t) \leq a_i .$$

On fait les mêmes hypothèses sur \mathbf{x}_0 et sur les fonctions \mathbf{f}_1 et \mathbf{f}_2 , supposées strictement positives, de classe \mathcal{C}^1 sur $I \times \mathbb{R}^d$, à valeurs dans \mathbb{R}^d , où I est un intervalle ouvert de \mathbb{R} contenant un ensemble fermé borné U . De plus, ces fonctions vérifient

$$\exists C_1 \quad \exists C_2 \quad \forall i \in \{1, 2\} \quad \forall (u, \mathbf{x}) \in I \times \mathbb{R}^d \quad \|\mathbf{f}_i(u, \mathbf{x})\|_d \leq C_1 \|\mathbf{x}\|_d + C_2 .$$

Enfin, on suppose $\mathbf{x}_0 \leq \mathbf{a}$.

La fonction de commande u n'est plus fixée : on suppose $u \in \mathcal{U}$ où \mathcal{U} est défini en (3.7).

La solution du système (3.10) est alors notée $\mathbf{x}(u, \cdot)$.

Le problème consiste à trouver une fonction u^* appartenant à \mathcal{U} permettant d'approcher au mieux, dans l'espace $L^2(t_0, t_f)$ un état désiré \mathbf{x}_d continu sur $[t_0, t_f]$ et à valeurs dans \mathbb{R}^d . On traduit le problème par la minimisation sur \mathcal{U} de la fonction coût définie par

$$\forall u \in \mathcal{U} \quad J(u) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}(u, \cdot) - \mathbf{x}_d\|_{L^2(t_0, t_f)}^2 + \frac{\rho}{2} \|u\|_{L^2(t_0, t_f)}^2$$

où $\rho > 0$ sera à choisir lors d'une application numérique.

Problème issu de la représentation

Comme il a été vu au chapitre 2, la représentation de (3.10) est donnée par les systèmes suivants

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \prod_{i=1}^d \tilde{H}_n(a_i - x_i(t)) \mathbf{f}_1(u(t), \mathbf{x}(t)) \\ \quad + \left(1 - \prod_{i=1}^d \tilde{H}_n(a_i - x_i(t))\right) \mathbf{f}_2(u(t), \mathbf{x}(t)), \quad t \in [t_0, t_f] \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 . \end{cases} \quad (3.11)$$

La solution de (3.11) est notée $\mathbf{x}_n(u, \cdot)$ et le problème de commande optimale associé au problème hybride consiste à minimiser sur \mathcal{U} la fonction coût J_n définie par

$$\forall u \in \mathcal{U} \quad J_n(u) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_n(u, \cdot) - \mathbf{x}_d\|_{L^2(t_0, t_f)}^2 + \frac{\rho}{2} \|u\|_{L^2(t_0, t_f)}^2 .$$

Convergence entre les solutions

On va démontrer au théorème 3.12 un résultat de convergence qui permettra de remplacer la résolution du problème hybride par celle du problème issu de la représentation.

On pose

$$m_n = \inf_{\mathcal{U}} J_n$$

où J_n est la fonction coût définie ci-dessus, et on introduit un minimum à ε près car on n'est pas assuré d'avoir $u \in \mathcal{U}$ tel que $J_n(u) = m_n$.

Soit donc $\varepsilon > 0$ et $u_n \in \mathcal{U}$ tel que

$$J_n(u_n) < m_n + \frac{\varepsilon}{4}. \quad (3.12)$$

Proposition 3.11. *La suite $(J(u_n) - J_n(u_n))_{n>0}$ converge vers 0.*

Démonstration. En adaptant la démonstration du théorème 2.12, on obtient

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \|\mathbf{x}_n(u_n, \cdot) - \mathbf{x}\|$$

□

Théorème 3.12. *Il existe $N > 0$ tel que pour tout $n \geq N$, u_n , choisi en (3.12), réalise un minimum à ε près pour la fonction coût J , c'est-à-dire*

$$m \leq J(u_n) \leq m + \varepsilon$$

où m

$$\bar{m} + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Soit $N_1 > 0$, donné par la proposition 3.11, tel que

$$\forall n \geq N_1 \quad J(u_n) - \frac{\varepsilon}{4} < J_n(u_n).$$

On obtient alors

$$\forall u \in \mathcal{U} \quad \forall n \geq N_1 \quad J(u_n) < J_n(u) + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.13)$$

Soit maintenant $\tilde{u} \in \mathcal{U}$ tel que

$$J(\tilde{u}) = \bar{m} + \frac{\varepsilon}{4}.$$

L'inégalité (3.13) permet d'écrire

$$\forall n \geq N_1 \quad J(u_n) < J_n(\tilde{u}) + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Avec les mêmes arguments que pour la proposition 3.11, on montre que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n(\tilde{u}) = J(\tilde{u}).$$

Soit donc $N_2 > 0$ tel que

$$\forall n \geq N_2 \quad J_n(\tilde{u}) < J(\tilde{u}) + \frac{\varepsilon}{4}.$$

En posant $N = \max\{N_1, N_2\}$, on obtient alors

$$\forall n \geq N \quad J(u_n) < J(\tilde{u}) + \frac{3\varepsilon}{4} < m + \varepsilon.$$

□

3.2.2 Identification de paramètres

Problème hybride

Soit le système à commutation autonome suivant

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}(t)) & \text{si } \mathbf{x}(t) \leq \mathbf{a} \\ \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_2(\mathbf{p}_2, \mathbf{x}(t)) & \text{sinon} \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (3.14)$$

où $t \in [t_0, t_f]$ et où les paramètres \mathbf{p}_1 et \mathbf{p}_2 appartiennent respectivement à des ensembles fermés bornés \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 de \mathbb{R}^ℓ , $\ell \geq 1$. On conserve les mêmes propriétés pour \mathbf{x}_0 , \mathbf{a} et les fonctions \mathbf{f}_1 et \mathbf{f}_2 que précédemment. Comme annoncé à la remarque 2.13, les résultats de convergence du chapitre 2 s'appliquent à ce système.

On suppose que les paramètres \mathbf{p}_1 et \mathbf{p}_2 sont inconnus. Afin d'identifier ces paramètres, on dispose de mesures $\widehat{\mathbf{x}}(t_i)$ effectuées sur le système en un nombre fini d'instant t_1, t_2, \dots, t_N appartenant à l'intervalle $[t_0, t_f]$.

On note $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$. Pour $\mathbf{p} \in \mathcal{P}$, on note $\mathbf{x}(\mathbf{p}, \cdot)$ la solution du système (3.14), définie sur $[t_0, t_f]$, où \mathbf{p} représente le couple $(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$ des paramètres à identifier. On traduit le problème par la minimisation sur \mathcal{P} de la fonction coût, généralement non convexe, définie par

$$\forall \mathbf{p} \in \mathcal{P} \quad J(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \|\mathbf{x}(\mathbf{p}, t_i) - \widehat{\mathbf{x}}(t_i)\|_d^2.$$

Pour établir les résultats de convergence, nous nous plaçons dans un cadre théorique dans lequel nous disposons de mesures à chaque instant. Nous allons donc remplacer la fonction coût J , définie ci-dessus, par une nouvelle fonction coût, encore notée J , faisant intervenir un état observé continu $\widehat{\mathbf{x}}$ défini sur l'intervalle $[t_0, t_f]$ tout entier.

Nous verrons au chapitre 4 que les expressions des gradients sont plus simples avec cette nouvelle fonction. La mise en œuvre numérique, pour laquelle il suffira d'effectuer une interpolation à partir des mesures $\widehat{\mathbf{x}}(t_i)$, en sera facilitée.

La nouvelle fonction coût est définie par

$$\forall \mathbf{p} \in \mathcal{P} \quad J(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \|\mathbf{x}(\mathbf{p}, t) - \widehat{\mathbf{x}}(t)\|_d^2 dt = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}(\mathbf{p}, \cdot) - \widehat{\mathbf{x}}\|_{L^2(t_0, t_f)}^2.$$

Problème issu de la représentation

D'après ce qui a été vu au chapitre 2, on peut représenter le système (3.14) par les systèmes suivants

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \prod_{i=1}^d \tilde{H}_n(a_i - x_i(t)) \mathbf{f}_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}(t)) \\ \quad + \left(1 - \prod_{i=1}^d \tilde{H}_n(a_i - x_i(t))\right) \mathbf{f}_2(\mathbf{p}_2, \mathbf{x}(t)), \quad t \in [t_0, t_f] \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \quad (3.15)$$

On note $\mathbf{x}_n(\mathbf{p}, \cdot)$, où $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)$, la solution de (3.15), définie sur $[t_0, t_f]$, et on associe au problème hybride décrit ci-dessus un nouveau problème d'identification qui consiste à minimiser sur \mathcal{P} la fonction coût J_n définie par

$$\forall \mathbf{p} \in \mathcal{P} \quad J_n(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_n(\mathbf{p}, \cdot) - \hat{\mathbf{x}}\|_{L^2(t_0, t_f)}^2.$$

Convergence entre les solutions

Pour montrer qu'il est possible de remplacer le problème hybride d'identification par le problème continu issu de la représentation, nous allons utiliser la même démarche que pour le problème de poursuite de trajectoire décrit au paragraphe 3.2.1. La continuité de la fonction coût n'est en effet pas acquise, le paramètre \mathbf{p}_1 agissant sur l'instant de commutation, ce qui nous oblige à travailler avec des minima à ε près.

On pose

$$m_n = \inf_{\mathcal{P}} J_n.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et $\mathbf{p}_n = (\mathbf{p}_n^{(1)}, \mathbf{p}_n^{(2)}) \in \mathcal{P}$ tel que

$$J_n(\mathbf{p}_n) < m_n + \frac{\varepsilon}{4}. \quad (3.16)$$

Proposition 3.13. *La suite $(J(\mathbf{p}_n) - J_n(\mathbf{p}_n))_{n>0}$ converge vers 0.*

Démonstration. Il suffit, dans la démonstration de la proposition 3.11, de remplacer u_n et \mathcal{U} par \mathbf{p}_n et \mathcal{P} respectivement. De plus, si $s \in [t_0, \tau_n)$, $u_n(s)$ est remplacé par $\mathbf{p}_n^{(1)}$ et par $\mathbf{p}_n^{(2)}$ si $s \in (\tau_n, t_f]$. □

Théorème 3.14. *Il existe $N > 0$ tel que pour tout $n \geq N$, \mathbf{p}_n , choisi en (3.16), réalise un minimum à ε près pour la fonction coût J , c'est-à-dire*

$$m \leq J(\mathbf{p}_n) \leq m + \varepsilon$$

où $m = \inf_{\mathcal{P}} J$.

Démonstration. Ce théorème se démontre comme le théorème 3.12 en faisant les adaptations décrites pour la démonstration de la proposition 3.13. □

3.2.3 Identification d'un seuil

Problème hybride

Il est possible, en plus des paramètres \mathbf{p}_1 et \mathbf{p}_2 , d'identifier le seuil \mathbf{a} . Cependant, on peut être confronté, dans le cas hybride aussi bien qu'avec la représentation, à des problèmes d'identifiabilité. En effet, seule la composante de \mathbf{a} correspondant au premier franchissement du seuil intervient dans le problème. Les autres composantes ne peuvent donc pas être identifiées. C'est pourquoi, nous allons considérer ici un seuil appartenant à \mathbb{R} . On fixe alors j dans $\{1, \dots, d\}$ et on suppose que le système hybride commute dès que x_j atteint un seuil a appartenant à un ensemble fermé borné K_a inclus dans \mathbb{R} .

Le système hybride considéré s'écrit donc

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}(t)) & \text{si } x_j(t) \leq a \\ \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_2(\mathbf{p}_2, \mathbf{x}(t)) & \text{sinon} \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

et on fait les mêmes hypothèses que ci-dessus sur t , \mathbf{p}_1 , \mathbf{p}_2 , \mathbf{f}_1 , \mathbf{f}_2 et \mathbf{x}_0 .

La solution de ce système est notée $\mathbf{x}(\mathbf{p}, a, \cdot)$ et la fonction coût à minimiser est définie par

$$\forall (\mathbf{p}, a) \in \mathcal{P} \times K_a \quad J(\mathbf{p}, a) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}(\mathbf{p}, a, \cdot) - \widehat{\mathbf{x}}\|_{L^2(t_0, t_f)}^2.$$

Problème issu de la représentation

La représentation du système hybride est de la forme suivante

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \widetilde{H}_n(a - x_j(t)) \mathbf{f}_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}(t)) \\ \quad \quad \quad + (1 - \widetilde{H}_n(a - x_j(t))) \mathbf{f}_2(\mathbf{p}_2, \mathbf{x}(t)), \quad t \in [t_0, t_f] \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \quad (3.17)$$

La fonction coût associée est définie par

$$\forall (\mathbf{p}, a) \in \mathcal{P} \times K_a \quad J_n(\mathbf{p}, a) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_n(\mathbf{p}, a, \cdot) - \widehat{\mathbf{x}}\|_{L^2(t_0, t_f)}^2$$

où $\mathbf{x}_n(\mathbf{p}, a, \cdot)$ représente la solution du système (3.17).

Convergence entre les solutions

Les résultats de convergence du chapitre 2 sont encore valables ici à condition de remplacer $\prod_{i=1}^d \widetilde{H}_n(a_i - x_n^{(i)})$ par $\widetilde{H}_n(a - x_n^{(j)})$. De même, les résultats du paragraphe 3.2.2 s'adaptent à ce nouveau problème d'identification, c'est-à-dire que la résolution du problème issu de la représentation permet d'obtenir, si n est choisi suffisamment grand, un minimum à ε près pour la fonction coût J .

3.3 Conclusion

Des problèmes de commande optimale et d'identification ont été introduits dans ce chapitre pour des systèmes à sauts et commutations commandés ou à commutation autonome. Les représentations de ces systèmes hybrides ont permis d'associer à chaque problème hybride un nouveau problème continu qui pourra être utilisé lors de la résolution. Des résultats de convergence, vers des minima au sens usuel ou à ε près, ont en effet montré que les résolutions des problèmes continus fournissent des approximations des solutions des problèmes hybrides. Le chapitre suivant expose des méthodes de résolution qui utilisent les représentations.

Chapitre 4

Méthodes de résolution

Nous avons montré dans le chapitre précédent que les problèmes de commande et d'identification d'une classe de systèmes hybrides peuvent être résolus à l'aide de représentations continues de ces systèmes. Ceux qui sont associés aux représentations sont alors des problèmes qui ne nécessitent plus la prise en compte de discontinuités, et les méthodes classiques de commande et d'identification sont alors *a priori* applicables.

C'est pour approfondir ce point et mettre en évidence ce qu'apporte la représentation que trois méthodes de résolution sont présentées dans ce chapitre.

La première méthode repose sur l'utilisation du calcul des variations et fait l'objet du premier paragraphe de ce chapitre. Elle permet d'obtenir les expressions des gradients des fonctions coût à minimiser, ce qui rend possible la mise en œuvre de méthodes de descente. Ce formalisme est appliqué à des systèmes hybrides et à leurs représentations, pour des problèmes de commande et d'identification. La simplification qu'apporte la représentation dans les calculs apparaît alors clairement, comme il a été mentionné dans l'introduction.

La deuxième méthode présentée est une méthode stochastique qui permet de minimiser de manière globale les fonctions coût associées à des problèmes de commande et de s'affranchir des difficultés liées à la non convexité éventuelle des critères. La méthode est basée sur un algorithme établi à partir d'un résultat de convergence en probabilité qui est démontré ici. Une condition nécessaire pour pouvoir appliquer cette méthode est la continuité de la fonction coût. La vérification de cette condition est démontrée pour les fonctions coût associées à un problème hybride de commande et au problème continu associé. Les avantages et inconvénients de la méthode sont discutés.

Une troisième méthode est présentée plus brièvement. Elle est basée sur l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman dont la connaissance de la solution permet de résoudre des problèmes de commande associés à des systèmes continus. Les représentations permettent donc d'introduire un cadre rigoureux à la mise en œuvre de cette méthode. Nous l'appliquons à un problème hybride de poursuite de trajectoire.

4.1 Calcul des variations

Nous nous intéressons à des problèmes de commande et d'identification étudiés au chapitre 3. Afin de simplifier la présentation des calculs, on considère, lorsque les commutations sont commandées, des systèmes avec seulement un ou deux instants de commutation mais les résultats sont énoncés avec un nombre quelconque de commutations.

Pour chaque problème hybride ou issu de la représentation, on rappelle le système hybride ou continu et la fonction coût associée. Le calcul des variations est ensuite utilisé pour déterminer les gradients des fonctions coût. Il fait intervenir un état adjoint, solution d'un système adjoint

qui est introduit pour chaque problème.

Ces problèmes feront l'objet de mises en œuvre numériques au chapitre 5.

4.1.1 Problème à temps final fixé

Calcul des gradients pour le problème hybride

On considère le problème introduit au paragraphe 3.1.1 où on suppose qu'il n'y a que deux commutations. On conserve les mêmes hypothèses et notations qu'au chapitre 3.

On s'intéresse donc au système hybride suivant :

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_1(u(t), \mathbf{x}(t)) & \text{si } t \in [t_0, \tau_1[\\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 & \\ \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_2(u(t), \mathbf{x}(t)) & \text{si } t \in [\tau_1, \tau_2[\\ \mathbf{x}(\tau_1) = \mathbf{x}(\tau_1^-) + \boldsymbol{\eta}_1 & \\ \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_3(u(t), \mathbf{x}(t)) & \text{si } t \in [\tau_2, t_f] \\ \mathbf{x}(\tau_2) = \mathbf{x}(\tau_2^-) + \boldsymbol{\eta}_2, & \end{array} \right. \quad (4.1)$$

et la fonction coût à minimiser est définie par

$$\forall (\tau_1, \tau_2) \in \mathcal{T} \quad J(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}(\tau_1, \tau_2, t_f) - \mathbf{x}_d\|_d^2$$

où l'on a posé

$$\mathcal{T} = \left\{ (\tau_1, \tau_2) \in [t_0, t_f]^2, \tau_1 \leq \tau_2 \right\}. \quad (4.2)$$

Pour alléger l'écriture, la solution de (4.1) sera notée \mathbf{x} au lieu de $\mathbf{x}(\tau_1, \tau_2, \cdot)$.

En introduisant un état adjoint $\boldsymbol{\lambda}$ et des multiplicateurs $\boldsymbol{\delta}_1$ et $\boldsymbol{\delta}_2$, on définit une nouvelle fonction \tilde{J} de la façon suivante

$$\begin{aligned} \forall (\tau_1, \tau_2) \in \mathcal{T} \quad \tilde{J}(\tau_1, \tau_2) &= \frac{1}{2} \|\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}_d\|_d^2 + \int_{t_0}^{\tau_1} \boldsymbol{\lambda}(t)^\top (\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{f}_1(u(t), \mathbf{x}(t))) dt \\ &+ \boldsymbol{\delta}_1^\top (\mathbf{x}(\tau_1) - \mathbf{x}(\tau_1^-) - \boldsymbol{\eta}_1) + \int_{\tau_1}^{\tau_2} \boldsymbol{\lambda}(t)^\top (\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{f}_2(u(t), \mathbf{x}(t))) dt \\ &+ \boldsymbol{\delta}_2^\top (\mathbf{x}(\tau_2) - \mathbf{x}(\tau_2^-) - \boldsymbol{\eta}_2) + \int_{\tau_2}^{t_f} \boldsymbol{\lambda}(t)^\top (\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{f}_3(t, \mathbf{x}(t))) dt. \end{aligned}$$

Calculons la variation de \tilde{J} suivant la direction $\boldsymbol{\varphi}$ où $\boldsymbol{\varphi}$ appartient à l'espace d'état (voir par exemple [15] et [25] pour de tels calculs).

On reprend les notations traditionnelles du calcul des variations : $\delta \mathbf{x}$ représente une fonction qui appartient au même espace que \mathbf{x} , appelée variation de \mathbf{x} , sans confusion possible ici avec les multiplicateurs $\boldsymbol{\delta}_1$ et $\boldsymbol{\delta}_2$.

Il vient

$$\begin{aligned}
\delta \tilde{J} &= (\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}_d)^\top \delta \mathbf{x}(t_f) + \int_{t_0}^{\tau_1} \left[\boldsymbol{\lambda}(t)^\top \dot{\boldsymbol{\varphi}}(t) - \left(\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}}(u(t), \mathbf{x}(t))^\top \boldsymbol{\lambda}(t) \right)^\top \boldsymbol{\varphi}(t) \right] dt \\
&\quad + \boldsymbol{\lambda}(\tau_1^-)^\top [\dot{\mathbf{x}}(\tau_1^-) - \mathbf{f}_1(u(\tau_1), \mathbf{x}(\tau_1^-))] \delta \tau_1 - \boldsymbol{\delta}_1^\top \delta \mathbf{x}(\tau_1^-) + \boldsymbol{\delta}_1^\top \delta \mathbf{x}(\tau_1) \\
&+ \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left[\boldsymbol{\lambda}(t)^\top \dot{\boldsymbol{\varphi}}(t) - \left(\frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}}(u(t), \mathbf{x}(t))^\top \boldsymbol{\lambda}(t) \right)^\top \boldsymbol{\varphi}(t) \right] dt - \boldsymbol{\lambda}(\tau_1)^\top [\dot{\mathbf{x}}(\tau_1) - \mathbf{f}_2(u(\tau_1), \mathbf{x}(\tau_1))] \delta \tau_1 \\
&\quad + \boldsymbol{\lambda}(\tau_2^-)^\top [\dot{\mathbf{x}}(\tau_2^-) - \mathbf{f}_2(u(\tau_2), \mathbf{x}(\tau_2^-))] \delta \tau_2 - \boldsymbol{\delta}_2^\top \delta \mathbf{x}(\tau_2^-) + \boldsymbol{\delta}_2^\top \delta \mathbf{x}(\tau_2) \\
&+ \int_{\tau_2}^{t_f} \left[\boldsymbol{\lambda}(t)^\top \dot{\boldsymbol{\varphi}}(t) - \left(\frac{\partial \mathbf{f}_3}{\partial \mathbf{x}}(u(t), \mathbf{x}(t))^\top \boldsymbol{\lambda}(t) \right)^\top \boldsymbol{\varphi}(t) \right] dt - \boldsymbol{\lambda}(\tau_2)^\top [\dot{\mathbf{x}}(\tau_2) - \mathbf{f}_3(u(\tau_2), \mathbf{x}(\tau_2))] \delta \tau_2 .
\end{aligned}$$

En intégrant les termes $\boldsymbol{\lambda}^\top \dot{\boldsymbol{\varphi}}$ par parties et en utilisant les relations (voir par exemple [10])

$$\boldsymbol{\varphi}(\tau_i) = \delta \mathbf{x}(\tau_i) - \dot{\mathbf{x}}(\tau_i) \delta \tau_i, \quad i \in \{1, 2, 3\} ;$$

$$\boldsymbol{\varphi}(\tau_i^-) = \delta \mathbf{x}(\tau_i^-) - \dot{\mathbf{x}}(\tau_i^-) \delta \tau_i, \quad i \in \{1, 2, 3\} ;$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t_f) = \delta \mathbf{x}(t_f) ;$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t_0) = 0 ,$$

on obtient

$$\begin{aligned}
\delta \tilde{J} &= \left((\mathbf{x}(t_f) - \mathbf{x}_d)^\top + \boldsymbol{\lambda}(t_f)^\top \right) \delta \mathbf{x}(t_f) + (\boldsymbol{\lambda}(\tau_1^-)^\top - \boldsymbol{\delta}_1^\top) \delta \mathbf{x}(\tau_1^-) \\
&\quad + (-\boldsymbol{\lambda}(\tau_1)^\top + \boldsymbol{\delta}_1^\top) \delta \mathbf{x}(\tau_1) + (\boldsymbol{\lambda}(\tau_2^-)^\top - \boldsymbol{\delta}_2^\top) \delta \mathbf{x}(\tau_2^-) + (-\boldsymbol{\lambda}(\tau_2)^\top + \boldsymbol{\delta}_2^\top) \delta \mathbf{x}(\tau_2) \\
&\quad - \int_{t_0}^{\tau_1} \left(\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) + \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}}(u(t), \mathbf{x}(t))^\top \boldsymbol{\lambda}(t) \right)^\top \boldsymbol{\varphi}(t) dt \\
&\quad - \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) + \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}}(u(t), \mathbf{x}(t))^\top \boldsymbol{\lambda}(t) \right)^\top \boldsymbol{\varphi}(t) dt \\
&\quad - \int_{\tau_2}^{t_f} \left(\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) + \frac{\partial \mathbf{f}_3}{\partial \mathbf{x}}(u(t), \mathbf{x}(t))^\top \boldsymbol{\lambda}(t) \right)^\top \boldsymbol{\varphi}(t) dt \\
&\quad + \left(\boldsymbol{\lambda}(\tau_1)^\top \mathbf{f}_2(u(\tau_1), \mathbf{x}(\tau_1)) - \boldsymbol{\lambda}(\tau_1^-)^\top \mathbf{f}_1(u(\tau_1), \mathbf{x}(\tau_1^-)) \right) \delta \tau_1 \\
&\quad + \left(\boldsymbol{\lambda}(\tau_2)^\top \mathbf{f}_3(u(\tau_2), \mathbf{x}(\tau_2)) - \boldsymbol{\lambda}(\tau_2^-)^\top \mathbf{f}_2(u(\tau_2), \mathbf{x}(\tau_2^-)) \right) \delta \tau_2 .
\end{aligned}$$

On choisit $\boldsymbol{\delta}_1$, $\boldsymbol{\delta}_2$ et $\boldsymbol{\lambda}$ de façon à annuler les coefficients de $\delta \mathbf{x}$.

Il en résulte

$$\forall i \in \{1, 2\} \quad \boldsymbol{\delta}_i = \boldsymbol{\lambda}(\tau_i^-) = \boldsymbol{\lambda}(\tau_i)$$

et

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = \mathbf{x}_d - \mathbf{x}(t_f) .$$

Le système adjoint s'écrit alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\lambda}(t_f) = \mathbf{x}_d - \mathbf{x}(t_f) \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\frac{\partial \mathbf{f}_3}{\partial \mathbf{x}}(u(t), \mathbf{x}(t))^\top \boldsymbol{\lambda}(t) \quad \text{si } t \in [\tau_2, t_f] \\ \boldsymbol{\lambda}(\tau_2^-) = \boldsymbol{\lambda}(\tau_2) \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}}(u(t), \mathbf{x}(t))^\top \boldsymbol{\lambda}(t) \quad \text{si } t \in [\tau_1, \tau_2[\\ \boldsymbol{\lambda}(\tau_1^-) = \boldsymbol{\lambda}(\tau_1) \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}}(u(t), \mathbf{x}(t))^\top \boldsymbol{\lambda}(t) \quad \text{si } t \in [t_0, \tau_1[, \end{array} \right.$$

et les gradients de la fonction coût J par rapport aux instants de commutation τ_1 et τ_2 sont donnés par

$$\begin{aligned} \nabla J_{\tau_1} &= \boldsymbol{\lambda}(\tau_1)^\top \left(\mathbf{f}_2(u(\tau_1), \mathbf{x}(\tau_1)) - \mathbf{f}_1(u(\tau_1), \mathbf{x}(\tau_1^-)) \right), \\ \nabla J_{\tau_2} &= \boldsymbol{\lambda}(\tau_2)^\top \left(\mathbf{f}_3(u(\tau_2), \mathbf{x}(\tau_2)) - \mathbf{f}_2(u(\tau_2), \mathbf{x}(\tau_2^-)) \right). \end{aligned}$$

Pour un système hybride (4.1) comportant m instants de commutation, on obtient de façon analogue le système adjoint suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\lambda}(t_f) = \mathbf{x}_d - \mathbf{x}(t_f) \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\frac{\partial \mathbf{f}_{m+1}}{\partial \mathbf{x}}(u(t), \mathbf{x}(t))^\top \boldsymbol{\lambda}(t) \quad \text{si } t \in [\tau_m, t_f] \\ \boldsymbol{\lambda}(\tau_i^-) = \boldsymbol{\lambda}(\tau_i), \quad i = 2, \dots, m \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{x}}(u(t), \mathbf{x}(t))^\top \boldsymbol{\lambda}(t) \quad \text{si } t \in [\tau_{i-1}, \tau_i[, \quad i = 2, \dots, m \\ \boldsymbol{\lambda}(\tau_1^-) = \boldsymbol{\lambda}(\tau_1) \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}}(u(t), \mathbf{x}(t))^\top \boldsymbol{\lambda}(t) \quad \text{si } t \in [t_0, \tau_1[. \end{array} \right.$$

Les expressions des gradients par rapport aux instants de commutations sont données par

$$\forall i \in \{1, \dots, m\} \quad \nabla J_{\tau_i} = \boldsymbol{\lambda}(\tau_i)^\top \left(\mathbf{f}_{i+1}(u(\tau_i), \mathbf{x}(\tau_i)) - \mathbf{f}_i(u(\tau_i), \mathbf{x}(\tau_i^-)) \right).$$

Calcul des gradients pour le problème issu de la représentation

Avec les mêmes notations qu'au paragraphe 3.1.1, la représentation du système (4.1) s'écrit

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(u(t), \mathbf{X}(t)) + \dot{H}_n(t - \tau_1) \boldsymbol{\mu}_1 + \dot{H}_n(t - \tau_2) \boldsymbol{\mu}_2, \quad t \in [t_0, t_f] \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 + H_n(t_0 - \tau_1) \boldsymbol{\mu}_1 + H_n(t_0 - \tau_2) \boldsymbol{\mu}_2 . \end{array} \right. \quad (4.3)$$

La solution de (4.3) est notée $\mathbf{X}_n(\tau_1, \tau_2, \cdot)$ et la fonction coût J_n à minimiser est définie par

$$\forall (\tau_1, \tau_2) \in \mathcal{T} \quad J_n(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{2} \|\mathbf{X}_n(\tau_1, \tau_2, t_f) - \mathbf{X}_d\|_{d+1}^2 .$$

Quitte à définir \mathcal{T} par

$$\mathcal{T} = \left\{ (\tau_1, \tau_2) \in]t_0, t_f]^2, \tau_1 \leq \tau_2 \right\}$$

au lieu de (4.2), nous pouvons choisir comme représentation de (4.1) le système suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(u(t), \mathbf{X}(t)) + \dot{H}_n(t - \tau_1) \boldsymbol{\mu}_1 + \dot{H}_n(t - \tau_2) \boldsymbol{\mu}_2, \quad t \in [t_0, t_f] \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 . \end{array} \right. \quad (4.4)$$

En effet, dès que $\tau_1 > t_0$, le terme $H_n(t_0 - \tau_1) \boldsymbol{\mu}_1 + H_n(t_0 - \tau_2) \boldsymbol{\mu}_2$ converge vers 0 quand n tend vers l'infini. Les résultats de convergence du chapitre 2 sont conservés si on suppose $\tau_1 \neq t_0$.

Pour les résultats développés au paragraphe 3.1.1, la condition $\tau_1 > t_0$ oblige à travailler à ε près. On obtient dans ce cas, de la même façon que pour le problème à temps final libre du paragraphe 3.1.2, une convergence à ε près.

Pour effectuer les calculs des gradients, nous allons travailler avec la représentation (4.4) qui permet d'avoir $\delta \mathbf{X}_n(t_0) = 0$.

Pour alléger l'écriture dans les calculs qui suivent, on note \mathbf{X}_n au lieu de $\mathbf{X}_n(\tau_1, \tau_2, \cdot)$.

On définit, en introduisant un état adjoint $\boldsymbol{\lambda}_n$, une nouvelle fonction \tilde{J}_n comme suit

$$\begin{aligned} \forall (\tau_1, \tau_2) \in \mathcal{T} \quad \tilde{J}_n(\tau_1, \tau_2) &= \frac{1}{2} \|\mathbf{X}_n(t_f) - \mathbf{X}_d\|_{d+1}^2 \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{\lambda}_n(t)^\top \left(\dot{\mathbf{X}}_n(t) - \mathbf{F}(u(t), \mathbf{X}_n(t)) - \dot{H}_n(t - \tau_1) \boldsymbol{\mu}_1 - \dot{H}_n(t - \tau_2) \boldsymbol{\mu}_2 \right) dt . \end{aligned}$$

La variation de \tilde{J}_n suivant la direction $(\boldsymbol{\varphi}_n, \boldsymbol{\nu})$, où $\boldsymbol{\varphi}_n$ appartient à l'espace d'état et $\boldsymbol{\nu}$ appartient à l'espace des commandes, s'écrit

$$\begin{aligned} \delta \tilde{J}_n &= (\mathbf{X}_n(t_f) - \mathbf{X}_d)^\top \delta \mathbf{X}_n(t_f) + \int_{t_0}^{t_f} \left[\boldsymbol{\lambda}_n(t)^\top \dot{\boldsymbol{\varphi}}_n(t) - \frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial \mathbf{X}_n}(\mathbf{X}_n(t), \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\lambda}_n(t)) \boldsymbol{\varphi}_n(t) \right] dt \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial \boldsymbol{\tau}}(\mathbf{X}_n(t), \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\lambda}_n(t)) \boldsymbol{\nu}(t) dt \end{aligned}$$

où l'on a posé $\boldsymbol{\tau} = (\tau_1, \tau_2)^\top$ et

$$\mathcal{H}_n(\mathbf{X}_n(t), \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\lambda}_n(t)) = \boldsymbol{\lambda}_n(t)^\top \left(\mathbf{F}(u(t), \mathbf{X}_n(t)) + \dot{H}_n(t - \tau_1) \boldsymbol{\mu}_1 + \dot{H}_n(t - \tau_2) \boldsymbol{\mu}_2 \right) .$$

En intégrant par parties et en remarquant que

$$\begin{aligned} \forall t \in [t_0, t_f] \quad \boldsymbol{\nu}(t) &= (\delta \tau_1, \delta \tau_2)^\top ; \\ \boldsymbol{\varphi}_n(t_f) &= \delta \mathbf{X}_n(t_f) ; \\ \boldsymbol{\varphi}_n(t_0) &= 0 , \end{aligned}$$

cette dernière égalité étant obtenue grâce à la nouvelle écriture (4.4) de la représentation, on obtient

$$\begin{aligned} \delta \tilde{J}_n &= (\mathbf{X}_n(t_f) - \mathbf{X}_d + \boldsymbol{\lambda}_n(t_f))^\top \delta \mathbf{X}_n(t_f) - \int_{t_0}^{t_f} \left(\dot{\boldsymbol{\lambda}}_n(t) + \frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial \mathbf{X}_n}(\mathbf{X}_n(t), \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\lambda}_n(t))^\top \right)^\top \boldsymbol{\varphi}_n(t) dt \\ &\quad - \left(\int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial \tau_1}(\mathbf{X}_n(t), \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\lambda}_n(t)) dt \right) \delta \tau_1 - \left(\int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial \tau_2}(\mathbf{X}_n(t), \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\lambda}_n(t)) dt \right) \delta \tau_2 . \end{aligned}$$

Pour annuler le coefficient de $\delta \mathbf{X}_n(t_f)$, on pose

$$\boldsymbol{\lambda}_n(t_f) = \mathbf{X}_d - \mathbf{X}_n(t_f) .$$

Remarquons maintenant que

$$\frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial \mathbf{X}_n}(\mathbf{X}_n(t), \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\lambda}_n(t)) = \boldsymbol{\lambda}_n(t)^\top \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}_n}(u(t), \mathbf{X}_n(t))$$

et

$$\frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial \tau_i}(\mathbf{X}_n(t), \boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{\lambda}_n(t)) = -\ddot{H}_n(t - \tau_i) \boldsymbol{\lambda}_n(t)^\top \boldsymbol{\mu}_i, \quad i = 1, 2.$$

Le système adjoint s'écrit donc

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda}_n(t_f) = \mathbf{X}_d - \mathbf{X}_n(t_f) \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}_n(t) = -\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}_n}(u(t), \mathbf{X}_n(t))^\top \boldsymbol{\lambda}_n(t), \quad t \in [t_0, t_f], \end{cases}$$

et les gradients de la fonction coût J_n par rapport à τ_1 et τ_2 sont donnés par

$$\forall i \in \{1, 2\} \quad \nabla(J_n)_{\tau_i} = \int_{t_0}^{t_f} \ddot{H}_n(t - \tau_i) \boldsymbol{\lambda}_n(t)^\top \boldsymbol{\mu}_i dt. \quad (4.5)$$

Pour un nombre quelconque m de commutations, on obtient le même système adjoint et l'expression des gradients $(\nabla J_n)_{\tau_i}$ donnée en (4.5) est valable pour $i \in \{1, \dots, m\}$.

Comparaison des calculs

Les calculs avec la représentation sont plus simples à mener car il n'est pas besoin de prendre en compte les sauts à l'aide de multiplicateurs $\boldsymbol{\delta}_1, \dots, \boldsymbol{\delta}_m$. De plus, le système adjoint obtenu avec le problème issu de la représentation est un système sans commutation, contrairement au système adjoint provenant du problème hybride. La mise en œuvre numérique ne pourra qu'en être facilitée.

4.1.2 Poursuite de trajectoire

Calcul des gradients pour le problème hybride

Étant donné une trajectoire désirée \mathbf{x}_d , continue par morceaux sur $[t_0, t_f]$, on s'intéresse au problème décrit au paragraphe 3.1.3 en supposant qu'il y a une seule commutation.

Le système hybride considéré est donc le suivant

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_1(u(t), \mathbf{x}(t)) & \text{si } t \in [t_0, \tau[\\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_2(u(t), \mathbf{x}(t)) & \text{si } t \in [\tau, t_f] \\ \mathbf{x}(\tau) = \mathbf{x}(\tau^-) + \boldsymbol{\eta} \end{cases} \quad (4.6)$$

et la fonction coût à minimiser est définie par

$$\forall (\tau, u) \in [t_0, t_f[\times \mathcal{U} \quad J(\tau, u) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}(\tau, u, \cdot) - \mathbf{x}_d\|_{L^2(t_0, t_f)}^2 + \frac{\rho}{2} \|u\|_{L^2(t_0, t_f)}^2$$

où l'on a posé

$$\mathcal{U} = \{u : [t_0, t_f] \rightarrow U, u \text{ continue}\}$$

et où $\rho > 0$ correspond au coût de la commande.

On notera \mathbf{x} au lieu de $\mathbf{x}(\tau, u, \cdot)$ pour alléger l'écriture dans les calculs qui suivent.

Pour prendre en compte l'équation d'état et le saut de l'état à l'instant de commutation, on introduit un état adjoint $\boldsymbol{\lambda}$ et un multiplicateur $\boldsymbol{\delta}$. On obtient alors une nouvelle fonction \tilde{J}

définie par

$$\begin{aligned} \forall (\tau, u) \in [t_0, t_f] \times \mathcal{U} \quad \tilde{J}(\tau, u) &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \|\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_d\|_d^2 dt + \frac{\rho}{2} \int_{t_0}^{t_f} u^2(t) dt \\ &+ \int_{t_0}^{\tau} \boldsymbol{\lambda}(t)^\top \left(\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{f}_1(u(t), \mathbf{x}(t)) \right) dt + \boldsymbol{\delta}^\top (\mathbf{x}(\tau) - \mathbf{x}(\tau^-) - \boldsymbol{\eta}) \\ &+ \int_{\tau}^{t_f} \boldsymbol{\lambda}(t)^\top \left(\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{f}_2(u(t), \mathbf{x}(t)) \right) dt . \end{aligned}$$

La variation de \tilde{J} suivant la direction $(\boldsymbol{\varphi}, \nu)$, où $\boldsymbol{\varphi}$ appartient à l'espace d'état et ν à l'espace des commandes, s'écrit

$$\begin{aligned} \delta \tilde{J} &= \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_d(t))^\top \boldsymbol{\varphi}(t) dt + \rho \int_{t_0}^{t_f} u(t) \nu(t) dt \\ &+ \frac{1}{2} \left(\|\mathbf{x}(\tau^-) - \mathbf{x}_d(\tau^-)\|_d^2 - \|\mathbf{x}(\tau) - \mathbf{x}_d(\tau)\|_d^2 \right) \delta \tau \\ &+ \int_{t_0}^{\tau} \left[\boldsymbol{\lambda}(t)^\top \dot{\boldsymbol{\varphi}}(t) - \left(\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}}(u(t), \mathbf{x}(t))^\top \boldsymbol{\lambda}(t) \right)^\top \boldsymbol{\varphi}(t) \right] dt - \int_{t_0}^{\tau} \boldsymbol{\lambda}(t)^\top \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial u}(u(t), \mathbf{x}(t)) \nu(t) dt \\ &+ \boldsymbol{\lambda}(\tau^-)^\top [\dot{\mathbf{x}}(\tau^-) - \mathbf{f}_1(u(\tau), \mathbf{x}(\tau^-))] \delta \tau - \boldsymbol{\delta}^\top \delta \mathbf{x}(\tau^-) + \boldsymbol{\delta}^\top \delta \mathbf{x}(\tau) \\ &+ \int_{\tau}^{t_f} \left[\boldsymbol{\lambda}(t)^\top \dot{\boldsymbol{\varphi}}(t) - \left(\frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}}(u(t), \mathbf{x}(t))^\top \boldsymbol{\lambda}(t) \right)^\top \boldsymbol{\varphi}(t) \right] dt - \int_{\tau}^{t_f} \boldsymbol{\lambda}(t)^\top \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial u}(u(t), \mathbf{x}(t)) \nu(t) dt \\ &- \boldsymbol{\lambda}(\tau)^\top [\dot{\mathbf{x}}(\tau) - \mathbf{f}_2(u(\tau), \mathbf{x}(\tau))] \delta \tau . \end{aligned}$$

En effectuant des intégrations par parties et en remarquant que

$$\boldsymbol{\varphi}(\tau) = \delta \mathbf{x}(\tau) - \dot{\mathbf{x}}(\tau) \delta \tau ;$$

$$\boldsymbol{\varphi}(\tau^-) = \delta \mathbf{x}(\tau^-) - \dot{\mathbf{x}}(\tau^-) \delta \tau ;$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t_f) = \delta \mathbf{x}(t_f) ;$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t_0) = 0 ,$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} \delta \tilde{J} &= \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_d(t))^\top \boldsymbol{\varphi}(t) dt + \rho \int_{t_0}^{t_f} u(t) \nu(t) dt \\ &- \int_{t_0}^{\tau} \left(\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) + \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}}(u(t), \mathbf{x}(t))^\top \boldsymbol{\lambda}(t) \right)^\top \boldsymbol{\varphi}(t) dt - \int_{t_0}^{\tau} \boldsymbol{\lambda}(t)^\top \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial u}(u(t), \mathbf{x}(t)) \nu(t) dt \\ &+ \frac{1}{2} \left(\|\mathbf{x}(\tau^-) - \mathbf{x}_d(\tau^-)\|_d^2 - \|\mathbf{x}(\tau) - \mathbf{x}_d(\tau)\|_d^2 \right) \delta \tau \\ &+ \left(\boldsymbol{\lambda}(\tau)^\top \mathbf{f}_2(u(\tau), \mathbf{x}(\tau)) - \boldsymbol{\lambda}(\tau^-)^\top \mathbf{f}_1(u(\tau), \mathbf{x}(\tau^-)) \right) \delta \tau \\ &- \int_{\tau}^{t_f} \left(\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) + \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}}(u(t), \mathbf{x}(t))^\top \boldsymbol{\lambda}(t) \right)^\top \boldsymbol{\varphi}(t) dt - \int_{\tau}^{t_f} \boldsymbol{\lambda}(t)^\top \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial u}(u(t), \mathbf{x}(t)) \nu(t) dt \\ &+ \boldsymbol{\lambda}(t_f)^\top \delta \mathbf{x}(t_f) + (\boldsymbol{\delta}^\top - \boldsymbol{\lambda}(\tau)^\top) \delta \mathbf{x}(\tau) + (\boldsymbol{\lambda}(\tau^-)^\top - \boldsymbol{\delta}^\top) \delta \mathbf{x}(\tau^-) . \end{aligned}$$

Pour annuler les coefficients de $\delta \mathbf{x}$, on pose

$$\boldsymbol{\lambda}(t_f) = 0$$

et

$$\boldsymbol{\delta} = \boldsymbol{\lambda}(\tau^-) = \boldsymbol{\lambda}(\tau).$$

On obtient alors le système adjoint suivant

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda}(t_f) = 0 \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}}(u(t), \mathbf{x}(t))^\top \boldsymbol{\lambda}(t) + \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_d(t) & \text{si } t \in [\tau, t_f] \\ \boldsymbol{\lambda}(\tau^-) = \boldsymbol{\lambda}(\tau) \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}}(u(t), \mathbf{x}(t))^\top \boldsymbol{\lambda}(t) + \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_d(t) & \text{si } t \in [t_0, \tau]. \end{cases}$$

Le gradient de J par rapport à τ s'écrit

$$\nabla J_\tau = \boldsymbol{\lambda}(\tau)^\top \left(\mathbf{f}_2(u(\tau), \mathbf{x}(\tau)) - \mathbf{f}_1(u(\tau), \mathbf{x}(\tau^-)) \right) + \frac{1}{2} \|\mathbf{x}(\tau^-) - \mathbf{x}_d(\tau^-)\|_d^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{x}(\tau) - \mathbf{x}_d(\tau)\|_d^2$$

et le gradient par rapport à u est donné par

$$\begin{cases} \nabla J_u(t) = -\boldsymbol{\lambda}(t)^\top \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial u}(u(t), \mathbf{x}(t)) + \rho u(t) & \text{si } t \in [t_0, \tau[\\ \nabla J_u(t) = -\boldsymbol{\lambda}(t)^\top \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial u}(u(t), \mathbf{x}(t)) + \rho u(t) & \text{si } t \in [\tau, t_f]. \end{cases}$$

Avec des calculs analogues, on obtient, si le système hybride (4.6) comporte m instants de commutation, le système adjoint suivant

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda}(t_f) = 0 \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\frac{\partial \mathbf{f}_{m+1}}{\partial \mathbf{x}}(u(t), \mathbf{x}(t))^\top \boldsymbol{\lambda}(t) + \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_d(t) & \text{si } t \in [\tau_m, t_f] \\ \boldsymbol{\lambda}(\tau_i^-) = \boldsymbol{\lambda}(\tau_i), \quad i = 2, \dots, m \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial \mathbf{x}}(u(t), \mathbf{x}(t))^\top \boldsymbol{\lambda}(t) + \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_d(t) & \text{si } t \in [\tau_{i-1}, \tau_i], \quad i = 2, \dots, m \\ \boldsymbol{\lambda}(\tau_1^-) = \boldsymbol{\lambda}(\tau_1) \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}}(u(t), \mathbf{x}(t))^\top \boldsymbol{\lambda}(t) + \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}_d(t) & \text{si } t \in [t_0, \tau_1]. \end{cases}$$

Les expressions des gradients par rapport aux instants de commutations sont données par

$$\forall i \in \{1, \dots, m\} \quad \nabla J_{\tau_i} = \boldsymbol{\lambda}(\tau_i)^\top \left(\mathbf{f}_{i+1}(u(\tau_i), \mathbf{x}(\tau_i)) - \mathbf{f}_i(u(\tau_i), \mathbf{x}(\tau_i^-)) \right) + \frac{1}{2} \|\mathbf{x}(\tau_i^-) - \mathbf{x}_d(\tau_i^-)\|_d^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{x}(\tau_i) - \mathbf{x}_d(\tau_i)\|_d^2$$

et le gradient par rapport à la commande est défini par

$$\begin{cases} \nabla J_u(t) = -\boldsymbol{\lambda}(t)^\top \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial u}(u(t), \mathbf{x}(t)) + \rho u(t) & \text{si } t \in [t_0, \tau_1[\\ \nabla J_u(t) = -\boldsymbol{\lambda}(t)^\top \frac{\partial \mathbf{f}_i}{\partial u}(u(t), \mathbf{x}(t)) + \rho u(t) & \text{si } t \in [\tau_{i-1}, \tau_i], \quad i = 2, \dots, m \\ \nabla J_u(t) = -\boldsymbol{\lambda}(t)^\top \frac{\partial \mathbf{f}_{m+1}}{\partial u}(u(t), \mathbf{x}(t)) + \rho u(t) & \text{si } t \in [\tau_m, t_f]. \end{cases}$$

Calcul des gradients pour le problème issu de la représentation

On écrit la représentation du système hybride (4.6) de la façon suivante

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(u(t), \mathbf{X}(t)) + \dot{H}_n(t - \tau) \boldsymbol{\mu}, & t \in [t_0, t_f] \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \end{cases} \quad (4.7)$$

où, comme au paragraphe précédent, la condition initiale $\mathbf{X}_0 + H_n(t_0 - \tau)$ a été remplacée par \mathbf{X}_0 .

Avec les notations du paragraphe 3.1.3, la solution de (4.7) s'écrit

$$\mathbf{X}_n(\tau, u, \cdot) = (\mathbf{x}_n(\tau, u, \cdot), \nu_n(\tau, u, \cdot))^\top$$

et la fonction coût J_n à minimiser est définie par

$$\forall (\tau, u) \in [t_0, t_f] \times \mathcal{U} \quad J_n(\tau, u) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_n(\tau, u, \cdot) - \mathbf{x}_d\|_{L^2(t_0, t_f)}^2 + \frac{\rho}{2} \|u\|_{L^2(t_0, t_f)}^2$$

ou encore, si on pose $\mathbf{X}_d(\tau, u, \cdot) = (\mathbf{x}_d, \nu_n(\tau, u, \cdot))^\top$, par

$$\forall (\tau, u) \in [t_0, t_f] \times \mathcal{U} \quad J_n(\tau, u) = \frac{1}{2} \|\mathbf{X}_n(\tau, u, \cdot) - \mathbf{X}_d(\tau, u, \cdot)\|_{L^2(t_0, t_f)}^2 + \frac{\rho}{2} \|u\|_{L^2(t_0, t_f)}^2.$$

Par la suite, pour simplifier l'écriture des calculs, on note \mathbf{X}_n et \mathbf{X}_d au lieu de $\mathbf{X}_n(\tau, u, \cdot)$ et $\mathbf{X}_d(\tau, u, \cdot)$ respectivement.

On définit, à l'aide d'un état adjoint $\boldsymbol{\lambda}_n$, une nouvelle fonction \tilde{J}_n comme suit :

$$\begin{aligned} \forall (\tau, u) \in [t_0, t_f] \times \mathcal{U} \quad \tilde{J}_n(\tau, u) &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \|\mathbf{X}_n(t) - \mathbf{X}_d(t)\|_{d+1}^2 dt + \frac{\rho}{2} \int_{t_0}^{t_f} u^2(t) dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{\lambda}_n(t)^\top \left(\dot{\mathbf{X}}_n(t) - \mathbf{F}(u(t), \mathbf{X}_n(t)) - \dot{H}_n(t - \tau) \boldsymbol{\mu} \right) dt. \end{aligned}$$

La variation de \tilde{J}_n suivant la direction $(\boldsymbol{\varphi}_n, \boldsymbol{\nu})$ où $\boldsymbol{\varphi}_n$ appartient à l'espace d'état et $\boldsymbol{\nu} = (\nu_u, \nu_\tau)^\top$ appartient à l'espace des commandes, s'écrit

$$\begin{aligned} \delta \tilde{J}_n &= \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{X}_n(t) - \mathbf{X}_d(t))^\top \boldsymbol{\varphi}_n(t) dt + \frac{1}{2} \|\mathbf{X}_n(\tau) - \mathbf{X}_d(\tau^-)\|_{d+1}^2 \delta \tau \\ &- \frac{1}{2} \|\mathbf{X}_n(\tau) - \mathbf{X}_d(\tau)\|_{d+1}^2 \delta \tau + \rho \int_{t_0}^{t_f} u(t) \nu_u(t) dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \left[\boldsymbol{\lambda}_n(t)^\top \dot{\boldsymbol{\varphi}}_n(t) - \left(\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}_n}(u(t), \mathbf{X}_n(t))^\top \boldsymbol{\lambda}_n(t) \right)^\top \boldsymbol{\varphi}_n(t) \right] dt \\ &- \int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{\lambda}_n(t)^\top \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u}(u(t), \mathbf{X}_n(t)) \nu_u(t) dt + \int_{t_0}^{t_f} \ddot{H}_n(t - \tau) \boldsymbol{\lambda}_n(t)^\top \boldsymbol{\mu} \nu_\tau(t) dt. \end{aligned}$$

En intégrant le terme $\boldsymbol{\lambda}_n(t)^\top \dot{\boldsymbol{\varphi}}_n(t)$ par parties, en remarquant que

$$\forall t \in [t_0, t_f] \quad \nu_\tau(t) = \delta \tau$$

et en utilisant les relations $\varphi_n(t_f) = \delta \mathbf{X}_n(t_f)$ et $\varphi_n(t_0) = 0$, on obtient

$$\begin{aligned} \delta \tilde{J}_n = & \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{X}_n(t) - \mathbf{X}_d(t))^\top \varphi_n(t) dt + \rho \int_{t_0}^{t_f} u(t) \nu_u(t) dt + \boldsymbol{\lambda}_n(t_f)^\top \delta \mathbf{X}_n(t_f) \\ & - \int_{t_0}^{t_f} \left(\dot{\boldsymbol{\lambda}}_n(t) + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}_n}(u(t), \mathbf{X}_n(t))^\top \boldsymbol{\lambda}_n(t) \right)^\top \varphi_n(t) dt \\ & - \int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{\lambda}_n(t)^\top \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u}(u(t), \mathbf{X}_n(t)) \nu_u(t) dt \\ & + \left(\int_{t_0}^{t_f} \ddot{H}_n(t - \tau) \boldsymbol{\lambda}_n(t)^\top \boldsymbol{\mu} dt + \frac{1}{2} \|\mathbf{X}_n(\tau) - \mathbf{X}_d(\tau^-)\|_{d+1}^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{X}_n(\tau) - \mathbf{X}_d(\tau)\|_{d+1}^2 \right) \delta \tau . \end{aligned}$$

On en déduit le système adjoint

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda}_n(t_f) = 0 \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}_n(t) = -\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \mathbf{X}_n}(u(t), \mathbf{X}_n(t))^\top \boldsymbol{\lambda}_n(t) + \mathbf{X}_n(t) - \mathbf{X}_d(t), \quad t \in [t_0, t_f], \end{cases}$$

et les gradients de la fonction coût J_n par rapport à τ

$$\nabla(J_n)_\tau = \int_{t_0}^{t_f} \ddot{H}_n(t - \tau) \boldsymbol{\lambda}_n(t)^\top \boldsymbol{\mu} dt + \frac{1}{2} \|\mathbf{X}_n(\tau) - \mathbf{X}_d(\tau^-)\|_{d+1}^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{X}_n(\tau) - \mathbf{X}_d(\tau)\|_{d+1}^2$$

et par rapport à u

$$\forall t \in [t_0, t_f] \quad \nabla(J_n)_u(t) = -\boldsymbol{\lambda}_n(t)^\top \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u}(u(t), \mathbf{X}_n(t)) + \rho u(t) .$$

Pour un nombre quelconque m de commutations, le système adjoint et l'expression du gradient par rapport à u sont identiques. Pour obtenir le gradient par rapport à un instant de commutation τ_i , $i \in \{1, \dots, m\}$, il suffit de remplacer τ par τ_i dans l'expression donnée ci-dessus.

Comparaison des calculs

L'utilisation de la représentation présente ici les mêmes avantages que pour le problème à temps final fixé du paragraphe 4.1.1. En effet, avec la représentation, les sauts sont plus faciles à prendre en compte et le système adjoint obtenu ne comporte pas explicitement de commutation. De plus, le gradient par rapport à la commande u est défini de façon globale sur $[t_0, t_f]$ alors qu'il admet, dans le cas hybride, des expressions différentes sur les intervalles $[t_0, \tau_1[$, \dots , $[\tau_m, t_f]$.

4.1.3 Identification de paramètres

Calcul des gradients pour le problème hybride

On étudie le problème d'identification de paramètres présenté au paragraphe 3.2.2. Le système hybride associé à ce problème est le suivant :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}(t)) & \text{si } \mathbf{x}(t) \leq \mathbf{a} \\ \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_2(\mathbf{p}_2, \mathbf{x}(t)) & \text{sinon} \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (4.8)$$

où $t \in [t_0, t_f]$ et où $\mathbf{x}(t) < \mathbf{a}$ signifie

$$\forall i \in \{1, \dots, d\} \quad x_i(t) \leq a_i .$$

Les paramètres \mathbf{p}_1 et \mathbf{p}_2 appartiennent respectivement à des ensembles fermés bornés \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 de \mathbb{R}^ℓ , $\ell \geq 1$.

La fonction coût à minimiser est définie par

$$\forall \mathbf{p} \in \mathcal{P} \quad J(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}(\mathbf{p}, \cdot) - \widehat{\mathbf{x}}\|_{L^2(t_0, t_f)}^2 \quad (4.9)$$

où $\mathcal{P} = \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2$ et $\mathbf{p} = (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2)^\top$.

Afin d'alléger les écritures, on note, dans ce paragraphe, \mathbf{x} à la place de $\mathbf{x}(\mathbf{p}, \cdot)$.

En introduisant un état adjoint $\boldsymbol{\lambda}$ et un multiplicateur μ , on obtient une nouvelle fonction \widetilde{J} définie par

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{p} \in \mathcal{P} \quad \widetilde{J}(\mathbf{p}) = & \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \|\mathbf{x}(t) - \widehat{\mathbf{x}}(t)\|_d^2 dt + \mu \prod_{i=1}^d (x_i(\tau) - a_i) \\ & + \int_{t_0}^{\tau} \boldsymbol{\lambda}(t)^\top (\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{f}_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}(t))) dt + \int_{\tau}^{t_f} \boldsymbol{\lambda}(t)^\top (\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{f}_2(\mathbf{p}_2, \mathbf{x}(t))) dt \end{aligned}$$

où τ représente l'instant de commutation sur le seuil \mathbf{a} .

Calculons la variation de \widetilde{J} suivant la direction $(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\nu})$ où $\boldsymbol{\varphi}$ appartient à l'espace d'état et $\boldsymbol{\nu} = (\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)^\top$ appartient à l'espace des paramètres.

On obtient

$$\begin{aligned} \delta \widetilde{J} = & \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{x}(t) - \widehat{\mathbf{x}}(t))^\top \boldsymbol{\varphi}(t) dt + \mu \boldsymbol{\gamma}^\top \delta \mathbf{x}(\tau) \\ & + \int_{t_0}^{\tau} \left[\boldsymbol{\lambda}(t)^\top \dot{\boldsymbol{\varphi}}(t) - \left(\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}(t))^\top \boldsymbol{\lambda}(t) \right)^\top \boldsymbol{\varphi}(t) \right] dt + \boldsymbol{\lambda}(\tau^-)^\top (\dot{\mathbf{x}}(\tau^-) - \mathbf{f}_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}(\tau))) \delta \tau \\ & - \int_{t_0}^{\tau} \left(\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{p}_1}(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}(t))^\top \boldsymbol{\lambda}(t) \right)^\top \boldsymbol{\nu}_1(t) dt + \int_{\tau}^{t_f} \left[\boldsymbol{\lambda}(t)^\top \dot{\boldsymbol{\varphi}}(t) - \left(\frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{p}_2, \mathbf{x}(t))^\top \boldsymbol{\lambda}(t) \right)^\top \boldsymbol{\varphi}(t) \right] dt \\ & - \boldsymbol{\lambda}(\tau)^\top (\dot{\mathbf{x}}(\tau) - \mathbf{f}_2(\mathbf{p}_2, \mathbf{x}(\tau))) \delta \tau - \int_{\tau}^{t_f} \left(\frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{p}_2}(\mathbf{p}_2, \mathbf{x}(t))^\top \boldsymbol{\lambda}(t) \right)^\top \boldsymbol{\nu}_2(t) dt \end{aligned}$$

où

$$\boldsymbol{\gamma} = \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^d (x_k(\tau) - a_k) \right)_{1 \leq i \leq d} .$$

En intégrant par parties, en remarquant que

$$\forall t \in [t_0, t_f] \quad \boldsymbol{\nu}_1(t) = \delta \mathbf{p}_1 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\nu}_2(t) = \delta \mathbf{p}_2 ,$$

et en utilisant les relations

$$\boldsymbol{\varphi}(\tau^-) = \delta \mathbf{x}(\tau) - \dot{\mathbf{x}}(\tau^-) \delta \tau ,$$

$$\boldsymbol{\varphi}(\tau) = \delta \mathbf{x}(\tau) - \dot{\mathbf{x}}(\tau) \delta \tau ,$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t_f) = \delta \mathbf{x}(t_f) ,$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t_0) = 0 ,$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} \delta \tilde{J} = & \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{x}(t) - \widehat{\mathbf{x}}(t))^\top \boldsymbol{\varphi}(t) dt + \boldsymbol{\lambda}(t_f)^\top \delta \mathbf{x}(t_f) + (\boldsymbol{\lambda}(\tau^-) - \boldsymbol{\lambda}(\tau) + \mu \boldsymbol{\gamma})^\top \delta \mathbf{x}(\tau) \\ & + (\boldsymbol{\lambda}(\tau)^\top \mathbf{f}_2(\mathbf{p}_2, \mathbf{x}(\tau)) - \boldsymbol{\lambda}(\tau^-)^\top \mathbf{f}_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}(\tau))) \delta \tau - \int_{t_0}^{\tau} \left(\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) + \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}(t))^\top \boldsymbol{\lambda}(t) \right)^\top \boldsymbol{\varphi}(t) dt \\ & - \int_{\tau}^{t_f} \left(\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) + \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{p}_2, \mathbf{x}(t))^\top \boldsymbol{\lambda}(t) \right)^\top \boldsymbol{\varphi}(t) dt - \left(\int_{t_0}^{\tau} \boldsymbol{\lambda}(t)^\top \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{p}_1}(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}(t)) dt \right)^\top \delta \mathbf{p}_1 \\ & - \left(\int_{\tau}^{t_f} \boldsymbol{\lambda}(t)^\top \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{p}_2}(\mathbf{p}_2, \mathbf{x}(t)) dt \right)^\top \delta \mathbf{p}_2 . \end{aligned}$$

Le système adjoint s'écrit alors

$$\left\{ \begin{array}{l} \boldsymbol{\lambda}(t_f) = 0 \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{p}_2, \mathbf{x}(t))^\top \boldsymbol{\lambda}(t) + \mathbf{x}(t) - \widehat{\mathbf{x}}(t) \quad \text{si } t \in [\tau, t_f] \\ \boldsymbol{\lambda}(\tau^-) = \boldsymbol{\lambda}(\tau) - \mu \boldsymbol{\gamma} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}(t))^\top \boldsymbol{\lambda}(t) + \mathbf{x}(t) - \widehat{\mathbf{x}}(t) \quad \text{si } t \in [t_0, \tau[. \end{array} \right.$$

L'état adjoint obtenu en résolvant le système ci-dessus est discontinu à l'instant τ et le calcul de $\boldsymbol{\lambda}(\tau^-)$ et de μ s'effectue en résolvant un système linéaire de dimension $d + 1$. En effet, les relations

$$\boldsymbol{\lambda}(\tau)^\top \mathbf{f}_2(\mathbf{p}_2, \mathbf{x}(\tau)) - \boldsymbol{\lambda}(\tau^-)^\top \mathbf{f}_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}(\tau)) = 0$$

et

$$\boldsymbol{\lambda}(\tau^-) = \boldsymbol{\lambda}(\tau) - \mu \boldsymbol{\gamma}$$

permettent d'écrire le système linéaire suivant

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \dots & \alpha_d & 0 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & \gamma_1 \\ 0 & 1 & 0 & & \vdots & \vdots \\ \vdots & & 1 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & & & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 & \gamma_d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda_1(\tau^-) \\ \vdots \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_d(\tau^-) \\ \mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta \\ \lambda_1(\tau) \\ \vdots \\ \vdots \\ \lambda_d(\tau) \end{pmatrix}$$

où $\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{f}_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}(\tau))$ et $\beta = \boldsymbol{\lambda}(\tau)^\top \mathbf{f}_2(\mathbf{p}_2, \mathbf{x}(\tau))$.

Les expressions des gradients sont données par :

$$\nabla J_{\mathbf{p}_1} = - \int_{t_0}^{\tau} \boldsymbol{\lambda}(t)^\top \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{p}_1}(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}(t)) dt , \quad (4.10)$$

$$\nabla J_{\mathbf{p}_2} = - \int_{\tau}^{t_f} \boldsymbol{\lambda}(t)^\top \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{p}_2}(\mathbf{p}_2, \mathbf{x}(t)) dt . \quad (4.11)$$

Calcul des gradients pour le problème issu de la représentation

La représentation du système (4.8) est donnée par les systèmes suivants :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \prod_{i=1}^d \tilde{H}_n(\mathbf{a}_i - \mathbf{x}_i(t)) \mathbf{f}_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}(t)) \\ \quad + \left(1 - \prod_{i=1}^d \tilde{H}_n(\mathbf{a}_i - \mathbf{x}_i(t))\right) \mathbf{f}_2(\mathbf{p}_2, \mathbf{x}(t)), \quad t \in [t_0, t_f] \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{array} \right. \quad (4.12)$$

et la fonction coût J_n associée est définie par

$$\forall \mathbf{p} \in \mathcal{P} \quad J_n(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_n(\mathbf{p}, \cdot) - \hat{\mathbf{x}}\|_{L^2(t_0, t_f)}^2 .$$

Comme précédemment, on note \mathbf{x}_n la solution de (4.12), au lieu de $\mathbf{x}_n(\mathbf{p}, \cdot)$.

La nouvelle fonction \tilde{J}_n , dans laquelle on introduit un état adjoint $\boldsymbol{\lambda}_n$, s'écrit alors

$$\begin{aligned} \forall \mathbf{p} \in \mathcal{P} \quad \tilde{J}_n(\mathbf{p}) = & \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \|\mathbf{x}_n(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)\|_d^2 dt \\ & + \int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{\lambda}_n(t)^\top \left[\dot{\mathbf{x}}_n(t) - \prod_{i=1}^d \tilde{H}_n(\mathbf{a}_i - \mathbf{x}_n^{(i)}(t)) \mathbf{f}_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}_n(t)) \right. \\ & \quad \left. - \left(1 - \prod_{i=1}^d \tilde{H}_n(\mathbf{a}_i - \mathbf{x}_n^{(i)}(t))\right) \mathbf{f}_2(\mathbf{p}_2, \mathbf{x}_n(t)) \right] dt . \end{aligned}$$

La variation de \tilde{J}_n suivant la direction $(\boldsymbol{\varphi}_n, \boldsymbol{\nu})$ où $\boldsymbol{\varphi}_n$ appartient à l'espace d'état et $\boldsymbol{\nu}$ appartient à l'espace des paramètres, s'écrit

$$\delta \tilde{J}_n = \int_{t_0}^{t_f} \left[\boldsymbol{\lambda}_n(t)^\top \boldsymbol{\varphi}_n(t) - \frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial \mathbf{x}_n}(\mathbf{x}_n(t), \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}_n(t)) \boldsymbol{\varphi}_n(t) \right] dt - \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial \mathbf{p}}(\mathbf{x}_n(t), \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}_n(t)) \boldsymbol{\nu}(t) dt ,$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_n(\mathbf{x}_n(t), \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}_n(t)) = & -\frac{1}{2} \|\mathbf{x}_n(t) - \hat{\mathbf{x}}(t)\|_d^2 \\ & + \boldsymbol{\lambda}_n(t)^\top \left[\prod_{i=1}^d \tilde{H}_n(\mathbf{a}_i - \mathbf{x}_n^{(i)}(t)) \mathbf{f}_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}_n(t)) + \left(1 - \prod_{i=1}^d \tilde{H}_n(\mathbf{a}_i - \mathbf{x}_n^{(i)}(t))\right) \mathbf{f}_2(\mathbf{p}_2, \mathbf{x}_n(t)) \right] . \end{aligned}$$

En intégrant par parties et en remarquant que

$$\begin{aligned} \forall t \in [t_0, t_f] \quad \boldsymbol{\nu}(t) &= (\delta \mathbf{p}_1, \delta \mathbf{p}_2)^\top , \\ \boldsymbol{\varphi}_n(t_f) &= \delta \mathbf{x}_n(t_f) , \\ \boldsymbol{\varphi}_n(t_0) &= 0 , \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \delta \tilde{J}_n &= \boldsymbol{\lambda}_n(t_f)^\top \delta \mathbf{x}_n(t_f) - \int_{t_0}^{t_f} \left(\dot{\boldsymbol{\lambda}}_n(t) + \frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial \mathbf{x}_n}(\mathbf{x}_n(t), \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}_n(t))^\top \right)^\top \boldsymbol{\varphi}_n(t) dt \\ &\quad - \left(\int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial \mathbf{p}_1}(\mathbf{x}_n(t), \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}_n(t))^\top dt \right)^\top \delta \mathbf{p}_1 - \left(\int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial \mathbf{p}_2}(\mathbf{x}_n(t), \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}_n(t))^\top dt \right)^\top \delta \mathbf{p}_2 . \end{aligned}$$

On en déduit alors le système adjoint

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda}_n(t_f) = 0 \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}_n(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial \mathbf{x}_n}(\mathbf{x}_n(t), \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}_n(t))^\top, \quad t \in [t_0, t_f] \end{cases}$$

et les expressions des gradients

$$\forall i \in \{1, 2\} \quad \nabla (J_n)_{\mathbf{p}_i} = - \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial \mathbf{p}_i}(\mathbf{x}_n(t), \mathbf{p}, \boldsymbol{\lambda}_n(t))^\top dt . \quad (4.13)$$

Comparaison des calculs

Contrairement à ce qui a été obtenu dans le cadre hybride, le système adjoint, pour le problème issu de la représentation, ne comporte pas de discontinuité. L'utilisation de la représentation permet donc d'éviter, à chaque itération, la résolution d'un système linéaire de dimension $d + 1$. De plus, l'instant de commutation τ , qui dépend du seuil \mathbf{a} et donc aussi de \mathbf{p}_1 , doit être calculé dans le cas hybride à chaque étape du processus itératif du calcul des paramètres à identifier. Avec la représentation, ce calcul est inutile car cet instant n'intervient pas explicitement dans le système adjoint ni dans les expressions des gradients. Enfin, la comparaison des longueurs des calculs effectués montre que ceux-ci sont plus simples lorsque l'on fait intervenir la représentation du système hybride.

Remarque 4.1. On peut choisir d'identifier les paramètres à partir de mesures $\hat{\mathbf{x}}(t_i)$ effectuées sur le système en N instants t_1, \dots, t_N . On se ramène alors à la minimisation de la fonction coût suivante, déjà évoquée au paragraphe 3.2.2 :

$$\forall \mathbf{p} \in \mathcal{P} \quad J(\mathbf{p}) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \|\mathbf{x}(\mathbf{p}, t_i) - \hat{\mathbf{x}}(t_i)\|_d^2 . \quad (4.14)$$

Avec cette fonction, les expressions des gradients sont les mêmes qu'en (4.10) et (4.11). Le système adjoint associé au problème hybride comporte toujours un saut et une commutation à l'instant τ mais aussi des sauts aux instants t_1, \dots, t_N . Il faut en effet rajouter au système adjoint obtenu précédemment les équations suivantes

$$\forall i \in \{1, \dots, N\} \quad \boldsymbol{\lambda}(t_i^-) = \boldsymbol{\lambda}(t_i) + \mathbf{x}(t_i) - \hat{\mathbf{x}}(t_i) .$$

De plus, si τ coïncide avec un instant t_j , il faut remplacer les équations

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\lambda}(\tau^-) &= \boldsymbol{\lambda}(\tau) - \mu \boldsymbol{\gamma} \\ \boldsymbol{\lambda}(t_j^-) &= \boldsymbol{\lambda}(t_j) + \mathbf{x}(t_j) - \hat{\mathbf{x}}(t_j) \end{aligned}$$

par l'équation

$$\boldsymbol{\lambda}(\tau^-) = \boldsymbol{\lambda}(\tau) - \mu \boldsymbol{\gamma} + \mathbf{x}(\tau) - \hat{\mathbf{x}}(\tau) .$$

Avec la représentation, les mêmes sauts de l'état adjoint apparaissent aux instants t_1, \dots, t_N .

Les discontinuités introduites par la fonction coût (4.14) rendent plus difficile une mise en œuvre numérique. Au chapitre 5, nous choisirons donc d'utiliser les résultats obtenus à partir de la fonction coût définie en (4.9).

4.1.4 Identification d'un seuil

Calcul des gradients pour le problème hybride

On considère le problème d'identification présenté au paragraphe 3.2.3, dans lequel on cherche à identifier un seuil de commutation.

Le système hybride associé à ce problème est donné par

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}(t)) & \text{si } x_j(t) \leq a \\ \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_2(\mathbf{p}_2, \mathbf{x}(t)) & \text{sinon} \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

où $t \in [t_0, t_f]$ et où $j \in \{1, \dots, d\}$ est fixé.

La fonction coût à minimiser est définie par

$$\forall (\mathbf{p}, a) \in \mathcal{P} \times K_a \quad J(\mathbf{p}, a) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}(\mathbf{p}, a, \cdot) - \widehat{\mathbf{x}}\|_{L^2(t_0, t_f)}^2$$

où l'on a repris les notations du paragraphe 3.2.3.

En notant \mathbf{x} à la place de $\mathbf{x}(\mathbf{p}, a, \cdot)$, on introduit une nouvelle fonction \tilde{J} à l'aide d'un état adjoint $\boldsymbol{\lambda}$ et d'un multiplicateur μ . Cette fonction est définie par

$$\begin{aligned} \forall (\mathbf{p}, a) \in \mathcal{P} \times K_a \quad \tilde{J}(\mathbf{p}, a) &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \|\mathbf{x}(t) - \widehat{\mathbf{x}}(t)\|_d^2 dt + \mu (x_j(\tau) - a) \\ &+ \int_{t_0}^{\tau} \boldsymbol{\lambda}(t)^\top (\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{f}_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}(t))) dt + \int_{\tau}^{t_f} \boldsymbol{\lambda}(t)^\top (\dot{\mathbf{x}}(t) - \mathbf{f}_2(\mathbf{p}_2, \mathbf{x}(t))) dt \end{aligned}$$

où τ représente l'instant de commutation sur le seuil a .

La variation de \tilde{J} suivant la direction $(\boldsymbol{\varphi}, \boldsymbol{\nu})$, où $\boldsymbol{\varphi}$ appartient à l'espace d'état et $\boldsymbol{\nu} = (\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2)^\top$ appartient à l'espace des paramètres, s'écrit

$$\begin{aligned} \delta \tilde{J} &= \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{x}(t) - \widehat{\mathbf{x}}(t))^\top \boldsymbol{\varphi}(t) dt + \mu \delta x_j(\tau) - \mu \delta a \\ &+ \int_{t_0}^{\tau} \left[\boldsymbol{\lambda}(t)^\top \dot{\boldsymbol{\varphi}}(t) - \left(\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}(t))^\top \boldsymbol{\lambda}(t) \right)^\top \boldsymbol{\varphi}(t) \right] dt + \boldsymbol{\lambda}(\tau^-)^\top (\dot{\mathbf{x}}(\tau^-) - \mathbf{f}_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}(\tau))) \delta \tau \\ &- \int_{t_0}^{\tau} \left(\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{p}_1}(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}(t))^\top \boldsymbol{\lambda}(t) \right)^\top \boldsymbol{\nu}_1(t) dt + \int_{\tau}^{t_f} \left[\boldsymbol{\lambda}(t)^\top \dot{\boldsymbol{\varphi}}(t) - \left(\frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{p}_2, \mathbf{x}(t))^\top \boldsymbol{\lambda}(t) \right)^\top \boldsymbol{\varphi}(t) \right] dt \\ &- \boldsymbol{\lambda}(\tau)^\top (\dot{\mathbf{x}}(\tau) - \mathbf{f}_2(\mathbf{p}_2, \mathbf{x}(\tau))) \delta \tau - \int_{\tau}^{t_f} \left(\frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{p}_2}(\mathbf{p}_2, \mathbf{x}(t))^\top \boldsymbol{\lambda}(t) \right)^\top \boldsymbol{\nu}_2(t) dt . \end{aligned}$$

De la même façon qu'au paragraphe précédent, on effectue des intégrations par parties et on utilise les relations

$$\forall t \in [t_0, t_f] \quad \boldsymbol{\nu}_1(t) = \delta \mathbf{p}_1 \quad \text{et} \quad \boldsymbol{\nu}_2(t) = \delta \mathbf{p}_2 ,$$

et

$$\boldsymbol{\varphi}(\tau^-) = \delta \mathbf{x}(\tau) - \dot{\mathbf{x}}(\tau^-) \delta \tau ,$$

$$\boldsymbol{\varphi}(\tau) = \delta \mathbf{x}(\tau) - \dot{\mathbf{x}}(\tau) \delta \tau ,$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t_f) = \delta \mathbf{x}(t_f) ,$$

$$\boldsymbol{\varphi}(t_0) = 0 .$$

On obtient alors

$$\begin{aligned} \delta \tilde{J} = & \int_{t_0}^{t_f} (\mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t))^\top \boldsymbol{\varphi}(t) dt + \boldsymbol{\lambda}(t_f)^\top \delta \mathbf{x}(t_f) + \left(\boldsymbol{\lambda}(\tau^-) - \boldsymbol{\lambda}(\tau) \right)^\top \delta \mathbf{x}(\tau) + \mu \delta x_j(\tau) - \mu \delta a \\ & + \left(\boldsymbol{\lambda}(\tau)^\top \mathbf{f}_2(\mathbf{p}_2, \mathbf{x}(\tau)) - \boldsymbol{\lambda}(\tau^-)^\top \mathbf{f}_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}(\tau)) \right) \delta \tau - \int_{t_0}^{\tau} \left(\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) + \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}(t))^\top \boldsymbol{\lambda}(t) \right)^\top \boldsymbol{\varphi}(t) dt \\ & - \int_{\tau}^{t_f} \left(\dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) + \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{p}_2, \mathbf{x}(t))^\top \boldsymbol{\lambda}(t) \right)^\top \boldsymbol{\varphi}(t) dt - \left(\int_{t_0}^{\tau} \boldsymbol{\lambda}(t)^\top \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{p}_1}(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}(t)) dt \right)^\top \delta \mathbf{p}_1 \\ & - \left(\int_{\tau}^{t_f} \boldsymbol{\lambda}(t)^\top \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{p}_2}(\mathbf{p}_2, \mathbf{x}(t)) dt \right)^\top \delta \mathbf{p}_2 \end{aligned}$$

et le système adjoint s'écrit

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda}(t_f) = 0 \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{p}_2, \mathbf{x}(t))^\top \boldsymbol{\lambda}(t) + \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) & \text{si } t \in [\tau, t_f] \\ \boldsymbol{\lambda}(\tau^-) = \boldsymbol{\lambda}(\tau) - \mu \boldsymbol{\gamma} \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = -\frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}(t))^\top \boldsymbol{\lambda}(t) + \mathbf{x}(t) - \hat{\mathbf{x}}(t) & \text{si } t \in [t_0, \tau[\end{cases}$$

où $\boldsymbol{\gamma} = (\gamma_i)_{1 \leq i \leq d}$ avec $\gamma_j = 1$ et $\gamma_i = 0$, si $i \neq j$.

La $j^{\text{ème}}$ composante de l'état adjoint $\boldsymbol{\lambda}$ est discontinue à l'instant τ . Pour calculer $\lambda_j(\tau^-)$ et μ , il suffit d'utiliser la définition de $\boldsymbol{\gamma}$ et les relations

$$\boldsymbol{\lambda}(\tau)^\top \mathbf{f}_2(\mathbf{p}_2, \mathbf{x}(\tau)) - \boldsymbol{\lambda}(\tau^-)^\top \mathbf{f}_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}(\tau)) = 0$$

et

$$\boldsymbol{\lambda}(\tau^-) = \boldsymbol{\lambda}(\tau) - \mu \boldsymbol{\gamma} .$$

On peut en effet écrire

$$\lambda_j(\tau^-) = \frac{1}{f_1^{(j)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}(\tau))} \left[\lambda_j(\tau) f_2^{(j)}(\mathbf{p}_2, \mathbf{x}(\tau)) + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^d \lambda_i(\tau) \left(f_2^{(i)}(\mathbf{p}_2, \mathbf{x}(\tau)) - f_1^{(i)}(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}(\tau)) \right) \right]$$

et on en déduit μ par la formule

$$\mu = \lambda_j(\tau) - \lambda_j(\tau^-) .$$

Les expressions des gradients par rapport à \mathbf{p}_1 et \mathbf{p}_2 sont données par :

$$\nabla J_{\mathbf{p}_1} = - \int_{t_0}^{\tau} \boldsymbol{\lambda}(t)^\top \frac{\partial \mathbf{f}_1}{\partial \mathbf{p}_1}(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}(t)) dt ;$$

$$\nabla J_{\mathbf{p}_2} = - \int_{\tau}^{t_f} \boldsymbol{\lambda}(t)^\top \frac{\partial \mathbf{f}_2}{\partial \mathbf{p}_2}(\mathbf{p}_2, \mathbf{x}(t)) dt$$

et le gradient par rapport au seuil a s'écrit

$$\nabla J_a = -\mu .$$

Calcul des gradients pour le problème issu de la représentation

Le problème consiste à minimiser la fonction coût J_n définie par

$$\forall (\mathbf{p}, a) \in \mathcal{P} \times K_a \quad J_n(\mathbf{p}, a) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_n(\mathbf{p}, a, \cdot) - \widehat{\mathbf{x}}\|_{L^2(t_0, t_f)}^2$$

où $\mathbf{x}_n(\mathbf{p}, a, \cdot)$, noté par la suite \mathbf{x}_n , est la solution du système suivant :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \widetilde{H}_n(a - x_j(t)) \mathbf{f}_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}(t)) \\ \quad \quad \quad \quad \quad \quad + \left(1 - \widetilde{H}_n(a - x_j(t))\right) \mathbf{f}_2(\mathbf{p}_2, \mathbf{x}(t)), \quad t \in [t_0, t_f] \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \end{cases}$$

représentation du système (4.15).

À l'aide d'un état adjoint $\boldsymbol{\lambda}_n$, on introduit dans J_n l'équation d'état vérifiée par \mathbf{x}_n . On définit alors une nouvelle fonction \widetilde{J}_n par

$$\begin{aligned} \forall (\mathbf{p}, a) \in \mathcal{P} \times K_a \quad \widetilde{J}_n(\mathbf{p}, a) &= \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \|\mathbf{x}_n(t) - \widehat{\mathbf{x}}(t)\|_d^2 dt \\ &+ \int_{t_0}^{t_f} \boldsymbol{\lambda}_n(t)^\top \left[\dot{\mathbf{x}}_n(t) - \widetilde{H}_n(a - x_n^{(j)}(t)) \mathbf{f}_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}_n(t)) - \left(1 - \widetilde{H}_n(a - x_n^{(j)}(t))\right) \mathbf{f}_2(\mathbf{p}_2, \mathbf{x}_n(t)) \right] dt. \end{aligned}$$

La variation de \widetilde{J}_n suivant la direction $(\boldsymbol{\varphi}_n, \boldsymbol{\nu})$ où $\boldsymbol{\varphi}_n$ appartient à l'espace d'état et $\boldsymbol{\nu} = (\nu_1, \nu_2, \nu_3)^\top$ appartient à l'espace des paramètres, s'écrit

$$\begin{aligned} \delta \widetilde{J}_n &= \int_{t_0}^{t_f} \left[\boldsymbol{\lambda}_n(t)^\top \dot{\boldsymbol{\varphi}}_n(t) - \frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial \mathbf{x}_n}(\mathbf{x}_n(t), \mathbf{p}, a, \boldsymbol{\lambda}_n(t)) \boldsymbol{\varphi}_n(t) \right] dt \\ &\quad - \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial \mathbf{p}_1}(\mathbf{x}_n(t), \mathbf{p}, a, \boldsymbol{\lambda}_n(t)) \boldsymbol{\nu}_1(t) dt - \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial \mathbf{p}_2}(\mathbf{x}_n(t), \mathbf{p}, a, \boldsymbol{\lambda}_n(t)) \boldsymbol{\nu}_2(t) dt \\ &\quad \quad \quad - \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial a}(\mathbf{x}_n(t), \mathbf{p}, a, \boldsymbol{\lambda}_n(t)) \nu_3(t) dt, \end{aligned}$$

où l'on a posé

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_n(\mathbf{x}_n(t), \mathbf{p}, a, \boldsymbol{\lambda}_n(t)) &= -\frac{1}{2} \|\mathbf{x}_n(t) - \widehat{\mathbf{x}}(t)\|_d^2 \\ &\quad + \boldsymbol{\lambda}_n(t)^\top \left[\widetilde{H}_n(a - x_n^{(j)}(t)) \mathbf{f}_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}_n(t)) + \left(1 - \widetilde{H}_n(a - x_n^{(j)}(t))\right) \mathbf{f}_2(\mathbf{p}_2, \mathbf{x}_n(t)) \right]. \end{aligned}$$

En intégrant par parties et en remarquant que

$$\begin{aligned} \forall t \in [t_0, t_f] \quad \boldsymbol{\nu}(t) &= (\delta \mathbf{p}_1, \delta \mathbf{p}_2, \delta a)^\top, \\ \boldsymbol{\varphi}_n(t_f) &= \delta \mathbf{x}_n(t_f), \\ \boldsymbol{\varphi}_n(t_0) &= 0, \end{aligned}$$

on obtient

$$\begin{aligned} \delta \tilde{J}_n &= \boldsymbol{\lambda}_n(t_f)^\top \delta \mathbf{x}_n(t_f) - \int_{t_0}^{t_f} \left(\dot{\boldsymbol{\lambda}}_n(t) + \frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial \mathbf{x}_n}(\mathbf{x}_n(t), \mathbf{p}, a, \boldsymbol{\lambda}_n(t))^\top \right)^\top \boldsymbol{\varphi}_n(t) dt \\ &- \left(\int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial \mathbf{p}_1}(\mathbf{x}_n(t), \mathbf{p}, a, \boldsymbol{\lambda}_n(t))^\top dt \right)^\top \delta \mathbf{p}_1 - \left(\int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial \mathbf{p}_2}(\mathbf{x}_n(t), \mathbf{p}, a, \boldsymbol{\lambda}_n(t))^\top dt \right)^\top \delta \mathbf{p}_2 \\ &- \left(\int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial a}(\mathbf{x}_n(t), \mathbf{p}, a, \boldsymbol{\lambda}_n(t))^\top dt \right)^\top \delta a . \end{aligned}$$

On obtient alors le système adjoint

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda}_n(t_f) = 0 \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}_n(t) = -\frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial \mathbf{x}_n}(\mathbf{x}_n(t), \mathbf{p}, a, \boldsymbol{\lambda}_n(t))^\top, \quad t \in [t_0, t_f] \end{cases}$$

et les expressions des gradients par rapport à \mathbf{p}_1 et \mathbf{p}_2

$$\forall i \in \{1, 2\} \quad \nabla (J_n)_{\mathbf{p}_i} = - \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial \mathbf{p}_i}(\mathbf{x}_n(t), \mathbf{p}, a, \boldsymbol{\lambda}(t))^\top dt$$

et par rapport au seuil a

$$\nabla (J_n)_a = - \int_{t_0}^{t_f} \frac{\partial \mathcal{H}_n}{\partial a}(\mathbf{x}_n(t), \mathbf{p}, a, \boldsymbol{\lambda}(t))^\top dt .$$

Comparaison des calculs

De la même façon que pour le problème d'identification de paramètres, la représentation permet d'obtenir un système adjoint sans discontinuité, ne dépendant pas explicitement de l'instant de commutation τ , tout comme les expressions des gradients. Avec le problème hybride, un calcul de saut de l'état adjoint ainsi que le calcul de τ devront être effectués à chaque itération d'une méthode de descente.

4.2 Optimisation stochastique

Nous proposons dans ce paragraphe une méthode d'optimisation stochastique permettant de résoudre un problème hybride de commande ainsi que le problème issu de la représentation. Nous démontrons tout d'abord la continuité des fonctions coût associées aux problèmes. Cette condition est en effet requise pour appliquer la méthode qui est présentée ensuite à l'aide d'un théorème de convergence et d'un algorithme.

4.2.1 Problèmes hybride et issu de la représentation

On considère ici un cas particulier du problème de commande introduit au paragraphe 3.1.1. Pour la clarté de l'exposé, on va en effet supposer qu'il n'y a que deux instants de commutation. Les résultats développés dans ce chapitre sont encore valables pour un nombre quelconque de commutations et les démonstrations ne présentent pas de difficulté supplémentaire. Cependant, nous verrons au paragraphe 4.2.4 que la méthode présentée ici ne pourra être mise en oeuvre avec des temps de calculs raisonnables que pour des problèmes comportant un ou deux instants de commutation.

On conserve donc les mêmes hypothèses et notations que pour le problème à temps final du chapitre 3 mais on pose $m = 2$. Le système hybride (3.1) devient donc

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_1(u(t), \mathbf{x}(t)) & \text{si } t \in [t_0, \tau_1[\\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 & \\ \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_2(u(t), \mathbf{x}(t)) & \text{si } t \in [\tau_1, \tau_2[\\ \mathbf{x}(\tau_1) = \mathbf{x}(\tau_1^-) + \boldsymbol{\eta}_1 & \\ \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_3(u(t), \mathbf{x}(t)) & \text{si } t \in [\tau_2, t_f] \\ \mathbf{x}(\tau_2) = \mathbf{x}(\tau_2^-) + \boldsymbol{\eta}_2 & \end{array} \right. \quad (4.15)$$

et la fonction coût à minimiser est définie par

$$\forall (\tau_1, \tau_2) \in \mathcal{T} \quad J(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}(\tau_1, \tau_2, t_f) - \mathbf{x}_d\|_d^2$$

où l'on a posé

$$\mathcal{T} = \left\{ (\tau_1, \tau_2) \in [t_0, t_f]^2, \tau_1 \leq \tau_2 \right\} .$$

La représentation de (4.15) s'écrit ici

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(u(t), \mathbf{X}(t)) + \dot{H}_n(t - \tau_1) \boldsymbol{\mu}_1 + \dot{H}_n(t - \tau_2) \boldsymbol{\mu}_2, \quad t \in [t_0, t_f] \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 + H_n(t_0 - \tau_1) \boldsymbol{\mu}_1 + H_n(t_0 - \tau_2) \boldsymbol{\mu}_2 . \end{array} \right. \quad (4.16)$$

et la fonction coût associée est définie par

$$\forall (\tau_1, \tau_2) \in \mathcal{T} \quad J_n(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{2} \|\mathbf{X}_n(\tau_1, \tau_2, t_f) - \mathbf{X}_d\|_{d+1}^2$$

avec les notations du chapitre 3.

4.2.2 Continuité des fonctions coût

La continuité des fonctions coût J et J_n s'obtient à l'aide du théorème A.5.

Démontrons d'abord la continuité de J .

On note \mathbf{x}_1 la solution, donnée par le théorème 2.1, du problème suivant

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_1(u(t), \mathbf{x}(t)), \quad t \in [t_0, \tau_1] \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 . \end{array} \right.$$

Cette solution est continue sur $[t_0, \tau_1]$.

Notons maintenant \mathbf{x}_2 la solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_2(u(t), \mathbf{x}(t)), \quad t \in [\tau_1, \tau_2] \\ \mathbf{x}(\tau_1) = \mathbf{x}_1(\tau_1) + \boldsymbol{\eta}_1 . \end{array} \right.$$

D'après le théorème A.5, \mathbf{x}_2 est continue par rapport au triplet $(\tau_1, \mathbf{x}_2(\tau_1) + \boldsymbol{\eta}_1, \tau_2)$. Comme \mathbf{x}_1 est continue sur $[t_0, \tau_1]$, on en déduit que l'application qui à (τ_1, τ_2) associe $\mathbf{x}_2(\tau_2)$ est continue sur \mathcal{T} .

Soit enfin \mathbf{x}_3 la solution de

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_3(u(t), \mathbf{x}(t)), \quad t \in [\tau_2, t_f] \\ \mathbf{x}(\tau_2) = \mathbf{x}_2(\tau_2) + \boldsymbol{\eta}_2 . \end{array} \right.$$

Le théorème A.5 nous permet d'affirmer que \mathbf{x}_3 est continue par rapport aux données initiales. Comme précédemment, on en déduit par composition la continuité de \mathbf{x}_3 par rapport au couple (τ_1, τ_2) .

Finalement, l'application qui à (τ_1, τ_2) associe $\mathbf{x}(\tau_1, \tau_2, t_f)$, où $\mathbf{x}(\tau_1, \tau_2, \cdot)$ représente la solution de (4.15), est continue sur \mathcal{T} .

La continuité de J en découle.

Montrons maintenant que la fonction coût J_n est continue sur \mathcal{T} .

La continuité de l'application qui à (τ_1, τ_2) associe $\mathbf{X}_n(\tau_1, \tau_2, t_f)$, où $\mathbf{X}_n(\tau_1, \tau_2, \cdot)$ est la solution du système (4.16), provient directement du théorème A.5. En effet, (τ_1, τ_2) intervient comme paramètre dans le second membre de l'équation différentielle de (4.16) et dans les données initiales. Pour obtenir le résultat, il suffit de remarquer que H_n et \dot{H}_n sont continues sur \mathbb{R} .

On en déduit la continuité de J_n .

Remarque 4.2. Comme cela a déjà été évoqué au paragraphe 4.1.1, il est possible de redéfinir (4.16) comme suit

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(u(t), \mathbf{X}(t)) + \dot{H}_n(t - \tau_1) \boldsymbol{\mu}_1 + \dot{H}_n(t - \tau_2) \boldsymbol{\mu}_2, & t \in [t_0, t_f] \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 \end{cases}$$

et le théorème A.4 suffit pour assurer la continuité de J_n .

4.2.3 Présentation de la méthode

Résultat de convergence

Le théorème suivant, sur lequel s'appuie la méthode d'optimisation, est énoncé et démontré pour une fonction de deux variables. Le passage à n variables, $n \geq 1$, ne pose aucune difficulté supplémentaire.

Théorème 4.3. *Soit J une fonction continue de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R} minorée, $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace probabilisé et $(X_k)_{k \geq 1}$ une suite de variables aléatoires de dimension 2.*

On suppose que pour tout $k \geq 1$, les variables aléatoires $X_k^{(1)}$ et $X_k^{(2)}$, définies par $X_k = (X_k^{(1)}, X_k^{(2)})$, suivent les lois normales $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ et $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$ respectivement – où $\mu_i > 0$ et $\sigma_i > 0$, $i = 1, 2$ – et sont indépendantes.

On pose

$$U_n = \min_{i=1, \dots, n} J(X_i) \quad \text{et} \quad m = \inf_{\mathbb{R}^2} J.$$

Alors U_n converge vers m en probabilité quand n tend vers $+\infty$.

Démonstration. Soit $\varepsilon > 0$. Montrons que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|U_n - m| > \varepsilon) = 0.$$

Comme

$$\forall n \geq 1 \quad \forall \omega \in \Omega \quad U_n(\omega) \geq m,$$

on peut écrire

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|U_n - m| > \varepsilon) &= \mathbb{P}(U_n > m + \varepsilon) \\ &= \mathbb{P}\left(\min_{i=1, \dots, n} \{J(X_i)\} > m + \varepsilon\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{J(X_i) > m + \varepsilon\}\right). \end{aligned}$$

Or les variables aléatoires X_1, \dots, X_n sont indépendantes et J est continue sur \mathbb{R}^2 donc $J(X_1), \dots, J(X_n)$ sont des variables aléatoires indépendantes (voir par exemple [27]). On en déduit

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^n \{J(X_i) > m + \varepsilon\}\right) = \prod_{i=1}^n \mathbb{P}(J(X_i) > m + \varepsilon),$$

ce qui implique

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|U_n - m| > \varepsilon) &= \prod_{i=1}^n \left(1 - \mathbb{P}(J(X_i) \leq m + \varepsilon)\right) \\ &= \prod_{i=1}^n \left(1 - \mathbb{P}\left(X_i \in J^{-1}(]--\infty, m + \varepsilon])\right)\right). \end{aligned}$$

Les densités f_1 and f_2 des lois normales $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1)$ et $\mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2)$ vérifient

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} \quad \mathbb{P}\left(X_i \in J^{-1}(]--\infty, m + \varepsilon])\right) = \iint_{J^{-1}(]--\infty, m + \varepsilon])} f_1(x_1) f_2(x_2) dx_1 dx_2$$

car, pour tout i dans $\{1, \dots, n\}$, $X_i^{(1)}$ et $X_i^{(2)}$ sont indépendantes (voir par exemple [27]).

D'où

$$\mathbb{P}(|U_n - m| > \varepsilon) = \left(1 - \iint_{J^{-1}(]--\infty, m + \varepsilon])} f_1(x_1) f_2(x_2) dx_1 dx_2\right)^n.$$

Or, par définition de m , $J^{-1}(]--\infty, m + \varepsilon])$ contient un produit de deux intervalles de longueurs non nulles, donc

$$\iint_{J^{-1}(]--\infty, m + \varepsilon])} f_1(x_1) f_2(x_2) dx_1 dx_2 > 0$$

car $f_1(x) > 0$ et $f_2(x) > 0$ pour tout réel x .

Finalement, comme

$$\iint_{J^{-1}(]--\infty, m + \varepsilon])} f_1(x_1) f_2(x_2) dx_1 dx_2 \leq 1,$$

on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(|U_n - m| > \varepsilon) = 0,$$

ce qui achève la démonstration. □

Méthode d'optimisation et algorithme

Les minimisations sur \mathcal{T} des fonctions J et J_n permettent de résoudre le problème à temps final décrit au paragraphe 4.2.1. La minimisation de J fournit (τ_1^*, τ_2^*) et celle de J_n permet d'obtenir une approximation de (τ_1^*, τ_2^*) .

Les fonctions coût J et J_n sont continues; leur minimisation peut donc être effectuée en utilisant le théorème 4.2.

Décrivons la méthode pour minimiser J . La minimisation de J_n se fait de façon analogue.

On tire $2p$ nombres aléatoires t_1, \dots, t_p et t'_1, \dots, t'_p , appartenant à l'intervalle $[t_0, t_f]$, suivant la loi normale $\mathcal{N}(\frac{t_f-t_0}{2}, \frac{t_f-t_0}{2})$ et tels que $t_i < t'_i$ pour tout $i \in \{1, \dots, p\}$. On détermine ensuite le plus petit nombre y_{i_0} parmi $y_1 = J(t_1, t'_1), \dots, y_p = J(t_p, t'_p)$. Le couple (t_{i_0}, t'_{i_0}) est alors une approximation de (τ_1^*, τ_2^*) .

L'algorithme de la figure 4.1 permet d'accélérer la convergence et de diminuer le nombre d'appels à la fonction J . Le principe consiste à effectuer p_1 séries de $2p_2$ tirages de nombres aléatoires selon des lois normales recentrées préalablement à chaque série. Les nombres de la première série suivent la loi normale $\mathcal{N}(\frac{t_f-t_0}{2}, \frac{t_f-t_0}{2})$ et pour chacune des séries suivantes, les lois normales utilisées sont centrées sur les approximations t_{i_0} de τ_1^* et t'_{i_0} de τ_2^* obtenues grâce à la série précédente. De plus, l'écart-type est diminué après chaque recentrage, selon une loi heuristique.

```

début
  tirer deux nombres  $t_1$  et  $t'_1$ ,  $t_1 < t'_1$ , suivant la loi normale  $\mathcal{N}(\frac{t_f-t_0}{2}, \frac{t_f-t_0}{2})$ 
  compteur  $\leftarrow 0$ 
   $t_{i_0} \leftarrow \frac{t_f-t_0}{2}$ 
   $t'_{i_0} \leftarrow \frac{t_f-t_0}{2}$ 
   $\sigma \leftarrow \frac{t_f-t_0}{2}$ 
   $y \leftarrow J(t_1, t'_1)$ 
  tant que compteur  $< p_1$  faire
    compteur'  $\leftarrow 0$ 
     $\sigma \leftarrow \sigma / (1 + \text{compteur})$ 
    tant que compteur'  $< p_2$  faire
      tirer deux nombres  $t_2$  et  $t'_2$ ,  $t_2 < t'_2$ , suivant les lois normales  $\mathcal{N}(t_{i_0}, \sigma)$ 
      et  $\mathcal{N}(t'_{i_0}, \sigma)$  respectivement

      si  $J(t_2, t'_2) < y$  alors
         $y \leftarrow J(t_2, t'_2)$ 
         $t_1 \leftarrow t_2$ 
         $t'_1 \leftarrow t'_2$ 
      finsi
      compteur'  $\leftarrow$  compteur' + 1
    fin tant que
    compteur  $\leftarrow$  compteur + 1
     $t_{i_0} \leftarrow t_1$ 
     $t'_{i_0} \leftarrow t'_1$ 
  fin tant que
   $\tau_1^* \leftarrow t_{i_0}$ 
   $\tau_2^* \leftarrow t'_{i_0}$ 
fin

```

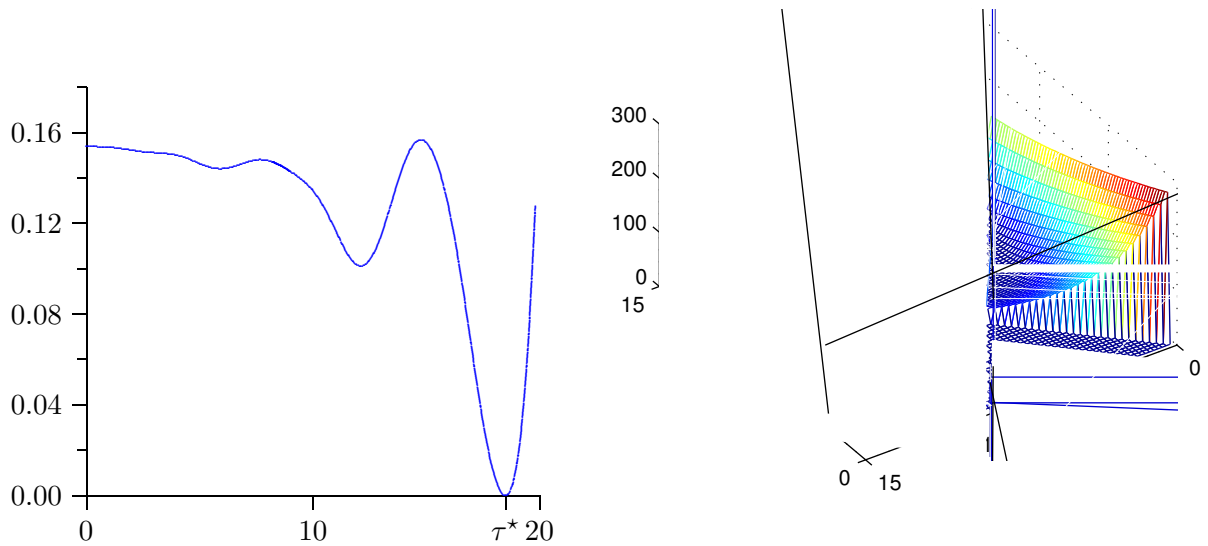
FIG. 4.1 – Algorithme de minimisation

4.2.4 Avantages et limites de la méthode

La méthode proposée peut se généraliser afin de résoudre des problèmes de commande pour lesquels la fonction coût est continue sur un ensemble inclus dans \mathbb{R}^m , $m \geq 1$. On peut par exemple l'utiliser pour résoudre le problème à temps final libre introduit au paragraphe 3.1.2, la continuité des fonctions coût se démontrant avec les mêmes arguments qu'au paragraphe 4.2.2.

Un exemple de mise en œuvre numérique pour ce type de problème sera proposé au chapitre 5.

Le principal intérêt de cette méthode est de permettre, contrairement aux méthodes de descente, une minimisation globale des fonctions coût. On est donc assuré d'obtenir un minimum global. Afin d'illustrer ce point, on a représenté sur la figure 4.2 des fonctions coût provenant d'un problème à temps final avec un instant de commutation pour la première et deux instants pour la seconde (voir [29] pour la description détaillée du second problème).



À l'aide des représentations introduites dans les chapitres précédents, nous allons présenter une méthode basée sur l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman, qui permet de résoudre, de façon rigoureuse, un problème hybride de poursuite de trajectoire. L'étude faite au chapitre 3 a en effet montré que l'on peut remplacer, lors d'une résolution, un problème hybride par le problème issu de la représentation, ce qui permet d'utiliser l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman.

Nous présentons brièvement le problème hybride, déjà étudié au chapitre 3. La méthode de résolution est ensuite exposée. Elle repose sur un théorème qui introduit l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman associée au problème issu de la représentation.

4.3.1 Problème hybride de poursuite de trajectoire

Le problème étudié est le problème de poursuite de trajectoire du paragraphe 3.2.1. Il fait intervenir le système à commutation autonome suivant

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_1(u(t), \mathbf{x}(t)) & \text{si } \mathbf{x}(t) \leq \mathbf{a} \\ \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_2(u(t), \mathbf{x}(t)) & \text{sinon} \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases} \quad (4.17)$$

où l'on fait les mêmes hypothèses qu'au chapitre 3 sur t , \mathbf{x}_0 , \mathbf{a} , u , \mathbf{f}_1 et \mathbf{f}_2 .

La fonction coût à minimiser est définie par

$$\forall u \in \mathcal{U} \quad J(u) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}(u, \cdot) - \mathbf{x}_d\|_{L^2(t_0, t_f)}^2 + \frac{\rho}{2} \|u\|_{L^2(t_0, t_f)}^2$$

où $\mathbf{x}(u, \cdot)$ est la solution de (4.17) et où $\mathcal{U} = \{u : [t_0, t_f] \rightarrow U, u \text{ continue}\}$.

4.3.2 Méthode de résolution

Afin d'introduire l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman, on considère le problème continu associé au problème hybride décrit ci-dessus.

La représentation de (4.17) est donnée par

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \prod_{i=1}^d \tilde{H}_n(\mathbf{a}_i - \mathbf{x}_i(t)) \mathbf{f}_1(u(t), \mathbf{x}(t)) \\ \quad + \left(1 - \prod_{i=1}^d \tilde{H}_n(\mathbf{a}_i - \mathbf{x}_i(t))\right) \mathbf{f}_2(u(t), \mathbf{x}(t)), & t \in [t_0, t_f] \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \quad (4.18)$$

On note $\mathbf{x}_n(u, \cdot)$ la solution de (4.18).

Le problème de commande associé au problème hybride consiste à minimiser sur \mathcal{U} la fonction coût J_n définie par

$$\forall u \in \mathcal{U} \quad J_n(u) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_n(u, \cdot) - \mathbf{x}_d\|_{L^2(t_0, t_f)}^2 + \frac{\rho}{2} \|u\|_{L^2(t_0, t_f)}^2.$$

Le théorème suivant, inspiré de [3] et [20], montre, sous des hypothèses fortes, que la connaissance d'une solution de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman associée au problème continu permet de trouver une commande u_n^* qui minimise J_n . D'après ce qui a été vu au chapitre 3, il suffit alors de choisir n suffisamment grand pour obtenir une approximation d'une commande optimale pour le problème hybride.

Théorème 4.4. Soit $n > 0$. On pose

$$\mathbf{F}_{n,\mathbf{a}}(u, \mathbf{x}) = \prod_{i=1}^d \tilde{H}_n(\mathbf{a}_i - \mathbf{x}_i) \mathbf{f}_1(u, \mathbf{x}) + \left(1 - \prod_{i=1}^d \tilde{H}_n(\mathbf{a}_i - \mathbf{x}_i)\right) \mathbf{f}_2(u, \mathbf{x})$$

pour tout $(u, \mathbf{x}) \in U \times \mathbb{R}^d$.

On suppose :

(a) L'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman

$$\forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^d \times [t_0, t_f]$$

$$\frac{\partial V_n}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_d(t)\|_d^2 + \min_{u \in U} \left[\frac{\rho}{2} u^2 + \frac{\partial V_n}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t)^\top \mathbf{F}_{n,\mathbf{a}}(u, \mathbf{x}) \right] = 0$$

admet une solution V_n^* de classe \mathcal{C}^1 sur $\mathbb{R}^d \times [t_0, t_f]$ vérifiant

$$\forall \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d \quad V_n^*(\mathbf{x}, t_f) = 0 ;$$

(b) $\forall (\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^d \times [t_0, t_f] \quad \exists ! \tilde{u}_n(\mathbf{x}, t) \in U$

$$\min_{u \in U} \left[\frac{\rho}{2} u^2 + \frac{\partial V_n}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t)^\top \mathbf{F}_{n,\mathbf{a}}(u, \mathbf{x}) \right] = \frac{\rho}{2} (\tilde{u}_n(\mathbf{x}, t))^2 + \frac{\partial V_n^*}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, t)^\top \mathbf{F}_{n,\mathbf{a}}(\tilde{u}_n(\mathbf{x}, t), \mathbf{x}) ;$$

(c) L'application qui à $(\mathbf{x}, t) \in \mathbb{R}^d \times [t_0, t_f]$ associe $\tilde{u}_n(\mathbf{x}, t) \in U$ est continue.

Alors il existe une commande u_n^* appartenant à \mathcal{U} vérifiant

$$\forall u \in \mathcal{U} \quad J_n(u_n^*) \leq J_n(u)$$

et définie par

$$\forall t \in [t_0, t_f] \quad u_n^*(t) = \tilde{u}_n(\mathbf{x}_n^*(t), t)$$

où \mathbf{x}_n^* est solution de

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{F}_{n,\mathbf{a}}(\tilde{u}_n(\mathbf{x}(t), t), \mathbf{x}(t)), & t \in [t_0, t_f] \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 . \end{cases}$$

De plus

$$J_n(u_n^*) = V_n^*(\mathbf{x}_0, t_0) .$$

Démonstration. Soit $t \in [t_0, t_f]$. La dérivation de $V_n^*(\mathbf{x}_n^*(t), t)$ par rapport à t donne :

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} V_n^*(\mathbf{x}_n^*(t), t) &= \frac{\partial V_n^*}{\partial t}(\mathbf{x}_n^*(t), t) + \frac{\partial V_n^*}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_n^*(t), t)^\top \dot{\mathbf{x}}_n^*(t) \\ &= \frac{\partial V_n^*}{\partial t}(\mathbf{x}_n^*(t), t) + \frac{\partial V_n^*}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_n^*(t), t)^\top \mathbf{F}_{n,\mathbf{a}}(u_n^*(t), \mathbf{x}_n^*(t)) . \end{aligned}$$

Grâce aux hypothèses (a) et (b), il vient

$$\frac{d}{dt} V_n^*(\mathbf{x}_n^*(t), t) = -\frac{1}{2} \|\mathbf{x}_n^*(t) - \mathbf{x}_d(t)\|_d^2 - \frac{\rho}{2} u_n^*(t)^2 .$$

En intégrant cette égalité entre t_0 et t_f , on obtient

$$V_n^*(\mathbf{x}_n^*(t_f), t_f) - V_n^*(\mathbf{x}_0, t_0) = -\frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_f} \|\mathbf{x}_n^*(t) - \mathbf{x}_d(t)\|_d^2 dt - \frac{\rho}{2} \int_{t_0}^{t_f} u_n^*(t)^2 dt .$$

Or $V_n^*(\mathbf{x}_n^*(t_f), t_f) = 0$, et par suite

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{x}_n^* - \mathbf{x}_d\|_{L^2(t_0, t_f)}^2 + \frac{\rho}{2} \|u_n^*\|_{L^2(t_0, t_f)}^2 = V_n^*(\mathbf{x}_0, t_0),$$

soit encore

$$J_n(u_n^*) = V_n^*(\mathbf{x}_0, t_0).$$

Soit $u \in \mathcal{U}$. L'hypothèse (a) entraîne

$$\frac{\partial V_n^*}{\partial t}(\mathbf{x}_n(u, t), t) + \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_n(u, t) - \mathbf{x}_d(t)\|_d^2 + \frac{\rho}{2} u(t)^2 + \frac{\partial V_n^*}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}_n(u, t), t)^\top \mathbf{F}_{n, \mathbf{a}}(u(t), \mathbf{x}_n(u, t)) \geq 0$$

et par conséquent

$$\frac{d}{dt} V_n^*(\mathbf{x}_n(u, t), t) \geq -\frac{1}{2} \|\mathbf{x}_n(u, t) - \mathbf{x}_d(t)\|_d^2 - \frac{\rho}{2} u(t)^2.$$

En intégrant cette dernière inégalité entre t_0 et t_f , on obtient

$$V_n^*(\mathbf{x}_n(u, t_f), t_f) - V_n^*(\mathbf{x}_0, t_0) \geq -J_n(u).$$

Or $V_n^*(\mathbf{x}_n(u, t_f), t_f) = 0$ et $V_n^*(\mathbf{x}_0, t_0) = J_n(u_n^*)$ donc

$$J_n(u_n^*) \leq J_n(u).$$

On en déduit que la fonction u_n^* minimise J_n . De plus, l'hypothèse (c) et la définition de u_n^* entraînent

$$u_n^* \in \mathcal{U}.$$

□

4.4 Conclusion

Trois méthodes de résolution pour des problèmes hybrides de commande ou d'identification ont été présentées. Elles utilisent les représentations introduites au chapitre 2 et les résultats établis au chapitre 3. Les avantages apportés par les représentations ont été mis en évidence. Avec la première méthode, qui consiste à calculer les gradients des fonctions coût, la représentation a simplifié les calculs et permis, dans les cas autonomes, d'éviter des discontinuités de l'état adjoint. La continuité de la fonction coût, hypothèse nécessaire à l'application de la deuxième méthode d'optimisation stochastique, est démontrée plus facilement pour le problème issu de la représentation. Enfin, la troisième méthode, basée sur l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman, utilise le problème issu de la représentation. Elle ne peut pas s'appliquer directement à un problème hybride, à cause des discontinuités de l'état. Des mises en œuvre numériques des deux premières méthodes sont proposées dans le chapitre suivant pour la résolution de problèmes de commande et d'identification.

Chapitre 5

Applications numériques

Les résultats établis aux chapitres 2 et 3 ont permis d'introduire, dans le chapitre 4, trois méthodes de résolution, pour des problèmes hybrides de commande et d'identification, faisant appel aux représentations des systèmes hybrides. La première méthode permet d'obtenir, à l'aide du calcul des variations, les gradients des fonctions coût à minimiser. La deuxième est une méthode d'optimisation stochastique qui minimise de façon globale les fonctions coût. Enfin, la troisième méthode est basée sur l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman pour le problème issu de la représentation. Les avantages théoriques, liés à l'utilisation des représentations des systèmes hybrides, ont été développés.

L'objet de ce chapitre est de valider, sur des exemples numériques, deux de ces méthodes, tout en étudiant d'un point de vue plus pratique ce qu'apporte la représentation. La méthode d'optimisation stochastique et la méthode basée sur le calcul des variations sont ainsi mises en œuvre. La résolution de l'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman, qui est au centre de la troisième méthode, est un problème complexe : en général, l'existence d'une solution est une question ouverte. Ceci a donné lieu à de nombreuses études numériques (voir par exemple [34] et [12]) et sort du cadre de ce mémoire. Nous ne présenterons donc pas d'application numérique pour cette dernière méthode.

La mise en œuvre numérique de la méthode stochastique est faite pour un problème à temps final libre. On effectue la minimisation des fonctions coût associées au problème hybride et au problème issu de la représentation, pour différentes valeurs de n . La convergence des solutions du problème continu vers celles du problème hybride est mise en évidence.

Les résultats obtenus au chapitre 4, grâce au calcul des variations, sont utilisés ici pour résoudre quatre problèmes hybrides à l'aide de méthodes de descente. On résout tout d'abord un problème à temps final fixé dans ses versions hybride et continue, ce qui permet de comparer les résultats obtenus. L'utilité des expressions des gradients, lors de la minimisation des fonctions coût, est mise en évidence. Pour les autres mises en œuvre, seul le problème issu de la représentation est résolu numériquement mais la précision des résultats est vérifiée. Un problème de poursuite de trajectoire pour un système à saut et commutation commandés est ainsi résolu. Les deux dernières applications concernent des problèmes d'identification de paramètres et d'identification d'un seuil.

5.1 Problème à temps final libre

On étudie le mouvement d'une voiture à deux rapports de transmission, décrit par un système hybride à saut et commutation commandés où l'instant de commutation correspond à un changement de rapport. Le problème consiste à trouver un instant de commutation et un instant final qui permettent d'approcher au mieux une position et une vitesse finales fixées à l'avance. Après

avoir introduit les problèmes hybride et issu de la représentation, on utilisera la méthode d'optimisation stochastique pour minimiser les fonctions coût associées aux deux problèmes.

5.1.1 Problème hybride

On considère une voiture à deux rapports de transmission. Une position p_0 et une vitesse v_0 sont données à l'instant initial t_0 et le premier rapport est utilisé. Le second rapport est enclenché, à l'instant τ , jusqu'à l'instant final t_f .

En posant $\mathbf{x}_0 = (p_0, v_0)^\top$ et $\mathbf{x} = (p, v)^\top$, où p représente la position de la voiture et v sa vitesse, on peut décrire le mouvement de la voiture par le système hybride à saut et commutation commandés suivant (voir par exemple [32] et [30]) :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_1(u(t), \mathbf{x}(t)) & \text{si } t \in [t_0, \tau[\\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_2(u(t), \mathbf{x}(t)) & \text{si } t \in [\tau, t_f] \\ \mathbf{x}(\tau) = \mathbf{x}(\tau^-) + \boldsymbol{\eta} . \end{cases} \quad (5.1)$$

La fonction u , définie sur $[t_0, t_f]$, représente la commande, d'accélération ou de freinage. Elle est supposée continue et à valeurs dans $U = [-1, 1]$.

Les fonctions \mathbf{f}_1 et \mathbf{f}_2 sont définies comme suit

$$\forall i \in \{1, 2\} \quad \forall (u, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3 \quad \mathbf{f}_i(u, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}_2, u g_i(\mathbf{x}_2))^\top .$$

Les fonctions g_1 et g_2 , représentées sur la figure 5.1, correspondent respectivement à l'efficacité des premier et second rapports, c'est-à-dire au couple moteur ou de freinage. Elles sont définies par

$$\forall i \in \{1, 2\} \quad \forall x \in \mathbb{R} \quad g_i(x) = \frac{1}{1 + \exp((-4i + 6)(x - 4))} .$$

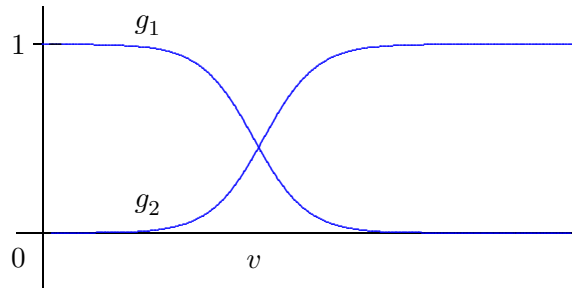


FIG. 5.1 – Représentation des fonctions g_1 et g_2 sur $[0, +\infty[$

On suppose que le changement de rapport entraîne une perte de vitesse à l'instant du changement. On posera donc

$$\boldsymbol{\eta} = (0, \delta)^\top$$

où $\delta < 0$.

Le système (5.1) appartient à la classe de systèmes hybrides introduite au paragraphe 2.1. En effet, les fonctions \mathbf{f}_1 et \mathbf{f}_2 vérifient les propriétés requises : elles sont de classe \mathcal{C}^1 et on peut écrire

$$\forall i \in \{1, 2\} \quad \forall (u, \mathbf{x}) \in I \times \mathbb{R}^2 \quad \|\mathbf{f}_i(u, \mathbf{x})\|_2 \leq |\mathbf{x}_2| + |u| \leq \|\mathbf{x}\|_2 + 1 + \varepsilon$$

où I est un intervalle de la forme $] - 1 - \varepsilon, 1 + \varepsilon[$, avec $\varepsilon > 0$.

L'inégalité (2.2) est alors vérifiée.

On peut donc considérer un problème à temps final libre, comme celui décrit au paragraphe 3.1.2, et les résultats de convergence établis au chapitre 3 sont conservés.

Le problème consiste ici à trouver un instant de commutation τ^* dans $[t_0, T]$, où T est fixé dans \mathbb{R}^+ , et un instant final minimum $t_f^* > \tau^*$, appartenant à $[t_0, T]$, qui permettent, à l'instant final, d'approcher au mieux un état désiré $\mathbf{x}_d = (p_d, v_d)$ où p_d est la position désirée et v_d la vitesse désirée.

On traduit le problème par la minimisation sur \mathcal{T} de la fonction coût J définie par

$$\forall (\tau, t_f) \in \mathcal{T}' \quad J(\tau, t_f) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}(\tau, t_f) - \mathbf{x}_d\|_2^2 + \zeta t_f$$

où $\zeta > 0$ et où \mathcal{T}' est défini par

$$\mathcal{T}' = \{(\tau, t_f) \in [t_0, T]^2, \tau < t_f\}.$$

5.1.2 Problème issu de la représentation

La représentation du système (5.1) s'écrit, comme au chapitre 2, de la façon suivante

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t) = \mathbf{F}(u(t), \mathbf{X}(t)) + \dot{H}_n(t - \tau) \boldsymbol{\mu}, & t \in [t_0, t_f] \\ \mathbf{X}(t_0) = \mathbf{X}_0 + H_n(t_0 - \tau) \boldsymbol{\mu} \end{cases} \quad (5.2)$$

où $\boldsymbol{\mu} = (\boldsymbol{\eta}, 1)^\top = (0, \delta, 1)^\top$ et $\mathbf{X}_0 = (\mathbf{x}_0, 1)^\top$.

La fonction \mathbf{f} , telle que $\mathbf{F} = (\mathbf{f}, 0)^\top$, est définie, de façon plus naturelle qu'en (2.5), par

$$\forall (u, \mathbf{x}, \nu) \in U \times \mathbb{R}^3 \quad \mathbf{f}(u, \mathbf{x}, \nu) = \left(x_2, u \frac{1}{1 + \exp((-4\nu + 6)(x_2 - 4))} \right)^\top.$$

Remarquons que, comme avec la définition (2.5), la fonction \mathbf{f} ci-dessus vérifie la propriété suivante, utilisée dans les démonstrations de convergence du chapitre 2

$$\exists K_1 > 0 \quad \exists K_2 > 0 \quad \forall (u, \mathbf{x}, \nu) \in U \times \mathbb{R}^3 \quad \|\mathbf{f}(u, \mathbf{x}, \nu)\|_2 \leq K_1 \|\mathbf{x}\|_2 + K_2. \quad (5.3)$$

On pose $\mathbf{X}_d = (\mathbf{x}_d, 2)^\top$. Le problème continu associé au problème hybride du paragraphe 5.1.1 consiste alors à minimiser sur \mathcal{T}' la fonction coût J_n définie par

$$\forall (\tau, t_f) \in \mathcal{T}' \quad J_n(\tau, t_f) = \frac{1}{2} \|\mathbf{X}_n(\tau, t_f) - \mathbf{X}_d\|_3 + \zeta t_f.$$

Les instants obtenus lors de la minimisation de J_n seront notés τ_n et $t_f^{(n)}$.

5.1.3 Résultats numériques

De la même façon qu'au paragraphe 4.2.2, on peut montrer que les fonctions coût J et J_n sont continues sur \mathcal{T}' . On utilise alors la méthode stochastique du chapitre 4 pour minimiser J et J_n . Les valeurs utilisées pour l'application numérique sont données dans le tableau 5.1.

La fonction u est ici définie par

$$\begin{cases} u(t) = 0.05 t & \text{si } t \in [t_0, \tau[\\ u(t) = -0.1 t + 0.15 \tau & \text{si } t \in [\tau, T]. \end{cases}$$

TAB. 5.1 – Valeurs utilisées pour l'application

Paramètres	Valeurs
t_0	0
T	25
\mathbf{x}_0	$(0, 3)^\top$
\mathbf{x}_d	$(60, 4.5)^\top$
δ	-0.2
ζ	0.2

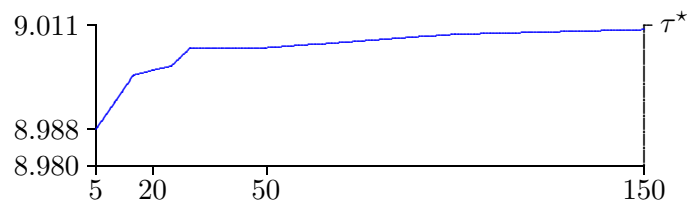
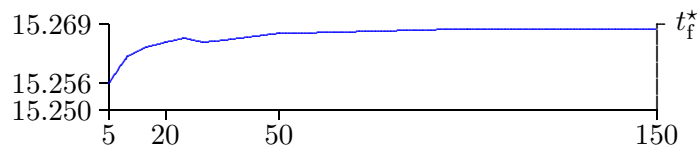
TAB. 5.2 – Valeurs obtenues lors de la minimisation de J_n

n	τ_n	$t_f^{(n)}$	$J_n(\tau_n, t_f^{(n)})$
5	8.988	15.256	3.060
10	8.994	15.262	3.060
20	9.001	15.265	3.061
30	9.006	15.265	3.061
50	9.006	15.267	3.061
100	9.009	15.268	3.062
150	9.010	15.268	3.062

Les valeurs obtenues lors de la minimisation de J sont

$$\tau^* = 9.011, \quad t_f^* = 15.269, \quad J(\tau^*, t_f^*) = 3.062 .$$

Pour la minimisation de J_n , des résultats correspondant à différentes valeurs de n sont regroupés dans le tableau 5.2 et les convergences de τ_n vers τ^* et de $t_f^{(n)}$ vers t_f^* sont représentées sur les figures 5.2 et 5.3.

FIG. 5.2 – Représentation de τ_n en fonction de n FIG. 5.3 – Représentation de $t_f^{(n)}$ en fonction de n

Chaque minimisation a nécessité 5000 appels à la fonction coût. On a obtenu, pour $n = 20$, des approximations de τ^* et de t_f^* avec une précision relative de l'ordre de 10^{-3} et 3.10^{-4} respectivement. La précision est meilleure lorsque n croît : pour $n = 150$, elle est de l'ordre de 10^{-4} pour τ^* et 7.10^{-5} pour t_f^* .

Pour des valeurs de n supérieures à 150, la fonction H_n n'est plus opérante. Ceci est vraisemblablement lié à la représentation des réels en machine qui provoque une accumulation d'erreurs d'arrondis. La résolution numérique du système continu par la fonction `ode23` de MATLAB, qui donne de meilleurs résultats que `ode45`, peut alors échouer. L'application de la méthode n'est pas pour autant limitée car on obtient des résultats satisfaisants pour les applications usuelles avec $n = 20$.

5.1.4 Avantages apportés par la représentation

Contrairement à ce qui sera vu pour les prochaines mises en œuvre, l'utilisation de la représentation ne présente que peu d'intérêt pratique ici. Signalons toutefois que la discontinuité du système hybride à l'instant τ nécessite deux appels à la fonction `ode23` de MATLAB à chaque calcul de J alors que, pour la fonction coût J_n , un seul appel suffit. L'incidence sur les temps de calcul n'est cependant pas sensible, ceux-ci étant du même ordre pour la résolution des deux problèmes.

5.2 Problème à temps final fixé

On décrit le mouvement d'un pendule amorti par un système hybride à sauts et commutations autonomes. On suppose qu'il y a deux instants de commutations, correspondant à des changements du coefficient de frottement. On veut déterminer des instants de commutation permettant d'approcher au mieux à l'instant final une position et une vitesse angulaires désirées. Les expressions des gradients des fonctions coût, établies au chapitre 4, sont utilisées pour mettre en œuvre une méthode de descente. Les problèmes hybride et continu sont ainsi résolus (voir [31]).

5.2.1 Problème hybride

Soit un pendule constitué d'un point matériel situé à l'extrémité d'un fil de longueur ℓ pouvant se déplacer dans un plan vertical. Le pendule est soumis à une force de frottement proportionnelle à sa vitesse. Le mouvement du point matériel au cours du temps est décrit par l'équation différentielle (voir par exemple [35]) :

$$\ddot{\theta} = -\omega^2 \sin \theta - \varepsilon \dot{\theta} \quad (5.4)$$

où $\omega^2 = g/\ell$ et où θ représente la position angulaire du pendule et $\varepsilon > 0$ le coefficient de frottement.

En notant v la vitesse angulaire du pendule, on peut remplacer (5.4) par le système

$$\begin{cases} \dot{v} = -\omega^2 \sin \theta - \varepsilon v \\ \dot{\theta} = v \end{cases}$$

Pour décrire le mouvement d'un pendule soumis, entre les instants t_0 et t_f , à des changements

de coefficient de frottement, on considère le système hybride suivant

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_1(t, \mathbf{x}(t)) & \text{si } t \in [t_0, \tau_1[\\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \\ \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_2(t, \mathbf{x}(t)) & \text{si } t \in [\tau_1, \tau_2[\\ \mathbf{x}(\tau_1) = \mathbf{x}(\tau_1^-) + \boldsymbol{\eta}_1 \\ \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_3(t, \mathbf{x}(t)) & \text{si } t \in [\tau_2, t_f] \\ \mathbf{x}(\tau_2) = \mathbf{x}(\tau_2^-) + \boldsymbol{\eta}_2 \end{cases} \quad (5.5)$$

où $\mathbf{x}_0 = (v_0, \theta_0)^\top$, $\boldsymbol{\eta}_1$ et $\boldsymbol{\eta}_2$ sont fixés dans \mathbb{R}^2 .

Les fonctions \mathbf{f}_i , $i \in \{1, 2, 3\}$, sont définies par

$$\forall i \in \{1, 2\} \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3 \quad \mathbf{f}_i(t, \mathbf{x}) = (-\omega^2 \sin x_2 - \varepsilon_i x_1, x_1)^\top$$

et

$$\forall (t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3 \quad \mathbf{f}_3(t, \mathbf{x}) = \mathbf{f}_1(t, \mathbf{x}).$$

Le système (5.5) appartient à la classe de systèmes hybrides définies au paragraphe 2.1.1. En effet, \mathbf{f}_1 et \mathbf{f}_2 sont de classe \mathcal{C}^1 . De plus, on a l'inégalité

$$\forall i \in \{1, 2\} \quad \forall (t, x) \in \mathbb{R}^3 \quad \|\mathbf{f}_i(t, x)\|_2 \leq \omega^2 |\sin x_2| + (\varepsilon_i + 1)|x_1| \leq \omega^2 + (\varepsilon_i + 1)\|x\|_2.$$

On est donc assuré de la validité des résultats, se rapportant au système (5.5), démontrés dans les chapitres 2 et 3.

On considère le problème à temps final fixé, introduit au paragraphe 3.1.1, dans lequel on cherche des instants de commutation τ_1^* et τ_2^* , appartenant à $[t_0, t_f]$ et tels que $\tau_1 \leq \tau_2$, permettant d'approcher au mieux à l'instant t_f un état désiré $\mathbf{x}_d = (v_d, \theta_d)$ où v_d est la vitesse angulaire désirée et θ_d la position angulaire désirée.

On traduit ce problème par la minimisation sur $\mathcal{T} = \{(\tau_1, \tau_2) \in [t_0, t_f]^2, \tau_1 \leq \tau_2\}$ de la fonction coût J définie par

$$\forall (\tau_1, \tau_2) \in \mathcal{T} \quad J(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}(\tau_1, \tau_2, t_f) - \mathbf{x}_d\|_2^2.$$

Pour alléger les écritures, on note $\mathbf{x} = (x_1, x_2)^\top$ la solution de (5.5).

Les calculs effectués au paragraphe 4.1.1 permettent d'obtenir le système adjoint suivant

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda}(t_f) = \mathbf{x}_d - \mathbf{x}(t_f) \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = (\lambda_1(t)\varepsilon_1 - \lambda_2(t), \lambda_1(t) \cos x_2(t))^\top & \text{si } t \in [\tau_2, t_f] \\ \boldsymbol{\lambda}(\tau_2^-) = \boldsymbol{\lambda}(\tau_2) \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = (\lambda_1(t)\varepsilon_2 - \lambda_2(t), \lambda_1(t) \cos x_2(t))^\top & \text{si } t \in [\tau_1, \tau_2[\\ \boldsymbol{\lambda}(\tau_1^-) = \boldsymbol{\lambda}(\tau_1) \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = (\lambda_1(t)\varepsilon_1 - \lambda_2(t), \lambda_1(t) \cos x_2(t))^\top & \text{si } t \in [t_0, \tau_1[, \end{cases}$$

et les gradients de la fonction coût J par rapport aux instants de commutation τ_1 et τ_2

$$\nabla J_{\tau_1} = \boldsymbol{\lambda}(\tau_1)^\top \left(\mathbf{f}_2(\tau_1, \mathbf{x}(\tau_1)) - \mathbf{f}_1(\tau_1, \mathbf{x}(\tau_1^-)) \right),$$

$$\nabla J_{\tau_2} = \boldsymbol{\lambda}(\tau_2)^\top \left(\mathbf{f}_1(\tau_2, \mathbf{x}(\tau_2)) - \mathbf{f}_2(\tau_2, \mathbf{x}(\tau_2^-)) \right).$$

5.2.2 Problème issu de la représentation

Soit \mathbf{f} la fonction définie par

$$\forall (t, \mathbf{x}, \nu) \in [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^3 \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \nu) = (-\sin x_2 - \nu x_1, x_1)^\top.$$

Cette fonction vérifie

$$\forall i \in \{1, 2\} \quad \forall (t, \mathbf{x}) \in [t_0, t_f] \times \mathbb{R}^2 \quad \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \varepsilon_i) = \mathbf{f}_i(t, \mathbf{x}).$$

Par suite, d'après l'étude faite au chapitre 2, la représentation du système (5.5) s'écrit

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(t, \mathbf{X}(t)) \\ 0 \end{pmatrix} + \ddot{H}_n(t - \tau_1) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta}_1 \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \end{pmatrix} + \ddot{H}_n(t - \tau_2) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta}_2 \\ \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \end{pmatrix}, & t \in [t_0, t_f] \\ \mathbf{X}(t_0) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix} \end{cases} \quad (5.6)$$

où l'on a posé $\mathbf{X} = (\mathbf{x}, \nu)^\top$.

La condition initiale a été modifiée, conformément à ce qui a été fait au paragraphe 4.1.1 pour les besoins des calculs.

De plus, la fonction \mathbf{f} vérifie (5.3), ce qui entraîne que les convergences établies aux chapitres 2 et 3 s'appliquent au système (5.6).

Soit $\mathbf{X}_d = (\mathbf{x}_d, \varepsilon_1)^\top$. Le problème issu de la représentation consiste à trouver $(\tau_1^{(n)}, \tau_2^{(n)})$ qui minimise sur \mathcal{T} la fonction coût J_n définie par

$$\forall (\tau_1, \tau_2) \in \mathcal{T} \quad J_n(\tau_1, \tau_2) = \frac{1}{2} \|\mathbf{X}_n(\tau_1, \tau_2, t_f) - \mathbf{X}_d\|_3^2.$$

On note, dans ce qui suit, $\mathbf{X}_n = (\mathbf{x}_n, \nu_n)^\top$ au lieu de $\mathbf{X}_n(\tau_1, \tau_2, \cdot)$.

Les calculs effectués au chapitre 4 permettent d'obtenir le système adjoint suivant

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda}(t_f) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_d \\ \varepsilon_1 \end{pmatrix} - \mathbf{X}_n(t_f) \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \begin{pmatrix} \lambda_1(t)\nu_n(t) - \lambda_2(t) \\ \lambda_1(t) \cos x_n^{(2)}(t) \\ \lambda_1(t)x_n^{(1)}(t) \end{pmatrix}, & t \in [t_0, t_f]. \end{cases}$$

Les gradients de J_n par rapport à τ_1 et τ_2 s'écrivent

$$\begin{aligned} \nabla J_{\tau_1} &= \int_{t_0}^{t_f} \ddot{H}_n(t - \tau_1) \boldsymbol{\lambda}(t)^\top \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta}_1 \\ \varepsilon_2 - \varepsilon_1 \end{pmatrix} dt, \\ \nabla J_{\tau_2} &= \int_{t_0}^{t_f} \ddot{H}_n(t - \tau_2) \boldsymbol{\lambda}(t)^\top \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta}_2 \\ \varepsilon_1 - \varepsilon_2 \end{pmatrix} dt. \end{aligned}$$

5.2.3 Résultats numériques

On considère les problèmes hybride et continu décrits ci-dessus. Pour déterminer les valeurs des instants de commutation τ_1^* et τ_2^* qui réalisent le minimum de J , on minimise les fonctions J et J_n à l'aide de la fonction `fminunc` de MATLAB. Il est possible de fournir à cette fonction les expressions des gradients des fonctions coût par rapport à τ_1 et τ_2 . On va comparer les résultats obtenus avec et sans les expressions des gradients.

Les valeurs utilisées pour l'application sont données dans le tableau 5.3. Afin de tester la convergence de l'algorithme, avec et sans les gradients, on a choisi l'état désiré \mathbf{x}_d comme étant

TAB. 5.3 – Valeurs utilisées pour l’application

Paramètres	Valeurs
ε_1	0.1
ε_2	0.4
t_0	0
t_f	20
\mathbf{x}_0	$(0, \frac{\pi}{4})^\top$
\mathbf{x}_d	$(-0.0640, 0.0216)^\top$
$\boldsymbol{\eta}_1$	$(-0.2, 0)^\top$
$\boldsymbol{\eta}_2$	$(0.1, 0)^\top$

TAB. 5.4 – Minimisation de J

	τ_1^*	τ_2^*	Nombre d’itérations	Nombre d’appels à la fonction
Sans les gradients	10.4065	15.8925	17	94
Avec les gradients	7.9998	15.0001	7	33

l’état final du système hybride (5.5), avec $\tau_1 = 8$ et $\tau_2 = 15$. Les minimisations sont alors initialisées avec les valeurs $\tau_1 = 7$ et $\tau_2 = 13$.

Les résultats obtenus lors de la minimisation de J sont donnés dans le tableau 5.4.

Pour avoir de bonnes approximations de τ_1^* et τ_2^* , on a considéré la fonction J_n avec $n = 100$. Les valeurs obtenues lors de la minimisation de cette fonction sont données dans le tableau 5.5.

TAB. 5.5 – Minimisation de J_{100}

	$\tau_1^{(100)}$	$\tau_2^{(100)}$	Nombre d’itérations	Nombre d’appels à la fonction
Sans les gradients	7.0003	14.6001	14	90
Avec les gradients	7.9918	14.9976	7	38

La lecture des tableaux 5.4 et 5.5 montre qu’il est nécessaire de fournir les gradients à la fonction `fminunc`, afin d’obtenir des approximations des instants de commutation optimaux. En effet, les minimisations des fonctions coût ne prenant pas en compte les expressions des gradients, conduisent à des valeurs qui correspondent à un minimum local de J ou J_n .

Les résultats fournis par la minimisation de J_{100} sont proches de ceux obtenus en minimisant J et confirment la convergence établie au chapitre 3.

5.2.4 Avantages apportés par la représentation

L'utilisation de la représentation permet de simplifier, de façon très sensible, la programmation de la résolution du problème, comme nous allons le montrer maintenant.

Les calculs des gradients nécessitent la connaissance de \mathbf{x} sur l'intervalle $[t_0, t_f]$. Pour le problème hybride, ceci oblige à faire un appel au solveur `ode23` sur chacun des intervalles $[t_0, \tau_1[$, $[\tau_1, \tau_2[$ et $[\tau_2, t_f]$. Ensuite, il faut effectuer une concaténation des trois résultats, en évitant les répétitions car l'instant final d'une résolution correspond à l'instant initial de la suivante. Pour le problème issu de la représentation, un seul appel à `ode23` suffit et les problèmes liés à la concaténation sont évités.

On retrouve le même type de simplifications lors de la résolution du système adjoint.

Finalement, l'utilisation de la représentation permet de diviser par deux la longueur du programme principal.

Signalons que le choix de la fonction H_n , définie en (2.11), n'oblige pas à programmer de nouvelles fonctions pour les calculs de \dot{H}_n et \ddot{H}_n . En effet, ces dérivées s'expriment simplement en fonction de H_n :

$$\begin{aligned}\dot{H}_n &= n H_n (1 - H_n) , \\ \ddot{H}_n &= n^2 H_n (1 - H_n) (1 - 2H_n) .\end{aligned}$$

Enfin, les intégrations numériques, effectuées pour calculer les gradients avec la représentation, ne pénalisent pas les temps de calculs, ceux-ci étant du même ordre pour les deux problèmes.

5.3 Poursuite de trajectoire

On présente un problème de poursuite de trajectoire portant sur la recherche d'un instant de commutation et d'une commande continue. Les équations différentielles qui définissent le système hybride à saut et commutation commandés sont des équations non linéaires du même type que celles qui décrivent le mouvement d'un pendule. On résout le problème issu de la représentation à l'aide des expressions des gradients de la fonction coût associée.

5.3.1 Problème hybride

Le problème de poursuite de trajectoire que l'on se propose de résoudre numériquement est un cas particulier du problème décrit au paragraphe 3.1.3. On se place en effet dans le cadre du paragraphe 4.1.2 où on ne considère qu'un seul instant de commutation. On conserve les mêmes notations.

Le système hybride à commander est de la forme suivante

$$\left\{ \begin{array}{ll} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_1(u(t), \mathbf{x}(t)) & \text{si } t \in [t_0, \tau[\\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 & \\ \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_2(u(t), \mathbf{x}(t)) & \text{si } t \in [\tau, t_f] \\ \mathbf{x}(\tau) = \mathbf{x}(\tau^-) + \boldsymbol{\eta} . & \end{array} \right. \quad (5.7)$$

Les fonctions \mathbf{f}_1 et \mathbf{f}_2 sont définies par

$$\forall (u, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3 \quad \mathbf{f}_1(u, \mathbf{x}) = (-0.5 \sin x_2 - u x_1, x_1)^\top$$

et

$$\forall (u, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3 \quad \mathbf{f}_2(u, \mathbf{x}) = (-2 \sin x_2 - u x_1, x_1)^\top .$$

Elles sont de classe \mathcal{C}^1 et on montre aisément qu'elles vérifient la propriété

$$\exists C_1 > 0 \quad \exists C_2 > 0 \quad \forall i \in \{1, 2\} \forall (u, \mathbf{x}) \in I \times \mathbb{R}^2 \quad \|\mathbf{f}_i(u, \mathbf{x})\|_2 \leq C_1 \|\mathbf{x}\|_2 + C_2.$$

Le système (5.7) appartient donc à la classe de systèmes définie au paragraphe 2.1.1.

Le problème consiste à trouver un instant de commutation τ^* , appartenant à $[t_0, t_f]$, et une fonction continue u^* , définie sur $[t_0, t_f]$ et à valeurs dans un fermé borné U de \mathbb{R} , qui permettent à l'état \mathbf{x} du système (5.7) d'approcher au mieux dans $L^2(t_0, t_f)$ un état désiré \mathbf{x}_d , continu par morceaux sur $[t_0, t_f]$.

La résolution va être effectuée à l'aide du problème issu de la représentation.

5.3.2 Problème issu de la représentation

On utilise ici (2.5) pour définir la fonction \mathbf{f} utilisée dans la représentation de (5.7). On obtient alors la définition suivante

$$\forall (u, \mathbf{x}, \nu) \in U \times \mathbb{R}^3 \quad \mathbf{f}(u, \mathbf{x}, \nu) = ((1 - 1.5\nu) \sin x_2 - u x_1, x_1)^\top.$$

La représentation s'écrit donc

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{X}}(t) = \begin{pmatrix} \mathbf{f}(u(t), \mathbf{X}(t)) \\ 0 \end{pmatrix} + \dot{H}_n(t - \tau) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ 1 \end{pmatrix}, & t \in [t_0, t_f] \\ \mathbf{X}(t_0) = \begin{pmatrix} \mathbf{x}_0 \\ 0.5 \end{pmatrix}. \end{cases} \quad (5.8)$$

La solution de (5.8) est notée

$$\mathbf{X}_n(\tau, u, \cdot) = (\mathbf{x}_n(\tau, u, \cdot), \nu_n(\tau, u, \cdot))^\top.$$

Soit $\mathbf{X}_d(\tau, u, \cdot) = (\mathbf{x}_d, \nu_n(\tau, u, \cdot))^\top$.

On cherche à déterminer une fonction continue u_n et un instant de commutation τ_n qui minimisent la fonction coût J_n suivante

$$\forall \tau \in [t_0, t_f] \times \mathcal{U} \quad J_n(\tau, u) = \frac{1}{2} \|\mathbf{X}_n(\tau, u, \cdot) - \mathbf{X}_d(\tau, u, \cdot)\|_{L^2(t_0, t_f)}^2 + \frac{\rho}{2} \|u\|_{L^2(t_0, t_f)}^2$$

où \mathcal{U} désigne l'ensemble des fonctions continues, définies sur $[t_0, t_f]$ et à valeurs dans U .

Pour simplifier les écritures, on note ci-dessous, $\mathbf{X}_n = (\mathbf{x}_n, \nu_n)^\top$ et \mathbf{X}_d à la place de $\mathbf{X}_n(\tau, u, \cdot)$ et $\mathbf{X}_d(\tau, u, \cdot)$ respectivement.

Le système adjoint associé à ce problème s'écrit, d'après les calculs effectués au paragraphe 4.1.2,

$$\begin{cases} \boldsymbol{\lambda}(t_f) = 0 \\ \dot{\boldsymbol{\lambda}}(t) = \begin{pmatrix} u(t)\lambda_1(t) - \lambda_2(t) \\ (1.5\nu_n(t) - 1)\lambda_1(t) \cos x_n^{(2)}(t) \\ 1.5\lambda_1(t) \sin x_n^{(2)}(t) \end{pmatrix} + \mathbf{X}_n(t) - \mathbf{X}_d(t), & t \in [t_0, t_f]. \end{cases}$$

Les gradients de J_n par rapport à τ et u sont donnés par

$$\nabla(J_n)_\tau = \int_{t_0}^{t_f} \ddot{H}_n(t - \tau) \boldsymbol{\lambda}(t)^\top \begin{pmatrix} \boldsymbol{\eta} \\ 1 \end{pmatrix} dt + \frac{1}{2} \|\mathbf{X}_n(\tau) - \mathbf{X}_d(\tau^-)\|_3^2 - \frac{1}{2} \|\mathbf{X}_n(\tau) - \mathbf{X}_d(\tau)\|_3^2$$

et

$$\forall t \in [t_0, t_f] \quad \nabla(J_n)_u(t) = \lambda_1(t) x_n^{(1)}(t) + \rho u(t).$$

5.3.3 Résultats numériques

La minimisation de J_n est effectuée, avec les valeurs du tableau 5.6, à l'aide de la fonction `fmincon` de MATLAB.

TAB. 5.6 – Valeurs utilisées pour l'application

Paramètres	Valeurs
t_0	0
t_f	2
\mathbf{x}_0	$(0, \pi/4)^\top$
$\boldsymbol{\eta}$	$(0.1, 0)^\top$
ρ	$5 \cdot 10^{-3}$
n	100

L'état désiré \mathbf{x}_d correspond à l'état du système hybride (5.7) dans lequel on a posé

$$\tau = 1$$

et

$$\forall t \in [t_0, t_f] \quad u(t) = 0.1 t . \quad (5.9)$$

La commande u est discrétisée sur $[t_0, t_f]$. On utilise 30 valeurs u_1, \dots, u_{30} . Pour l'application numérique, la fonction à minimiser est donc une fonction de 31 variables τ, u_1, \dots, u_{30} .

La méthode de descente est initialisée avec

$$\tau = 0.7$$

et

$$\forall i \in \{1, \dots, 30\} \quad u_i = 0 .$$

La valeur initiale de la fonction coût est 0.0765.

Après 20 itérations et 855 appels à la fonction, le minimum obtenu pour J_n est égal à 0.0016 et l'instant de commutation optimal est

$$\tau_n = 1.0006 .$$

La fonction u_n est représentée sur la figure 5.4 avec, en pointillés, la fonction u définie en (5.9).

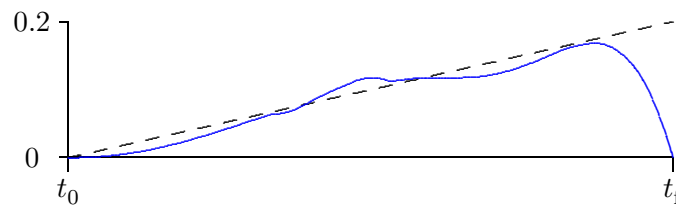


FIG. 5.4 – Représentation de u_n sur $[t_0, t_f]$

On remarque que u_n reste égal, à l'instant final, à son initialisation. Le gradient de J_n par rapport à u est en effet nul en t_f .

De plus, on observe une irrégularité près de l'instant $t = 1$. Ceci peut s'expliquer par la discontinuité de \mathbf{X}_d à l'instant $t = 1$ qui provoque une commutation dans le système adjoint et perturbe la première composante de $\boldsymbol{\lambda}$, qui intervient dans le gradient de J_n par rapport à u . La résolution directe du problème hybride donne le même type de courbe.

Sur la figure 5.5, on peut comparer l'état optimal $\mathbf{x}_n(\tau_n, u_n, \cdot)$ obtenu en résolvant le problème issu de la représentation et la trajectoire désirée \mathbf{x}_d . À l'échelle de la figure, les courbes semblent se superposer, ce qui illustre l'efficacité de la méthode.

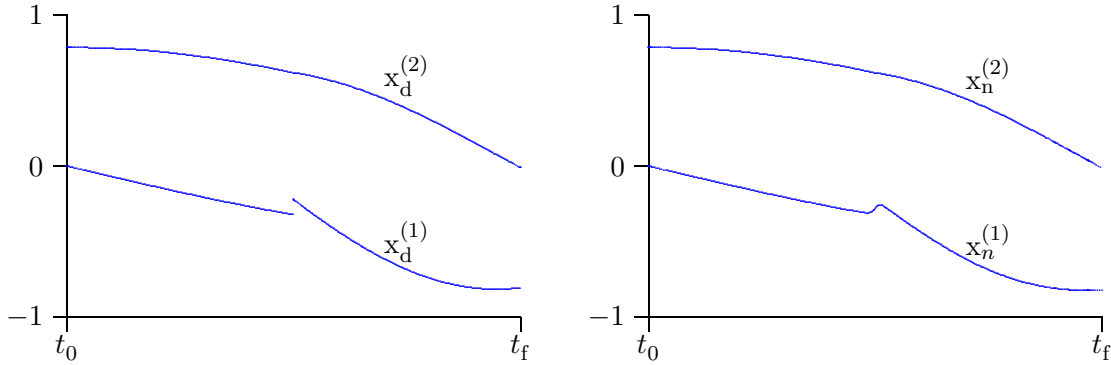


FIG. 5.5 – Représentation de \mathbf{x}_d et \mathbf{x}_n sur $[t_0, t_f]$

5.3.4 Avantages apportés par la représentation

Les avantages liés à l'utilisation de la représentation sont les mêmes que pour le problème à temps final fixé. Bien que non négligeables, les simplifications apportées dans la programmation sont cependant moins importantes car il n'y a ici qu'un seul instant de commutation. Plus précisément, les programmes principaux comportent 49 lignes pour le problème hybride et 30 lignes pour le problème issu de la représentation.

5.4 Identification de paramètres

On étudie à nouveau le mouvement d'une voiture à deux rapports de transmission, décrit cette fois par un système hybride à commutation autonome. Le changement de rapport s'effectue dès que la vitesse ou la position de la voiture franchit un seuil. On cherche à identifier, à partir de mesures, deux paramètres correspondant aux accélérations lorsque le premier rapport ou le second rapport est enclenché. Les expressions des gradients calculées au chapitre 4 sont utilisées pour minimiser la fonction coût associée au problème issu de la représentation.

5.4.1 Problème hybride

Comme au paragraphe 5.1.1, on note p la position de la voiture et v sa vitesse. On pose $\mathbf{x} = (p, v)^\top$ et on fixe un état initial $\mathbf{x}_0 = (p_0, v_0)^\top$ à l'instant t_0 .

Le premier rapport est utilisé, avec une accélération p_1 , jusqu'à ce que la position ou la vitesse de la voiture franchisse un seuil a_1 ou a_2 respectivement. Le second rapport est alors enclenché avec une accélération p_2 .

On suppose $p_0 \leq a_1$ et $v_0 \leq a_2$.

Le mouvement de la voiture, entre les instants t_0 et t_f , est alors décrit par le système à commutation autonome suivant :

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}(t)) & \text{si } \mathbf{x}(t) \leq \mathbf{a} \\ \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}_2(\mathbf{p}_2, \mathbf{x}(t)) & \text{sinon} \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 . \end{cases} \quad (5.10)$$

Les fonctions \mathbf{f}_1 et \mathbf{f}_2 sont définies, comme au paragraphe 5.1.1, par

$$\forall i \in \{1, 2\} \quad \forall (\mathbf{p}_i, \mathbf{x}) \in \mathbb{R}^3 \quad \mathbf{f}_i(\mathbf{p}_i, \mathbf{x}) = (\mathbf{x}_2, \mathbf{p}_i g_i(\mathbf{x}_2))^\top$$

avec

$$g_i(\mathbf{x}_2) = \frac{1}{1 + \exp((-4i + 6)(\mathbf{x}_2 - 4))} .$$

Les paramètres \mathbf{p}_1 et \mathbf{p}_2 appartiennent à $U = [0, 1]$.

Les fonctions \mathbf{f}_1 et \mathbf{f}_2 sont de classe \mathcal{C}^1 sur $I \times \mathbb{R}^2$, où I est un intervalle ouvert de \mathbb{R} contenant U . De plus, elles vérifient

$$\exists C_1 > 0 \quad \exists C_2 > 0 \quad \forall i \in \{1, 2\} \quad \forall (\mathbf{p}, \mathbf{x}) \in I \times \mathbb{R}^2 \quad \|\mathbf{f}_i(\mathbf{p}, \mathbf{x})\|_2 \leq C_1 \|\mathbf{x}\|_2 + C_2 .$$

Ces fonctions ne sont pas à valeurs strictement positives sur $U \times \mathbb{R}^2$. Cependant, si on suppose $\mathbf{x}_0^{(2)} > 0$, elles sont à valeurs strictement positives sur $[\mathbf{x}_0^{(1)}, +\infty[\times [\mathbf{x}_0^{(2)}, +\infty[$. La convergence énoncée au théorème 2.12 est encore vraie dans ce cas. Il suffit en effet de remplacer $[-M, M]^d$, où $d = 2$, par $[\mathbf{x}_0^{(1)}, M] \times [\mathbf{x}_0^{(2)}, M]$ dans la démonstration.

Le système (5.10) appartient donc à la classe de systèmes hybrides introduite au paragraphe 2.2.

On se pose alors le problème d'identification de paramètres, présenté au paragraphe 3.2.2, qui consiste ici à identifier les paramètres \mathbf{p}_1 et \mathbf{p}_2 à partir de mesures effectuées sur le système.

5.4.2 Problème issu de la représentation

La représentation du système (5.10) est donnée par

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \prod_{i=1}^2 \tilde{H}_n(\mathbf{a}_i - \mathbf{x}_i(t)) \mathbf{f}_1(\mathbf{p}_1, \mathbf{x}(t)) \\ \quad + \left(1 - \prod_{i=1}^2 \tilde{H}_n(\mathbf{a}_i - \mathbf{x}_i(t))\right) \mathbf{f}_2(\mathbf{p}_2, \mathbf{x}(t)), \quad t \in [t_0, t_f] \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 . \end{cases} \quad (5.11)$$

On note $\hat{\mathbf{x}}$ l'état mesuré continu, obtenu à partir des mesures effectuées sur le système hybride.

Le problème associé au problème hybride décrit ci-dessus consiste à minimiser la fonction coût J_n définie par

$$\forall (\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) \in U^2 \quad J_n(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2) = \frac{1}{2} \|\mathbf{x}_n(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdot) - \hat{\mathbf{x}}\|_{L^2(t_0, t_f)}^2$$

où $\mathbf{x}_n(\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \cdot)$ représente la solution de (5.11), notée plus simplement \mathbf{x}_n dans ce qui suit.

Les calculs faits au paragraphe 4.1.3 conduisent au système adjoint suivant :

$$\left\{ \begin{array}{l} \lambda_n(t_f) = 0 \\ \dot{\lambda}_n^{(1)}(t) = \lambda_n^{(2)}(t) \dot{\tilde{H}}_n(a_1 - x_n^{(1)}(t)) \tilde{H}_n(a_2 - x_n^{(2)}(t)) \frac{p_1 - p_2 \exp\left(2(x_n^{(2)}(t) - 4)\right)}{1 + \exp\left(2(x_n^{(2)}(t) - 4)\right)} \\ \quad + x_n^{(1)}(t) - \hat{x}_1(t), \quad t \in [t_0, t_f] \\ \dot{\lambda}_n^{(2)}(t) = -\lambda_n^{(1)}(t) + \lambda_n^{(2)}(t) \tilde{H}_n(a_1 - x_n^{(1)}(t)) \dot{\tilde{H}}_n(a_2 - x_n^{(2)}(t)) \frac{p_1 - p_2 \exp\left(2(x_n^{(2)}(t) - 4)\right)}{1 + \exp\left(2(x_n^{(2)}(t) - 4)\right)} \\ \quad + \lambda_n^{(2)}(t) \prod_{i=1}^2 \tilde{H}_n(a_i - x_n^{(i)}(t)) \frac{2(p_1 + p_2)}{\left(\exp(x_n^{(2)}(t) - 4) + \exp(4 - x_n^{(2)}(t))\right)^2} \\ \quad - \lambda_n^{(2)}(t) \frac{2p_2}{\left(\exp(x_n^{(2)}(t) - 4) + \exp(4 - x_n^{(2)}(t))\right)^2} + x_n^{(2)}(t) - \hat{x}_2(t), \quad t \in [t_0, t_f]. \end{array} \right.$$

Les gradients de J_n par rapport à p_1 et p_2 sont donnés par

$$\nabla(J_n)_{p_1} = - \int_{t_0}^{t_f} \prod_{i=1}^2 \tilde{H}_n(a_i - x_n^{(i)}(t)) \frac{\lambda_n^{(2)}(t)}{1 + \exp\left(2(x_n^{(2)}(t) - 4)\right)} dt \quad (5.12)$$

et

$$\nabla(J_n)_{p_2} = - \int_{t_0}^{t_f} \left(1 - \prod_{i=1}^2 \tilde{H}_n(a_i - x_n^{(i)}(t))\right) \frac{\lambda_n^{(2)}(t)}{1 + \exp\left(-2(x_n^{(2)}(t) - 4)\right)} dt. \quad (5.13)$$

5.4.3 Résultats numériques

Pour identifier les paramètres p_1 et p_2 , à partir de N mesures effectuées sur le système (5.10), on minimise J_n sur $[0, 1]^2$ à l'aide des expressions des gradients (5.12) et (5.13) et de la fonction `fmincon` de MATLAB.

Les valeurs utilisées sont données dans le tableau 5.7 et les résultats obtenus sont regroupés dans le tableau 5.8.

Les propriétés de la fonction \tilde{H}_n , définie à partir de la fonction cosinus, font qu'on est obligé de poser $n = 5000$. Avec la fonction H_n , faisant intervenir la fonction exponentielle, la valeur $n = 100$ a été suffisante dans les applications déjà présentées.

TAB. 5.7 – Valeurs utilisées pour l'application

Paramètres	Valeurs
t_0	0
t_f	10
\mathbf{x}_0	$(0, 3)^\top$
\mathbf{a}	$(30, 4)^\top$
n	5000
N	25

TAB. 5.8 – Minimisation de J_n

σ	p_1	p_2	Nombre d'itérations	Nombre d'appels à la fonction
0	0.2000	0.7001	18	116
0.01	0.1998	0.7011	16	102
0.05	0.1990	0.7074	18	120
0.1	0.1986	0.6986	21	213

Les mesures $\widehat{\mathbf{x}}(t_i)$, $i \in \{1, \dots, N\}$, utilisées, ont été calculées de la façon suivante. Le système hybride (5.10) a été résolu en posant $p_1 = 0.2$ et $p_2 = 0.7$, ce qui a permis d'obtenir les valeurs de l'état $\mathbf{x}(p_1, p_2, \cdot)$, aux instants t_1, \dots, t_N . De plus, afin de bruitez ces valeurs, on a effectué $2N$ tirages aléatoires suivant une loi normale centrée d'écart type σ . Chaque nombre ainsi obtenu a été ajouté à une des composantes des N mesures effectuées sur le système hybride. L'initialisation de la méthode de descente a été faite avec $p_1 = p_2 = 0$.

Les valeurs obtenues pour p_1 et p_2 sont respectivement proches des valeurs 0.2 et 0.7 à identifier, même lorsque les mesures sont bruitées. L'application traitée dans ce paragraphe confirme donc l'intérêt pratique de la méthode d'identification basée sur la représentation.

5.4.4 Avantages apportés par la représentation

Comme pour les applications déjà présentées, la représentation permet de résoudre le problème hybride avec une programmation simplifiée.

Ainsi, un solveur classique sur MATLAB résout le système continu alors que la commutation autonome, intervenant dans le système hybride, oblige à utiliser un solveur non nécessairement disponible sur tous les logiciels scientifiques. En effet, le solveur servant à la résolution du système hybride doit être capable de gérer un événement. La fonction `ode23` de `MATLAB` utilise

avec l'option `events` un exemple mais son emploi devient, avec cette option, assez délicat.

D'autre part, le calcul de l'état adjoint nécessite plusieurs appels à la fonction `ode23`, la résolution. Avec la représentation, l'état adjoint s'obtient par une programmation plus aisée.

5.5 Identification d'un seuil

On propose, sur un exemple linéaire en dimension 2, un problème d'identification d'un seuil. En plus des deux paramètres, intervenant dans les modèles à identifier, on fait en minimisant la fonction coût associée au problème. Les gradients obtenues au chapitre précédent sont utilisés.

5.5.1 Problème hybride

Lorsque l'on cherche à identifier un seuil, on pose

souvent, la méthode de descente converge alors vers un minimum local de la fonction coût et le seuil obtenu, restant égal à la valeur initialement choisie, ne peut être identifié.

C'est pour cette raison que nous proposons ici un exemple simple d'identification d'un seuil. On considère le système hybride à commutation autonome suivant :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = p_1 x(t) & \text{si } x(t) \leq a \\ \dot{x}(t) = p_2 x(t) & \text{sinon} \\ x(t_0) = x_0 . \end{cases} \quad (5.14)$$

Le problème que l'on cherche à résoudre est celui présenté au paragraphe 3.2.3. Il consiste à identifier, à partir de mesures effectuées entre t_0 et t_f , les paramètres p_1 et p_2 , dans des fermés bornés de \mathbb{R} , \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 respectivement, et le seuil a dans un fermé borné K_a inclus dans \mathbb{R} .

Si on suppose $x_0 > 0$ et \mathcal{P}_1 et \mathcal{P}_2 inclus dans \mathbb{R}_+^* , on montre, comme au paragraphe 5.4.1 que le système (5.14) appartient à la classe introduite au paragraphe 2.2.

On peut donc utiliser la méthode de résolution exposée au paragraphe 4.1.4. Nous allons l'appliquer au problème issu de la représentation.

5.5.2 Problème issu de la représentation

La représentation de (5.14) s'écrit

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \tilde{H}_n(a - x(t))p_1 x(t) + (1 - \tilde{H}_n(a - x(t)))p_2 x(t), & t \in [t_0, t_f] \\ x(t_0) = x_0 . \end{cases} \quad (5.15)$$

En notant $x_n(p_1, p_2, a, \cdot)$ la solution de (5.15) et \hat{x} l'état mesuré, obtenu à partir de mesures effectuées sur le système hybride (5.14), on traduit l'identification des paramètres p_1 , p_2 et a par la minimisation de la fonction coût J_n suivante :

$$\forall (p_1, p_2, a) \in \mathcal{P}_1 \times \mathcal{P}_2 \times K_a \quad J_n(p_1, p_2, a) = \frac{1}{2} \|x_n(p_1, p_2, a, \cdot) - \hat{x}\|_{L^2(t_0, t_f)}^2 .$$

On note maintenant x_n au lieu de $x_n(p_1, p_2, a, \cdot)$.

Les calculs du paragraphe 4.1.3 nous permettent alors d'écrire le système adjoint comme suit :

$$\begin{cases} \lambda_n(t_f) = 0 \\ \dot{\lambda}_n(t) = -\lambda_n(t)\dot{\tilde{H}}_n(a - x_n(t))(p_2 - p_1)x_n(t) - \lambda_n(t)p_2 \\ \quad + \lambda_n(t)\tilde{H}_n(a - x_n(t))(p_2 - p_1) + x_n(t) - \hat{x}(t), & t \in [t_0, t_f] . \end{cases}$$

Les gradients de J_n par rapport à p_1 et p_2 sont donnés par

$$\nabla(J_n)_{p_1} = - \int_{t_0}^{t_f} \lambda_n(t)\dot{\tilde{H}}_n(a - x_n(t))x_n(t) dt$$

et

$$\nabla(J_n)_{p_2} = \int_{t_0}^{t_f} \lambda_n(t)\tilde{H}_n(a - x_n(t))x_n(t) dt .$$

Enfin, le gradient de J_n par rapport au seuil a s'écrit

$$\nabla(J_n)_a = \int_{t_0}^{t_f} \lambda_n(t)\dot{\tilde{H}}_n(a - x_n(t))(p_2 - p_1)x_n(t) dt . \quad (5.16)$$

5.5.3 Résultats numériques

Les valeurs utilisées pour l'application numérique sont données dans le tableau 5.9. Les N mesures effectuées pour identifier les paramètres ont été obtenues en résolvant le système hybride (5.14) avec les valeurs

$$p_1 = 1 ; \quad p_2 = 0.3 ; \quad a = 3 .$$

TAB. 5.9 – Valeurs utilisées pour l'application

Paramètres	Valeurs
t_0	0
t_f	3
x_0	1
n	5000
N	30
\mathcal{P}_1	[0.1, 2]
\mathcal{P}_2	[0.1, 1]
K_a	[1, 4]

La minimisation de J_n a été effectuée avec la fonction `fmincon` de MATLAB, à laquelle on a fourni les expressions des gradients.

Signalons que, pour les valeurs de n supérieures à 1000, des difficultés numériques apparaissent dans le calcul de $\nabla(J_n)_a$. En effet, l'utilisation de la fonction `trapz` de MATLAB conduit à un gradient nul. Ceci est dû au fait que le terme $\tilde{H}_n(a - x_n(t))$ est nul sauf sur l'intervalle $] -1/n, 0[$.

Pour contourner cette difficulté, on a remplacé l'expression du gradient (5.16) par la formule suivante

$$\lambda_n(\tau)(p_2 - p_1)a$$

où τ correspond à l'instant de franchissement du seuil.

Les résultats obtenus sont donnés dans le tableau 5.10.

TAB. 5.10 – Minimisation de J_n

	p_1	p_2	a	Valeur de J_n	Nombre d'itérations	Nombre d'appels à la fonction
Initialisation	0.5000	0.5000	2.5000	1.4790		
Résultats	0.9989	0.2993	3.0095	$7.5281 \cdot 10^{-5}$	85	697
Initialisation	0.5000	0.5000	3.5000	1.4790		
Résultats	0.8310	0.2039	3.8661	0.0749	19	248

On a effectué deux minimisations avec des initialisations de a différentes pour mettre en valeur la non convexité de J_n . Dans le premier cas, on parvient à identifier les paramètres, avec une précision de 10^{-2} pour p_1 et p_2 et une précision de 10^{-1} pour a . En revanche, dans le second

cas, la méthode de descente converge vers un minimum local de J_n et les paramètres ne sont pas correctement identifiés.

Cette application montre que le problème issu de la représentation permet d'identifier les paramètres p_1 , p_2 et a . Les problèmes d'initialisation rencontrés sont dûs à l'utilisation d'une méthode de descente pour minimiser une fonction coût non convexe. Ils ne mettent pas en cause l'utilisation de la représentation car ces problèmes de non convexité apparaissent aussi si l'on utilise directement le système hybride.

5.5.4 Avantages apportés par la représentation

On retrouve ici les mêmes avantages que ceux détaillés au paragraphe 5.4.4. La représentation permet en effet d'éviter l'utilisation de l'option `events` du solveur `ode23`. De plus, le système adjoint, ne comportant pas de saut, est plus simple à résoudre.

5.6 Conclusion

Des problèmes hybrides de commande et d'identification ont été résolus numériquement dans ce chapitre. Différents types de commande, instants de commutation ou commande continue, ont été calculés. Les identifications ont porté sur des paramètres et sur le seuil de commutation. Pour chacun de ces problèmes, les représentations ont été utilisées. Ces applications ont confirmé les résultats établis au chapitre 3. Les résolutions des problèmes issus des représentations ont en effet permis d'obtenir des approximations des solutions des problèmes hybrides. De plus, les précisions des résultats obtenus ont montré la faisabilité des méthodes du chapitre 4 qui ont été mises en œuvre. Enfin, des simplifications de programmation, apportées par l'utilisation des représentations, ont été mises en évidence.

Conclusion et perspectives

Nous avons présenté une méthode permettant de simplifier l'étude de deux classes de systèmes hybrides, à sauts et commutations commandés pour la première et à commutation autonome pour la seconde. Afin d'éviter les difficultés liées aux discontinuités, les systèmes hybrides considérés ont été approchés par des suites de systèmes continus, appelées représentations. Nous avons utilisé ces dernières pour résoudre des problèmes de commande et d'identification. Cette approche, qui amène à remplacer un problème hybride par un problème continu, a été justifiée par des théorèmes de convergence.

Le principal intérêt des représentations est d'offrir la possibilité de résoudre des problèmes hybrides à l'aide de méthodes adaptées aux problèmes continus, les justifications théoriques étant assurées par les propriétés des représentations. Il n'est alors plus nécessaire d'utiliser des méthodes spécifiques, devant prendre en compte les discontinuités qui interviennent dans les systèmes hybrides. Nous avons illustré ce point en proposant une méthode de résolution basée sur les équations de Hamilton-Jacobi-Bellman. Deux autres méthodes ont été exposées. Elles ont permis de mettre en évidence les avantages pratiques apportés par les représentations. Les calculs des gradients des fonctions coût à minimiser ont en effet été simplifiés ainsi que les programmations des mises en œuvre numériques.

Dans la continuité du travail présenté dans ce mémoire, nous pourrions, dans de futurs travaux, rechercher une nouvelle représentation adaptée à une classe plus large de systèmes hybrides à commutations autonomes. Cette nouvelle représentation pourrait, par exemple, prendre en compte des phénomènes d'hystérésis ou bien des commutations sur des droites. D'autre part, nous pourrions approfondir l'étude des problèmes de poursuite de trajectoire des paragraphes 3.1.3 et 3.2.1 en ajoutant des contraintes portant sur la dérivée de la commande u . Enfin, nous avons étudié un problème de commande dans lequel les fonctions \mathbf{f}_i ne vérifient pas les hypothèses du paragraphe 2.1.1. Les résultats numériques obtenus nous suggèrent qu'il est possible d'affaiblir ces hypothèses. Une perspective serait alors d'élargir la première classe de systèmes hybrides étudiée.

Annexe A

Énoncés de résultats classiques

A.1 Lemme de Gronwall

L'énoncé qui suit ainsi que sa démonstration se trouvent par exemple dans [54].

Lemme A.1 (Gronwall). *Soit f et g deux fonctions continues sur $[t_0, T_0]$ à valeurs dans \mathbb{R} . On suppose que g est non décroissante et qu'il existe une constante positive C telle que*

$$\forall t \in [t_0, T_0] \quad f(t) \leq g(t) + C \int_{t_0}^t f(s) ds .$$

Alors

$$\forall t \in [t_0, T_0] \quad f(t) \leq g(t) \exp(C(t - t_0)) .$$

En particulier, si $g \equiv K$, on obtient

$$\forall t \in [t_0, T_0] \quad f(t) \leq K \exp(C(t - t_0)) .$$

A.2 Théorèmes sur les équations différentielles

Des théorèmes énonçant des résultats d'existence, d'unicité et de continuité de la solution d'un problème de Cauchy sont regroupés ci-dessous. Ils sont principalement utilisés dans les chapitres 2 et 4. Les démonstrations se trouvent, par exemple, dans [24] ou [55].

A.2.1 Existence et unicité de la solution

Théorème A.2 (Cauchy-Lipschitz). *Soit I un intervalle de \mathbb{R} non réduit à un point et t_0 un point fixé dans I . On considère une fonction \mathbf{f} définie sur $I \times \mathbb{R}^n$, où $n \geq 1$, à valeurs dans \mathbb{R}^n et \mathbf{x}_0 un point de \mathbb{R}^n .*

On suppose que la fonction \mathbf{f} est continue et localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable.

Alors il existe un intervalle J , voisinage de t_0 dans I , et une unique solution \mathbf{x} de classe \mathcal{C}^1 sur J au problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t)) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 . \end{cases} \quad (\text{A.1})$$

Le théorème suivant, corollaire du théorème de Cauchy-Lipschitz, affirme l'existence et l'unicité d'une solution maximale au problème (A.1).

Théorème A.3. *Sous les mêmes hypothèses qu'au théorème A.2, il existe une unique solution maximale au problème de Cauchy (A.1) de classe \mathcal{C}^1 sur un intervalle ouvert J inclus dans I .*

A.2.2 Continuité de la solution

Continuité par rapport à des paramètres

Théorème A.4. *Soit I un intervalle de \mathbb{R} non réduit à un point et t_0 un point fixé dans I . Soit Λ un ensemble fermé borné inclus dans \mathbb{R}^ℓ , $\ell \geq 1$.*

On considère une fonction \mathbf{f} définie sur $I \times \mathbb{R}^n \times \Lambda$, à valeurs dans \mathbb{R}^n et \mathbf{x}_0 un point de \mathbb{R}^n , où $n \geq 1$.

On suppose que la fonction \mathbf{f} est continue et localement lipschitzienne par rapport à sa seconde variable.

Alors, pour tout $\boldsymbol{\lambda} \in \Lambda$, il existe un intervalle J , voisinage de t_0 dans I , et une unique solution $\mathbf{x}(\boldsymbol{\lambda}, \cdot)$ de classe \mathcal{C}^1 sur J au problème de Cauchy

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}) \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0. \end{cases} \quad (\text{A.2})$$

De plus, \mathbf{x} est continue sur $\Lambda \times J$.

Continuité par rapport à des paramètres et aux données initiales

Le théorème qui suit se démontre, grâce à des changements de variables, à l'aide du théorème A.4.

Théorème A.5. *Sous les mêmes hypothèses qu'au théorème A.4, il existe un voisinage V de (t_0, \mathbf{x}_0) dans $I \times \mathbb{R}^n$ et il existe un intervalle J , voisinage de t_0 dans I , tels que, pour tout $(\tilde{t}_0, \tilde{\mathbf{x}}_0, \boldsymbol{\lambda}) \in V \times \Lambda$, le problème*

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t), \boldsymbol{\lambda}) \\ \mathbf{x}(\tilde{t}_0) = \tilde{\mathbf{x}}_0. \end{cases} \quad (\text{A.3})$$

admet une unique solution de classe \mathcal{C}^1 sur J , notée $\mathbf{x}(\tilde{t}_0, \tilde{\mathbf{x}}_0, \boldsymbol{\lambda}, \cdot)$.

De plus, \mathbf{x} est continue sur $V \times \Lambda \times J$.

A.3 Théorème de convergence dominée de Lebesgue

La démonstration du théorème suivant est faite, par exemple, dans [28]. Pour une version dans L^1 plus classique, on peut se référer à [42].

Théorème A.6 (convergence dominée de Lebesgue). *Toutes les fonctions ci-dessous sont réelles et définies sur un intervalle I de \mathbb{R} , éventuellement \mathbb{R} lui-même.*

Soit (f_n) une suite de fonctions dans $L^p(I)$, $p \geq 1$, qui converge presque partout vers une fonction f . On suppose qu'il existe dans $L^p(I)$ une fonction F , indépendante de n , telle que

$$\forall n \quad |f_n| \leq F \quad \text{p.p.}$$

Alors la fonction f appartient à $L^p(I)$ et la suite (f_n) converge vers f dans $L^p(I)$, c'est-à-dire

$$\int_I |f_n(t) - f(t)|^p dt \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Annexe B

Exemples d'approximations de la fonction de Heaviside

B.1 Exemples de fonctions H_n

Nous donnons deux fonctions pouvant remplacer la fonction H_n définie en (2.11). Une autre fonction, notée P_n , a déjà été présentée au paragraphe 2.1.3. Nous rappelons que ces fonctions doivent être croissantes et de classe \mathcal{C}^2 . De plus, elles doivent vérifier $H_n(0) = 1/2$ et doivent converger vers la fonction de Heaviside, uniformément sur tout compact de \mathbb{R} ne contenant pas 0.

1. On suppose $n > 2$ et $C > 0$.

$$\begin{cases} H_n(t) = 0 & \text{si } t < -C \\ H_n(t) = 1 - \frac{1}{1 + (\frac{t+C}{C})^n} & \text{si } t \geq -C \end{cases}$$

2. $\forall t \in \mathbb{R} \quad H_n(t) = \frac{1}{\pi} \arctan(nt) + \frac{1}{2}$

B.2 Exemple de fonction \tilde{H}_n

La fonction \tilde{H}_n , définie ci-dessous, peut remplacer la fonction \tilde{H}_n du paragraphe 2.2.2. Elle est de classe \mathcal{C}^1 , s'annule sur $] -\infty, -1/n]$ et vaut 1 sur $[0, +\infty[$. De plus, la suite $(\tilde{H}_n)_{n>0}$ converge uniformément vers la fonction de Heaviside sur tout compact de \mathbb{R} ne contenant pas 0.

$$\begin{cases} \tilde{H}_n(t) = 0 & \text{si } t < -1/n \\ \tilde{H}_n(t) = -2n^3t^3 - 3n^2t^2 + 1 & \text{si } t \in [-1/n, 0] \\ \tilde{H}_n(t) = 1 & \text{si } t > 0 \end{cases}$$

Références

- [1] Antsaklis, P. J., et Nerode, A. (1998). Hybrid Control Systems : An Introductory Discussion to the Special Issue. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **43**, 457-460.
- [2] Athans, M., et Falb, P. L. (1966). *Optimal Control : An Introduction to the Theory and Its Applications*, McGraw-Hill, New York.
- [3] Aubin, J. P. (1982). *Mathematical methods of game and economic theory*, North Holland.
- [4] Aubin, J. P. (1987). *Analyse fonctionnelle appliquée*, Vol. 1, PUF, Paris.
- [5] Bartoli, N., et Del Moral, P. (2001). *Simulation et algorithmes stochastiques*, 192-199, Cépaduès-Éditions, Toulouse.
- [6] Bellman, R. E., et Kalaba, R. E. (1965). *Dynamic Programming and Modern Control Theory*, Academic Press, New York.
- [7] Bemporad, A., et Morari, M. (1999). Control of systems integrating logic, dynamics, and constraints. *Automatica*, **35**(3), 407-427.
- [8] Benghea, S., et DeCarlo, R. A. (2005). Optimal control of switching systems. *Automatica*, **41**(1), 11-27.
- [9] Bensoussan, A., et

- [19] Ciarlet, P. G. (1985). *Introduction à l'analyse numérique matricielle et à l'optimisation*, Masson, Paris.
- [20] Culioli, J. C. (1994). *Introduction à l'optimisation*, Ellipses, Paris.
- [21] D'Apice, C., Garavello, M., Manzo, R. et Piccoli, B. (2003). Hybrid optimal control : case study of a car with gears. *International Journal of Control*, **76**, 1272-1284.
- [22] David, R. (1997). Modeling of hybrid systems using continuous and hybrid Petri Nets. *International Workshop on Petri Nets and Performance Models*.
- [23] Decarlo, R. A., Branicky, M. S., Pettersson, S., et Lennartson, B. (2000). Perspectives and Results on the Stability and Stabilizability of Hybrid Systems. *Proceedings of the IEEE, Special Issue on Hybrid Systems*, **88**(7), 1069-1082.
- [24] Dieudonné, J. (1960). *Fondements de l'analyse moderne*, Gauthier-Villars, Paris.
- [25] El Bagdouri, M., Cébron, B., Sechilariu, M., et Burger, J. (2005). Variational Formalism Applied to the Control of Autonomous Switching Systems. *À paraître dans Control and Cybernetics*.
- [26] Eykhoff, P. (1974). *System Identification : Parameter and State Estimation*, Wiley, London.
- [27] Foata, D., et Fuchs, A. (1998). *Calcul des probabilités*, Chap. 4, Dunod, Paris.
- [28] Gapaillard, J. (2002). *Intégration pour la licence*, Dunod, Paris.
- [29] Gapaillard, M. (2003). Optimal control for a class of hybrid systems via a stochastic method. *Proceedings of IEEE-ICCA*, 330-334.
- [30] Gapaillard, M. (2004). Représentation de systèmes hybrides par des systèmes continus, application à la commande. *Actes de CIFA*.
- [31] Gapaillard, M. (2005). Continuous representation for a class of optimal hybrid control problems. *Proceedings of IFAC World Congress*.
- [32] Hedlund, S., et Rantzer, A. (1999). Optimal Control of Hybrid Systems. *Proceedings of IEEE-CDC*.
- [33] Henzinger, T. A., Ho, H. et Wong-Toi, H. (1998). Algorithmic Analysis of Nonlinear Hybrid Systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*, **43**, 540-554.
- [34] Huang, C.S., Wang, S., et Teo, K.L. (2000). Solving Hamilton-Jacobi-Bellman equations by a modified method of characteristics. *Nonlinear Analysis*, **40**, 279-293.
- [35] Hubbard, J., et West, B. (1999). *Équations différentielles et systèmes dynamiques*, Cassini, Paris.
- [36] Le Brizaut, J. S. (1998). On the minimization method of Chew and Zheng. Application to vulcanization. *SAMS*, **32**, 299-316.
- [37] Lewis, F. L., et Syrmos, V. L. (1995). *Optimal Control*, Wiley, New York.
- [38] Ljung, L. (1999). *System Identification : Theory for the User*, Prentice Hall, Upper River, NJ.
- [39] Manon, P., Valentin-Roubinet, C., et Gilles, G. (2000). Optimal control of hybrid dynamical systems with the maximum principle : Application to a non linear chemical process. *Proceedings of IEEE-CDC*, 3151-3156.
- [40] Quémard, C., Jolly, J. C., et Ferrier, J. L. (2005). Mathematical study of a thermal device as a hybrid system. *Proceedings of IMACS World Congress*.
- [41] Roll, J. , Bemporad, A., et Ljung, L. (2004). Identification of piecewise affine systems via mixed-integer programming. *Automatica*, **40**(1), 37-50.
- [42] Rudin, W. (1987). *Real and complex analysis*, McGraw Hill, New York.

RÉSUMÉ. Deux classes de systèmes hybrides, à sauts et commutations commandés ou autonomes, sont étudiées. Des représentations continues de ces systèmes sont introduites, qui permettent d'éviter des difficultés liées aux discontinuités. Ces représentations sont utilisées pour résoudre des problèmes de commande optimale et d'identification. Cette approche, qui amène à remplacer un problème hybride par un problème continu, est justifiée par des théorèmes de convergences vers des minima classiques ou à epsilon près en l'absence de compacité, démontrés à l'aide du lemme de Gronwall et du théorème de Lebesgue. Ces représentations permettent de résoudre des problèmes hybrides à l'aide de méthodes adaptées aux problèmes continus. Ceci est illustré par l'utilisation du calcul des variations. Les avantages pratiques apportés par les représentations sont mis en évidence.

TITLE. Representation, control and identification of hybrid systems

ABSTRACT. Two classes of hybrid systems with controlled or autonomous jumps and switchings are studied. Continuous representations of these systems are introduced, which enable to avoid difficulties associated with discontinuities. These representations are used to solve optimal control and identification problems. This approach, leading to the replacement of a hybrid problem by a continuous one, is justified by convergence theorems to either classical minima or epsilon-quasiminima with no compactness assumption, that are demonstrated by Gronwall's lemma and Lebesgue's theorem. These representations enable to solve hybrid problems by means of methods adapted to continuous problems. This possibility is illustrated by the use of calculus of variations. The practical advantages brought by the representations are highlighted.

DISCIPLINE. Automatique

MOTS CLÉS. Systèmes hybrides, représentation continue, commande, identification, convergence, calcul des variations.

Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés

62, avenue Notre-Dame du Lac

49000 Angers, France