

ÉCOLE DOCTORALE "SCIENCES POUR L'INGÉNIEUR" DE NANTES

# THÈSE

POUR LE GRADE DE DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ D'ANGERS

## en Sciences de l'Ingénieur

Spécialité : Automatique et Informatique Appliquée

par

**Xavier GODIVIER**

# LA RÉSONANCE STOCHASTIQUE DANS LA TRANSMISSION NON LINÉAIRE DU SIGNAL

*Soutenue publiquement le 3 décembre 1997 devant la Commission d'examen :*

J.-P. COCQUEREZ	Professeur, Université de Cergy-Pontoise	Président
P. FLANDRIN	Directeur de Recherche CNRS, ENS Lyon	Rapporteur
C. JUTTEN	Professeur, Université J. Fourier, Grenoble	Rapporteur
J.-L. FERRIER	Professeur, Université d'Angers	Examineur
M. GUGLIELMI	Ingénieur Recherche CNRS HDR, IRCyN	Examineur
F. CHAPEAU-BLONDEAU	Maître de conférences HDR, Université d'Angers	Directeur

Cette thèse a été préparée au Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés (LISA),  
Université d'Angers.

## Remerciements

Le travail présenté dans ce mémoire a été réalisé au Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés de l'Université d'Angers. Je remercie Mr J.-L. Ferrier qui est le directeur du LISA, de m'avoir accueilli dans son laboratoire.

Je suis très sensible à l'honneur que me font Messieurs les membres du jury en acceptant de lire et de juger ce travail :

Mr P. Flandrin, Directeur de Recherche au CNRS, de l'École Normale Supérieure de Lyon et Mr C. Jutten, Professeur à l'Université J. Fourier de Grenoble, pour s'être chargés de rapporter ce mémoire.

Mr J.-P. Cocquerez, Professeur à l'Université de Cergy-Pontoise, Mr J.-L. Ferrier, Professeur à l'Université d'Angers, et Mr M. Guglielmi, Ingénieur Recherche au CNRS, à l'Institut de Recherche en Cybernétique de Nantes, pour l'intérêt qu'ils manifestent en examinant cette étude.

Je tiens enfin à exprimer particulièrement ma gratitude à Mr. F. Chapeau-Blondeau qui a dirigé cette thèse avec une disponibilité de tous les instants. Il a guidé mes travaux avec patience et méthode tout au long de la préparation de cette thèse et m'a fait bénéficier de sa très riche expérience de recherche.

## Résumé

La résonance stochastique est un effet non linéaire, récemment introduit, qui consiste en la possibilité d'améliorer la transmission d'un signal utile par certains systèmes non linéaires, au moyen d'une augmentation du bruit dans le système. Ce rapport présente d'abord une synthèse des principaux résultats connus sur la résonance stochastique, puis il expose les développements originaux que nous avons obtenus.

La résonance stochastique peut revêtir diverses formes, selon les types considérés pour le bruit, le signal utile, le système non linéaire de transmission, et la mesure de performance qui se voit améliorée par ajout de bruit. On a examiné chacun de ces éléments, on les a étendus, ce qui a permis à la fois d'approfondir l'analyse du phénomène et d'élargir ses conditions d'existence.

On commence par élaborer une formulation générale pour l'étude de la résonance stochastique périodique, qui unifie et englobe les résultats d'études précédentes. Cette formulation est appliquée pour la construction d'une théorie de la résonance stochastique périodique dans une classe générale de systèmes dynamiques non linéaires, pour lesquels le rapport signal sur bruit en sortie peut être augmenté en augmentant le bruit en entrée. Cette théorie est validée au moyen de simulations numériques et d'expériences avec des circuits électroniques. Elle est aussi employée pour mettre en évidence de nouvelles conditions où peut survenir la résonance stochastique, ainsi que de nouvelles propriétés.

On s'intéresse ensuite au domaine encore très nouveau de la résonance stochastique apériodique. On conçoit de nouveaux types de signaux et systèmes que l'on montre capables de résonance stochastique, en appuyant l'analyse sur des concepts de théorie statistique de l'information. On obtient ainsi des canaux de transmission de l'information, dont la capacité informationnelle peut être augmentée en accroissant le niveau du bruit dans le système.

On considère enfin une classe de systèmes naturels réalisant du traitement non linéaire du signal très performant : les systèmes neuronaux. Il a été établi récemment, à la fois dans des modèles théoriques et dans des préparations expérimentales, qu'une forme de résonance stochastique opère dans la transmission du signal par les neurones. Nous étendons ces résultats et montrons pour la première fois la possibilité d'une autre forme de résonance stochastique chez le neurone, dans la transmission de signaux sous forme de trains d'impulsions ou potentiels d'action.

# Table des matières

<b>I</b>	<b>Introduction</b>	<b>9</b>
1.1	Description générale de la résonance stochastique . . . . .	9
1.2	Aperçu historique de l'étude de la résonance stochastique . . . . .	10
1.3	Contributions de ce travail . . . . .	11
<b>II</b>	<b>La résonance stochastique périodique dans les systèmes dynamiques non linéaires bistables</b>	<b>13</b>
2.1	Introduction . . . . .	13
2.2	Présentation des systèmes dynamiques non linéaires bistables . . . . .	13
2.3	Approches théoriques de la résonance stochastique . . . . .	16
2.3.1	Formule de Kramers . . . . .	16
2.3.2	Équation de Fokker-Planck . . . . .	19
2.3.3	Théorie de la réponse linéaire . . . . .	19
<b>III</b>	<b>Une formulation générale pour l'étude de la résonance stochastique périodique</b>	<b>21</b>
3.1	Introduction . . . . .	21
3.2	Formulation générale . . . . .	21
<b>IV</b>	<b>La résonance stochastique périodique dans les systèmes décomposables en une non-linéarité statique suivie d'un système dynamique linéaire</b>	<b>25</b>
4.1	Introduction . . . . .	25
4.2	Modèle général . . . . .	26
4.3	Une non-linéarité de Heaviside . . . . .	29
4.4	Un circuit électronique résonnant stochastiquement . . . . .	29
4.5	Une non-linéarité à deux seuils . . . . .	37
4.6	Une non-linéarité de type diode . . . . .	41
4.7	Entrée périodique non-infraliminaire . . . . .	44
4.8	Influence de la distribution du bruit . . . . .	47
4.9	Gain entrée-sortie pour le rapport signal sur bruit . . . . .	49
4.10	Résonance stochastique à fréquence zéro . . . . .	53
4.11	Discussion sur les non-linéarités statiques avec bruit blanc . . . . .	59
4.12	Non-linéarités statiques avec bruit coloré . . . . .	60
4.13	Conclusion . . . . .	64

# Chapitre I

## Introduction

### 1.1 Description générale de la résonance stochastique

La résonance stochastique est un phénomène non linéaire dans lequel la transmission, par certains systèmes non linéaires, d'un signal utile ou cohérent, peut être améliorée par l'ajout de bruit au système [3, 66, 68]. Ce phénomène paradoxal a été introduit il y a une quinzaine d'années dans le contexte de la dynamique des climats [3, 70]. Au cours des diverses études qui ont suivi, le cadre de la résonance stochastique s'est progressivement élargi. Aujourd'hui la résonance stochastique apparaît comme un phénomène non linéaire général, observable dans de nombreux systèmes, et qui désigne un effet de transmission du signal favorisée par le bruit [68]. On peut maintenant inscrire ce phénomène dans le cadre général des signaux et systèmes dynamiques complexes (non linéaires) où il se présente comme un paradigme illustrant la possibilité dans de tels processus d'extraire de l'ordre hors du désordre, ou de l'information utile hors du bruit.

La résonance stochastique peut revêtir diverses formes, selon les types considérés pour le signal utile, le bruit, le système de transmission et la mesure de performance qui se voit améliorée par l'ajout de bruit. Les signaux utiles ou cohérents impliqués dans la résonance stochastique peuvent être des signaux de forme connue ou des signaux porteurs d'information. Ces signaux peuvent prendre par exemple la forme de signaux périodiques, on parle alors de résonance stochastique périodique. Ils peuvent aussi être des signaux apériodiques déterministes ou aléatoires, on parle alors de résonance stochastique apériodique. Les signaux de bruit considérés peuvent être de distributions statistiques et de structures de corrélation diverses. Ils peuvent être par exemple de type gaussien, blanc ou coloré. Les systèmes présentant la résonance stochastique sont de types variés mais ils sont tous non linéaires. La résonance stochastique se manifeste par une amélioration de la transmission du signal utile, obtenue grâce à une augmentation du niveau de bruit. Selon le contexte on peut définir différentes mesures pour caractériser cet effet. Dans le cas de signaux utiles périodiques, on peut définir par exemple un rapport signal sur bruit dans le domaine fréquentiel à partir de la densité spectrale de puissance du signal de sortie [66]. Pour des signaux utiles apériodiques on peut calculer par exemple un coefficient de corrélation entrée-sortie [16], ou une information mutuelle entrée-sortie [11]. En présence

le système loin de son état de repos et l’y ramène ensuite. Pour certains de ces systèmes excitables, l’excursion déterministe peut être réalisée par l’émission d’une impulsion en sortie, suivie du retour à l’état de repos du système.

Plus récemment, la résonance stochastique a été observée pour des systèmes sans une dynamique excitable avec retour spontané à l’état de repos, et gouverné uniquement par une dynamique à seuil [55, 28, 29, 9]. Dans ce cas, la sortie du système ne dépend à chaque instant que de l’amplitude du signal bruité en entrée, par rapport à un seuil. Enfin dans des études encore plus récentes, des systèmes sans retour spontané à l’état de repos et sans seuil ont également été étudiés comme présentant de la résonance stochastique [4].

L’ensemble de ces développements a progressivement élargi le cadre de définition de la résonance stochastique. Une avancée supplémentaire a été de montrer les liens de ce phénomène avec d’autres situations où le bruit peut jouer un rôle bénéfique notamment avec le “*dithering noise*” utilisé lors de la conversion analogique–numérique d’un signal ou dans le codage d’une image [28, 14].

## 1.3 Contributions de ce travail

Nous avons eu pour objectif dans notre travail d’approfondir et d’étendre l’étude de la résonance stochastique. Nous avons examiné l’évolution du phénomène, et de ses propriétés, avec différents signaux cohérents (périodiques ou apériodiques), différents bruits, différents systèmes non linéaires et différentes mesures de performances améliorables par ajout de bruit. Nos études ont consisté en des analyses théoriques, des simulations numériques et des expérimentations. Celles-ci nous ont permis d’observer (et d’analyser) qu’un effet de transmission du signal favorisée par le bruit, que nous identifions à la résonance stochastique, peut subsister dans des situations très variées et générales.

Nous décrirons tout d’abord la résonance stochastique dans une classe de systèmes particuliers – les systèmes dynamiques bistables – où elle a été introduite [3, 26] pour la première fois et beaucoup étudiée par la suite. Nous ferons à cette occasion une présentation des principales approches théoriques qui ont été développées pour la résonance stochastique périodique dans le cas des systèmes dynamiques bistables. Nous verrons que le contexte de la résonance stochastique est non linéaire et souvent non stationnaire. Cela rend les études théoriques particulièrement difficiles et conduit souvent à l’utilisation d’approximations pour analyser le phénomène.

Nous situerons et détaillerons ensuite nos contributions à l’étude de la résonance stochastique. Ces contributions consistent tout d’abord en l’élaboration d’une formulation générale pour l’étude de la résonance stochastique périodique. Cette formulation nous sert ensuite pour explorer une classe de systèmes dynamiques non linéaires que nous avons reconnu pour se prêter à une description analytique complète : la classe des systèmes constitués d’une non-linéarité statique suivie d’un système dynamique linéaire. Nous avons pu alors caractériser dans ces systèmes de nombreuses propriétés nouvelles de la résonance stochastique périodique.

# Chapitre II

## La résonance stochastique périodique dans les systèmes dynamiques non linéaires bistables

### 2.1 Introduction

Dans ce chapitre nous commençons par décrire la résonance stochastique périodique (impliquant un signal cohérent périodique et un bruit quelconque), dans le cas des systèmes dynamiques bistables. Historiquement, c'est dans ces systèmes que le phénomène a été introduit pour la première fois [3, 2, 70]. Nous présenterons ensuite les méthodes théoriques développées pour étudier la résonance stochastique périodique intervenant dans ces systèmes.

### 2.2 Présentation des systèmes dynamiques non linéaires bistables

Considérons un signal sinusoïdal  $s(t) = A \sin(2\pi t/T_s)$  et un bruit stationnaire  $\eta(t)$  appliqués en entrée d'un système dynamique non linéaire dont l'état  $x(t)$  évolue suivant

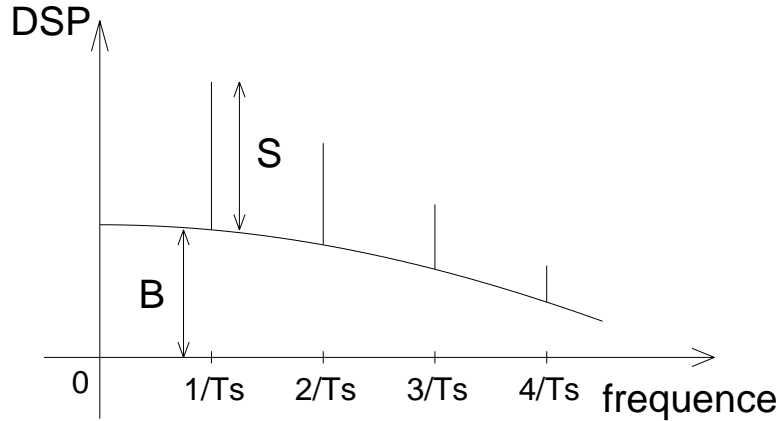
$$\tau_a \dot{x}(t) = x(t) - \frac{x^3(t)}{X_b^2} + s(t) + \eta(t). \quad (2.1)$$

avec les paramètres  $\tau_a > 0$  et  $X_b > 0$ .

Une telle évolution caractérise un système forcé par l'entrée  $s(t) + \eta(t)$  et dont la relaxation libre  $\tau_a \dot{x} = -dU/dx$  est gouvernée par le potentiel "quartique"

$$U(x) = -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{4X_b^2}. \quad (2.2)$$

Ce potentiel à double puits est représenté sur la Fig. 2.1. Un tel système possède deux états stationnaires stables  $x = \pm X_b$  correspondant aux deux minima du potentiel  $U(x =$



**Fig. 2.2 :** Densité spectrale de puissance de sortie permettant de définir le rapport signal sur bruit  $\mathcal{R} = S/B$  servant de mesure de la résonance stochastique.

Une façon possible pour mesurer cet effet est de considérer la densité spectrale de puissance (DSP) du signal de sortie [68, 84]. L'influence du signal périodique en entrée sur les transitions cohérentes de sortie se manifeste dans la DSP de sortie par une succession de raies spectrales (pics de Dirac) aux fréquences multiples entiers de la fréquence  $1/T_s$  du signal périodique  $s(t)$ . Ces raies émergent d'un fond de bruit continu large-bande provenant des transitions incohérentes de sortie. Cette allure typique de la DSP est représentée sur la Fig. 2.2. La résonance stochastique se manifeste par une émergence des raies cohérentes que l'on peut rendre plus prononcée grâce à une augmentation du niveau de bruit en entrée.

On peut définir alors un rapport signal sur bruit de sortie (RSB) à partir de la densité spectrale de puissance de sortie, comme le rapport de la puissance contenue dans la raie spectrale en  $1/T_s$  sur la puissance du fond de bruit qui l'entoure [66] :

$$\mathcal{R} = \frac{S}{B}. \quad (2.3)$$

En présence de résonance stochastique, le RSB suit une évolution non monotone en fonction de l'amplitude du bruit en entrée [66, 68, 84]. On montrera dans la suite plusieurs courbes du RSB qui illustrent son évolution en fonction du niveau de bruit. Cette évolution qui montre une augmentation du RSB jusqu'à un niveau optimal, suivie d'une diminution, est caractéristique du phénomène de résonance stochastique. Elle explique aussi l'utilisation du terme "résonance".

C'est sous cette forme, dans le cas de systèmes dynamiques non linéaires bistables du type de l'Éq. (2.1) et d'excitations sinusoïdales bruitées, que la résonance stochasti-



l'un ou l'autre des deux puits du potentiel à l'instant  $t$ . On s'intéresse alors seulement aux transitions entre les deux puits.

La méthode consiste à calculer les probabilités d'occupation de chaque puits  $p_+(t) = \Pr\{x(t) \in \text{premier puits}\}$  et  $p_-(t) = \Pr\{x(t) \in \text{deuxième puits}\}$ . Leur évolution est gouvernée par

$$\frac{dp_+}{dt}(t) = -\frac{dp_-}{dt}(t) = W_-(t)p_-(t) - W_+(t)p_+(t), \quad (2.5)$$

où  $W_{\pm}(t)$  est le taux d'échappement d'un puits vers l'autre.

Comme  $p_+ = 1 - p_-$  l'Éq. (2.5) se réduit à

$$\frac{dp_+}{dt}(t) = W_-(t) - [W_+(t) + W_-(t)]p_+(t). \quad (2.6)$$

Pour trouver  $p_+$ , une expression explicite des taux de transition  $W_+$  et  $W_-$  est nécessaire en fonction des caractéristiques des entrées  $s(t)$  et  $\eta(t)$ , et du système non linéaire. Avec une condition initiale donnant l'état à  $t = 0$ , on peut alors trouver la solution à l'Éq. (2.6). Cette solution  $p_+(t)$  est la probabilité de l'état  $+$  à l'instant  $t$  sachant l'état en  $t = 0$ . Une telle probabilité permet de calculer la fonction d'autocorrélation du signal de sortie puis par transformée de Fourier d'en déduire la densité spectrale de puissance qui permet le calcul du rapport signal sur bruit suivant l'Éq. (2.3).

Une théorie a été développée par McNamara *et al.* [66] pour réaliser ce schéma dans le cas de systèmes dynamiques bistables gouverné par le potentiel bistable de forme quelconque. Cette théorie utilise pour  $W_{\pm}(t)$  un taux de Kramers modifié, disponible seulement dans le cadre d'approximations. Le taux de Kramers désigne le taux d'échappement hors d'un puits de potentiel sous l'influence d'un bruit blanc  $\eta(t)$  [60], qui induit des fluctuations stationnaires suivant

$$\dot{x} = -\frac{dU}{dx}(x) + \eta(t). \quad (2.7)$$

avec l'autocorrélation du bruit  $E[\eta(t)\eta(t + \tau)] = 2D\delta(\tau)$ .

Dans le cas d'une barrière de potentiel de hauteur  $U_0$  dont le sommet est situé à l'origine et d'un puits dont le fond est situé en  $x_0$ , on a pour un bruit blanc d'intensité telle que  $D \ll U_0$ , l'expression du taux de Kramers [5]:

$$W_0 = \frac{1}{2\pi} [|U'''(0)|U''(x_0)]^{1/2} \exp(-U_0/D), \quad (2.8)$$

où  $U''(0)$ , dérivée seconde du potentiel, est la courbure de la barrière de potentiel en  $x = 0$ , et  $U''(x_0)$  la courbure au fond du puits en  $x = x_0$ .

Si on introduit une modulation périodique  $s(t) = A\sin(2\pi t/T_s)$  celle-ci peut être absorbée dans l'expression du potentiel  $U(x, t) = U(x) - xA\sin(2\pi t/T_s)$ , qui conduit à l'évolution suivant

$$\dot{x} = -\frac{dU}{dx}(x, t) + \eta(t). \quad (2.9)$$

### 2.3.2 Équation de Fokker-Planck

On peut, à la différence de la section précédente, chercher à étudier la dynamique complète du système dynamique bistable de l'Éq. (2.4) en rendant compte des transitions entre puits ainsi que des fluctuations à l'intérieur de ceux-ci. Pour cela la méthode classiquement utilisée consiste à étudier l'équation de Fokker-Planck [76] associée au système, qui permet d'avoir accès à une densité de probabilité pour l'état  $x(t)$ .

Si on considère le système bistable précédent de l'Éq. (2.4), on peut absorber la modulation périodique  $s(t)$  dans le potentiel  $U(x)$  qui devient  $U(x, t) = U(x) + x.s(t)$  comme dans l'Éq. (2.9). On peut alors associer à l'Éq. (2.9) l'équation de Fokker-Planck [76]

$$\frac{\partial}{\partial t}p(x, t) = \frac{\partial}{\partial x} \left[ U'(x, t) + D \frac{\partial}{\partial x} \right] p(x, t), \quad (2.12)$$

où  $p(x, t)$  est la probabilité de présence en  $x$  à l'instant  $t$ .

La résolution de l'Éq. (2.12), avec la condition initiale que  $x(t)$  est en  $x_0$  à l'instant  $t_0$ , donne une densité de probabilité pour l'état  $x(t)$  sachant l'état à l'instant  $t_0 < t$ . Cette densité de probabilité permet alors de calculer la fonction d'autocorrélation de sortie et d'en déduire la densité spectrale de puissance puis le rapport signal sur bruit.

L'équation de Fokker-Planck est une équation aux dérivées partielles non linéaire dont la résolution exacte est particulièrement difficile. Des résolutions approchées ont été développées au moyen d'approximations telle que l'hypothèse d'un bruit gaussien et d'une modulation sinusoïdale en entrée, ou en se contentant de solutions asymptotiques quand  $t \gg t_0$  [57, 51].

Un exemple d'utilisation de l'équation de Fokker-Planck est donnée dans la théorie développée par Marchesoni *et al.* [30, 32, 73]. Cette théorie a été appliquée au cas de la particule confinée dans un potentiel bistable tel que le potentiel quartique de l'Éq. (2.2). L'équation de Fokker-Planck (2.12) permet de définir, par analogie à l'équation de Schrödinger, un Hamiltonien qui est alors séparé en une partie dépendante seulement des coordonnées spatiales et une perturbation  $H^1(x, t)$  dépendante du temps. Les calculs suivent alors la méthode de la théorie des perturbations développée en mécanique quantique afin de définir une fonction d'autocorrélation sur la sortie du système. On peut alors en déduire la densité spectrale de puissance de sortie et le rapport signal sur bruit comme dans la section précédente.

### 2.3.3 Théorie de la réponse linéaire

Une autre méthode développée pour approcher la résonance stochastique est la théorie de la réponse linéaire. La théorie de la réponse linéaire est une méthode de perturbation basée sur la linéarisation de la réponse du système pour une petite entrée périodique ajoutée au bruit. Elle peut être appliquée à tout système non linéaire [25, 24, 51, 22, 21], dans la limite de signaux de faible amplitude.

Considérons à nouveau le système dynamique gouverné par un potentiel bistable selon

$$\tau_a \dot{x} = -\frac{dU}{dx}(x) + \eta(t), \quad (2.13)$$

# Chapitre III

## Une formulation générale pour l'étude de la résonance stochastique périodique

### 3.1 Introduction

Dans le chapitre précédent, nous avons constaté que différentes approches théoriques ont été développées pour analyser la résonance stochastique périodique. Ces différentes méthodes s'appuient sur des approximations, qui utilisent sensiblement les mêmes hypothèses pour obtenir des résultats similaires. Ces hypothèses sont l'utilisation de signaux périodiques de faible amplitude, souvent de forme sinusoïdale, auxquels on ajoute un bruit blanc le plus souvent gaussien.

Nous allons montrer qu'on peut établir une formulation générale pour étudier la résonance stochastique en présence de n'importe quel système non linéaire, signal périodique, et bruit [14]. La formulation que nous proposons fournit des expressions pour la fonction d'autocorrélation de sortie, la densité spectrale de puissance, le rapport signal sur bruit, et le déphasage entrée-sortie. Ces expressions sont obtenues, en présence d'une entrée périodique, d'une distribution de bruit et d'une non-linéarité, toutes trois étant arbitrairement choisies.

La formulation générale proposée montre que la puissance  $S$  du signal de sortie est reliée à l'espérance non stationnaire de sortie, et la puissance  $B$  du bruit reliée à la transformée de Fourier de l'autocovariance de sortie. Nous pourrions ainsi faire apparaître explicitement ce qui conditionne la part de puissance cohérente et la part de puissance due au bruit.

### 3.2 Formulation générale

Considérons  $s(t)$  représentant un signal déterministe périodique de période  $T_s$ , et  $\eta(t)$  un bruit aléatoire stationnaire. Nous considérons un système non linéaire invariant dans le temps, de type général (statique ou dynamique), qui reçoit les entrées  $s(t)$  et  $\eta(t)$  et

La transformée de Fourier de l'Éq. (3.6), via l'Éq. (3.3), conduit alors à

$$P_{yy}(\nu) = \mathcal{F}[C_{yy}(\tau)] + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{Y}_n \overline{Y}_n^* \delta\left(\nu - \frac{n}{T_s}\right). \quad (3.9)$$

La densité spectrale de puissance de l'Éq. (3.9) présente la forme typiquement rencontrée dans des systèmes résonnant stochastiquement. Celle-ci est formée par des raies spectrales d'amplitude  $|\overline{Y}_n|^2$  situées aux fréquences multiples entiers de la fréquence cohérente  $1/T_s$ , superposées à un fond de bruit large-bande représenté par  $\mathcal{F}[C_{yy}(\tau)]$ .

L'autocovariance  $\mathbb{E}[\tilde{y}(t)\tilde{y}(t+\tau)]$  tend vers zéro quand  $|\tau| \rightarrow +\infty$ , et il en est donc de même pour sa moyenne temporelle  $C_{yy}(\tau)$ . La variance non stationnaire de  $y(t)$  est représentée par  $\mathbb{E}[\tilde{y}(t)\tilde{y}(t)] = \text{var}[y(t)]$ , qui, après une moyenne temporelle sur une période  $T_s$  selon l'Éq. (3.7), donne  $C_{yy}(0) = \overline{\text{var}[y(t)]}$ , la variance stationnaire de  $y(t)$ . La fonction déterministe  $C_{yy}(\tau)$  peut alors s'écrire

$$C_{yy}(\tau) = \overline{\text{var}[y(t)]} h(\tau), \quad (3.10)$$

où  $h(\tau)$  est une fonction déterministe décrivant la forme de l'autocovariance normalisée stationnaire. Celle-ci vérifie  $h(0) = 1$  et  $h(\tau) \rightarrow 0$  quand  $|\tau| \rightarrow +\infty$ , et a pour transformée de Fourier  $\mathcal{F}[h(\tau)] = H(\nu)$ . La densité spectrale de puissance de l'Éq. (3.9) peut alors s'exprimer comme

$$P_{yy}(\nu) = \overline{\text{var}[y(t)]} H(\nu) + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \overline{Y}_n \overline{Y}_n^* \delta\left(\nu - \frac{n}{T_s}\right). \quad (3.11)$$

Une définition classique du rapport signal sur bruit de sortie, à fréquence  $n/T_s$ , s'ensuit comme le rapport de la puissance contenue dans la raie spectrale seule sur la puissance contenue dans le fond de bruit, dans une petite bande de fréquence  $\Delta B$  autour de  $n/T_s$ . Nous pouvons donc écrire le rapport signal sur bruit de sortie :

$$\mathcal{R}\left(\frac{n}{T_s}\right) = \frac{|\overline{Y}_n|^2}{\overline{\text{var}[y(t)]} H(n/T_s) \Delta B}. \quad (3.12)$$

L'équation (3.12) fournit une expression exacte pour le RSB en sortie, dont l'évaluation explicite requiert la connaissance de la moyenne non stationnaire  $\mathbb{E}[y(t)]$  de sortie et de la fonction d'autocovariance stationnaire de sortie  $C_{yy}(\tau)$ .

Une autre caractérisation souhaitable d'un système résonnant stochastiquement, consiste en la possibilité d'évaluer un déphasage entre la sortie et l'entrée périodique cohérente [24]. L'évaluation du déphasage peut être réalisée par le calcul d'une fonction d'intercorrélation entre l'entrée périodique  $s(t)$  et la sortie  $y(t)$ . Pour  $t$  et  $\tau$  fixés, nous considérons tout d'abord l'espérance

$$\mathbb{E}[s(t)y(t+\tau)] = s(t)\mathbb{E}[y(t+\tau)], \quad (3.13)$$

car  $s(t)$  est déterministe.

# Chapitre IV

## La résonance stochastique périodique dans les systèmes décomposables en une non-linéarité statique suivie d'un système dynamique linéaire

### 4.1 Introduction

Nous proposons d'utiliser la formulation générale développée dans le chapitre précédent, pour une classe de systèmes dynamiques non linéaires.

Dans les approches théoriques de la résonance stochastique périodique, présentées dans le chapitre 2, ce qui rend particulièrement difficile les analyses théoriques est le lien étroit entre le caractère dynamique et le caractère non linéaire des systèmes étudiés avec ces méthodes. Ce lien conduit en effet pour ces systèmes à des évolutions suivant des équations différentielles non linéaires, dont la résolution nécessite des approximations et des hypothèses contraignantes.

Nous proposons de nous intéresser à une classe de systèmes dont on peut découpler le caractère non linéaire et le caractère dynamique. Nous montrons que pour de tels systèmes nous pouvons, au moyen du cadre théorique présenté dans la section précédente, développer une caractérisation complète de la résonance stochastique périodique par le calcul explicite de la fonction d'autocorrélation, de la densité spectrale de puissance et du rapport signal sur bruit à la fréquence du signal d'entrée [14].

La théorie proposée ne recourt pas aux approximations adiabatiques ni aux formulations de type Kramers telles que nous les avons présentées dans la section 2.3. Elle n'est pas limitée aux petits signaux ou petits bruit. Cette théorie repose plutôt sur une analyse statistique directe rendue possible dans le cas des systèmes décomposables en un système non linéaire statique suivi d'un système dynamique linéaire.

À n'importe quel instant fixé  $t = j\Delta t$ ,  $\eta(t)$  étant distribué selon  $f_\eta(u)$ ,  $s(t) + \eta(t)$  est distribué selon  $f_\eta[u - s(t)]$ . Par suite de la relation (4.1), l'espérance non stationnaire de sortie peut alors être calculée explicitement comme

$$\mathbb{E}[y(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) f_\eta[u - s(t)] du, \quad (4.6)$$

ainsi que le moment non stationnaire de degré deux :

$$\mathbb{E}[y^2(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(u) f_\eta[u - s(t)] du. \quad (4.7)$$

Une expression est alors accessible pour la variance non stationnaire en sortie  $\mathbb{E}[\tilde{y}(t)\tilde{y}(t)] = \text{var}[y(t)]$ , comme

$$\text{var}[y(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} g^2(u) f_\eta[u - s(t)] du - \left( \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) f_\eta[u - s(t)] du \right)^2. \quad (4.8)$$

Les Éqs. (4.4) et (4.5) peuvent alors être combinées en une seule expression, dans laquelle tous les termes sont maintenant connus explicitement grâce aux Éqs. (4.6) et (4.8), ce qui permet d'écrire

$$\mathbb{E}[y(j\Delta t)y(j\Delta t + k\Delta t)] = \text{var}[y(j\Delta t)] \Delta t \hat{\delta}(k\Delta t) + \mathbb{E}[y(j\Delta t)]\mathbb{E}[y(j\Delta t + k\Delta t)], \quad (4.9)$$

pour tout entier  $j$  et  $k$ , et avec  $\hat{\delta}(k\Delta t)$  défini par l'Éq. (4.2). Par une moyenne temporelle, nous définissons alors la fonction d'autocorrélation en sortie, correspondant à l'Éq. (3.5),

$$R_{yy}(k\Delta t) = \overline{\text{var}(y)} \Delta t \hat{\delta}(k\Delta t) + \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{E}[y(j\Delta t)]\mathbb{E}[y(j\Delta t + k\Delta t)], \quad (4.10)$$

avec la variance stationnaire de sortie,

$$\overline{\text{var}(y)} = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \text{var}[y(j\Delta t)], \quad (4.11)$$

qui est explicitement calculable au moyen de l'Éq. (4.8). Dans le cas d'un bruit blanc en entrée, la fonction d'autocovariance stationnaire de sortie, donnée par l'Éq. (3.10), est alors simplement

$$C_{yy}(k\Delta t) = \overline{\text{var}(y)} \Delta t \hat{\delta}(k\Delta t) = \overline{\text{var}(y)} h(k\Delta t). \quad (4.12)$$

Afin de continuer dans le domaine fréquentiel, les coefficients de Fourier de la fonction périodique déterministe  $\mathbb{E}[y(j\Delta t)]$  sont introduits

$$\bar{Y}_n = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{E}[y(j\Delta t)] \exp\left(-i2\pi \frac{jn}{N}\right). \quad (4.13)$$

La transformée de Fourier discrète de  $R_{yy}$ , sur un intervalle de temps d'un nombre entier  $2M$  de périodes  $T_s$ , est définie comme

$$\mathcal{F}_{\text{dis}}[R_{yy}(k\Delta t)] = \sum_{k=-MN}^{MN-1} R_{yy}(k\Delta t) \exp\left(-i2\pi \frac{k\ell}{2MN}\right) \Delta t, \quad (4.14)$$

par l'examen unique du transfert par la non-linéarité statique. La performance de la résonance dans le transfert par le système entier est équivalente à celle dans le transfert par la non-linéarité statique seule.

Avec la détermination du rapport signal sur bruit et du déphasage  $\phi$ , tous deux accessibles aux différents harmoniques de la fréquence cohérente  $1/T_s$ , nous disposons d'une caractérisation complète pour la classe des systèmes dynamiques non linéaires décomposables en un système statique non linéaire suivi d'un système dynamique linéaire. Cette caractérisation est appropriée pour détecter un effet de résonance stochastique, avec des quantités se prêtant à une évaluation numérique directe.

Dans la suite nous utilisons la théorie présentée pour analyser la résonance stochastique dans des systèmes étudiés auparavant par des méthodes à approximations. Nous montrons aussi l'aptitude de cette méthode pour mettre en évidence la résonance stochastique dans de nouveaux systèmes et pour faire apparaître des propriétés intéressantes liées à la résonance stochastique.

### 4.3 Une non-linéarité de Heaviside

Une première vérification numérique de la théorie proposée à été effectuée avec la non-linéarité de Heaviside [9], représentée par la fonction

$$g(u) = \begin{cases} 0 & \text{pour } u < V_{\text{th}} \\ 1 & \text{pour } u > V_{\text{th}} . \end{cases} \quad (4.17)$$

Une étude précédente [55] avait déjà considéré la résonance stochastique pour la non-linéarité de l'Éq. (4.17) obtenant des expressions approchées pour le RSB. Nous pouvons, à la différence de cette étude, proposer une formulation exacte au moyen de la théorie générale présentée. Des simulations numériques ont été effectuées avec la non-linéarité de l'Éq. (4.17) [9] et ont montré une parfaite cohérence avec les prédictions théoriques. Nous présentons dans la section suivante une réalisation expérimentale d'une non-linéarité de ce type, confrontée à son analyse théorique.

### 4.4 Un circuit électronique résonnant stochastique

Le premier circuit électronique ayant révélé de la résonance stochastique est la bascule de Schmitt [26] qui comporte à la fois un seuil et une non-linéarité à hystérésis. Des circuits électroniques plus complexes ont été ensuite proposés [1], afin de simuler des systèmes non linéaires connus pour montrer de la résonance stochastique, comme des mouvements browniens gouvernés par l'équation de Langevin [45], ou des neurones [5, 67].

Nous introduisons ici un circuit plus simple encore que la bascule de Schmitt, sous la forme d'un comparateur à seuil à deux états, et sans hystérésis. Nous démontrons expérimentalement que ce système est capable de résonance stochastique [40]. Ce circuit

signal triangulaire est  $s(t) = V_M s_1(t/T_s)$  avec

$$s_1(t) = \begin{cases} 1 - 4t & \text{pour } 0 \leq t < 1/2 \\ -3 + 4t & \text{pour } 1/2 \leq t < 1. \end{cases} \quad (4.19)$$

Le signal carré est d'amplitude  $V_M$  sur une moitié de période et  $-V_M$  sur l'autre.

Le bruit utilisé  $\eta(t)$  est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle, qui dans la pratique a été réalisé par un bruit électrique avec un temps de corrélation de moins de 0.1 ms, beaucoup plus court que la période cohérente  $T_s$ . Le générateur de bruit peut être ajusté afin de changer l'amplitude efficace  $V_\eta$  de  $\eta(t)$ .

L'amplitude de saturation de l'amplificateur opérationnel a été fixée à  $V_{\text{sat}} = 5$  volts. Le seuil  $V_{\text{th}}$  est de 2.2 volts. Dans ces conditions, en l'absence du bruit  $\eta(t)$ , l'entrée périodique  $s(t)$  seule est toujours en dessous du seuil de transition  $V_{\text{th}}$  et la sortie  $y(t)$  reste à  $-V_{\text{sat}}$ . L'entrée  $s(t)$  est alors "invisible" dans la sortie du circuit  $y(t)$ .

Cette situation est conforme à une condition générale pour obtenir la résonance stochastique, à savoir que l'entrée périodique seule doit être insuffisante pour induire des transitions en sortie. En pratique, cela correspond à la situation d'un faible signal en dessous de la limite de sensibilité de systèmes récepteurs. Nous montrons alors que dans ces conditions, l'addition de bruit en entrée rend l'entrée périodique  $s(t)$  visible dans la sortie  $y(t)$ , de façon plus prononcée quand l'amplitude du bruit est augmentée jusqu'à un niveau optimal.

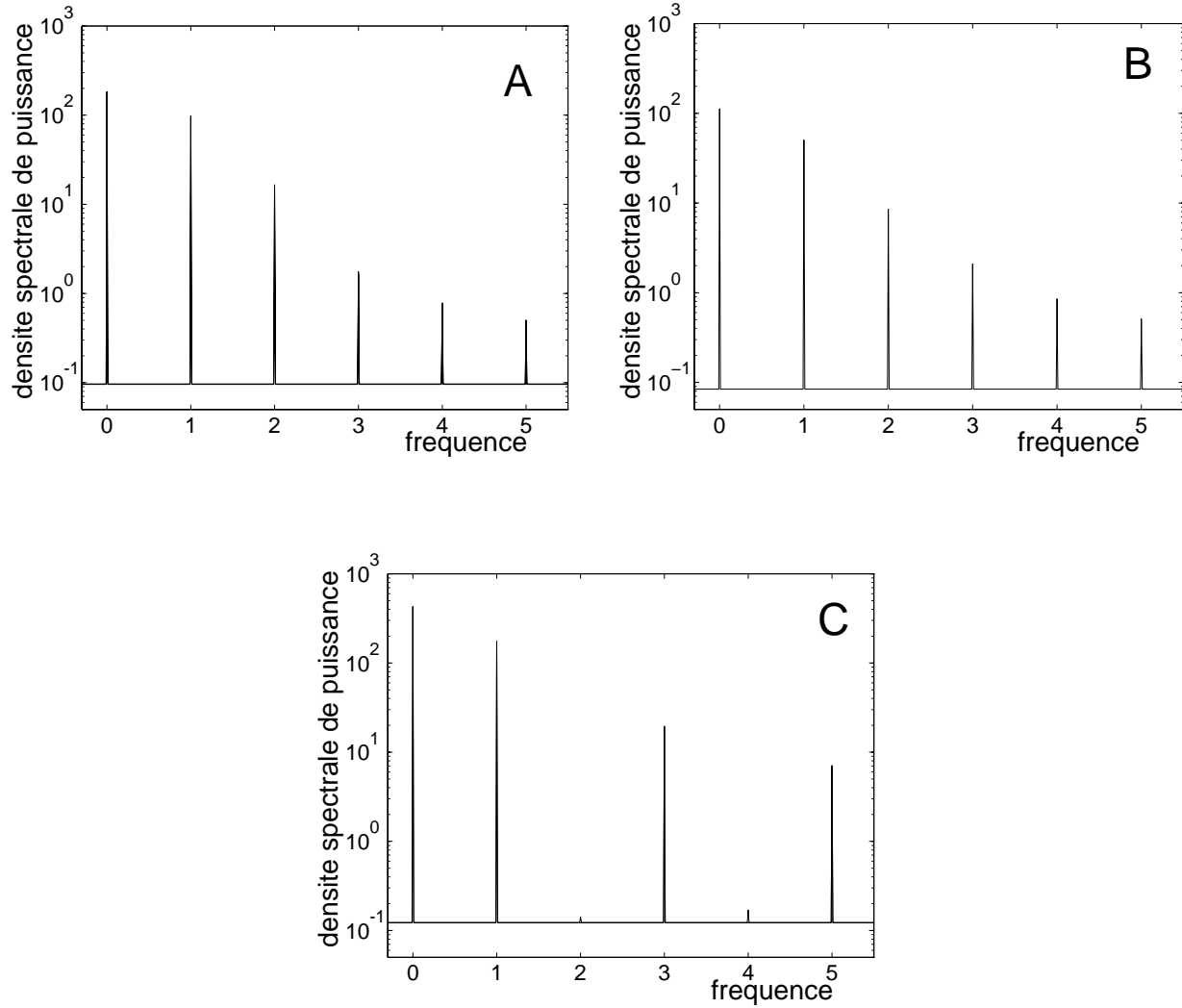
Pour analyser cette propriété, l'amplitude efficace du bruit  $V_\eta$  est portée à une valeur finie fixée. On a procédé alors à une estimation de la fonction d'autocorrélation du signal de sortie  $y(t)$ . Pour cela  $y(t)$  est échantillonné avec un pas de temps  $\Delta t = 0.1$  ms et quantifié par un convertisseur analogique-numérique 12-bits. La fonction d'autocorrélation de sortie  $R_{yy}(\tau)$  est estimée par une moyenne de  $N_{\text{av}}$  produits  $y(t)y(t + \tau)$ , avec des valeurs de  $t \bmod T_s$  couvrant uniformément l'intervalle  $[0, T_s[$  pour chaque valeur de  $\tau$  à laquelle  $R_{yy}(\tau)$  est estimée. Une fonction d'autocorrélation de sortie  $R_{yy}(\tau)$  typique est présentée sur la Fig. 4.2.

La transformée de Fourier de  $R_{yy}(\tau)$  donne alors la densité spectrale de puissance de sortie  $P_{yy}(\nu)$ . Une DSP typique  $P_{yy}(\nu)$  est présentée sur la Fig. 4.3. Typiquement,  $P_{yy}(\nu)$  est formée par des raies spectrales aux multiples entiers  $n/T_s$  de la fréquence périodique d'entrée  $1/T_s$ , émergeant sur un fond continu large-bande. Les raies spectrales sont la marque de l'influence de l'entrée périodique  $s(t)$  sur la sortie  $y(t)$ , et le fond continu de l'influence du bruit  $\eta(t)$  sur  $y(t)$ .

En présence de résonance stochastique, l'émergence des raies spectrales sur le fond continu dû au bruit est la plus prononcée pour un niveau optimal de bruit en entrée. Comme on l'a vu précédemment, l'effet est mesuré par un rapport signal sur bruit (RSB) défini au moyen de la densité spectrale de puissance.

Le RSB a été calculé à partir de l'estimation expérimentale de la DSP de sortie  $P_{yy}(\nu)$ , pour différents harmoniques  $n/T_s$ . Nous avons étudié ensuite l'évolution du RSB avec l'amplitude efficace  $V_\eta$  du bruit en entrée. Cette évolution est présentée sur la Fig. 4.4. Les résultats de la Fig. 4.4 montrent une variation non monotone du RSB qui d'abord

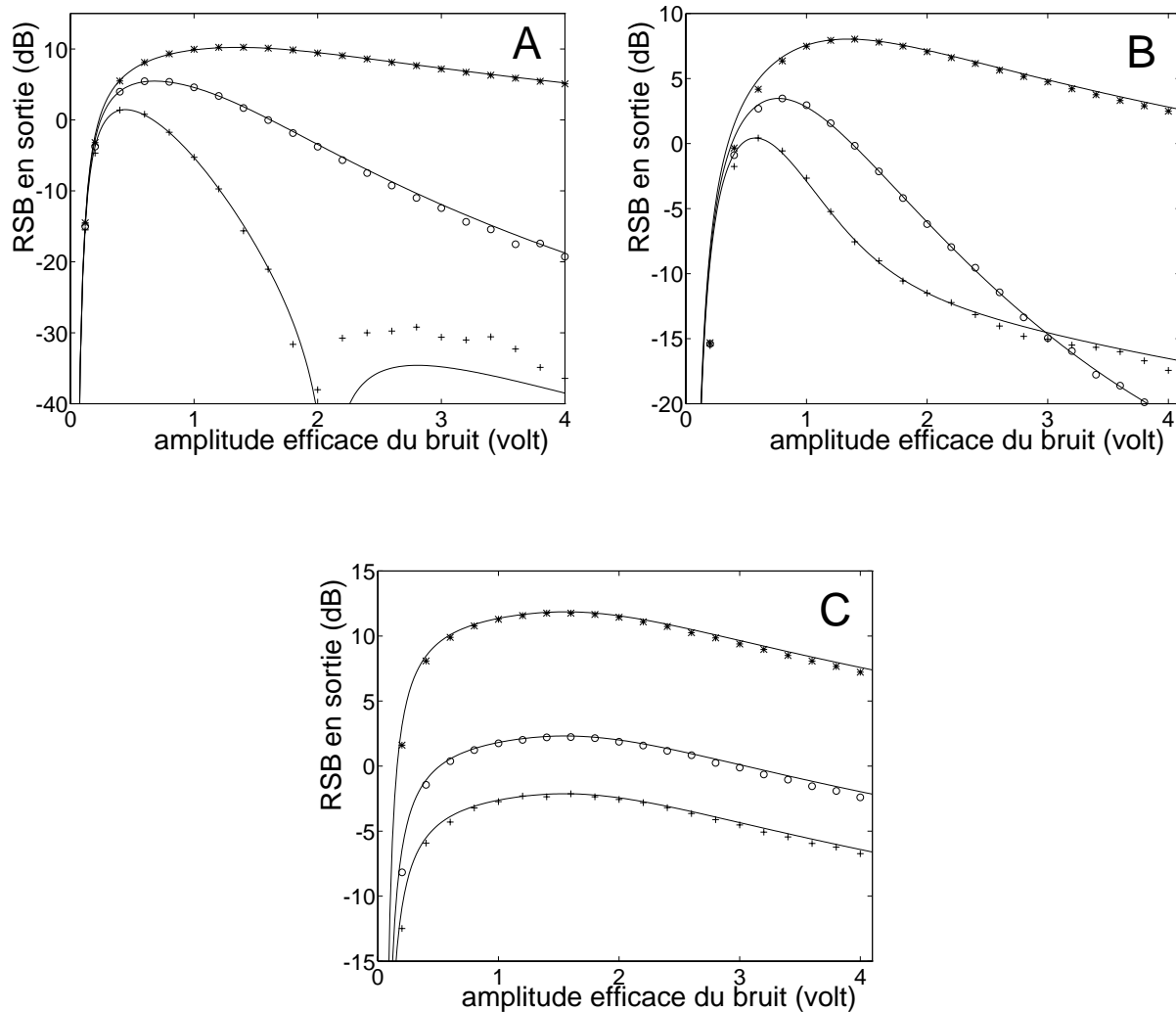




**Fig. 4.3:** Densité spectrale de puissance de sortie  $P_{yy}(\nu)$  en fonction de la fréquence  $\nu$  en unités  $1/T_s$ , obtenue par transformation de Fourier de la fonction d'autocorrélation  $R_{yy}(\tau)$  (avec  $M = 100$ ). Avec  $s(t)$  :

- (A) signal sinusoïdal  $s(t) = V_M \sin(2\pi t/T_s)$ ,
- (B) signal triangulaire  $s(t) = V_M s_1(t/T_s)$  de l'Éq. (4.19),
- (C) signal carré de valeur  $V_M$  sur une moitié de période  $T_s$  et de valeur  $-V_M$  sur l'autre moitié de période.

Dans chaque cas la ligne continue est l'expression théorique de la DSP similaire à l'Éq. (4.29), la ligne bruitée (quasi indiscernable) est la DSP expérimentale déduite par moyennage avec  $N_{av} = 3 \times 10^7$  pour l'estimation de l'autocorrélation  $R_{yy}$ .



**Fig. 4.4:** Rapport signal sur bruit de sortie en fonction de l'amplitude efficace du bruit en entrée,  $V_\eta$  en volts.

(A) signal sinusoidal  $s(t) = V_M \sin(2\pi t/T_s)$ ,

(B) signal triangulaire  $s(t) = V_M s_1(t/T_s)$  de l'Éq. (4.19),

(C) signal carré de valeur  $V_M$  sur une moitié de période  $T_s$  et de valeur  $-V_M$  sur l'autre moitié de période.

Dans chaque cas la ligne continue est l'expression théorique de l'Éq. (4.32), les ensembles de points discrets sont obtenus expérimentalement par estimation de la fonction d'auto-corrélation  $R_{yy}(\tau)$  par moyennage avec  $N_{av} = 3 \times 10^7$ . Pour chaque cas le RSB est montré à la fréquence fondamentale  $1/T_s$  et aux deux harmoniques suivants  $n/T_s$  qui donnent le RSB le plus fort ; pour (A) et (B) : (\*) à  $1/T_s$ , (o) à  $2/T_s$  et (+) à  $3/T_s$  ; pour (C) : (\*) à  $1/T_s$ , (o) à  $3/T_s$  et (+) à  $5/T_s$ .

Nous avons vérifié que pour beaucoup plus de  $N_{\text{av}} = 30\,000$  termes moyennés, les valeurs expérimentales et théoriques  $R_{yy}(\tau)$  deviennent presque indiscernables.

Pour la suite dans la comparaison entre la théorie et l'expérience  $N_{\text{av}}$  est fixé à  $3 \times 10^7$ . À partir des fonctions d'autocorrélation, la comparaison entre la théorie et l'expérience implique ensuite seulement des calculs de transformation de Fourier qui sont exécutés numériquement de la même manière. Par suite, un très bon accord est conservé entre les DSP théorique et expérimentale présentées sur la Fig. 4.3, comme les fonctions d'autocorrélation correspondantes concordent presque parfaitement. Enfin la Fig. 4.4 compare les rapports signal sur bruit (RSB) qui sont calculés à partir de la DSP.

Les RSB sont montrés à la fréquence fondamentale  $1/T_s$  et aux deux harmoniques suivants  $n/T_s$  qui donnent les plus forts RSB. On observe un très bon accord entre la théorie et l'expérience, qui se dégrade lentement pour des valeurs très basses du RSB où le signal est très faible, proche de la limite de sensibilité des mesures.

## 4.5 Une non-linéarité à deux seuils

Nous présentons maintenant une utilisation de la théorie générale de la section 4.2 pour analyser la résonance stochastique dans un système étudié auparavant au moyen d'approximations. Un exemple particulier d'un système non linéaire statique présentant de la résonance stochastique a été considéré dans [28] sous la forme d'une non-linéarité à deux seuils représentée par la fonction suivante

$$g(u) = \begin{cases} -1 & \text{pour } u < -0.5 \\ 0 & \text{pour } -0.5 \leq u \leq 0.5 \\ 1 & \text{pour } u > 0.5 . \end{cases} \quad (4.33)$$

L'Éq. (4.6) du modèle général permet de définir pour ce système l'espérance non stationnaire de sortie

$$\text{E}[y(t)] = 1 - F_\eta[0.5 - s(t)] - F_\eta[-0.5 - s(t)] , \quad (4.34)$$

et l'Éq. (4.8) donne la variance non stationnaire de sortie

$$\begin{aligned} \text{var}[y(t)] &= \left\{1 - F_\eta[0.5 - s(t)]\right\} F_\eta[0.5 - s(t)] + \left\{1 - F_\eta[-0.5 - s(t)]\right\} F_\eta[-0.5 - s(t)] \\ &\quad + 2 \left\{1 - F_\eta[0.5 - s(t)]\right\} F_\eta[-0.5 - s(t)] . \end{aligned} \quad (4.35)$$

Les Éqs. (4.34) et (4.35), et l'application des Éqs. (4.13) et (4.11) du modèle général permettent alors d'exprimer le rapport signal sur bruit tel qu'il est défini dans l'Éq. (4.16). La Fig. 4.5 représente ce RSB pour le résonateur stochastique de l'Éq. (4.33), calculé avec  $\Delta B = 1/T_s = 1/(N\Delta t)$  et  $N = 100$  - on gardera toujours ces valeurs dans la suite - pour des distributions différentes de bruit et pour deux formes différentes de signal pour l'entrée périodique ; on considère successivement une sinusoïde  $s(t) = A \sin(2\pi t/T_s)$  et un signal en dent de scie  $s(t) = As_2(t/T_s)$  avec

$$s_2(t) = -1 + 2 \times (t \bmod 1) . \quad (4.36)$$

Le RSB que nous présentons sur la Fig. 4.5 n'est pas calculé dans les travaux précédents [28]. L'effet de résonance stochastique dans la transmission d'un signal périodique par le système de l'Éq. (4.33) y est caractérisé au moyen de l'amplitude de la raie spectrale cohérente à la fréquence  $1/T_s$  en sortie. Cependant l'évolution non monotone d'une telle quantité ne fournit pas l'assurance stricte de la présence de résonance stochastique [66]. En effet lorsque le niveau de bruit en entrée augmente, la raie cohérente et le fond continu de bruit peuvent tous deux croître simultanément en sortie comme le montre la Fig. 4.7. Un critère préférable pour caractériser la résonance stochastique est l'émergence d'une raie cohérente, de façon plus prononcée, relativement au fond de bruit. Le rapport signal sur bruit présenté sur la Fig. 4.5 permet de quantifier ce critère et constitue donc une mesure plus sûre pour mettre en évidence la résonance stochastique.

L'amplitude en sortie de la raie cohérente à la fréquence  $1/T_s$  employée dans [28] correspond au coefficient de Fourier du signal périodique  $|\overline{Y}_1|$  que nous avons défini dans l'Éq. (4.13) du modèle général. Aucune expression générale comparable n'est proposée pour cette quantité dans [28], toutefois pour un signal  $s(t)$  sinusoïdal cette quantité est approchée dans [28] par la quantité  $kA_y$ , avec

$$A_y = F_\eta(0.5 + A) - F_\eta(0.5 - A), \quad (4.37)$$

et  $k$  une constante de proportionnalité *ad hoc*.

La Fig. 4.6 compare l'approximation  $kA_y$  de l'Éq. (4.37) à la valeur  $|\overline{Y}_1|$  des Éqs. (4.13) et (4.34). Comme cela est noté dans [28], l'approximation  $kA_y$  est bonne pour les petites valeurs de  $A$ ; et nous pouvons voir avec la Fig. 4.6 qu'elle se dégrade pour de plus grandes valeurs de  $A$ .

Par ailleurs, comme cela est mentionné dans [28], l'approximation ne prend pas en compte la forme réelle de l'entrée périodique  $s(t)$ . Ainsi si on considère un signal  $s(t)$  non sinusoïdal l'approximation se dégrade. Cela est visible sur la Fig. 4.6 où  $s(t)$  est un signal en dent de scie.

La théorie présentée dans le modèle général permet aussi de décrire la résonance stochastique dans des systèmes à seuils multiples comme celui considéré dans [29], et de prédire les RSB qui sont approchés dans l'étude de [29]. Nous pouvons ainsi illustrer, pour la non-linéarité à deux seuils de l'Éq. (4.33), l'évolution de la variance stationnaire de sortie  $\overline{\text{var}(y)}$ . Celle-ci définie dans les Éqs. (4.11) et (4.8), contrôle l'amplitude du fond de bruit dans le RSB de l'Éq. (4.16). L'évolution de  $\overline{\text{var}(y)}$  avec l'amplitude efficace du bruit en entrée  $\eta(t)$  est représentée sur la Fig. 4.7 en présence d'une entrée périodique  $s(t) = A \sin(2\pi t/T_s)$  avec  $A = 0.45$ , et également, pour comparaison, en l'absence de toute entrée périodique. Sur la Fig. 4.7, on peut voir que dans la région de la résonance, l'amplitude du fond de bruit en sortie peut différer considérablement en présence de l'entrée périodique, de sa valeur en l'absence de cette entrée périodique. C'est le cas ici, où l'amplitude  $A = 0.45$  de l'entrée périodique est du même ordre de grandeur que les amplitudes caractéristiques du système (le seuil 0.5 de l'Éq. (4.33) et l'amplitude efficace du bruit d'environ 0.3 au sommet de la résonance). Dans ces conditions, l'entrée périodique ne peut pas être considérée petite, et son implication dans la résonance stochastique ne

peut pas être traitée avec précision en remplaçant le fond de bruit en présence de l'entrée périodique simplement par le fond de bruit en son absence. C'est ce qui aurait été supposé dans des traitements perturbatifs de la résonance stochastique tels que ceux que nous avons présentés dans la section 2.3. Les traitements perturbatifs, tels que la théorie de la réponse linéaire [25, 24], sont généraux dans le sens qu'ils peuvent être appliqués à tout système non linéaire, mais ils sont limités aux petits signaux. Par contraste, l'approche que nous présentons s'applique seulement aux non-linéarités statiques, mais pour ce type de systèmes, elle fournit une description générale, non limitée aux petits signaux.

Les conditions illustrées sur la Fig. 4.7, nous conduisent à considérer ici la résonance stochastique, non comme un effet perturbatif, mais comme un véritable effet coopératif de deux signaux d'importance comparable. En effet, ni le signal périodique ni le bruit, ne prédominent sur l'évolution du système mais coopèrent efficacement pour surmonter la non-linéarité de l'Éq. (4.33).

## 4.6 Une non-linéarité de type diode

Nous continuons dans cette section l'utilisation de la théorie générale présentée dans la section 4.2 pour mettre en évidence la résonance stochastique dans un modèle simple de diode.

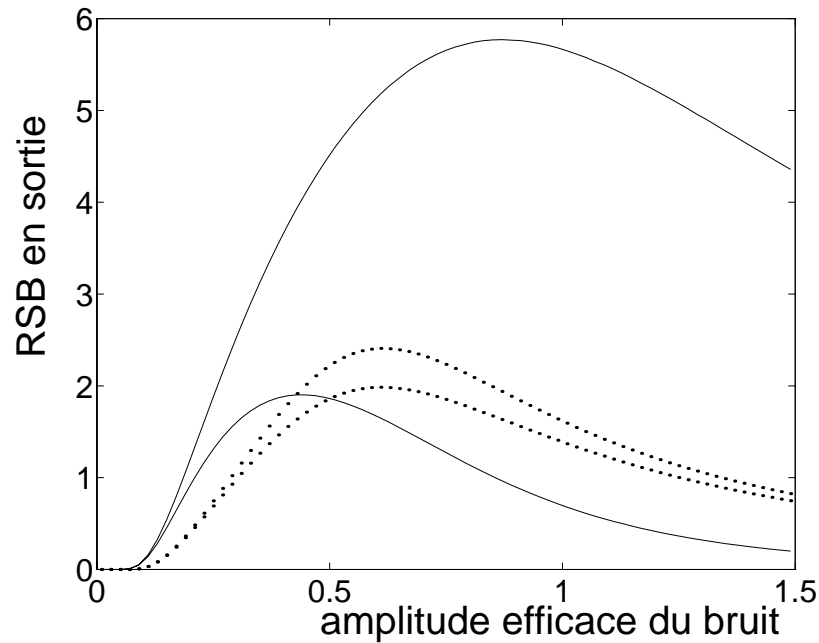
Considérons  $g$  telle que

$$g(u) = \begin{cases} 0 & \text{pour } u \leq \theta \\ (u - \theta)/\lambda & \text{pour } u > \theta. \end{cases} \quad (4.38)$$

L'équation (4.38) est un modèle simple pour la non-linéarité d'une diode de seuil  $\theta$ . La diode est un des composants électroniques non linéaires les plus élémentaires. Avec la théorie présentée, nous pouvons montrer que ce composant, avec le modèle de l'Éq. (4.38), est capable de résonance stochastique. Nous avons confirmé expérimentalement ce résultat par la suite [44].

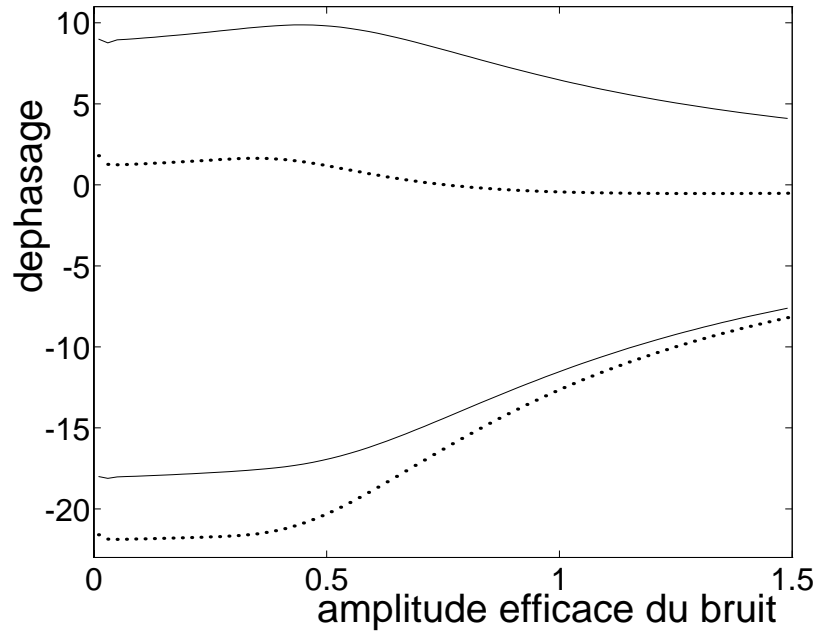
Suivant la procédure de la section 4.2, nous calculons avec la non-linéarité (4.38) le RSB de sortie de l'Éq. (4.16). Ce calcul est réalisé avec  $\eta(t)$  bruit gaussien de moyenne nulle et de variance  $\sigma_\eta^2$ , et avec un seuil  $\theta = 1.2$ . On considère comme entrée périodique de période  $T_s$  successivement  $s(t) = \cos(2\pi t/T_s)$  et  $s(t) = [\cos(2\pi t/T_s) + \cos(4\pi t/T_s + \pi/4) + \cos(6\pi t/T_s + 2\pi/5)]/3$ . Les RSB résultant, sont tracés sur la Fig. 4.8 en fonction de l'amplitude efficace  $\sigma_\eta$  du bruit  $\eta(t)$ , et révèlent la résonance stochastique dans la non-linéarité de type diode. Le RSB prédit par l'Éq. (4.16) est insensible à la valeur du paramètre  $\lambda$  de l'Éq. (4.38).

Comme on peut le voir sur la Fig. 4.8, aucune superposition linéaire ne s'applique car nous traitons de systèmes non linéaires, et l'évolution du RSB pour la composante à fréquence  $1/T_s$  est différente selon que cette composante est seule ou accompagnée par d'autres composantes de fréquences différentes. On voit sur la Fig. 4.8, ainsi que sur la Fig. 4.4, qu'une entrée harmonique seule, de fréquence  $1/T_s$ , peut générer des harmoniques d'ordre supérieur en sortie, ceci s'explique aussi par le caractère non linéaire du système.



**Fig. 4.8 :** Rapport signal sur bruit de sortie  $\mathcal{R}$  calculé au moyen de l'Éq. (4.16) pour la non-linéarité de type diode de l'Éq. (4.38) avec  $\theta = 1.2$ , en fonction de l'amplitude efficace  $\sigma_\eta$  du bruit blanc gaussien  $\eta(t)$  en entrée, choisi de moyenne nulle.

Les deux courbes continues sont obtenues avec  $s(t) = \cos(2\pi t/T_s)$ , et les deux courbes en pointillés avec  $s(t) = [\cos(2\pi t/T_s) + \cos(4\pi t/T_s + \pi/4) + \cos(6\pi t/T_s + 2\pi/5)]/3$ . Dans chaque paire de courbes, la courbe supérieure est le RSB à fréquence  $1/T_s$ , et la courbe inférieure le RSB à fréquence  $2/T_s$ .



**Fig. 4.9 :** Déphasage entrée–sortie  $\phi$  (en degrés) calculé avec les Éqs. (3.16) et (4.39) pour la non-linéarité de type diode de l'Éq. (4.38) dans le régime de résonance stochastique de la Fig. 4.8 avec  $\theta = 1.2$ , en fonction de l'amplitude efficace  $\sigma_\eta$  du bruit blanc gaussien  $\eta(t)$ . Les deux courbes continues sont obtenues avec  $s(t) = [\cos(2\pi t/T_s) + \cos(4\pi t/T_s + \pi/4)]/2$ , et les deux courbes en pointillés avec  $s(t) = [\cos(2\pi t/T_s) + \cos(4\pi t/T_s + \pi/4) + \cos(6\pi t/T_s + 2\pi/5)]/3$ . Dans chaque paire de courbes, la courbe supérieure est  $\phi$  à la fréquence  $1/T_s$ , et la courbe inférieure  $\phi$  à la fréquence  $2/T_s$ .

voir avec la courbe (a) sur la Fig. 4.10, où le RSB croît d'une valeur nulle, jusqu'à un maximum, puis décroît pour tendre vers zéro.

Pour  $\lambda > 0$ ,  $g(u)$  est une non-linéarité lisse et l'entrée périodique  $s(t)$  est visible à la sortie en l'absence de bruit. Dans ce cas, pour un niveau de bruit en entrée strictement nul, le RSB de sortie tend vers l'infini. Si on accroît alors le niveau de bruit en entrée à partir de zéro, pour une fonction  $g(u)$  de forte pente, avec de petites valeurs de  $\lambda > 0$ , nous observons, comme sur les courbes (b) et (c) de la Fig. 4.10, que le RSB de sortie peut rapidement tomber vers de petites valeurs. Ensuite, un accroissement du niveau de bruit élève progressivement le RSB comme pour une résonance stochastique conventionnelle.

Pour  $g(u)$  plus lisse avec une plus grande valeur de  $\lambda$ , la résonance disparaît et on observe, comme sur la courbe (d) de la Fig. 4.10, une diminution monotone du RSB quand le niveau de bruit est augmenté à partir de zéro.

Les résultats présentés sur la Fig. 4.10 démontrent qu'une non-linéarité lisse peut résonner stochastiquement, à condition qu'elle contienne des parties suffisamment abruptes. La présence d'un seuil en dessous duquel la sortie est strictement insensible à l'entrée cohérente n'est donc pas indispensable pour obtenir de la résonance stochastique. La Fig. 4.10 montre un exemple où un signal non infraliminaire cohérent  $s(t)$  corrompu par un bruit d'amplitude assez faible peut bénéficier d'un apport supplémentaire de bruit pour améliorer sa transmission.

On peut également obtenir de la résonance stochastique avec des non-linéarités lisses non monotones, par exemple avec une gaussienne définie comme

$$g(u) = \exp \left[ - \left( \frac{u - \theta}{\lambda} \right)^2 \right]. \quad (4.42)$$

Pour la non-linéarité de l'Éq. (4.42), avec un bruit gaussien  $\eta(t)$  de moyenne nulle en entrée et de variance  $\sigma_\eta^2$ , une expression explicite de l'espérance non stationnaire de sortie peut être écrite au moyen de l'Éq. (4.6) du modèle général sous la forme

$$\mathbb{E}[y(t)] = \left[ \left( \frac{\sigma_\eta \sqrt{2}}{\lambda} \right)^2 + 1 \right]^{-1/2} \exp[-z_2(t)], \quad (4.43)$$

avec

$$z_2(t) = \left[ \frac{s(t)}{\sigma_\eta \sqrt{2}} \right]^2 + \left( \frac{\theta}{\lambda} \right)^2 - \left[ \left( \frac{\sigma_\eta \sqrt{2}}{\lambda} \right)^2 + 1 \right]^{-1} \left[ \frac{s(t)}{\sigma_\eta \sqrt{2}} + \frac{\sigma_\eta \sqrt{2} \theta}{\lambda} \right]^2. \quad (4.44)$$

Puis, la substitution de  $\lambda$  par  $\lambda/\sqrt{2}$  dans les Éqs. (4.43) et (4.44) donne directement l'expression explicite pour  $\mathbb{E}[y^2(t)]$  de l'Éq. (4.7), conduisant au RSB de l'Éq. (4.16) dont l'évolution est montrée sur la Fig. 4.11.

Les résultats présentés sur la Fig. 4.11 démontrent qu'une non-linéarité lisse non monotone, avec des parties suffisamment abruptes, peut aussi résonner stochastiquement.



## 4.8 Influence de la distribution du bruit

Dans les études antérieures, la résonance stochastique est la plupart du temps considérée avec un bruit blanc de distribution statistique gaussienne. Très souvent, comme nous l'avons mentionné dans la section 2.3, l'hypothèse d'un bruit gaussien a été même une condition cruciale pour permettre le développement d'approches théoriques de la résonance stochastique. Le traitement général de la section 4.2 s'applique à une distribution statistique arbitraire du bruit en entrée  $\eta(t)$ . Il permet ainsi de nous affranchir de l'hypothèse gaussienne, et rend possible un examen direct de l'influence de la distribution statistique du bruit sur la résonance stochastique dans des non-linéarités statiques.

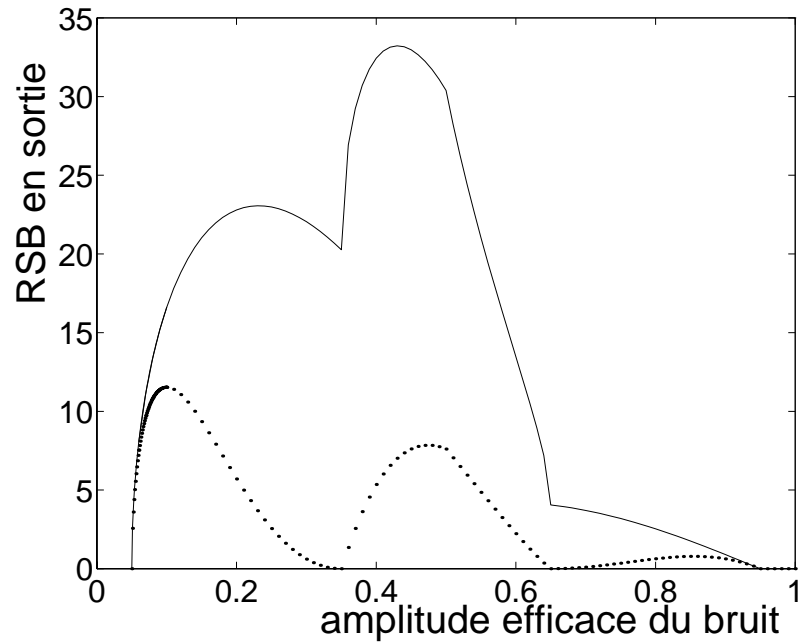
Nous proposons ici une illustration de l'influence de la distribution du bruit qui complète les résultats présentés dans la Fig. 4.5. Pour cela, nous revenons à la non-linéarité à deux seuils de l'Éq. (4.33). Avec l'entrée périodique sinusoïdale  $s(t) = A \sin(2\pi t/T_s)$ , les résultats de la Fig. 4.5 montrent que le bruit uniforme conduit à un RSB maximum plus élevé en sortie comparé au RSB maximum obtenu avec un bruit gaussien de même amplitude efficace. Sans trouver la distribution optimale du bruit qui donne le RSB le plus fort au maximum de la résonance, nous pouvons montrer qu'il est possible de faire mieux qu'avec le bruit uniforme.

Considérons la famille de distributions de bruit pour  $\eta(t)$  obtenue en passant un bruit gaussien  $\xi(t)$  de moyenne nulle et de variance unité, par la transformation  $\eta = A_\eta \tanh(\beta\xi)$  paramétrée par  $A_\eta$  et  $\beta$ .

Pour de petits  $\beta$ , la densité de  $\eta$  tend à se concentrer autour de zéro, qualitativement comme une densité gaussienne, et avec une telle forme, le bruit  $\eta(t)$  se comporte qualitativement comme le bruit gaussien pour le RSB dans la résonance stochastique. Pour des valeurs intermédiaires de  $\beta$ , la densité de  $\eta$  tend à devenir uniforme dans  $[-A_\eta, A_\eta]$ , et avec une telle forme, le bruit  $\eta(t)$  se comporte qualitativement comme le bruit uniforme pour le RSB dans la résonance stochastique. Pour de grandes valeurs de  $\beta$ , la densité de  $\eta$  tend à se concentrer près des deux modes  $-A_\eta$  et  $A_\eta$ , et avec une telle forme, le bruit  $\eta(t)$  se comporte généralement mieux que le bruit uniforme pour le RSB dans la résonance stochastique.

Une illustration simple peut être obtenue pour le cas limite  $\beta \rightarrow +\infty$  où le bruit  $\eta(t)$  dégénère en un bruit à deux niveaux discrets symétriques avec la densité  $f_\eta(u) = 0.5[\delta(u + A_\eta) + \delta(u - A_\eta)]$  et l'amplitude efficace  $A_\eta$ . La fonction de distribution correspondante  $F_\eta(u)$  est facilement écrite et remplacée dans les Éqs. (4.34) et (4.35) pour donner le RSB de l'Éq. (4.16). Ce RSB est représenté sur la Fig. 4.12 en comparaison avec les RSB de la Fig. 4.5. Les résultats de la Fig. 4.12 montrent que, en général, ni le bruit uniforme ni le bruit gaussien ne permettent de maximiser le RSB dans la résonance stochastique avec des non-linéarités statiques.

En continuant avec le bruit à deux niveaux discrets sur la non-linéarité à deux seuils de l'Éq. (4.33), et avec un léger changement pour l'entrée périodique  $s(t)$ , des pics multiples de résonance peuvent être obtenus pour le RSB dans la résonance stochastique avec des non-linéarités statiques, comme l'illustre la Fig. 4.13.



**Fig. 4.13 :** Pics multiples de résonance. Rapport signal sur bruit de sortie  $\mathcal{R}$  calculé au moyen des Éqs. (4.16), (4.34), et (4.35), pour la non-linéarité à deux seuils de l'Éq. (4.33), en fonction de l'amplitude efficace du bruit blanc de moyenne nulle et à deux niveaux discrets symétriques  $\eta(t)$ , avec l'entrée périodique  $s(t) = A \sin(2\pi t/T_s) + 0.15$  et  $A = 0.3$ . La ligne continue est  $\mathcal{R}$  à la fréquence  $1/T_s$  et la ligne en pointillés  $\mathcal{R}$  à la fréquence  $2/T_s$ .

symétriques  $\eta(t)$  de densité  $f_\eta(u) = 0.5[\delta(u + A_\eta) + \delta(u - A_\eta)]$ . Comme dans la section 4.8, nous choisissons aussi la non-linéarité à deux seuils de l'Éq. (4.33).

Avec les Éqs. (4.34) et (4.35), nous calculons le rapport  $\mathcal{R}_{\text{out}}/\mathcal{R}_{\text{in}}$  de l'Éq. (4.48) qui est représenté dans la Fig. 4.14, pour différentes valeurs de l'amplitude  $A$  de l'entrée périodique. Une comparaison est aussi donnée sur la Fig. 4.14 avec une simulation numérique du système, qui montre, comme dans la section 4.4, un accord parfait avec la théorie. Les résultats de la Fig. 4.14 révèlent que le rapport  $\mathcal{R}_{\text{out}}/\mathcal{R}_{\text{in}}$  résonne avec l'amplitude efficace du bruit en entrée, bien que culminant pour un niveau de bruit légèrement plus haut que le RSB de sortie montré sur la Fig. 4.12(c) pour  $A = 0.45$ . Les courbes de la Fig. 4.14 démontrent clairement aussi la possibilité d'un RSB en sortie plus grand que le RSB d'entrée. Pour de très petits  $A$  il est même possible d'obtenir  $\mathcal{R}_{\text{out}} \gg \mathcal{R}_{\text{in}}$ .

Pour le cas d'un bruit à deux niveaux discrets  $\eta(t) \in \{-A_\eta, A_\eta\}$ , comme indiqué dans [19], il existe une méthode permettant l'extraction parfaite de  $s(t)$  du mélange  $s(t) + \eta(t)$ , pourvu que l'amplitude  $A$  de  $s(t)$  vérifie  $A < A_\eta$ . Simplement, si la mesure est  $z = s + \eta > 0$  alors  $s$  est récupéré comme  $s = z - A_\eta$ , et si  $z = s + \eta < 0$  alors  $s$  est récupéré comme  $s = z + A_\eta$ . Cela représente une autre méthode de récupération (non linéaire) qui réalise un gain entrée-sortie infini pour le RSB, mais ne remet pas en question le fait que le résonateur stochastique est capable de réaliser un gain plus grand que l'unité. Cette méthode simple est cependant limitée par la condition  $A < A_\eta$ , tandis que le résonateur stochastique n'est pas limité par cette condition et est capable de réaliser  $\mathcal{R}_{\text{out}}/\mathcal{R}_{\text{in}} > 1$  également quand  $A > A_\eta$ , ce qui apparaît sur la Fig. 4.14. De plus, le résonateur stochastique est aussi capable de réaliser  $\mathcal{R}_{\text{out}}/\mathcal{R}_{\text{in}} > 1$  quand le bruit  $\eta(t)$  cesse d'être un bruit à deux niveaux discrets, comme cela est illustré sur la Fig. 4.14 pour  $\eta = A_\eta \tanh(2\xi)$  qui approche un bruit uniforme. La théorie présentée permet donc de montrer qu'un gain pour le RSB plus grand que l'unité est possible avec la résonance stochastique pour des non-linéarités statiques [14, 10].

## 4.10 Résonance stochastique à fréquence zéro

L'expression du RSB dans l'Éq. (4.16) du modèle général est en principe valable pour tout harmonique  $n/T_s$  de l'entrée cohérente périodique, en particulier pour  $n = 0$ . Cela nous permet d'étudier la possibilité de la résonance stochastique à fréquence zéro. Nous allons considérer une situation où l'on peut à la fois observer et interpréter cette extension de la résonance stochastique, à fréquence zéro.

Considérons l'entrée périodique  $s(t) = A \sin(2\pi t/T_s)$  dont la forme est symétrique relativement à l'axe de temps, superposée à un bruit en entrée  $\eta(t)$  de densité  $f_\eta(u)$  paire. Ces deux entrées additionnées sont transmises par la non-linéarité à deux seuils de l'Éq. (4.33) qui est une fonction impaire  $g(u)$ . Dans cette situation, par suite des symétries dans les deux entrées  $s(t)$  et  $\eta(t)$  et dans le système  $g(u)$ , l'espérance de sortie  $E[y(t)]$  moyennée sur une période  $T_s$ , c'est à dire, la quantité  $\bar{Y}_0$  de l'Éq. (3.2), sera nulle. En effet, par suite de la symétrie de  $s(t)$ , pour tout instant  $t_1$  dans  $[0, T_s[$ , il existe toujours un instant  $t_2$  dans  $[0, T_s[$  tel que  $s(t_2) = -s(t_1)$ ; à cause des symétries de  $f_\eta(u)$  et de  $g(u)$ ,

les espérances de l'Éq. (4.6) vérifient  $E[y(t_2)] = -E[y(t_1)]$ , et s'annulent ainsi par paires sur une période pour donner une espérance moyennée nulle  $\bar{Y}_0$ . Dans un tel cas, le RSB à fréquence zéro,  $\mathcal{R}(0)$  de l'Éq. (4.16), est aussi identiquement nul, pour toute valeur de l'amplitude efficace du bruit en entrée.

Nous considérons maintenant l'ajout d'une composante constante  $s_0$  à l'entrée périodique qui devient  $s(t) = s_0 + A \sin(2\pi t/T_s)$ . La composante  $s_0$  brise la symétrie de l'entrée périodique, ce qui suffit pour faire différer  $\bar{Y}_0$  de zéro, avec l'assurance que tout écart de  $\bar{Y}_0$  de zéro trouve son origine dans la présence en entrée de la composante  $s_0$ . On peut s'intéresser à une estimation de  $\bar{Y}_0$  en sortie, afin d'extraire des informations sur la présence de  $s_0$  en entrée. Cette estimation peut être assistée par un effet de résonance stochastique, dans lequel un niveau optimum du bruit en entrée  $\eta(t)$  maximise l'espérance de sortie moyennée temporellement  $\bar{Y}_0$ , relativement aux fluctuations de sortie mesurées par la variance moyennée temporellement  $\overline{\text{var}(y)}$ . Cela est attesté par le RSB de sortie à fréquence zéro,  $\mathcal{R}(0)$ , calculé au moyen des Éqs. (4.16), (4.34), et (4.35), et représenté sur la Fig. 4.15. Aussi, l'espérance moyenne en sortie  $\bar{Y}_0$  par elle-même, suit, comme le RSB  $\mathcal{R}(0)$ , une variation non monotone avec l'amplitude efficace du bruit en entrée, comme on peut le voir sur la Fig. 4.16.

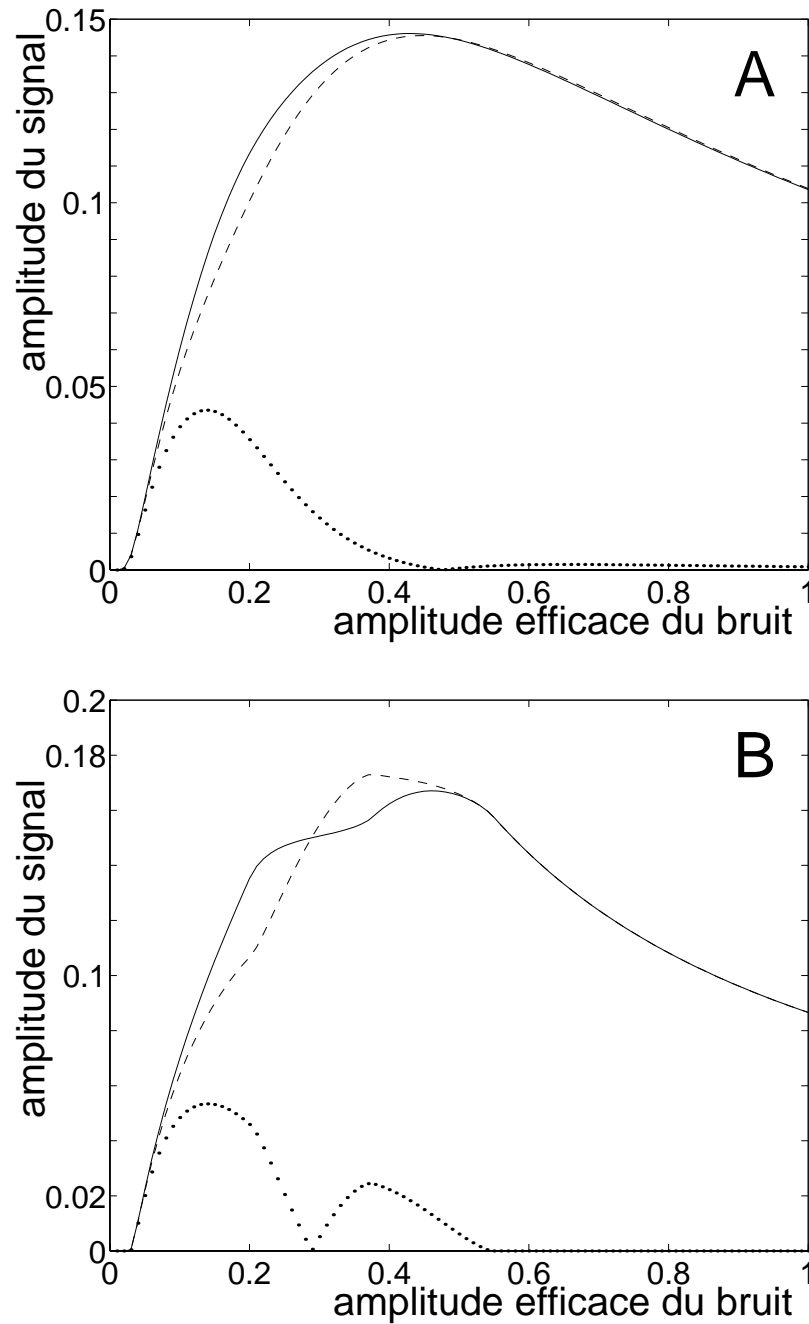
Il est aussi possible d'obtenir la résonance stochastique à fréquence zéro quand l'entrée périodique dégénère en une simple constante  $s(t) = s_0, \forall t$ . Le problème de la résonance stochastique avec une entrée cohérente constante a été traité dans [34, 8] pour des systèmes dynamiques non linéaires multistables comme nous l'évoquions dans le chapitre 1. Ici, pour des systèmes non linéaires statiques, nous démontrons qu'une forme de résonance stochastique peut être observée, avec une entrée cohérente constante. Une entrée constante est un cas particulier d'une entrée périodique, et le mode de calcul qui a été employé à travers la présente étude peut être gardé dans ce cas, avec n'importe quelle valeur finie pour la période  $T_s$  de la constante  $s(t)$ , de façon à réaliser les moyennes temporelles comme dans les Éqs. (3.2), (3.7) ou les Éqs. (4.13), (4.11). Mais bien sûr, avec une constante  $s(t)$ , les résultats ne sont pas différents si les moyennes temporelles ne sont simplement pas réalisées. Dans ce cas, le RSB de l'Éq. (4.16) à fréquence zéro, peut être calculé comme

$$\mathcal{R}(0) = \frac{E^2(y)}{\overline{\text{var}(y)} \Delta t \Delta B}, \quad (4.49)$$

et il est représenté sur la Fig. 4.17 en même temps que l'espérance de sortie  $E(y)$  de l'Éq. (4.34), pour la non-linéarité à deux seuils de l'Éq. (4.33).

L'équation (4.49) montre que  $\sqrt{\mathcal{R}(0)}$  est simplement proportionnel à  $E(y)/\sqrt{\overline{\text{var}(y)}}$ , que l'on peut interpréter comme la précision relative de l'estimation de la constante  $E(y)$  noyée dans des fluctuations d'amplitude efficace  $\sqrt{\overline{\text{var}(y)}}$ . La variation non monotone de  $\sqrt{\mathcal{R}(0)}$  avec le niveau de bruit en entrée, comme on l'observe sur la Fig. 4.17(B), indique qu'il y a un niveau optimal où l'estimation de la constante  $E(y)$  peut être réalisée avec la meilleure précision. Autrement dit, il y a un niveau optimal de bruit en entrée où la valeur de l'espérance de sortie  $E(y)$  est maximisée relativement aux fluctuations d'amplitude efficace en sortie  $\sqrt{\overline{\text{var}(y)}}$ .

Si nous revenons à l'entrée strictement périodique, non constante,  $s(t) = s_0 + A$



**Fig. 4.16 :** Amplitude cohérente du signal de sortie  $|\bar{Y}_n|$  à la fréquence  $n/T_s$  calculée d'après les Éqs. (4.13) et (4.34) pour la non-linéarité à deux seuils de l'Éq. (4.33), en fonction de l'amplitude efficace du bruit blanc  $\eta(t)$  en entrée. L'entrée périodique est  $s(t) = s_0 + A \sin(2\pi t/T_s)$  avec  $A = 0.3$  et  $s_0 = 0.15$ . (A) avec  $\eta(t)$  un bruit gaussien de moyenne nulle, (B) avec  $\eta(t)$  un bruit uniforme de moyenne nulle. Dans chaque cas, la ligne continue est  $\bar{Y}_0$  à fréquence zéro, la ligne en tirets est  $\bar{Y}_1$  à  $1/T_s$ , la ligne en pointillés est  $\bar{Y}_2$  à  $2/T_s$ .

$\sin(2\pi t/T_s)$  par exemple, une interprétation similaire est valable pour le terme résonnant  $\sqrt{\mathcal{R}(0)}$  de la Fig. 4.15. Celui-ci apparaît proportionnel à la précision relative de l'estimation de l'espérance moyenne de sortie  $\overline{\mathbb{E}(y)} = \overline{Y}_0$ , mélangée à des fluctuations en sortie d'amplitude efficace mesurée par la moyenne temporelle  $\sqrt{\text{var}(y)}$ .

Si le modèle du processus est connu, en particulier, si on connaît  $f_\eta(u)$  et  $g(u)$ , la connaissance de l'espérance moyenne de sortie  $\overline{\mathbb{E}(y)}$  permettra habituellement, par l'emploi d'une courbe de calibration calculable, de récupérer l'entrée moyenne  $s_0$ . Une estimation précise de  $\overline{\mathbb{E}(y)}$  obtenue au maximum du RSB de sortie  $\mathcal{R}(0)$ , est ainsi souhaitable pour une estimation précise de  $s_0$ .

La résonance stochastique à fréquence zéro donne ainsi la possibilité de maximiser, avec un niveau optimal de bruit en entrée, le rapport de l'espérance moyenne de sortie  $\overline{\mathbb{E}(y)} = \overline{Y}_0$  sur la moyenne temporelle des fluctuations en sortie  $\sqrt{\text{var}(y)}$ . Cette propriété de résonance stochastique à fréquence zéro peut être mise en rapport avec l'effet de “*dithering*” [28]. Le *dithering* a lieu avec des non-linéarités statiques à seuil intervenant dans la conversion analogique–numérique d'un signal cohérent  $s(t)$  ajouté à un bruit  $\eta(t)$ . Pour la non-linéarité à deux seuils  $g(u)$  de l'Éq. (4.33), le *dithering* optimal est réalisé par un bruit en entrée  $\eta(t)$  uniforme sur  $[-0.5, 0.5]$ . Comme il peut être vérifié par l'Éq. (4.34), le *dithering* optimal conduit à  $\overline{\mathbb{E}[y(t)]} = \overline{s(t)}$ , quand  $-0.5 \leq s(t) \leq 0.5$ . Autrement dit, le *dithering* optimal permet à la moyenne temporelle en sortie  $\overline{\mathbb{E}[y(t)]}$  de reproduire la valeur moyenne  $\overline{s(t)}$  de l'entrée périodique. C'est cette propriété même qui est cherchée avec le *dithering*. Le *dithering* peut maintenant être différencié de la résonance stochastique à fréquence zéro. En peu de mots, le *dithering* est une moyenne en sortie qui reproduit la moyenne de l'entrée, tandis que la résonance stochastique est une moyenne en sortie qui ressort de façon maximale des fluctuations de sortie. Comme on l'observe sur la Fig. 4.17, le niveau de bruit en entrée qui optimise le *dithering*, c'est à dire qui réalise  $\overline{\mathbb{E}[y(t)]} = \overline{s(t)}$ , n'est pas habituellement le même que le niveau de bruit qui maximise  $\overline{\mathbb{E}[y(t)]}/\sqrt{\text{var}[y(t)]}$ , c'est à dire qui maximise le RSB  $\mathcal{R}(0)$ . La précision d'une estimation statistique de  $\overline{\mathbb{E}[y(t)]}$  sera généralement meilleure au maximum de la résonance stochastique que pour le *dithering* optimal.

## 4.11 Discussion sur les non-linéarités statiques avec bruit blanc

Le traitement à temps discret de la section 4.2 avec un pas d'échantillonnage temporel  $\Delta t$  est exact pour tout bruit blanc  $\eta(t)$  physiquement réalisable, doté d'un temps de corrélation  $\tau_c$  plus petit que la résolution de temps  $\Delta t$ . Si la corrélation du bruit  $\eta(t)$  disparaît strictement au-delà de  $\Delta t$ , alors toutes les quantités numériques définies théoriquement dans la section 4.2 correspondent exactement, en principe, aux quantités expérimentalement mesurables dans toute mise en œuvre physique du procédé. Cela est vérifié dans l'expérience rapportée dans la section 4.4, du moins dans la limite de précision

sans difficulté supplémentaire, avec les Éqs. (4.6) et (3.2). Cela nécessite en effet seulement la connaissance de la densité de probabilité du premier ordre  $f_\eta(u)$  du bruit coloré en entrée  $\eta(t)$ .

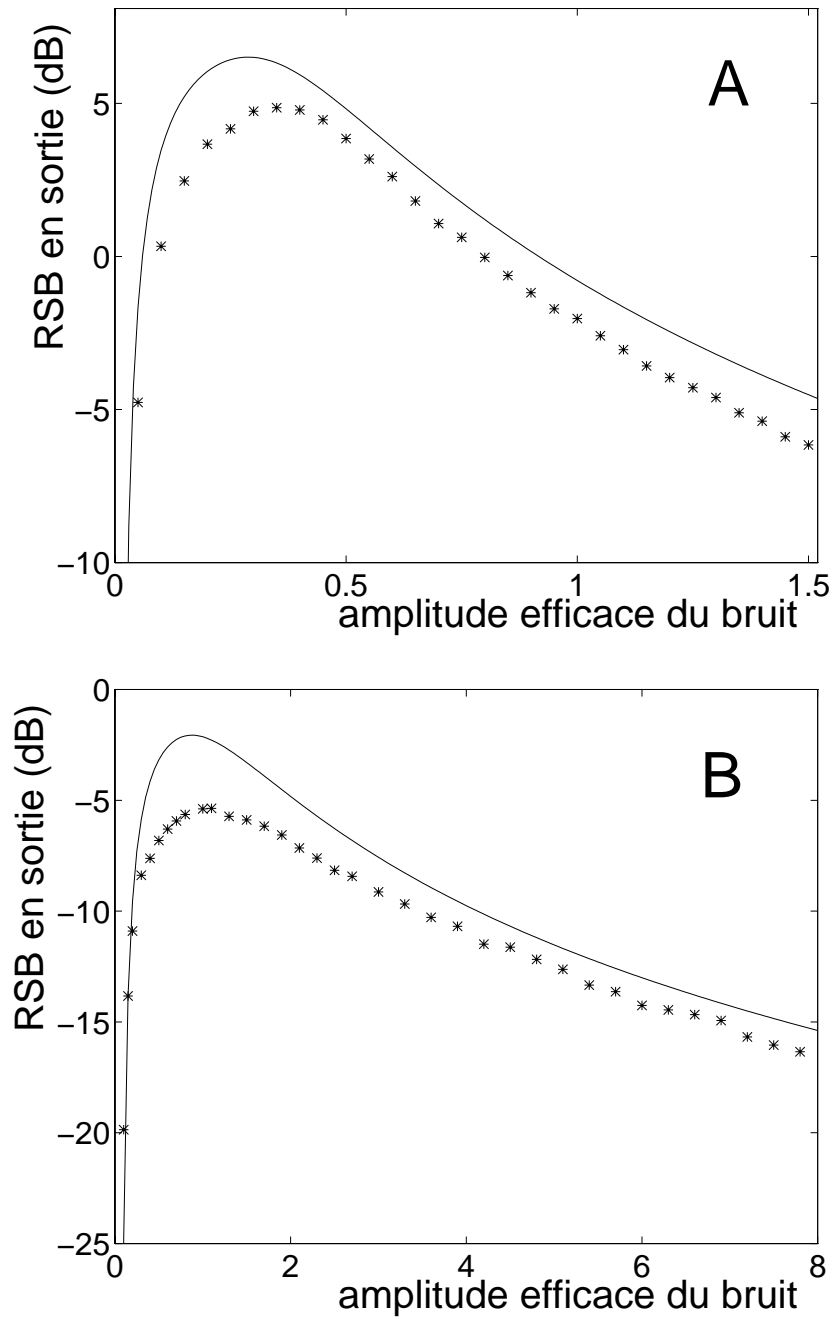
Le calcul exact du RSB de sortie avec une non-linéarité statique et un bruit coloré nécessite aussi, en général, la connaissance de la densité de probabilité de second ordre  $f_{\eta\eta}(u_1, u_2; \tau)$  du bruit en entrée. Il est rare qu'une telle fonction à variables multiples soit connue pour un bruit aléatoire  $\eta(t)$ . Ce qui est beaucoup plus commun dans la pratique est la seule connaissance de la fonction d'autocorrélation à variable unique  $R_{\eta\eta}(\tau) = \mathbb{E}[\eta(t)\eta(t + \tau)]$ , du bruit stationnaire  $\eta(t)$ . En général, avec une non-linéarité arbitraire  $g(u)$ , la connaissance de  $R_{\eta\eta}(\tau)$  ne suffit pas pour l'évaluation exacte de l'espérance de sortie de l'Éq. (4.50) qui permet la caractérisation complète du RSB dans la résonance stochastique. Cependant, la connaissance de  $R_{\eta\eta}(\tau)$  suffit dans un cas particulier qui est souvent rencontré dans la pratique, quand  $\eta(t)$  est un bruit gaussien. En effet, dans ce cas  $f_{\eta\eta}(u_1, u_2; \tau)$  est complètement définie une fois que  $R_{\eta\eta}(\tau)$  est donnée [72].

Pour remédier à la difficulté provenant de la connaissance habituellement limitée des statistiques du second ordre du bruit coloré en entrée, nous proposons une approximation qui rend possible une évaluation du RSB de sortie basée seulement sur la connaissance de la fonction d'autocorrélation en entrée  $R_{\eta\eta}(\tau)$ . Nous introduisons pour cela la fonction d'autocovariance du bruit en entrée  $\eta(t)$  comme  $C_{\eta\eta}(\tau) = R_{\eta\eta}(\tau) - R_{\eta\eta}(+\infty) = R_{\eta\eta}(\tau) - E^2(\eta)$ . Pour un bruit coloré  $\eta(t)$ , l'autocovariance  $C_{\eta\eta}(\tau)$  est formée d'une impulsion symétrique centrée autour de l'origine, qui tend vers zéro quand  $|\tau| \rightarrow +\infty$ . La largeur de cette impulsion autour de  $\tau = 0$  peut être mesurée par un temps de corrélation  $\tau_c$ , qui caractérise la durée sur laquelle  $\eta(t)$  garde une corrélation significative.

Un point important alors est que nous sommes en présence d'une non-linéarité statique  $g(u)$ , dont la sortie  $y(t)$  est seulement influencée par la valeur instantanée de  $s(t) + \eta(t)$ . Il est alors naturel d'admettre que la fonction d'autocovariance  $C_{yy}(\tau)$  du signal de sortie  $y(t)$  définie par l'Éq. (3.7), est alors une impulsion s'étendant autour de l'origine sur une durée d'ordre  $\tau_c$ . L'équation (3.12) montre qu'à la fois, l'amplitude de l'autocovariance  $C_{yy}(0) = \overline{\text{var}[y(t)]}$ , et sa forme normalisée  $h(\tau) = C_{yy}(\tau)/C_{yy}(0)$  via  $H(\nu)$ , influencent le RSB de sortie. L'amplitude  $C_{yy}(0) = \overline{\text{var}[y(t)]}$  est une quantité statistique du premier ordre qui peut être calculée, avec un système statique  $g(u)$ , avec la seule connaissance des statistiques du premier ordre du bruit en entrée  $\eta(t)$ , au moyen de l'Éq. (4.8).

Après normalisation par le facteur  $C_{yy}(0)$  qui est exactement calculable avec les statistiques du premier ordre, l'autocovariance normalisée de sortie  $h(\tau) = C_{yy}(\tau)/C_{yy}(0)$  présente une forme d'impulsion de durée  $\sim \tau_c$  comme l'autocovariance normalisée en entrée  $C_{\eta\eta}(\tau)/C_{\eta\eta}(0)$ . La forme de  $h(\tau)$  peut être vue comme une version déformée de  $C_{\eta\eta}(\tau)/C_{\eta\eta}(0)$ .

Dans quelques situations simples seulement, en absence de modulation périodique  $s(t)$ ,  $h(\tau)$  peut être déduit explicitement de  $C_{\eta\eta}(\tau)/C_{\eta\eta}(0)$  [72]. Une expression explicite pour  $h(\tau)$  est beaucoup plus difficile à obtenir en présence de la modulation périodique  $s(t)$ ; et sans l'hypothèse d'un bruit gaussien, comme mentionnée,  $C_{\eta\eta}(\tau)/C_{\eta\eta}(0)$  ou  $R_{\eta\eta}(\tau)$  ne suffit pas pour une expression exacte de  $h(\tau)$ . À partir des propriétés que nous avons expliquées, pour  $h(\tau)$  en présence d'une non-linéarité statique, nous proposons d'employer



**Fig. 4.18 :** Rapport signal sur bruit de sortie  $\mathcal{R}(1/T_s)$  en dB, en fonction de l'amplitude efficace du bruit gaussien coloré  $\eta(t)$  avec la corrélation exponentielle de l'Éq. (4.53), et l'entrée périodique cohérente  $s(t) = A \sin(2\pi t/T_s)$ . La ligne continue est l'approximation théorique du RSB des Éqs. (4.52) et (4.51), et les points discrets représentent le RSB expérimental obtenu par simulation numérique du système non linéaire.

(A) Avec le système non linéaire à deux seuils de l'Éq. (4.33), une amplitude cohérente  $A = 0.45$  et un temps de corrélation du bruit  $\tau_c = T_s$ .

(B) Avec la non-linéarité de type diode de l'Éq. (4.38) avec  $\theta = 1.2$  et  $\lambda = 1$ , une amplitude cohérente  $A = 1$ , et un temps de corrélation du bruit  $\tau_c = T_s/2$ .



un cadre à temps discret directement confrontable aux expériences ou simulations. Les simulations et expériences rapportées appuient parfaitement la théorie.

La théorie a été employée pour mettre en évidence une large gamme d'effets intéressants dans des non-linéarités statiques, tels que : la résonance stochastique avec des entrées périodiques non sinusoïdales et des bruits non gaussiens, la résonance stochastique avec des entrées périodiques non infraliminaires, et des non-linéarités lisses monotones ou non monotones, des pics de résonance multiples pour le RSB et des déphasages entrée-sortie non nuls, des RSB plus grands en sortie qu'en entrée. La théorie a mis en évidence la résonance stochastique dans une simple non-linéarité de type diode, ce qui offre la possibilité d'une mise en œuvre physique (électronique) d'un des plus simple résonateurs stochastiques concevables. La théorie a montré la possibilité de résonance stochastique à fréquence zéro, avec une entrée périodique, ou avec une entrée constante, et suggéré de relier le phénomène connu du *dithering* à la résonance stochastique à fréquence zéro.

La théorie présentée, offrant une description générale pour une classe large de systèmes dynamiques non linéaires, dont certains étant très aisément expérimentalement réalisables, constitue un cadre unique pour des recherches ultérieures sur la résonance stochastique périodique et ses applications.

Nous allons explorer dans les chapitres suivants l'applicabilité de la résonance stochastique dans la transmission de l'information par des systèmes non linéaires. Un signal périodique peut servir de support de l'information, par exemple pour coder, par une fréquence de décharge en régime stationnaire, l'amplitude d'un stimulus stationnaire en entrée d'un système. C'est en particulier le cas dans les systèmes neuronaux dont on peut envisager qu'ils puissent bénéficier de la résonance stochastique périodique, ce que nous montrerons plus loin dans ce rapport.

On peut considérer aussi un signal périodique haute fréquence modulé lentement par un signal basse fréquence. Si le signal basse fréquence ne perturbe que faiblement le signal d'entrée, celui-ci reste confiné dans une petite bande de fréquence autour de la fréquence porteuse HF. Dans cette situation si la porteuse HF bénéficie d'un effet de résonance stochastique, le signal basse fréquence peut bénéficier en même temps que la porteuse HF d'une amélioration de sa transmission au moyen de la résonance stochastique. Ces deux exemples montrent que la résonance stochastique périodique peut intervenir dans la transmission de signaux informatifs.

Nous allons voir dans le chapitre qui suit, que la résonance stochastique peut aussi intervenir dans la transmission d'un signal apériodique large-bande pouvant servir de support de l'information.

# Chapitre V

## Résonance stochastique aperiodique

### 5.1 Introduction

Nous avons présenté dans les sections précédentes la résonance stochastique périodique comme un effet consistant à favoriser la transmission d'un signal périodique grâce à l'ajout de bruit dans certains systèmes non linéaires. C'est seulement récemment que des études se sont intéressées à la question de la résonance stochastique aperiodique [58, 16, 17]. Ces études ont montré qu'il était possible d'observer la résonance stochastique impliquant des signaux cohérents tels que des signaux aperiodiques large-bande.

Pour quantifier cet effet on ne peut plus comme dans la résonance stochastique périodique utiliser un rapport signal sur bruit dans le domaine fréquentiel. De nouvelles mesures ont été proposées pour caractériser la résonance stochastique aperiodique, certaines sont basées sur des mesures d'intercorrélation [16, 17, 48]. Avec un signal informatif large-bande, d'autres mesures de la résonance stochastique particulièrement appropriées sont fournies par la théorie statistique de l'information. Une information mutuelle entrée-sortie a été considérée dans différentes études. Levin *et al.* [62] définit et étudie une telle mesure pour une réalisation expérimentale de la résonance stochastique dans un neurone qui code une entrée analogique aperiodique en un train d'impulsions. Bulsara *et al.* [6] utilise une information mutuelle entrée-sortie, pour quantifier la résonance stochastique aperiodique dans une non-linéarité à simple seuil, et établit un lien avec le transcoding par un neurone d'une entrée analogique en un train d'impulsions en sortie. Pour une non-linéarité à seuil comparable, une autre étude [11] développe la caractérisation jusqu'à l'évaluation de la capacité informationnelle du système, définie comme le maximum possible pour l'information mutuelle entrée-sortie intervenant lorsque les statistiques du signal aperiodique en entrée sont adaptées avec celles du bruit.

Dans ce rapport nous présentons deux illustrations du phénomène de résonance stochastique aperiodique, que nous avons réalisées, avec un système statique et avec un système dynamique. Le premier système que nous considérerons correspond à une généralisation de la non-linéarité statique à deux seuils de l'Éq. (4.33). Cette non-linéarité se prête à une modélisation exacte allant jusqu'au calcul explicite de la capacité informationnelle du système dont l'évolution permet de caractériser la résonance stochastique aperiodique.

$$p_{-1,-1} = F(-\theta + 1), \quad (5.5)$$

$$p_{0,1} = [1 - F(-\theta - 1)]F(\theta - 1), \quad (5.6)$$

$$p_{0,-1} = [1 - F(-\theta + 1)]F(\theta + 1). \quad (5.7)$$

Une fois connues les probabilités de transfert, l'information transmise  $I(X;Y)$  par le canal peut s'évaluer à partir des entropies [18] comme :

$$I(X;Y) = H(Y) - H(Y|X). \quad (5.8)$$

Avec  $h(u) = -u \log_2(u)$ , l'entropie de sortie  $H(Y) = \sum_Y h(\Pr\{Y\})$  vaut ici

$$H(Y) = h[p_{1,1}p_1 + p_{1,-1}(1-p_1)] + h[p_{-1,1}p_1 + p_{-1,-1}(1-p_1)] + h[p_{0,1}p_1 + p_{0,-1}(1-p_1)], \quad (5.9)$$

et l'entropie conditionnelle entrée-sortie

$H(Y|X) = p_1 \sum_Y h(\Pr\{Y|X=1\}) + (1-p_1) \sum_Y h(\Pr\{Y|X=-1\})$  vaut

$$H(Y|X) = p_1[h(p_{1,1}) + h(p_{0,1}) + h(p_{-1,1})] + (1-p_1)[h(p_{1,-1}) + h(p_{0,-1}) + h(p_{-1,-1})]. \quad (5.10)$$

Les Éqs. (5.8)–(5.10) conduisent à une expression explicite de l'information transmise  $I(X;Y)$  en fonction des probabilités de transfert et de la probabilité d'entrée  $p_1$ . Dans le cas où le bruit  $N$  est symétrique centré, c'est-à-dire de densité de probabilité paire, le processus de transmission d'information est symétrique, et l'information transmise est invariante dans l'échange des valeurs de  $p_1$  et  $p_{-1} = 1-p_1$ . Comme l'information transmise par un canal discret sans mémoire est toujours une fonction convexe de la distribution de probabilité d'entrée [18], nous déduisons que pour  $N$  symétrique centré, le maximum de  $I(X;Y)$  qui définit la capacité informationnelle  $C$  du canal, est atteint pour  $p_1 = 0.5 = p_{-1}$ . Dans le cas d'un bruit symétrique centré, les Éqs. (5.8)–(5.10) avec  $p_1 = 0.5$ , permettent donc d'évaluer explicitement la capacité  $C$  du canal de transmission, et d'étudier son évolution en fonction des propriétés statistiques du bruit  $N$ .

### 5.2.2 Capacité informationnelle améliorée par le bruit

Nous considérons un bruit  $N$  gaussien centré et nous examinons la variation de la capacité informationnelle  $C$  en fonction de l'amplitude efficace  $\sigma = \sqrt{E(N^2)}$  du bruit. La Fig. 5.1 représente cette variation pour différentes valeurs du seuil  $\theta$ . Les courbes de la Fig. 5.1 montrent clairement l'existence de deux régimes de fonctionnement distincts pour le canal.

Quand  $\theta < 1$ , une entrée  $X = 1$  (respectivement  $X = -1$ ) est à elle seule suffisante pour déclencher une sortie  $Y = 1$  (respectivement  $Y = -1$ ). En l'absence du bruit, la capacité du canal est alors  $C = 1$  bit. L'ajout du bruit  $N$  sera ici seulement ressenti comme une dégradation de la transmission, et ainsi la capacité  $C$  décroît à partir de la valeur  $C = 1$  bit à mesure que l'amplitude efficace  $\sigma$  du bruit est augmentée à partir de zéro.

Par contre, quand  $\theta > 1$ , une entrée  $X = 1$  (respectivement  $X = -1$ ) est, à elle seule, incapable de déclencher une sortie  $Y = 1$  (respectivement  $Y = -1$ ). En l'absence du

dans la transmission d'un signal aperiodique porteur d'information, sur un modèle suffisamment simple pour être complètement calculable. Ce genre de modèle exactement calculable est rare dans le contexte non linéaire de la résonance stochastique.

Dans la suite, nous utilisons les concepts de théorie de l'information, employés dans cette étude d'un système non linéaire statique, pour explorer la possibilité de résonance stochastique avec un système non linéaire dynamique.

## 5.3 Système dynamique bistable à double puits

### 5.3.1 Introduction

Comme nous l'avons exposé dans la section 2, la dynamique à double puits basée sur l'Éq. (5.11) a été le premier type de système à révéler le phénomène de la résonance stochastique. Pour cette raison, ce système a fait l'objet de nombreuses études, dans lesquelles la résonance stochastique est observée et analysée principalement dans la transmission d'un signal cohérent périodique  $s(t)$ , généralement de forme sinusoïdale.

Nous avons montré [43] qu'un autre type de résonance stochastique peut être obtenue avec le système des Éqs. (5.11) et (5.12), dans la transmission d'un signal aperiodique large-bande  $s(t)$ . Pour caractériser cette nouvelle forme de résonance stochastique nous utilisons, comme dans l'étude précédente, pour mesurer le bénéfice apporté par le bruit, le maximum réalisable pour l'information mutuelle entrée-sortie, qui définit la capacité informationnelle du système.

### 5.3.2 Canal informationnel non linéaire

Considérons  $s(t)$  un signal cohérent portant de l'information, et  $\eta(t)$  un bruit aléatoire stationnaire. Ces deux signaux sont appliqués à un système dynamique non linéaire dont l'état interne évolue suivant :

$$\tau_a \dot{x}(t) = x(t) - \frac{x^3(t)}{X_b^2} + s(t) + \eta(t), \quad (5.11)$$

avec les paramètres  $\tau_a > 0$  et  $X_b > 0$ . Nous sommes en présence d'un système dynamique bistable forcé par  $s(t) + \eta(t)$  dont la relaxation libre est gouvernée par le potentiel quartique de l'Éq. (2.2) présenté dans la section 2. Ce système possède deux états stationnaires stables  $x = \pm X_b$  correspondant aux deux minima du potentiel  $U(x = \pm X_b) = -X_b^2/4$ . L'état interne  $x(t)$  détermine la sortie  $y(t)$  du système, via une quantification à deux états [68] exprimée par

$$y(t) = \text{sign}[x(t)]. \quad (5.12)$$

Le signal cohérent à temps continu  $s(t)$  consiste en un signal "télégraphique" aperiodique de la forme

$$s(t) = A \sum_{j=-\infty}^{+\infty} S_j \Gamma(t - jT), \quad (5.13)$$

pendant une durée  $T$  suffisamment plus grande que les temps de relaxation inter-puits et intra-puits de la dynamique de l'Éq. (5.11). Cette condition nous permet de considérer notre système comme un canal binaire symétrique sans mémoire. Nous montrerons plus tard que le caractère “sans mémoire” est bien vérifié pour ce canal binaire symétrique.

Pour des symboles d'entrée  $S_j$ , avec les probabilités de transmission entrée–sortie

$$\Pr\{Y_j = 1|S_j = 1\} = \Pr\{Y_j = -1|S_j = -1\} = p, \quad (5.14)$$

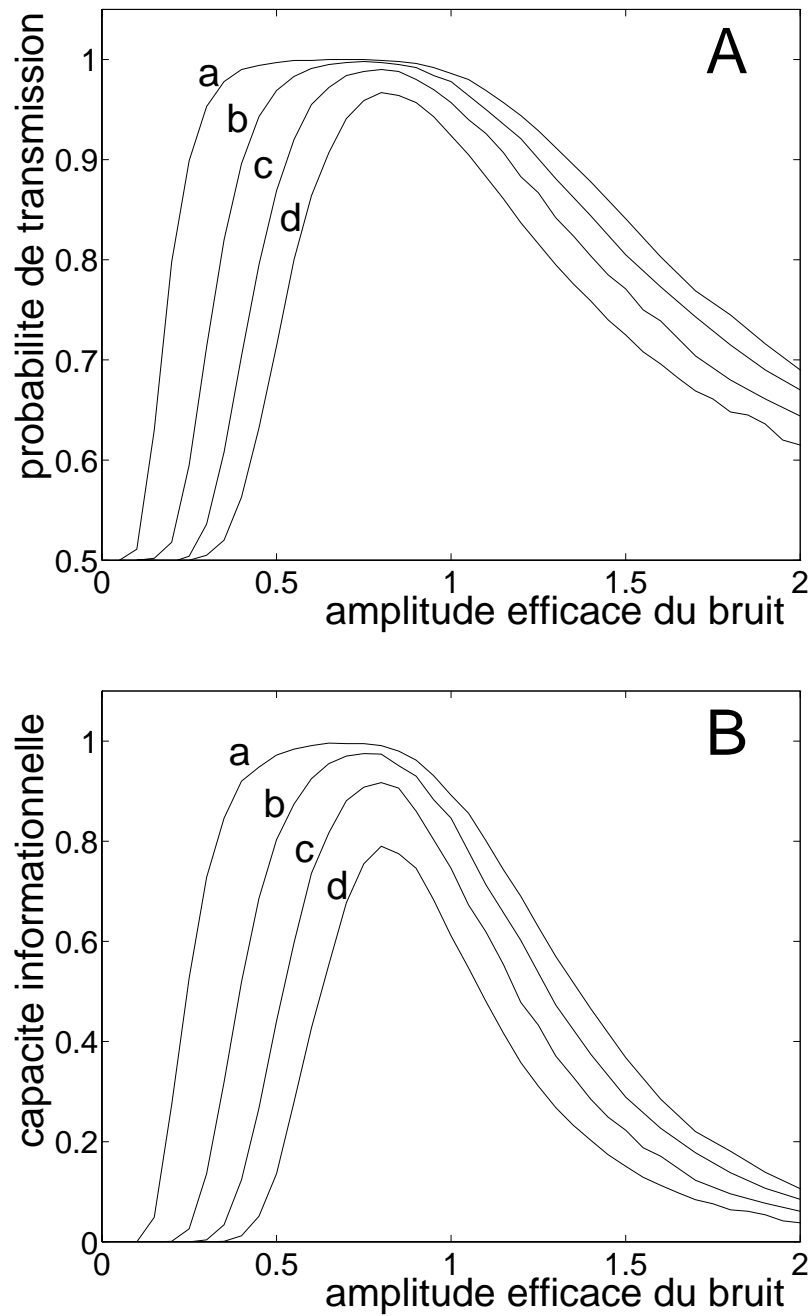
il est possible de calculer l'information mutuelle entrée–sortie [18]. Pour un canal binaire symétrique sans mémoire, cette information mutuelle est maximisée avec des valeurs  $\pm 1$  équiprobables pour les symboles d'entrée, ce qui donne la capacité informationnelle entrée–sortie  $C$  du système sous la forme :

$$C = 1 + p \log_2(p) + (1 - p) \log_2(1 - p). \quad (5.15)$$

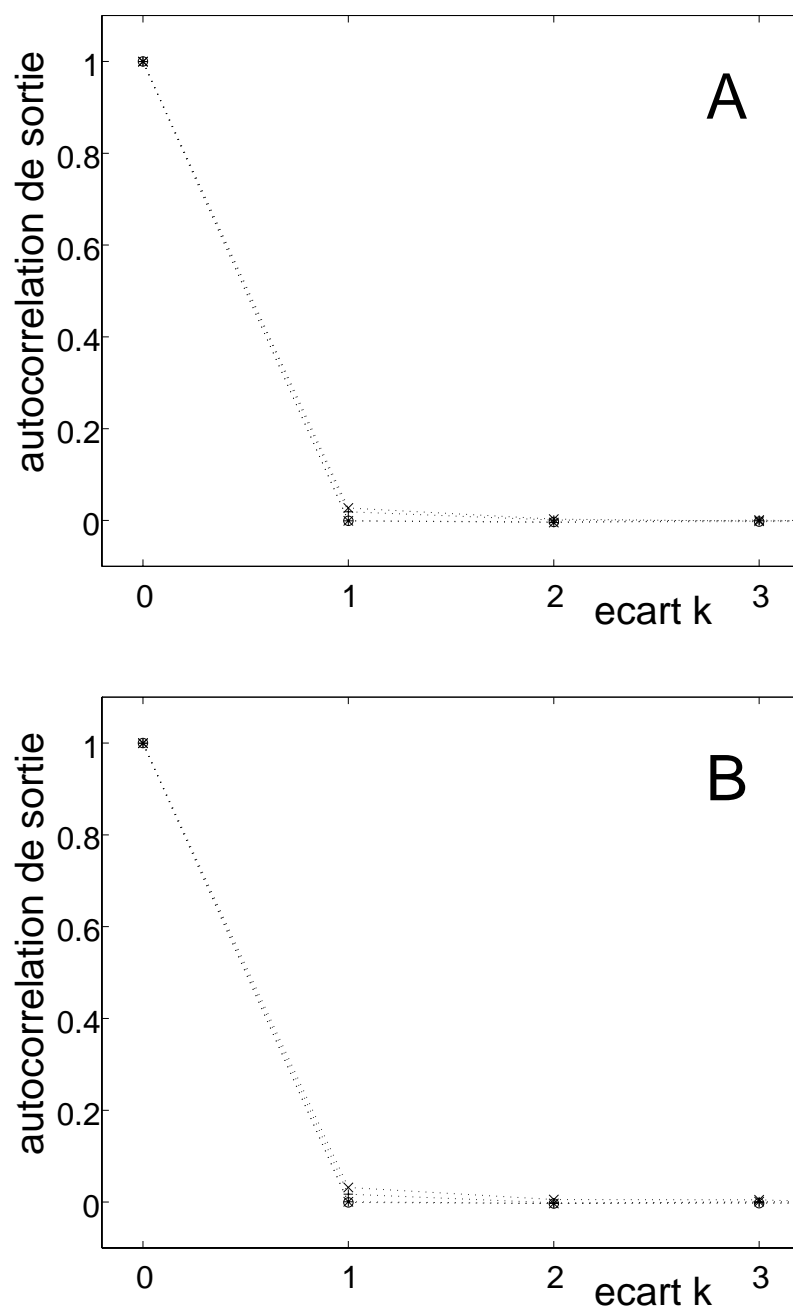
Nous avons réalisé une simulation du système présenté, avec une discrétisation d'Euler de l'Éq. (5.11) avec un pas de temps  $\Delta t = 0.01$ . L'intervalle d'émission était  $T = 5$ , et nous avons pris  $X_b = 1$  comme unité d'amplitude. Différentes valeurs ont été testées pour la constante de temps  $\tau_a (\gg \Delta t)$ , et pour l'amplitude  $A$  du signal. La Fig. 5.2 montre une évolution typique des différents signaux, quand  $\eta(t)$  est un bruit gaussien de moyenne nulle.

Nous avons réalisé une estimation de la probabilité  $p$  de l'Éq. (5.14) à partir d'un grand nombre d'émissions successives de symboles  $S_j = \pm 1$  en entrée survenant comme des variables aléatoires indépendantes et équiprobables. La capacité  $C$  du canal est alors déduite suivant l'Éq. (5.15). Les figures 5.3 et 5.4 représentent les variations de la probabilité de transmission  $p$  et de la capacité informationnelle  $C$ , en fonction de l'amplitude efficace  $\sigma_\eta$  du bruit en entrée, pour différentes valeurs de  $\tau_a$  et  $A$ . Nous observons sur les Figs. 5.3 et 5.4 des évolutions non monotones pour  $p$  et  $C$ , avec le niveau de bruit  $\sigma_\eta$ . Lorsque  $A$  est infraliminaire ( $A < 0.38$  quand  $X_b = 1$ ), le signal  $s(t)$  ne peut pas à lui seul induire de transition en sortie, et dans ce cas,  $p$  et  $C$  sont strictement nuls en l'absence du bruit. L'ajout du bruit permet alors une transmission de l'information par le système, avec une efficacité maximale pour un niveau de bruit suffisant. Nous interprétons cet effet comme une forme de résonance stochastique.

Pour un  $\tau_a$  fixé, l'efficacité de la transmission assistée par le bruit croît avec l'amplitude  $A$  du signal (qui reste infraliminaire), comme le montre la Fig. 5.3. Pour  $A$  fixé et infraliminaire, la Fig. 5.4 montre que l'efficacité de la transmission croît, lorsque la constante de temps  $\tau_a$  est réduite, rendant la réponse du système plus rapide. Comme on peut le voir sur les Figs. 5.3 et 5.4, il existe des valeurs pour les paramètres qui donnent, à la résonance, une transmission presque parfaite de l'information avec  $p$  et  $C$  tous deux très proches de 1. Cette situation est favorisée par de très petits  $\tau_a$ , associés à un potentiel  $U(x)$  de forme abrupte et  $x(t)$  pouvant prendre des valeurs très grandes, et à la limite non bornées quand  $\tau_a$  tend vers zéro. Une valeur finie non nulle doit être gardée pour  $\tau_a$  afin de garder  $x(t)$  borné. Cependant pour n'importe quelle valeur finie non nulle de  $\tau_a$ , la probabilité de transmission  $p$  ne peut pas être parfaitement 1, en principe, car de larges



**Fig. 5.3 :** Influence de l'amplitude  $A$  du signal : (A) probabilité de transmission correcte  $p$  de l'Éq. (5.14), et (B) capacité informationnelle  $C$  de l'Éq. (5.15), en fonction de l'amplitude efficace  $\sigma_\eta$  du bruit blanc en entrée, choisi de moyenne nulle et gaussien. La constante de temps est  $\tau_a = 0.1$  et l'amplitude du signal prend les valeurs : (a)  $A = 0.35$ , (b)  $A = 0.3$ , (c)  $A = 0.25$ , (d)  $A = 0.2$ .



**Fig. 5.5:** Fonction d'autocorrélation  $R_{YY}(k) = E[Y_j Y_{j+k}]$  de la suite de symboles  $Y_j$  de sortie, en fonction de l'écart  $k$ : (A) pour  $\tau_a = 0.1$  fixé avec (o)  $A = 0.35$ , (\*)  $A = 0.3$ , (+)  $A = 0.25$ , ( $\times$ )  $A = 0.2$ . (B) pour  $A = 0.35$  fixé avec (o)  $\tau_a = 0.1$ , (\*)  $\tau_a = 0.12$ , (+)  $\tau_a = 0.2$ , ( $\times$ )  $\tau_a = 0.3$ . Les valeurs sont prises dans tous les cas à la résonance.

sortie le temps  $T_{\text{trans}} = T - \Delta t$  approprié pour les lectures, comme on le voit sur la Fig. 5.6. Ainsi la détermination locale de la phase de lecture en sortie, consiste à estimer le taux de transition  $\lambda(t)$  sur une période  $T$ , soit pour  $t$  dans  $[0, T[$ . On identifie ensuite dans cette période l'instant  $t_0$  pour lequel  $\lambda(t)$  est minimum. Cela permet ensuite de réaliser les lectures en sortie aux instants  $t_0 + jT$ . L'estimation de  $\lambda(t)$  peut être effectuée sur une unique réalisation temporelle du signal de sortie  $y(t)$ , en moyennant, pour  $t$  fixé, sur  $N$  points de données  $y(t + nT)$  avec  $n$  entier prenant les valeurs de 1 à  $N$ .

### 5.3.4 Gain entrée–sortie pour la capacité informationnelle

Il est aussi possible d'envisager une détection des symboles d'entrée  $S_j$  directement à partir du mélange en entrée  $s(t) + \eta(t)$ . Dans ce cas, le signal de sortie  $y(t)$  auquel la procédure de décodage précédente s'appliquait devient

$$y(t) = \text{sign}[s(t) + \eta(t)], \quad (5.16)$$

à la place des Éqs. (5.12), (5.11). Nous appellerons décodage linéaire cette nouvelle procédure.

Dans une telle situation, la probabilité  $p$  de l'Éq. (5.14) se réduit à

$$p_{\text{lin}} = \Pr\{A + \eta > 0\} = \Pr\{-A + \eta < 0\}, \quad (5.17)$$

ce qui vaut

$$p_{\text{lin}} = F_{\eta}(A), \quad (5.18)$$

avec la fonction de répartition  $F_{\eta}(u) = \Pr\{\eta < u\}$  du bruit  $\eta(t)$ .

La probabilité  $p_{\text{lin}}$  de l'Éq. (5.18) utilisée dans l'Éq. (5.15) donne la capacité informationnelle  $C_{\text{lin}}$  pour le décodage linéaire. Cette capacité  $C_{\text{lin}}$  peut être étudiée en fonction du niveau de bruit en entrée, et comparée ainsi à la capacité non linéaire  $C$  obtenue avec le résonateur stochastique. Pour illustrer cette comparaison, nous avons choisi à nouveau le cas où le bruit blanc  $\eta(t)$  en entrée est gaussien et de moyenne nulle, avec l'amplitude efficace  $\sigma_{\eta}$ . La Fig. 5.7 compare les probabilités de transmission et les capacités informationnelles pour les décodages linéaire et non linéaire.

Comme on le voit sur la Fig. 5.7, quand le bruit est strictement nul, le décodage linéaire est parfait et surpasse complètement le décodage non linéaire qui est inefficace en l'absence de bruit. Mais à mesure que le niveau de bruit croît à partir de zéro, les performances du décodage linéaire décroissent, tandis que celles du décodage non linéaire commencent à croître. Le décodage non linéaire surpasse ensuite rapidement le décodage linéaire et lui reste alors supérieur en efficacité. Ces résultats montrent que dès qu'on a un niveau faible de bruit, on obtient rapidement un bénéfice en passant le mélange signal plus bruit par le résonateur stochastique plutôt qu'en opérant le décodage directement sur le mélange signal plus bruit d'entrée. De plus on voit que pour une certaine gamme de niveau de bruit, avec le résonateur stochastique, on obtient un bénéfice supplémentaire en accroissant le niveau de bruit jusqu'à maximiser les performances.



### 5.3.5 Conclusion

Nous avons montré que le système dynamique non linéaire de l'Éq. (5.11) peut permettre la transmission d'un signal large-bande porteur d'information, en profitant du bruit grâce à la résonance stochastique.

En utilisation pratique, l'effet peut être mis en œuvre comme suit. Le système de l'Éq. (5.11) avec une valeur fixée de  $X_b$  et de  $\tau_a$ , reçoit un signal cohérent  $s(t)$  d'amplitude infraliminaire  $A < 0.38X_b$ . En l'absence de bruit le système est incapable de transmettre la moindre information. Pour  $A < 0.38X_b$ , il existe alors une amplitude efficace non nulle du bruit qui maximise la capacité informationnelle du système. À ce niveau optimal de bruit, la procédure de synchronisation décrite précédemment permet un décodage purement local de la sortie, à l'efficacité maximum de la transmission.

À présent, avec la capacité strictement au-dessus de zéro obtenue grâce au bruit, et en se basant sur le second théorème de Shannon [18], nous sommes assurés qu'il existe un schéma de codage qui permettra la transmission des symboles d'entrées  $S_j$  avec une probabilité d'erreur aussi faible qu'on le souhaite. Par exemple dans les conditions de la Fig. 5.4(d), la capacité maximale à la résonance est autour de  $0.8 = 4/5$  bit d'information par symbole binaire transmis. Le second théorème de Shannon garantit alors l'existence d'un codage, dont l'effet sera d'ajouter en moyenne 1 chiffre binaire par 4 symboles d'entrées, afin de réduire l'entropie de l'entrée juste en dessous de la capacité du canal, et cela suffira pour surpasser le bruit et obtenir une probabilité d'erreur tendant vers zéro.

Nous avons montré de plus qu'on peut obtenir un bénéfice au moyen du résonateur stochastique par rapport à la situation en son absence. Cette situation est similaire à celle de l'obtention d'un RSB de sortie supérieur au RSB d'entrée dans le contexte de la résonance stochastique périodique. Nous avons montré ici, qu'un gain entrée–sortie dans la mesure de la résonance stochastique (la capacité informationnelle) peut être obtenu en résonance stochastique aperiodique.

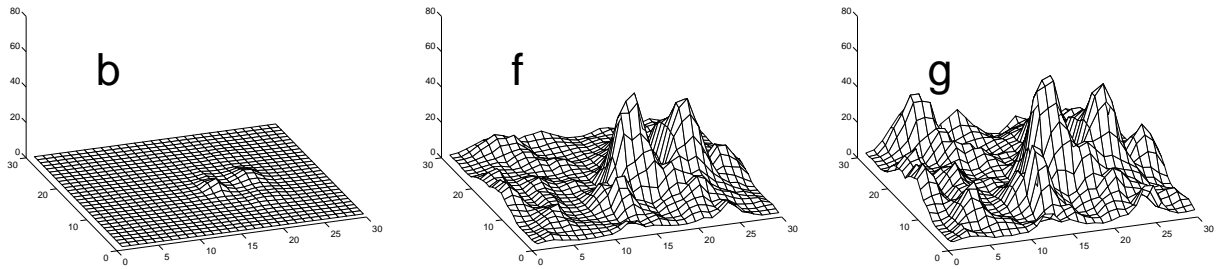
Jusqu'ici, nous avons exploré dans ce rapport des situations où la résonance stochastique peut apparaître dans la transmission temporelle de signaux. Nous présentons dans la section suivante une illustration expérimentale de résonance stochastique aperiodique dans la transmission spatiale d'une image.

## 5.4 Résonance stochastique spatiale aperiodique dans un montage optique

Dans le domaine de l'optique, la résonance stochastique a été surtout mise en évidence dans le contexte des systèmes dynamiques bistables, dont nous avons présenté les mécanismes dans le chapitre 2. Par ailleurs les études antérieures ont considéré la transmission de signaux temporels, comme nous l'avons fait jusqu'ici dans ce mémoire. Nous nous sommes interrogés en collaboration avec des collègues opticiens<sup>1</sup> sur la possibilité d'observer la résonance stochastique dans d'autres systèmes optiques que des systèmes bistables, et

---

<sup>1</sup>Laboratoire des Propriétés Optiques des Matériaux et Applications de l'Université d'Angers.



**Fig. 5.9 :** Images Raman de sortie obtenues pour des intensités croissantes de l'onde laser de bruit.

observer la résonance stochastique, en particulier avec des systèmes à seuil, est que le signal cohérent doit être insuffisant à lui seul pour permettre au système de répondre. Conformément à cette condition, nous ajustons l'intensité de l'onde laser cohérente de façon à ce que, seule, elle ne permette pas d'obtenir une image Raman en sortie (intensité sous le seuil Raman). Dans cette situation la superposition de l'onde de bruit va permettre par coopération avec l'onde cohérente d'atteindre le seuil Raman, ce qui permet la création d'une image Raman en sortie. On observe alors l'évolution de cette image en fonction de l'amplitude de l'onde de bruit.

Nous pouvons constater sur la Fig. 5.9 que l'allure de l'image de sortie se rapproche de l'image d'entrée lorsqu'on augmente l'intensité de l'onde de bruit jusqu'à une valeur optimale (pour la deuxième image) au delà de laquelle l'image est ensuite de plus en plus perturbée par le bruit. Ces résultats sont exposés de façon plus complète dans un autre travail [82]. Ils montrent de façon qualitative l'existence de résonance stochastique dans la transmission spatiale d'une image. Afin de quantifier l'évolution des images de sortie, nous avons proposé une mesure de l'effet par un coefficient d'intercorrélation entre les images d'entrée et de sortie. Nous avons observé que ce coefficient résonne en passant par un maximum, lorsqu'on accroît l'intensité de l'onde de bruit. Nous interprétons cela comme une nouvelle forme de résonance stochastique aperiodique dans la transmission d'une image.

# Chapitre VI

## Résonance stochastique chez le neurone

### 6.1 Introduction

Les neurones dans le système nerveux sont engagés dans des opérations complexes et très efficaces de traitement du signal, qui font l'objet de recherches intenses depuis plusieurs décennies [49]. Les neurones sont des systèmes soumis au bruit [27]. Le bruit intervenant dans le neurone peut être d'origine interne, causé par exemple par les fluctuations d'ouverture/fermeture des canaux ioniques membranaires. Il peut être aussi d'origine externe, provenant d'autres neurones auxquels le neurone considéré est connecté en réseaux, ou aussi de perturbations issues de l'environnement [27]. Il est donc particulièrement intéressant de déterminer si la résonance stochastique dans la transmission par le neurone est une propriété disponible pour le fonctionnement du système nerveux.

Pour le neurone, la résonance stochastique a été mise en évidence dans divers modèles théoriques [63, 64, 85, 55, 33]. Des démonstrations expérimentales ont aussi été obtenues, tout d'abord dans des neurones individuels, avec des cellules nerveuses mécanoréceptrices de l'écrevisse [20] et du grillon [62] stimulées par une combinaison de mouvements aléatoires et de mouvements périodiques. La résonance stochastique a également été observée expérimentalement dans des assemblées de neurones interconnectés en réseaux [36]. Elle fait également l'objet de recherches dans des phénomènes de perception impliquant le système nerveux dans sa globalité [75, 78].

Les premières études ont considéré le cas de neurones sensoriels périphériques. Dans ce cas, le neurone est soumis à des signaux analogiques : une entrée cohérente qui est habituellement une sinusoïde, et une entrée de bruit qui est habituellement un bruit blanc continu, le plus souvent de distribution gaussienne. Ces deux entrées sont interprétées comme des signaux analogiques du monde externe qui excitent le neurone sensoriel. La résonance stochastique est alors observée dans la transmission du stimulus analogique quand la puissance du signal de bruit est augmentée.

Au-delà du cas des neurones sensoriels périphériques qui sont soumis à des stimulations analogiques du fait de leur contact direct avec le monde externe, il est connu que la plupart

La réponse de l'Éq. (6.1) à un PA seul en entrée à  $t_0$  est, pour  $t > t_0$ :

$$V(t) = \left[ V(t_0^-) + \frac{w}{\tau_m} \right] \exp\left(-\frac{t-t_0}{\tau_m}\right). \quad (6.3)$$

Dans les conditions habituelles de la résonance stochastique, l'entrée cohérente seule n'est pas suffisante pour induire une transition de la sortie. Conformément à cette condition, le couplage synaptique  $w$  est choisi tel que le signal cohérent  $s(t)$  seul n'est pas suffisant pour permettre à  $V(t)$  d'atteindre le seuil  $V_{\text{th}}$ . Cependant nous permettons à deux PA suffisamment proches en entrée, de provoquer l'émission d'un PA de sortie. Pour le neurone dont le potentiel commence à  $V(t_0^-) = 0$ , un deuxième PA d'entrée après le premier à  $t_0$ , doit survenir avant  $t_0 + T_h$ , avec

$$T_h = -\tau_m \ln\left(\frac{V_{\text{th}}}{w/\tau_m} - 1\right), \quad (6.4)$$

afin de générer un PA de sortie.

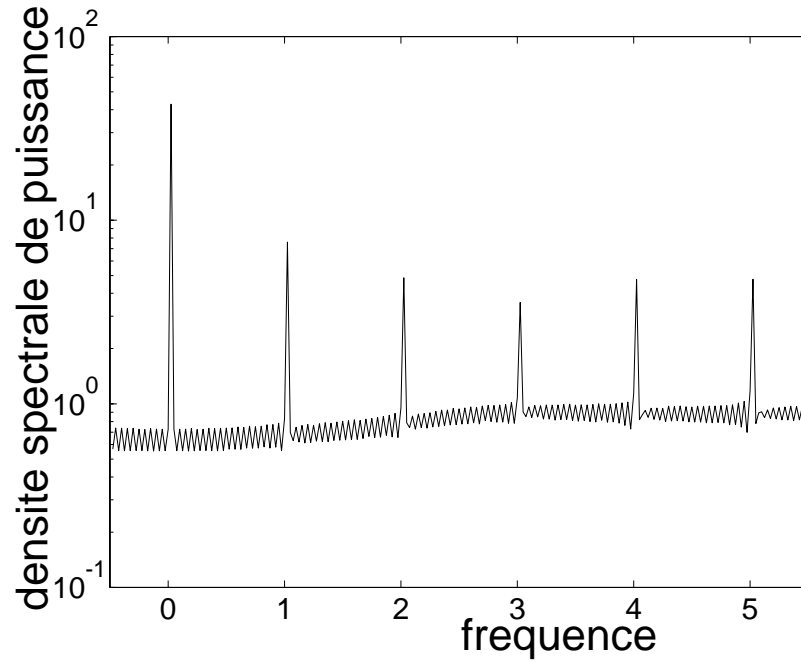
Ainsi, en l'absence du bruit  $\eta(t)$ , si  $T_s > T_h$ , le signal cohérent  $s(t)$  seul est insuffisant pour déclencher des PA en sortie. À mesure que la densité de puissance  $D$  du bruit est progressivement augmentée à partir de 0 (c'est-à-dire à mesure que  $T_\eta$  est réduit), il y aura une possibilité pour un PA de bruit de survenir assez proche d'un PA cohérent en entrée. L'effet coopératif de deux tels PA d'entrée est capable de provoquer l'émission d'un PA de sortie, qui sera corrélé avec le PA cohérent d'entrée. Si  $D$  est augmentée, cette possibilité devient de plus en plus probable, conduisant à un renforcement de la corrélation entre le train de sortie et le train cohérent d'entrée. Pour  $D$  encore plus forte, la possibilité que deux PA de bruit surviennent assez proches pour provoquer l'émission par eux-mêmes d'un PA de sortie, commencera à croître, et dès lors détruira progressivement la corrélation du train de sortie avec le train cohérent d'entrée.

À cause de cette influence non monotone du niveau du bruit d'entrée, on peut ainsi s'attendre à un effet de résonance stochastique. Cette propriété a été vérifiée au moyen d'une simulation numérique du modèle de neurone.

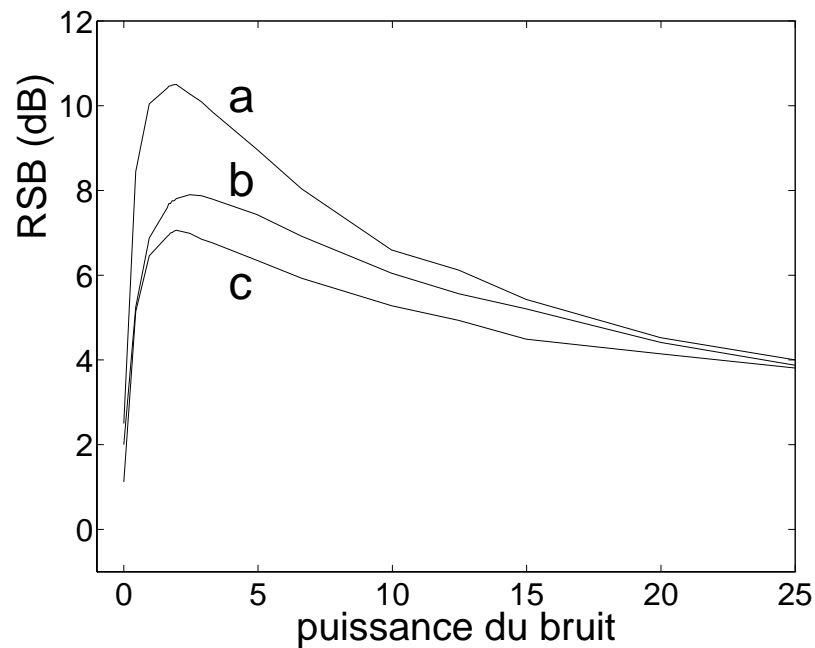
Une discrétisation d'Euler avec le pas de temps  $\Delta t = 10^{-2}\tau_m$  a été employée pour l'Éq. (6.1). La fonction d'autocorrélation  $R_{yy}(\tau)$  du train de PA de sortie  $y(t)$  a été estimée; pour différentes valeurs de  $\tau$ , en moyennant les valeur  $y(t)y(t+\tau)$  sur différents  $t \bmod T_s$  couvrant uniformément l'intervalle  $[0, T_s[$ . La transformée de Fourier de  $R_{yy}(\tau)$  donne alors la densité spectrale de puissance de sortie  $P_{yy}(\nu)$ . À partir de  $P_{yy}(\nu)$ , nous définissons alors le rapport signal sur bruit comme dans les chapitres 2–4,

$$\mathcal{R} = \frac{S}{B}.$$

La variation du RSB a été examinée en fonction de la densité de puissance  $D$  du bruit en entrée. La résonance stochastique a ainsi été observée pour une large gamme des paramètres neuronaux. Pour illustration nous avons choisi une situation où elle est clairement visible, avec  $T_s = 5\tau_m$  et  $w/\tau_m = 0.8V_{\text{th}}$ , qui donne  $T_h = 0.28T_s$  dans l'Éq. (6.4). La Fig. 6.1 montre la fonction d'autocorrélation de sortie  $R_{yy}(\tau)$  normalisée, à  $T_\eta = 0.5T_s$



**Fig. 6.2:** Densité spectrale de puissance de sortie  $P_{yy}(\nu)$  résultant d'une transformée de Fourier de  $R_{yy}(\tau)$  de la Fig. 6.1, en fonction de la fréquence  $\nu/(1/T_s)$ .



**Fig. 6.3:** Rapport signal sur bruit (RSB) en sortie, en fonction de la densité de puissance  $D/(1/T_s)$  du bruit en entrée, à la fréquence fondamentale  $1/T_s$  (a), et aux harmoniques  $2/T_s$  (b), et  $4/T_s$  (c). La variation non monotone du RSB qui passe par un maximum pour un niveau spécifique de bruit, est la signature de la résonance stochastique.

consacré à attribuer des valeurs plausibles aux paramètres neuronaux, plutôt que des valeurs qui soient *ad hoc* pour observer la résonance stochastique. Cette étude est la première à examiner si et comment la résonance stochastique dans la transmission de trains de PA peut avoir lieu, dans la situation réaliste où beaucoup (des centaines) de trains conditionnent la réponse du neurone [39].

Nous montrons qu'un nouveau schéma peut être conçu où un accroissement du nombre de trains de bruit appliqués au neurone, peut résulter en une amélioration de la transmission des trains cohérents.

### 6.3.2 Un modèle de neurone à voies d'entrée multiples

Dans la transmission neuronale du signal, un potentiel d'action présynaptique (PA) produit la libération rapide de neurotransmetteurs dans la terminaison synaptique, ceux-ci excitent des canaux ioniques qui induisent alors des changements dans la conductance électrique de la membrane de la région postsynaptique. L'évolution résultante pour la conductance de la membrane  $G_i(t)$  dans une région synaptique  $i$  d'un neurone, peut être modélisée ainsi [12] :

$$\frac{dG_i}{dt} = -\frac{G_i(t)}{\tau_G} + [G_i^{\text{sat}} - G_i(t)]w_i E_i(t), \quad (6.5)$$

où  $E_i(t) = \sum_k \delta(t - t_k)$  représente le train de PA d'entrée pour la région synaptique  $i$ ,  $\tau_G$  est la constante de temps pour la cinétique des canaux ioniques,  $G_i^{\text{sat}}$  est la valeur de saturation de la conductance synaptique qui provient du nombre fini de canaux ioniques postsynaptiques, et  $w_i$  modélise l'efficacité de la synapse  $i$  pour que les PA d'entrée induisent des changements de la conductance membranaire. Avec plusieurs entrées synaptiques sur le neurone, son potentiel de membrane  $V(t)$  évolue au-dessus de sa valeur de repos selon

$$C_m \frac{dV}{dt} = -G_m V(t) + \sum_i G_i(t) [V_i^{\text{rev}} - V(t)], \quad (6.6)$$

où  $C_m$  et  $G_m$  sont respectivement la capacité et la conductance de la membrane du neurone postsynaptique au repos, et  $V_i^{\text{rev}}$  est le potentiel d'inversion de la synapse  $i$  [12]. Si le potentiel de membrane  $V(t)$  atteint le seuil  $V_{\text{th}}$ , un PA de sortie est émis par le neurone.  $V(t)$  est alors remis à zéro où il reste fixé durant une période réfractaire  $T_r$ , après laquelle la variation de  $V(t)$  reprend selon l'Éq. (6.6). Le signal  $S(t)$  en sortie du neurone évolue ainsi selon :

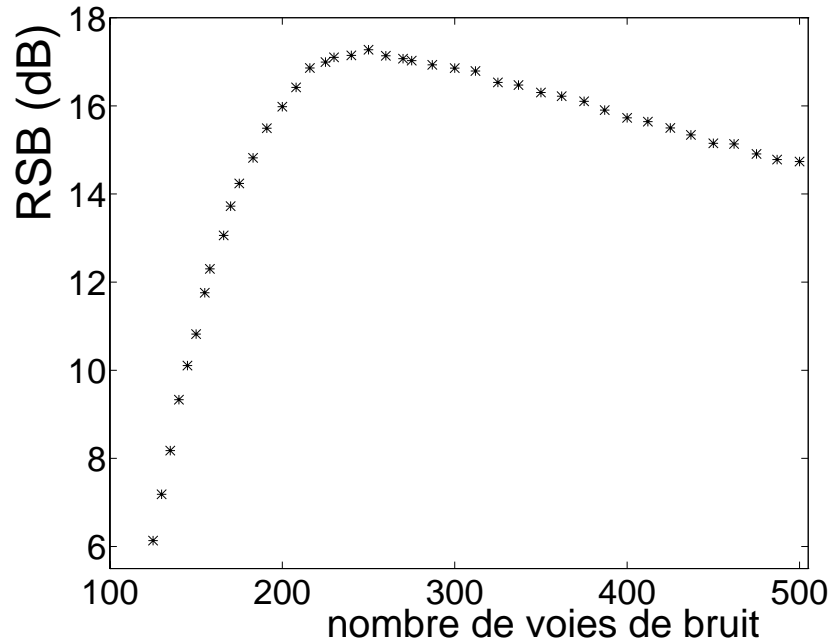
$$\begin{aligned} \text{Si } V(t) = V_{\text{th}} \quad \text{alors} \quad y(t) &= \delta(t' - t), \\ &V(t) \leftarrow 0 \text{ fixé durant } T_r; \\ \text{sinon} \quad y(t) &= 0. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Nous considérons maintenant la réponse du neurone quand il est soumis à une superposition de  $N_s + N_\eta$  trains de PA d'entrée. Un nombre  $N_s$  de ces trains de PA sont des trains cohérents : ils sont périodiques de période  $T_s$ , avec la même période mais avec une

car avec  $N_\eta$  encore faible, les PA de sortie requièrent une action coopérative des entrées cohérentes et des entrées de bruit. À mesure que le nombre  $N_\eta$  d'entrées de bruit est augmenté, la probabilité d'émission de PA en sortie augmente progressivement, renforçant dans la sortie le contenu corrélé avec l'entrée cohérente. Puis si  $N_\eta$  est encore accru, le bruit devient suffisant à lui seul pour déclencher la sortie, sans aucune assistance des entrées cohérentes. Dès lors, avec  $N_n$  qui augmente, la corrélation de la sortie avec les entrées cohérentes diminue progressivement.

Comme dans la section 6.2.2 nous quantifions cette action non monotone du bruit par le calcul de la fonction d'autocorrélation de sortie  $R_{yy}(\tau)$ . En général, comme l'illustre la Fig. 6.4,  $R_{yy}(\tau)$  contient une composante périodique à la période  $T_s$  des entrées cohérentes, superposée à une contribution due au bruit, et l'importance relative de la composante cohérente présente, comme nous l'avons décrit auparavant, une évolution non monotone avec l'ajout de bruit en entrée. Conformément à notre formulation générale énoncée au chapitre 2, cette évolution non monotone peut être quantifiée avec le calcul de la densité spectrale de puissance de sortie  $P_{yy}(\nu)$ , calculée par transformée de Fourier de  $R_{yy}(\tau)$ . Et ainsi que nous le prévoyions avec la formulation générale du chapitre 2, la Fig. 6.5 montre que  $P_{yy}(\nu)$  contient des raies spectrales aux multiples entiers de la fréquence cohérente  $1/T_s$ , superposées à un fond large-bande continu dû au bruit. Avec  $P_{yy}(\nu)$ , à la fréquence fondamentale  $1/T_s$ , la hauteur de la raie spectrale cohérente au-dessus du fond de bruit, divisée par l'amplitude de ce fond, permet de définir le rapport signal sur bruit de sortie (RSB) comme dans les chapitres 2–4, soit  $\mathcal{R} = S/B$  [84]. Nous étudions alors la variation du RSB en fonction du nombre  $N_\eta$  de trains d'entrée de bruit appliqués au neurone. Cette variation est montrée sur la Fig. 6.6, et elle présente l'influence non monotone de l'ajout de bruit en entrée qui est caractéristique de la résonance stochastique.

La courbe de la Fig. 6.6 montre qu'avec un petit nombre d'entrées cohérentes de période  $T_s$  qui sont insuffisantes pour déclencher le neurone, l'ajout d'entrées de bruit permet une réponse du neurone présentant de la corrélation avec les entrées cohérentes. De plus, le nombre d'entrées de bruit peut être porté jusqu'à une valeur optimale où la partie cohérente de la réponse, à fréquence  $1/T_s$ , atteint un maximum.



**Fig. 6.6 :** Rapport signal sur bruit de sortie en fonction du nombre  $N_n$  de trains de PA de bruit appliqués en entrée au neurone.

### 6.3.3 Conclusion

Nous avons montré avec cette étude, la possibilité de résonance stochastique dans une situation réaliste de transmission de trains multiples de PA par le neurone [39]. Pour cela, nous avons choisi de conserver un réalisme suffisant pour la modélisation du neurone et de la transmission synaptique surtout pour les caractéristiques non linéaires essentielles qui sont introduites dans la transmission du signal par ces processus, comme dans les Éqs. (6.5), (6.6) et (6.7). Avec des valeurs numériques plausibles pour les paramètres, le traitement présenté autorise ainsi à la fois des interprétations quantitatives et qualitatives.

Nous avons montré qu'un nouveau schéma de transmission de signal assistée par le bruit est disponible avec les mécanismes fondamentaux de la réponse neuronale. Le schéma proposé attribue aux trains de bruit produits par le neurone d'activité aléatoire spontanée, un rôle utile dans le traitement de l'information neuronale, en améliorant la transmission de petits signaux cohérents. Les expériences précédentes de résonance stochastique dans des neurones, comme rapportées dans l'introduction de ce chapitre, ont essentiellement employé du bruit externe (provenant de l'environnement) tombant sur le neurone récepteur. Par ailleurs, le bruit interne provenant de fluctuations aléatoires dans la membrane du neurone récepteur est difficile à contrôler [71]. Le schéma présenté considère une autre source de bruit interne, provenant de l'activité spontanée de neurones présynaptiques, qui apparaît comme une source de bruit interne beaucoup plus contrôlable pour un système neuronal afin de l'exploiter pour l'amélioration de la transmission de signal par la résonance stochastique. Notre étude montre qu'un tel schéma est autorisé par les mécanismes fondamentaux de transmission neuronale de signal, et qu'il peut avoir des



Le signal périodique  $s(t)$  est donné sous la forme d'un train d'impulsions brèves décrit comme

$$s(t = j\Delta t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \delta_d(t - mT), \quad (6.8)$$

avec  $m$  entier, et l'impulsion d'amplitude unité à temps discret  $\delta_d(j\Delta t) = 1$  si  $j = 0$  et  $\delta_d(j\Delta t) = 0$  sinon.

Nous considérons un système non linéaire à seuil  $\theta$ , qui reçoit  $s(t)$  et  $\eta(t)$  comme entrées, et produit sur sa sortie  $y(t)$  des impulsions d'amplitude unité selon :

$$\begin{aligned} \text{Si } s(j\Delta t) + \eta(j\Delta t) > \theta & \quad \text{alors} \quad y(j\Delta t) = 1, \\ & \quad \text{sinon} \quad y(j\Delta t) = 0. \end{aligned} \quad (6.9)$$

Les signaux  $s(t)$  et  $y(t)$  ont la forme de trains d'impulsions, afin de permettre, dans la section suivante, une interprétation neuronale.

Conformément au modèle général, nous cherchons à calculer une fonction d'autocorrélation pour le signal de sortie  $y(t)$ . Comme  $y$  prend seulement les valeurs 0 ou 1, l'espérance  $\mathbb{E}[y(t)y(t + \tau)]$ , pour un  $\tau \neq 0$  fixé et pour  $t$  fixé, peut être exprimée comme la probabilité :

$$\mathbb{E}[y(t)y(t + \tau)] = \Pr\{y(t) = 1 \text{ et } y(t + \tau) = 1\}, \quad (6.10)$$

qui est aussi :

$$\mathbb{E}[y(t)y(t + \tau)] = \Pr\{s(t) + \eta(t) > \theta \text{ et } s(t + \tau) + \eta(t + \tau) > \theta\}. \quad (6.11)$$

Comme  $s$  est un signal déterministe et  $\eta$  un bruit *blanc*, on peut écrire

$$\mathbb{E}[y(t)y(t + \tau)] = F_c[\theta - s(t)]F_c[\theta - s(t + \tau)]. \quad (6.12)$$

Et pour  $\tau = 0$ , on a

$$\mathbb{E}[y(t)y(t + \tau)] = \Pr\{y(t) = 1\} = F_c[\theta - s(t)]. \quad (6.13)$$

Les équations (6.12) et (6.13) peuvent être combinées en une unique expression pour tout  $\tau = k\Delta t$  :

$$\mathbb{E}[y(t)y(t + \tau)] = \left\{ F_c[\theta - s(t)] - F_c^2[\theta - s(t)] \right\} \delta_d(\tau) + F_c[\theta - s(t)]F_c[\theta - s(t + \tau)]. \quad (6.14)$$

$F_c[\theta - s(t)]$  et  $F_c[\theta - s(t + \tau)]$  sont tous deux périodiques en  $t$  et  $\tau$  avec la période  $T$ . À cause de l'entrée cohérente périodique  $s(t)$ , le signal aléatoire  $y(t)$  est cyclostationnaire avec la période  $T$  [72], et permet comme dans le chapitre 4 de construire une fonction d'autocorrélation "stationnaire"  $R_{yy}(\tau)$  pour  $y(t)$  par une moyenne appropriée de  $\mathbb{E}[y(t)y(t + \tau)]$  sur un intervalle  $T$ , avec  $t$ , ou  $t \bmod T$ , qui couvre uniformément  $[0, T[$ , soit :

$$R_{yy}(\tau = k\Delta t) = \frac{1}{N} \sum_{j=0}^{N-1} \mathbb{E}[y(j\Delta t)y(j\Delta t + k\Delta t)]. \quad (6.15)$$

Les expressions (6.14) et (6.8) sont employées pour une évaluation explicite de la moyenne dans l'Éq. (6.15) qui donne

$$R_{yy}(k\Delta t) = R_0\delta_d(k\Delta t) + \tilde{R}_{yy}(k\Delta t), \quad (6.16)$$

avec

$$R_0 = \frac{1}{N}F_c(\theta - 1)[1 - F_c(\theta - 1)] + \frac{N-1}{N}F_c(\theta)[1 - F_c(\theta)], \quad (6.17)$$

et  $\tilde{R}_{yy}(k\Delta t)$  est une composante périodique qui vérifie  $\tilde{R}_{yy}(\tau = k\Delta t) = \tilde{R}_{yy}(\tau + T)$ , et

$$\tilde{R}_{yy}(0) = \frac{1}{N}F_c^2(\theta - 1) + \frac{N-1}{N}F_c^2(\theta), \quad (6.18)$$

$$\tilde{R}_{yy}(k\Delta t) = \frac{2}{N}F_c(\theta - 1)F_c(\theta) + \frac{N-2}{N}F_c^2(\theta) \quad \text{pour } 0 < k < N. \quad (6.19)$$

La fonction d'autocorrélation  $R_{yy}$  de l'Éq. (6.16) est formée d'une impulsion à l'origine d'amplitude  $R_0$ , superposée à une composante périodique  $\tilde{R}_{yy}$  de période  $T$ . La transformée de Fourier de  $R_{yy}$  définit la densité spectrale de puissance de sortie  $P_{yy}$ , qui alors sera formée par un fond constant d'amplitude  $R_0$ , superposé à une série de raies spectrales aux fréquences multiples entiers de  $1/T$ . L'application de la transformée de Fourier sur l'Éq. (6.16) donne alors

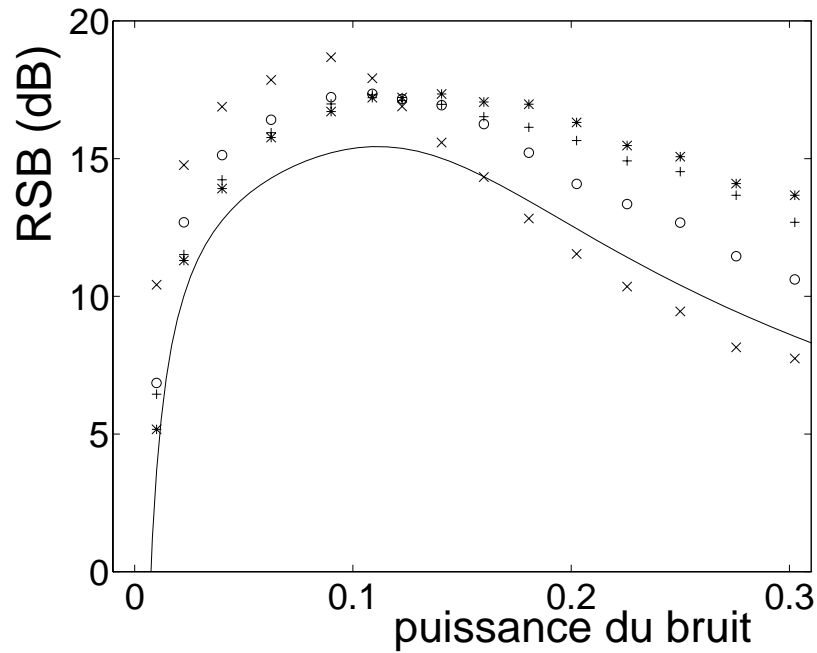
$$P_{yy}\left(\frac{n}{T}\right) = R_0 + \frac{2M}{N}[F_c(\theta - 1) - F_c(\theta)]^2. \quad (6.20)$$

Comme nous l'avons vu précédemment, ce type d'allure pour la densité spectrale de puissance, avec des raies spectrales cohérentes superposées sur un fond large-bande de bruit, est typique pour la sortie d'un système résonant stochastiquement. Conformément au modèle général du chapitre 4, la densité spectrale de puissance nous permet de définir le rapport signal sur bruit, à fréquence  $n/T$  en sortie, comme le rapport de la puissance contenue dans la raie spectrale seule par la puissance contenue dans le fond de bruit dans une bande de fréquence choisie de largeur  $1/(NT)$  autour de  $n/T$ . L'expression correspondante du RSB suit alors comme

$$\mathcal{R}\left(\frac{n}{T}\right) = \frac{[F_c(\theta - 1) - F_c(\theta)]^2}{R_0}. \quad (6.21)$$

Cette description théorique permet de vérifier que beaucoup de conditions conduisent à la résonance stochastique avec ce modèle. Pour illustration nous considérons le cas où  $\eta(t)$  est un bruit gaussien de moyenne nulle et de variance  $\sigma_\eta^2$ , et avec  $\theta = 1.2$  et  $N = 100$ . La Fig. 6.7 (ligne continue) représente alors la variation du RSB de l'Éq. (6.21) en fonction de la variance du bruit d'entrée  $\sigma_\eta^2$ . La variation non monotone du RSB qui passe par un maximum avec  $\sigma_\eta^2$ , est une signature claire de la résonance stochastique.

Avec le présent modèle nous avons montré la résonance stochastique dans la transmission de trains d'impulsion discrètes. Dans la suite nous allons montrer que le modèle théorique présenté peut fournir une description pour la résonance stochastique dans la transmission de PA par un neurone.



**Fig. 6.7:** Rapport signal sur bruit de sortie en fonction de la puissance  $\sigma_\eta^2$  du bruit sur l'entrée de la non-linéarité à seuil. La courbe continue est le RSB théorique de l'Éq. (6.21) du modèle 1. Les quatre ensembles de points "expérimentaux" sont obtenus par une simulation du modèle de neurone, avec  $T_0 = 1$  ms,  $T_r = 3$  ms et  $T = 300$  ms, et pour: ( $\times$ )  $\tau_m = 3$  ms, ( $\circ$ )  $\tau_m = 10$  ms, ( $+$ )  $\tau_m = 20$  ms et ( $*$ )  $\tau_m = 30$  ms.

### 6.4.3 Résonance stochastique dans la transmission neuronale d'un signal de PA

Nous considérons à nouveau le modèle d'évolution du potentiel de membrane du neurone, présenté dans la section 6.3.2 par l'Éq. (6.6) que nous simplifions au cas de deux voies d'entrée, une voie cohérente et une voie de bruit, sous la forme

$$C_m \frac{dV}{dt} = -G_m V(t) + G_{\text{coher}}(t)[V_{\text{rev}} - V(t)] + G_{\text{bruit}}(t)[V_{\text{rev}} - V(t)], \quad (6.22)$$

où  $C_m$  et  $G_m$  sont respectivement la capacité et la conductance de la membrane du neurone au repos.  $G_{\text{coher}}(t)$  et  $G_{\text{bruit}}(t)$  sont les variations de conductance de la membrane induites respectivement par les PA présynaptiques cohérents (pour  $G_{\text{coher}}$ , et par l'activité d'ouverture/fermeture aléatoire spontanée de canaux ioniques (pour  $G_{\text{bruit}}$ ).  $V_{\text{rev}}$  est le potentiel d'inversion des ions qui circulent par les canaux.

Quand le potentiel  $V(t)$  gouverné par l'Éq. (6.22) atteint le seuil  $V_{\text{th}}$ , un PA de sortie est émis par le neurone postsynaptique et  $V(t)$  est remis à zéro.

Dans le but d'étudier la résonance stochastique dans la transmission neuronale de PA, l'Éq. (6.22) est simplifiée en

$$\tau_m \frac{dV}{dt} = -V(t) + \epsilon(t) + \xi(t), \quad (6.23)$$

avec  $\tau_m = C_m/G_m$ ,  $\epsilon(t) = V_{\text{rev}}G_{\text{coher}}(t)/G_m$  et  $\xi(t) = V_{\text{rev}}G_{\text{bruit}}(t)/G_m$ .

Pour obtenir l'Éq. (6.23), nous avons réalisé une linéarisation fréquemment utilisée dans les modélisations neuronales [59, 12], et pour laquelle  $V_{\text{rev}} - V(t)$  est approché simplement par la constante  $V_{\text{rev}}$ . On suppose ici que l'excursion de  $V(t)$ , qui ne dépasse jamais  $V_{\text{th}} \approx 20$  mV au-dessus de l'état de repos, reste suffisamment loin de la valeur de  $V_{\text{rev}}$ . Par exemple, pour des canaux excitateurs typiques on a  $V_{\text{rev}} \approx 70$  mV au-dessus de l'état de repos. Cette approximation par linéarisation introduit une petite distorsion dans la dynamique de  $V(t)$ , mais que nous pensons non critique pour l'observation de la résonance stochastique dans la réponse du neurone.

Le signal  $\epsilon(t) = V_{\text{rev}}G_{\text{coher}}(t)/G_m$  de l'Éq. (6.23) reproduit les changements de conductance, choisie de type excitatrice ( $V_{\text{rev}} > 0$ ), en réponse aux PA présynaptiques cohérents. Un PA présynaptique est une impulsion brève de durée  $T_0 \sim 1$  ms. La libération de neurotransmetteurs et l'ouverture des canaux ioniques sont des processus rapides, par conséquent, le changement de conductance  $G_{\text{coher}}(t)$  en réponse à un seul PA présynaptique est aussi une impulsion brève de conductance qui s'étend aussi sur une durée  $\sim T_0$ . Pour l'observation de la résonance stochastique, la forme exacte d'une telle impulsion de conductance n'est pas critique. Conformément à cette hypothèse, une telle impulsion est représentée ici comme  $E_0 \text{sq}(t)$ , où  $E_0$  est une constante qui fixe l'amplitude de l'impulsion, et  $\text{sq}(t)$  est une impulsion carrée d'amplitude unité et de durée  $T_0$ , c'est-à-dire  $\text{sq}(t) = 1$  pour  $0 \leq t < T_0$  et  $\text{sq}(t) = 0$  sinon. L'entrée cohérente  $\epsilon(t)$  a maintenant la forme suivante :

$$\epsilon(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} E_0 \text{sq}(t - mT_s), \quad (6.24)$$

avec  $m$  entier, qui représente l'effet d'un train périodique de PA présynaptiques de période  $T_s$ .

Le signal  $\xi(t) = V_{\text{rev}}G_{\text{bruit}}(t)/G_m$  de l'Éq. (6.23) reproduit les changements de conductance induits par l'activité aléatoire des canaux. Comme la cinétique des canaux peut être supposée rapide en comparaison de la dynamique de la membrane gouvernée par l'Éq. (6.23) avec la constante de temps  $\tau_m$ ,  $\xi(t)$  peut être alors considéré comme un bruit large-bande modélisé comme un bruit blanc. De plus les changements de conductance décrits par  $\xi(t)$  proviennent des fluctuations d'un grand nombre de canaux indépendants, c'est pourquoi  $\xi(t)$  peut être considéré comme un bruit gaussien.  $\xi(t)$  est ainsi considéré comme un bruit blanc gaussien stationnaire dont la fonction d'autocorrélation s'écrit :  $E[\xi(t)\xi(t+\tau)] = 2D\delta(\tau)$ . La moyenne de  $\xi(t)$  est considérée nulle, ce qui peut être obtenu en supposant deux populations de canaux aléatoires, une excitatrice avec  $V_{\text{rev}} > 0$ , une inhibitrice avec  $V_{\text{rev}} < 0$ . Toutefois, ces hypothèses plausibles et simples concernant le bruit neuronal, ne sont pas critiques pour l'observation de la résonance stochastique dans la réponse du neurone.

L'Éq. (6.23) représente un filtrage linéaire passe-bas du premier ordre de l'entrée  $e(t) + \xi(t)$ . La solution de l'Éq. (6.23) peut alors être exprimée analytiquement sous la forme  $V(t) = e_f(t) + \xi_f(t)$ . Le terme  $e_f(t)$  est la version filtrée de l'entrée  $e(t)$  :

$$e_f(t) = \sum_m E_0 \text{sq}_f(t - mT_s), \quad (6.25)$$

avec l'impulsion exponentielle  $\text{sq}_f(t)$  qui est la version filtrée de l'impulsion carrée  $\text{sq}(t)$  :

$$\begin{cases} \text{sq}_f(t) = 1 - \exp(-t/\tau_m) & \text{pour } 0 \leq t < T_0, \\ \text{sq}_f(t) = [1 - \exp(-T_0/\tau_m)] \exp[-(t - T_0)/\tau_m] & \text{pour } t \geq T_0. \end{cases} \quad (6.26)$$

Et le terme  $\xi_f(t)$  est la version filtrée de  $\xi(t)$  : c'est un bruit gaussien coloré de fonction d'autocorrélation  $E[\xi_f(t)\xi_f(t+\tau)] = D\tau_m^{-1} \exp(-|\tau|/\tau_m)$ , et de variance  $D\tau_m^{-1}$ .

Pour terminer la description de la transmission de signal par le neurone, nous complétons l'Éq. (6.23) par la condition que lorsque le potentiel de membrane  $V(t) = e_f(t) + \xi_f(t)$  dépasse le seuil  $V_{\text{th}}$  alors un PA de sortie est émis en sortie du neurone  $S(t)$ , et  $V(t)$  est remis à zéro :

$$\begin{aligned} \text{Si } V(t) = e_f(t) + \xi_f(t) > V_{\text{th}} & \quad \text{alors} \quad S(t) = \delta(t' - t), \\ & \quad V(t) \leftarrow 0 \text{ fixé durant } T_r; \\ \text{sinon} & \quad S(t) = 0. \end{aligned} \quad (6.27)$$

Après l'émission d'un PA,  $V$  reste à zéro durant une période réfractaire  $T_r$ , après laquelle l'évolution de  $V$  reprend selon l'Éq. (6.23).

Le modèle de neurone des Éqs. (6.23)–(6.27) a été simulé numériquement, avec une discrétisation d'Euler des équations, avec un pas de temps beaucoup plus petit que les constantes de temps pertinentes  $\tau_m$ ,  $T_0$  et  $T_r$ . Lorsque le signal cohérent  $e_f(t)$  reste en dessous du seuil de décharge  $V_{\text{th}}$ , l'addition du bruit  $\xi_f(t)$  peut amener le neurone à répondre. Dans un tel régime, le RSB à la sortie du neurone peut être évalué avec la même

définition que dans la section 6.4.2, et les résultats présentés sur la Fig. 6.7 montrent que la résonance stochastique a lieu dans la réponse du neurone, pour une large gamme de valeurs des paramètres.

Pour aller plus loin, nous voulons examiner dans quelle mesure le modèle théorique de la section 6.4.2 (nous l'appellerons modèle 1), peut fournir une description pour la résonance stochastique dans la réponse du neurone. À cause de la période réfractaire, le neurone peut mettre à jour sa sortie seulement chaque  $T_r$ . Il est ainsi naturel d'identifier  $\Delta t$  du modèle 1 à  $T_r$ . Dans ces conditions, à la fois le modèle 1 et le modèle de neurone sont soumis à un train périodique d'impulsions surperposé à un bruit continu qui agissent sur leur non-linéarité à seuil, et leur sortie est mise à jour chaque  $\Delta t \equiv T_r$  avec l'émission d'une impulsion en sortie chaque fois que le seuil est dépassé. Une différence visible entre le modèle 1 et le modèle de neurone, est la présence du filtrage passe-bas avec pour constante de temps  $\tau_m$  de l'Éq. (6.23) sur l'entrée du neurone. L'effet de ce filtrage déforme et allonge les impulsions cohérentes d'entrée, et élargit le temps de corrélation du bruit sur une échelle d'ordre  $\tau_m$ . L'amplitude des impulsions filtrées qui forment  $e_f(t)$  est  $E_0[1 - \exp(-T_0/\tau_m)]$  selon les Éqs. (6.25),(6.26); cette amplitude doit être prise comme unité d'amplitude dans le modèle de neurone, puisque le modèle 1 opère avec des impulsions cohérentes d'amplitude unité. En résumé, la correspondance entre le modèle de neurone et le modèle 1 est, pour l'échelle de temps  $T_r \equiv \Delta t$ , et pour les amplitudes de signal  $E_0[1 - \exp(-T_0/\tau_m)] \equiv 1$ .

Une fois cette correspondance réalisée, la non-linéarité du neurone doit opérer avec (a) un bruit coloré  $\xi_f(t)$  de longueur de corrélation  $\sim \tau_m$  qui reste fini (d'ordre 10 ms) dans un neurone plausible, et (b) des impulsions cohérentes dont l'amplitude est correctement modélisée mais dont la forme est déformée sur l'échelle de temps  $\sim \tau_m$ . De plus, pour se conformer à la situation du modèle 1, la longueur de corrélation  $\sim \tau_m$  du bruit doit rester grande relativement à la durée des impulsions  $T_0$  (l'amplitude du bruit ne doit pas changer beaucoup pendant la durée d'une impulsion cohérente). Toutes ces conditions, imposent des contraintes temporelles sévères qui rendent difficile pour le modèle de neurone de se superposer exactement au modèle 1.

Toutefois, on peut s'attendre à ce que si  $\tau_m$  reste suffisamment en dessous de la période cohérente  $T$ , et également suffisamment au-dessus de la durée d'impulsion  $T_0$ , alors l'effet de résonance stochastique survenant dans le neurone sera correctement approché par le modèle 1. Cette attente est vérifiée par les résultats présentés sur la Fig. 6.7.

Pour la comparaison de la Fig. 6.7 entre le modèle 1 et le neurone, nous avons pris les valeurs typiques suivantes pour les paramètres neuronaux :  $T_0 = 1$  ms,  $T_r = 3$  ms,  $\tau_m = 3$  à 30 ms, avec  $T = 300$  ms, et  $V_{th} = 1.2$  relativement à l'unité d'amplitude de signal  $E_0[1 - \exp(-T_0/\tau_m)]$ . Les courbes de la Fig. 6.7 révèlent un accord global satisfaisant entre le modèle 1 et le neurone. Comme prévu, l'accord général entre le modèle 1 et le neurone, à la fois dans la région de la résonance et autour, est meilleur pour des valeurs intermédiaires de  $\tau_m$  ( $\tau_m \approx 10$  ms), et il se dégrade quand  $\tau_m$  augmente vers  $T$  ou diminue vers  $T_0$ . Nous observons sur la Fig. 6.7, que la valeur de la variance du bruit pour le maximum du RSB dans le neurone, est prédite de façon acceptable par le modèle 1,

surtout pour la meilleure condition  $\tau_m = 10$  ms. Ce résultat peut être attribué au fait que la valeur de la variance est essentiellement déterminée par l'amplitude de l'impulsion cohérente ajoutée au bruit par rapport au seuil, et est peu sensible à la forme exacte de l'impulsion cohérente et à la structure de corrélation du bruit. L'amplitude du RSB du modèle de neurone, qui dépasse habituellement le RSB dans le modèle 1, surtout dans la région de la résonance, pourrait s'expliquer par un plus haut degré de cohérence ou de corrélation dans la sortie du neurone, qui proviendrait dans le cas présent de corrélation dans le bruit neuronal coloré en comparaison du bruit blanc du modèle 1, et aussi dans la durée plus longue des impulsions cohérentes agissant sur la non-linéarité du neurone.

#### 6.4.4 Discussion et conclusion

Nous avons introduit un système non linéaire à seuil qui a été montré capable de résonance stochastique dans la transmission d'un train périodique d'impulsions avec du bruit blanc. Ce système a été obtenu en adaptant le modèle général du chapitre 4, pour la transmission de trains d'impulsions cohérentes en présence d'un bruit continu. Nous avons montré que le modèle exact que nous proposons, peut fournir une approximation satisfaisante pour la résonance stochastique dans le neurone avec un train de PA cohérent, et une source de bruit interne continu dont on montre la provenance dans les fluctuations de la conductance membranaire.

Le système de l'Éq. (6.9) décrit seulement le niveau maximum d'un PA de sortie, et n'inclut pas une description complète de sa forme avec les parties ascendante et descendante du PA. Si les PA de sortie étaient émis au taux très élevé d'un PA tous les  $\Delta t$ , alors la sortie  $y$  de l'Éq. (6.9) apparaîtrait comme un niveau constant 1. Cependant, quand le système de l'Éq. (6.9) répond au train de PA d'entrée  $s(t)$  de l'Éq. (6.8), les PA de sortie sont émis avec un intervalle de répétition d'ordre  $T$  beaucoup plus grand que le pas de temps  $\Delta t$ . Avec cette condition, un PA de sortie peut être émis avec une probabilité appréciable seulement lorsqu'un PA d'entrée est présent, et par conséquent un niveau 1 survenant sur la sortie sera presque invariablement précédé et suivi par le niveau 0, restaurant une nature de PA pour la sortie, dans la réponse à un train de PA d'entrée avec la répétition  $T \gg \Delta t$ .

La nature simple de la sortie  $y$  de l'Éq. (6.9) qui comprend seulement les niveaux 0 ou 1 est une caractéristique clé pour permettre le développement d'un traitement exact du système. Elle est aussi appropriée pour représenter le train de PA de sortie répondant à un train de PA d'entrée avec un intervalle de répétition  $T \gg \Delta t$ . Les PA individuels dans les trains, à la fois dans le modèle 1 et dans le modèle de neurone, sont représentés de façon schématique. Cela est encore conforme avec une supposition générale dans la modélisation neuronale qui admet que la forme exacte de chaque PA individuel (quasi invariante) n'est pas significative pour le codage d'information, réalisé plutôt par l'organisation temporelle dans les trains de ces PA .

L'aptitude que nous avons montré, pour notre modèle 1 à fournir une approximation pour la résonance stochastique dans le neurone, peut essentiellement être attribuée au fait que l'effet de résonance est essentiellement sensible aux corrélations sur une échelle

de temps dominante formée par la période cohérente  $T$ , et à l'amplitude totale du signal d'entrée par rapport au seuil de la non-linéarité.

Plus généralement, le modèle général du chapitre 4 suppose une non-linéarité statique et un bruit blanc (pas toujours). Mais on voit que si on a une non-linéarité dynamique présentant un effet intégratif sur  $\sim \tau_m$ , avec un bruit coloré de longueur de corrélation  $\sim \tau_c$ , et si  $\tau_m$  et  $\tau_c$  sont très petits devant la période cohérente du signal périodique, alors la théorie générale du chapitre 4 fournit une bonne approximation du comportement du système.

## 6.5 Conclusion des études sur le neurone

Nous avons exploré la possibilité de résonance stochastique dans la transmission de trains de PA par les neurones. Nous avons montré son existence dans un modèle intègre-et-tire, avec un train de PA cohérent et un train de PA de bruit. Nous avons ensuite testé la robustesse de l'effet en fonction des caractéristiques du modèle de neurone, en considérant de multiples voies cohérentes, de multiples voies de bruit, et avec un modèle plus réaliste de neurone. Enfin nous avons montré la possibilité d'obtenir de la résonance stochastique avec des PA cohérents et un bruit continu, dans une situation se prêtant à une comparaison à la théorie générale présentée dans le chapitre 4.

Dans les trois études sur la transmission de PA que nous venons de présenter dans ce chapitre, nous avons considéré des trains de PA périodiques. Dans le système nerveux, de tels trains peuvent servir de support pour la transmission de l'information, par exemple, au moyen d'une modulation basse fréquence. D'autre part, dans le cas de neurones sensoriels, un train de PA, périodique sur une plage de temps suffisamment large, peut permettre le codage d'un stimulus stationnaire.

Nous pouvons par ailleurs envisager une extension de nos études à la transmission de trains de PA apériodiques. En effet, les mécanismes neuronaux qui, dans le cas de trains périodiques, permettent de tirer bénéfice d'un ajout de bruit, peuvent également s'appliquer avec un train apériodique. Si nous considérons un train de PA apériodique dont les PA sont rares et suffisamment espacés entre eux dans le temps, un tel train ne permettra pas au neurone de répondre. Si on ajoute des PA de bruit rares également, certains de ces PA survenant près d'un PA cohérent vont permettre l'émission d'un PA de sortie corrélé avec le PA cohérent. On conçoit alors que si on augmente le nombre des PA de bruit, cela va d'abord favoriser le signal cohérent, pour lui être ensuite défavorable au delà d'un niveau de bruit optimal. Nous étudions actuellement cette possibilité de résonance apériodique qui offre des perspectives d'extension pour l'exploration de la résonance stochastique dans la transmission de PA par les neurones.



# Conclusion

Dans ce rapport nous avons présenté notre travail dans l'étude des signaux et systèmes non linéaires pour lesquels le bruit peut jouer un rôle bénéfique au moyen de la résonance stochastique.

Nous avons développé des analyses théoriques ainsi que des études par simulation et expérimentation qui nous ont permis de mettre en évidence des effets de résonance stochastique périodique et apériodique.

Nous avons en particulier développé une formulation générale pour la résonance stochastique périodique qui unifie les résultats d'études précédentes. Nous avons ensuite utilisé cette formulation pour construire un modèle général pour la résonance stochastique dans la classe des systèmes dynamiques non linéaires dont les caractères dynamique et non linéaire sont découplés. Le développement d'un modèle général pour ces systèmes nous a permis d'analyser théoriquement des systèmes connus pour résonner stochastiquement mais pour lesquels les analyses classiquement utilisées ne proposaient que des solutions approximées. Nous avons pu aussi au moyen de ce modèle général, concevoir des nouveaux systèmes se prêtant à résonner stochastiquement, comme nous avons pu le vérifier avec des expérimentations et des simulations.

Nous avons également contribué à étendre le champ de la résonance stochastique intervenant avec des signaux apériodiques. Nous avons été les premiers à définir et obtenir une capacité informationnelle qui nous a permis d'observer un effet de résonance stochastique apériodique dans un système statique ainsi que dans un système dynamique. Nous avons de plus présenté une illustration expérimentale de résonance stochastique apériodique spatiale, pour la transmission d'une image par un système optique non linéaire.

Nous avons étudié la résonance stochastique dans la transmission du signal par le neurone. Nous avons montré pour la première fois la résonance stochastique dans la transmission de trains de PA par des neurones, avec un modèle simple de neurone. Nous avons ensuite testé la robustesse de l'effet de résonance stochastique dans des neurones en considérant des situations plus plausibles, pour les valeurs des paramètres conditionnant le neurone et pour les types de bruit intervenant : avec un bruit externe, sous forme de trains de PA provenant de neurones périphériques, ainsi qu'avec un bruit continu interne au neurone.

La résonance stochastique, entendue comme un effet de transmission non linéaire du signal assistée par le bruit, et sa généralisation sous diverses formes à différents types de signaux et systèmes, constituent des avancées relativement récentes. Actuellement,

on peut dire que les études de la résonance stochastique se développent selon trois voies d'intérêt importantes :

*i)* La résonance stochastique présente d'abord un intérêt conceptuel important par l'illustration qu'elle donne, de manière précise et quantifiée, de la possibilité dans une grande diversité de systèmes complexes (non linéaires), d'extraire de l'ordre hors du désordre ou du signal utile hors du bruit. C'est dans cette direction que les études de la résonance stochastique se sont le plus développées jusqu'ici.

*ii)* L'étude de la présence et du rôle de la résonance stochastique dans les systèmes neuronaux constitue une deuxième voie d'intérêt. Les systèmes neuronaux constituent une classe de systèmes non linéaires naturels très efficaces pour le traitement du signal et de l'information. Il est particulièrement important de comprendre le rôle que peut jouer la résonance stochastique dans le traitement non linéaire du signal réalisé par les neurones.

*iii)* Une troisième voie d'intérêt réside dans les applications technologiques de la résonance stochastique. Cette voie commence tout juste à être abordée, et demeure encore largement à explorer. Des possibilités sont envisagées pour la détection de faibles signaux bruités, dans certains dispositifs [53, 54]. Les potentialités révélées par la résonance stochastique rendent de telles explorations très valables.

Des perspectives d'applications particulièrement riches pourraient survenir du développement conjoint des voies *ii* et *iii*. Les applications technologiques sont actuellement limitées par le fait que la résonance stochastique est essentiellement un effet non linéaire, opérant principalement en présence de non-linéarités à seuil ou dans des systèmes dont les états accessibles sont séparés par des barrières de potentiel, (quoique pas exclusivement [4, 14]). Par opposition, dans les dispositifs technologiques conçus pour l'acquisition et le traitement du signal, spécialement aux bas niveaux de traitement là où le bruit ambiant peut être important, l'effort vise principalement à rendre linéaires les systèmes, interdisant ainsi l'exploitation de la résonance stochastique. Les traitements linéaires présentent de nombreux avantages, spécialement dans la conception et le contrôle de dispositifs technologiques ; ils présentent également des limitations.

De leur côté, les systèmes neuronaux naturels offrent l'exemple de systèmes très performants pour le traitement de l'information, qui mettent en jeu, dès les plus bas niveaux, des constituants intrinsèquement non linéaires. On peut voir là la suggestion de possibilités radicalement distinctes, encore à explorer, pour un traitement de l'information essentiellement non linéaire, où la résonance stochastique serait une propriété parmi d'autres concourant à l'efficacité des performances.

# Références

- [1] V. S. Anishchenko, M. A. Safonova, L. O. Chua. Stochastic resonance in Chua's circuit. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 2:397–401, 1992.
- [2] R. Benzi, G. Parisi, A. Sutera, A. Vulpiani. Stochastic resonance in climatic changes. *Tellus*, 34:10–16, 1982.
- [3] R. Benzi, A. Sutera, A. Vulpiani. The mechanism of stochastic resonance. *Journal of Physics A*, 14:L453–L458, 1981.
- [4] S. M. Bezrukov, I. Vodyanov. Stochastic resonance in non-dynamical systems without response thresholds. *Nature*, 385:319–321, 1997.
- [5] A. Bulsara, E. W. Jacobs, T. Zhou, F. Moss, L. Kiss. Stochastic resonance in a single neuron model: Theory and analog simulation. *Journal of Theoretical Biology*, 152:531–555, 1991.
- [6] A. R. Bulsara, L. Gammaitoni. Tuning in to noise. *Physics Today*, 49:39–45, March 1996.
- [7] A. R. Bulsara, S. B. Lowen, C. D. Rees. Cooperative behavior in the periodically modulated Wiener process: Noise-induced complexity in a model neuron. *Physical Review E*, 49:4989–5000, 1994.
- [8] J. M. Casado, J. J. Mejias, M. Morillo. Comments on “Stochastic resonance in a periodic potential system under a constant driving force”. *Physics Letters A*, 197:365–366, 1995.
- [9] F. Chapeau-Blondeau. Stochastic resonance in the Heaviside nonlinearity with white noise and arbitrary periodic signal. *Physical Review E*, 53:5469–5472, 1996.
- [10] F. Chapeau-Blondeau. Input–output gains for signal in noise in stochastic resonance. *Physics Letters A*, 232:41–48, 1997.
- [11] F. Chapeau-Blondeau. Noise-enhanced capacity via stochastic resonance in an asymmetric binary channel. *Physical Review E*, 55:2016–2019, 1997.
- [12] F. Chapeau-Blondeau, N. Chambet. Synapse models for neural networks: From ion channel kinetics to multiplicative coefficient  $w_{ij}$ . *Neural Computation*, 7:713–734, 1995.

- [13] F. Chapeau-Blondeau, X. Godivier. Stochastic resonance in nonlinear transmission of spike signals: An exact model and an application to the neuron. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 6:2069–2076, 1996.
- [14] F. Chapeau-Blondeau, X. Godivier. Theory of stochastic resonance in signal transmission by static nonlinear systems. *Physical Review E*, 55:1478–1495, 1997.
- [15] F. Chapeau-Blondeau, X. Godivier, N. Chambet. Stochastic resonance in a neuron model that transmits spike trains. *Physical Review E*, 53:1273–1275, 1996.
- [16] J. J. Collins, C. C. Chow, T. T. Imhoff. Aperiodic stochastic resonance in excitable systems. *Physical Review E*, 52:R3321–R3324, 1995.
- [17] J. J. Collins, C. C. Chow, T. T. Imhoff. Stochastic resonance without tuning. *Nature*, 376:236–238, 1995.
- [18] T. M. Cover, J. A. Thomas. Elements of Information Theory. Wiley, New York, 1991.
- [19] M. DeWeese, W. Bialek. Information flow in sensory neurons. *Nuovo Cimento*, 17D:733–741, 1995.
- [20] J. K. Douglass, L. Wilkens, E. Pantazelou, F. Moss. Noise enhancement of information transfer in crayfish mechanoreceptors by stochastic resonance. *Nature*, 365:337–340, 1993.
- [21] M. I. Dykman, H. Haken, G. Hu, D. G. Luchinsky, R. Mannella, P. V. E. McClintock, C. Z. Ning, N. D. Stein, N. G. Stocks. Linear response theory in stochastic resonance. *Physics Letters A*, 180:332–336, 1993.
- [22] M. I. Dykman, D. G. Luchinsky, R. Mannella, P. V. E. McClintock, N. D. Stein, N. G. Stocks. Stochastic resonance: Linear response theory and giant nonlinearity. *Journal of Statistical Physics*, 70:463–478, 1993.
- [23] M. I. Dykman, D. G. Luchinsky, R. Mannella, P. V. E. McClintock, N. D. Stein, N. G. Stocks. Stochastic resonance in perspective. *Nuovo Cimento*, 17D:661–683, 1995.
- [24] M. I. Dykman, R. Mannella, P. V. E. McClintock, N. G. Stocks. Phase shifts in stochastic resonance. *Physical Review Letters*, 68:2985–2988, 1992.
- [25] M. I. Dykman, P. V. E. McClintock, R. Mannella, N. G. Stocks. Stochastic resonance in the linear and nonlinear responses of a bistable system to a periodic field. *Soviet Phys. JETP Letters*, 52:144–154, 1990.
- [26] S. Fauve, F. Heslot. Stochastic resonance in a bistable system. *Physics Letters A*, 97:5–7, 1983.

- [27] D. Ferster. Is neural noise just a nuisance? *Science*, 273:1812, 1996.
- [28] L. Gammaitoni. Stochastic resonance and the dithering effect in threshold physical systems. *Physical Review E*, 52:4691–4698, 1995.
- [29] L. Gammaitoni. Stochastic resonance in multi-threshold systems. *Physics Letters A*, 208:315–322, 1995.
- [30] L. Gammaitoni, F. Marchesoni, E. Menichella-Saetta, S. Santucci. Stochastic resonance in bistable systems. *Physical Review Letters*, 62:349–352, 1989.
- [31] L. Gammaitoni, M. Martinelli, L. Pardi, S. Santucci. Observation of stochastic resonance in bistable electron-paramagnetic-resonance systems. *Physical Review Letters*, 67:1799–1802, 1991.
- [32] L. Gammaitoni, E. Menichella-Saetta, S. Santucci, F. Marchesoni, C. Presilla. Periodically time modulated bistable systems: Stochastic resonance. *Physical Review A*, 40:2114, 1989.
- [33] Z. Gingl, L. B. Kiss, F. Moss. Non-dynamical stochastic resonance: Theory and experiments with white and arbitrarily coloured noise. *Europhysics Letters*, 29:191–196, 1995.
- [34] M. Gitterman, I. B. Khalfin, B. Y. Shapiro. On the onset of stochastic resonance. *Physics Letters A*, 184:339–340, 1994.
- [35] M. Gitterman, G. H. Weiss. Escape of a periodically driven particules from a metastable state in a noisy system. *Journal of Statistical Physics*, 70:107–123, 1993.
- [36] B. Gluckman, T. I. Netoff, E. J. Neel, W. L. Ditto, M. L. Spano, S. J. Schiff. Stochastic resonance in a neural network from mamalian brain. *Physical Review Letters*, 77:4098–4101, 1996.
- [37] X. Godivier. *Traitement de signaux neuronaux expérimentaux*. Rapport du DEA Signaux et Images en Biologie et Médecine, Université d’Angers, 1994.
- [38] X. Godivier. *Études de comportements complexes dans un modèle simple de neurone*. Rapport interne, Faculté des Sciences, Université d’Angers, 1995.
- [39] X. Godivier, F. Chapeau-Blondeau. Noise-enhanced transmission of spike trains in the neuron. *Europhysics Letters*, 35:473–477, 1996.
- [40] X. Godivier, F. Chapeau-Blondeau. Noise-assisted signal transmission by a nonlinear electronic comparator: Experiment and theory. *Signal Processing*, 56:293–303, 1997.
- [41] X. Godivier, F. Chapeau-Blondeau. La résonance stochastique chez le neurone, ou le signal utile favorisé par le bruit. In *Actes des 8<sup>èmes</sup> journées Neurosciences et Sciences de l’Ingénieur*, pages 79–82, Marly-le-Roi, France, 5–10 mai 1996.

- [42] X. Godivier, F. Chapeau-Blondeau. La résonance stochastique ou la transmission non linéaire du signal favorisée par le bruit. In *Colloque de Recherche Doctorale Automatique Génie informatique Images*, Angers, France, 9–11 décembre 1997.
- [43] X. Godivier, F. Chapeau-Blondeau. Stochastic resonance in the information capacity of a nonlinear dynamic system. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 8, mars 1998.
- [44] X. Godivier, J. Rojas-Varela, F. Chapeau-Blondeau. Noise-assisted signal transmission via stochastic resonance in a diode nonlinearity. *Electronics Letters*, 33:1666–1668, 1997.
- [45] D. Gong, G. Qin, G. Hu, X. Wen. Experimental study of stochastic resonance. *Physics Letters A*, 159:147–152, 1991.
- [46] D. C. Gong, G. Hu, X. D. Wen, C. Y. Yang, G. R. Qin, R. Li, D. F. Ding. Experimental study of signal-to-noise ratio of stochastic resonance systems. *Physical Review A*, 46:3243–3249, 1992.
- [47] A. N. Grigorenko, P. I. Nikitin. Stochastic resonance in a bistable magnetic system. *IEEE Transactions on Magnetics*, 31:2491–2493, 1965.
- [48] C. Heneghan, C. C. Chow, J. J. Collins, T. T. Imhoff, S. B. Lowen, M. C. Teich. Information measures quantifying aperiodic stochastic resonance. *Physical Review E*, 54:R2228–R2231, 1996.
- [49] J. Héroult, C. Jutten. *Réseaux neuronaux et traitement du signal*. Hermes, Paris, 1994.
- [50] A. D. Hibbs, A. L. Singsaas, E. W. Jacobs, A. R. Bulsara, J. J. Bekkedahl, F. Moss. Stochastic resonance in a superconducting loop with a Josephson junction. *Journal of Applied Physics*, 77:2582–2590, 1995.
- [51] G. Hu, H. Haken, C. Z. Ning. A study of stochastic resonance without adiabatic approximation. *Physics Letters A*, 172:21–28, 1992.
- [52] M. E. Inchiosa, A. R. Bulsara. Nonlinear dynamic elements with noisy sinusoidal forcing: Enhancing response via nonlinear coupling. *Physical Review E*, 52:327–339, 1995.
- [53] M. E. Inchiosa, A. R. Bulsara. Signal detection statistics of stochastic resonators. *Physical Review E*, 53:R2021–R2024, 1996.
- [54] M. E. Inchiosa, A. R. Bulsara, L. Gammaitoni. High-order resonant behavior in asymmetric nonlinear stochastic systems. *Physical Review E*, 55:4049–4056, 1997.
- [55] P. Jung. Threshold devices: Fractal noise and neural talk. *Physical Review E*, 50:2513–2522, 1994.

- [56] P. Jung. Stochastic resonance and optimal design of threshold detectors. *Physics Letters A*, 207:93–104, 1995.
- [57] P. Jung, P. Hänggi. Stochastic nonlinear dynamics modulated by external periodic forces. *Europhysics Letters*, 8:505–510, 1989.
- [58] L. B. Kiss. Possible breakthrough: Significant improvement of signal to noise ratio by stochastic resonance. In R. Katz, editor, *Chaotic, Fractal and Nonlinear Signal Processing*, pages 382–387. AIP Press, New York, 1996.
- [59] C. Koch, I. Segev. *Methods in Neuronal Modeling – From Synapses to Networks*. MIT Press, Cambridge (MA), 1989.
- [60] H. A. Kramers. Brownian motion in a field of force and the diffusion model of chemical reactions. *Physica*, 7:284–304, 1940.
- [61] D. S. Leonard, L. E. Reichl. Stochastic resonance in a chemical reaction. *Physical Review E*, 49:1734–1737, 1994.
- [62] J. E. Levin, J. P. Miller. Broadband neural encoding in the cricket cercal sensory system enhanced by stochastic resonance. *Nature*, 380:165–168, 1996.
- [63] A. Longtin. Stochastic resonance in neuron models. *Journal of Statistical Physics*, 70:309–327, 1993.
- [64] A. Longtin, A. R. Bulsara, D. Pierson, F. Moss. Bistability and the dynamics of periodically forced sensory neurons. *Biological Cybernetics*, 70:569–578, 1994.
- [65] A. Longtin, A. R. Bulsara, F. Moss. Time-interval sequences in bistable systems and the noise-induced transmission of information by sensory neurons. *Physical Review Letters*, 67:656–659, 1991.
- [66] B. McNamara, K. Wiesenfeld. Theory of stochastic resonance. *Physical Review A*, 39:4854–4869, 1989.
- [67] F. Moss, J. K. Douglass, L. Wilkens, D. Pierson, E. Pantazelou. Stochastic resonance in an electronic Fitzhugh-Nagumo model. *Annals of New York Academy of Sciences*, 706:26–41, 1993.
- [68] F. Moss, D. Pierson, D. O’Gorman. Stochastic resonance: Tutorial and update. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 4:1383–1398, 1994.
- [69] Z. Neda. Stochastic resonance in 3D Ising ferromagnets. *Physics Letters A*, 210:125–128, 1996.
- [70] C. Nicolis. Stochastic aspects of climatic transitions— response to periodic forcing. *Tellus*, 34:1–9, 1982.

- [71] E. Pantazelou, C. Dames, F. Moss, J. Douglass, L. Wilkens. Temperature dependence and the role of internal noise in signal transduction efficiency of crayfish mechanoreceptors. *International Journal of Bifurcation and Chaos*, 5:101–108, 1995.
- [72] A. Papoulis. *Probability, Random Variables, and Stochastic Processes*. McGraw-Hill, New York, 1991.
- [73] C. Presilla, F. Marchesoni, L. Gammaitoni. Periodically time-modulated bistable systems: Nonstationary statistical properties. *Physic Review A*, 40:2105–2113, 1989.
- [74] P. Réfrégier. *Théorie du Signal, Signal–Information–Fluctuations*. Masson, Paris, 1993.
- [75] M. Riani, E. Simonotto. Stochastic resonance in the perceptual interpretation of ambiguous figures, a neural network model. *Physical Review Letters*, 72:3120–3123, 1994.
- [76] H. Risken. *The Fokker-Planck Equation*. Springer, Berlin, 1985.
- [77] G. Sampath, S. K. Srinivasan. *Stochastic Models for Spike Trains of Single Neurons*. Spinger, Berlin, 1977.
- [78] E. Simonotto, M. Riani, C. Seife, M. Roberts, J. Twitty, F. Moss. Visual perception of stochastic resonance. *Physical Review Letters*, 78:1186–1189, 1997.
- [79] M. Spano, M. Wun-Fogle, W. L. Ditto. Experimental observation of stochastic resonance in a magnetoelastic ribbon. *Physical Review A*, 46:5253–5256, 1992.
- [80] N. G. Stocks, N. D. Stein, P. V. E. McClintock. Stochastic resonance in monostable systems. *Journal of Physics A*, 26:L385–L390, 1993.
- [81] N. G. Stocks, N. D. Stein, S. M. Soskin, P. V. E. McClintock. Zero-dispersion stochastic resonance. *Journal of Physics A*, 25:L1119–L1124, 1992.
- [82] F. Vaudelle, J. Gazengel, G. Rivoire, X. Godivier, F. Chapeau-Blondeau. Stochastic resonance and noise-enhanced transmission of spatial signals in optics: The case of scattering. *Journal of the Optical Society of America*, 1997 (soumis).
- [83] G. Vemuri, R. Roy. Stochastic resonance in a bistable ring laser. *Physical Review A*, 39:4668–4674, 1989.
- [84] K. Wiesenfeld F. Moss. Stochastic resonance and the benefits of noise: From ice ages to crayfish and SQUIDS. *Nature*, 373:33–36, 1995.
- [85] K. Wiesenfeld, D. Pierson, E. Pantazelou, C. Dames, F. Moss. Stochastic resonance on a circle. *Physical Review Letters*, 72:2125–2129, 1994.