Commande supervisée des automates (max,+) : des aspects temporels

Jan Komenda
Institut de Mathématiques, Académie des Sciences,
Brno (République Tchèque)
avec Michel Al Saba et Jean-Louis Boimond

May 29, 2006

(séminaire LISA Angers)

Résumé

- 1. Introduction (à la commande supervisée et aux automates (max,+)).
- 2. Automates (max,+) concurrents vs. safe Timed Petri nets
- 3. Produit synchrone des automates (max,+) : décomposition de la matrice morphisme.
- 4. Application à la commande supervisée : critère JAT
- 5. Exemple d'un SFPM
- 6. Perspectives de recherche

Commande supervisée des automates

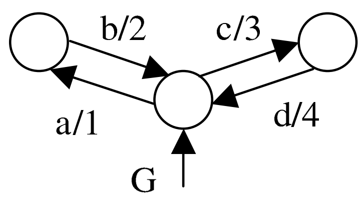
- Motivation pour la commande supervisée
- Problèmes de contrôle logiques : états défendus et blocage (viabilité).
- Problèmes temporels : satisfaction des contraintes temporelles (dates limites)
- Commande des systèmes complexes et distribués : systèmes de production, réseaux informatiques et de communication
- SED aux structures concurrentes (aut. modulaires) : automate global est le produit synchrone des automates locaux

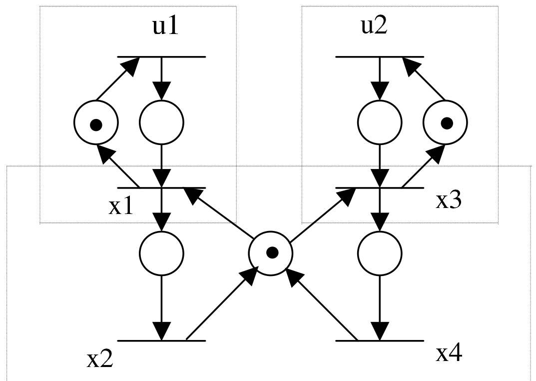
Automates (max,+)

- Automates (max,+) : classe importante des automates temporisés avec 1 horloge et des automates à multiplicité (Mealy)
- **SED représentés par automates (max,+)**
- Les deux phénomènes importants : synchronisation et concurrence (partage des resource) sont présents
- RdP temporisés - avantage de simplicité de modélisation, mais plus difficiles pour méthodes analytiques
- Automates (max,+) - avantage de simplicité du modèle, mais plus difficile d'obtenir un tel modèle
- Commande supervisée a été généralisée aux automates temporisés
- La méthode repose sur la supervision des automates logiques
- Notre approche : commande supervisée des automates (max,+) inspirées par les GET

Définition d'automate (max,+)

$G = \langle Q, A, q_0, Q_m, t\rangle$ avec
Q ... états
A ... événements
q_0 ... état initial
Q_m ... états finaux
$t : Q \times A \times Q \to R_{max}$ ... transition
interprétation : durée minimale de transition.
N.b. cette définition ne considère pas les délais initiaux et finaux





Séries formelles

Comportements des automates (max,+) sont des séries formelles
$R_{max}(A) = \{\omega :\ A^* \to R_{max}\}$.
Comportement de $G = \langle Q, A, q_0, Q_m, t\rangle$
pour $w = a_1 \dots a_n \in A^*$ est défini comme

$$l(G)(w) = max_{q_1,\dots,q_n \in Q:\ q_n \in Q_m}(t(q_o, a_1, q_1) + t(q_1, a_2, q_2) + \cdots + t(q_{n-1}, a_n, q_n)).$$

$l(G)(w)$ est le plus long chemin correspondant au label w
de l'état initial à un état final.

Avec le formalisme matriciel:

$$l(G)(w) = \alpha \otimes \mu(w) \otimes \beta,$$

où $\alpha = (e, \varepsilon, \dots, \varepsilon)$ et similairement pour β

Dioid des séries formelles

Dioid des séries formelles avec des variables de A et les coefficients de R_{max}:

$$R_{max}(A) = \{s : A^* \to R_{max}\}.$$

Notation série : $s = \bigoplus_{w \in A^*} s(w)w$

$R_{max}(A)$ forme un dioid avec l'addition point à point et la multiplication de Cauchy (convolution) définies par:
Pour $s = \oplus_{w \in A^*} s(w)w \in R_{max}(A)$ et $s' = \oplus_{w \in A^*} s'(w)w \in R_{max}(A)$:

$$s \oplus s' = \bigoplus_{w \in A^*} (s(w) \oplus s'(w))w$$

et

$$s \otimes s' = \bigoplus_{w \in A^*} (\bigoplus_{uv=w} s(u)s'(v))w.$$

Ce dioid est isomorphe au dioid des dateurs généralisés via

$$y : \; A^* \to R_{max} \quad \longrightarrow \quad \oplus_{w \in A^*} y(w)w \in R_{max}(A).$$

Matrice morphisme d'un automate (max,+)

Pour $t : Q \times A \times Q \to R_{max}$ est associée $\forall a \in A$ la matrice $\mu(a) : Q \times Q \to R_{max}$ par

$$\mu(a)_{q,q'} = t(q, a, q').$$

μ associée à G est considérée comme élément de $R_{max}(A)^{Q\times Q}$, i.e.

$$\mu = \bigoplus_{w \in A^*} \mu(w)w$$

Cependant, en étendant sa définition aux $w \in A^*$ et en utilisant les propriétés de morphisme :

$$\mu(a_1 \ldots a_n) = \mu(a_1) \ldots \mu(a_n).$$

μ est complètement déterminée par $\mu(a),\ a \in A$.
En effet,

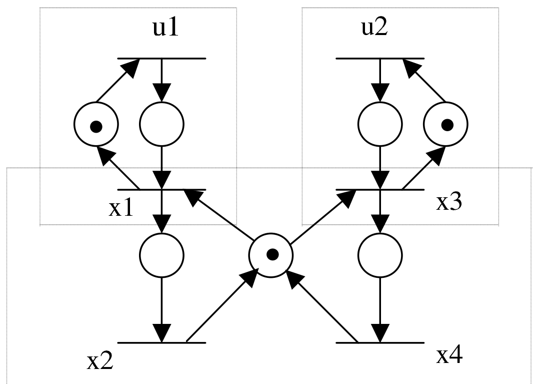
$$\mu^* = (\oplus_{a\in A}\mu(a)a)^*.$$

Avec abus de notation on a

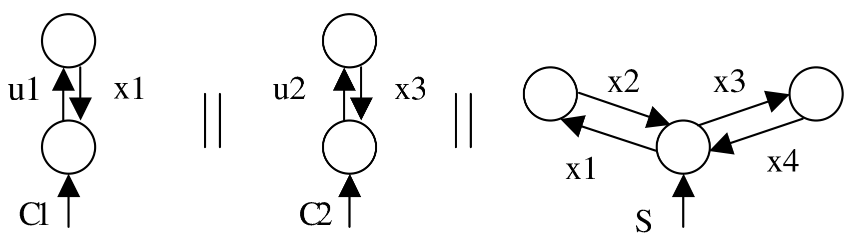
$$\mu = \bigoplus_{a\in A} \mu(a)a.$$

Automates (max,+) vs. RdP saufs temporisés

RdP : modèles naturels conçus pour systèmes concurrents



Pour les automates le produit synchrone est utilisé



Définition. (Produit synchrone)
Pour automates (max,+)

$$G_1 = (Q_1, A_1, q_{1,0}, Q_{1,m}, t_1),\ G_2 = (Q_2, A_2, q_{2,0}, Q_{2,m}, t_2).$$

Leur *produit synchrone* est

$$\begin{aligned}
G_1 \| G_2 &= (Q_1 \times Q_2, A_1 \cup A_2, q_0, Q_m), t \\
q_0 &= (q_{1,0}, q_{2,0}), \quad Q_m = Q_{1,m} \times Q_{2,m}, \\
t(\langle q_1, q_2\rangle, a, \langle q_1', q_2'\rangle) &= \begin{cases}
t_1(q_1, a, q_1') \oplus t_2(q_2, a, q_2'), & \text{si } a \in A_1 \cap A_2 \text{ et} \\
 & t_1(q_1, a, q_1') \neq \varepsilon \neq t_2(q_2, a, q_2') \\
 & \ i = 1, 2,\ f_i(q_i, a)! \\
t_1(q_1, a, q_1'), & \text{si } a \in A_1 \setminus A_2 \\
t_2(q_2, a, q_2'), & \text{si } a \in A_2 \setminus A_1\ f_2(q_2, a)! \\
\text{undefined}, & \text{autrement : } a \in A_1 \cap A_2 \text{ et} \\
 & t_1(q_1, a, q_1') = \varepsilon \text{ ou } t_2(q_2, a, q_2') = \varepsilon
\end{cases}
\end{aligned}$$

Cette définition étend le produit synchrone aux automates (max,+)
(de manière intuitive synchronisation est interprétée comme l'intersection des contraintes
(idem pour automates temporisés).
Compatible avec produit synchrone des automates temporisés

Définition. (Automate (max,+) contrôlé)

Un système contrôlé (en boucle fermée) est défini comme

$$G_c = C \| G,$$

où C est un autre automate (max,+) appelé superviseur

- Un superviseur peut interdire et retarder des événements
- Nous étudions d'abord le cas spécial, où le superviseur agit seulement sur les délais, et non sur l'occurrence des événements (l'aspect logique)

Représentation algébrique des automates (max,+)

I. Approche dateurs généralisés

$\forall w \in A^*$ (vecteur d'état) $x(w) \in R_{max}^{Q}$:

$$x(w) = \alpha \otimes \mu(w),$$
$$y(w) = x(w) \otimes \beta$$

Donc, $\forall q \in Q$

$$x_q(w) = \bigoplus \alpha_{j \in Q} \otimes \mu_{jq}(w),$$

autrement dit la date dans laquelle on entre dans l'état q avec la tâche w si l'on commence dans l'état initial.
S. Gaubert (1995) : automates (max,+) admettent une représentation linéaire à l'aide des dateurs généralisés de A^* vers R_{max}. $y : A^* \to R_{max}$ satisfait les équations:

$$x(wa) = x(w)\mu(a)$$
$$x(e) = \alpha$$
$$y(w) = x(w)\beta,$$

avec α et β déterminant l'état initial : $\alpha = (\varepsilon, \ldots, \varepsilon, e, \varepsilon, \ldots, \varepsilon)$, où e est sur l'endroit correspondant à l'état initial et sim. pour β,

II. Approche séries formelles

De même que pour les GET, les automates (max,+) admettent une représentation linéaire dans le dioid des series formelles avec les variables noncommutative de A : $R_{max}(A) = (R_{max})^{A^*}$.

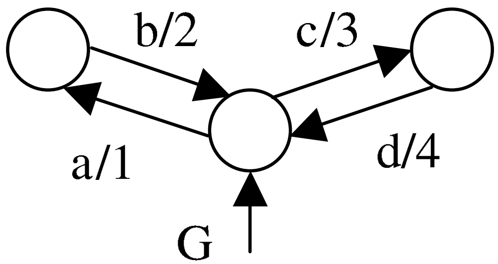
$$
\begin{aligned}
x &= x\mu \oplus \alpha \\
y &= x\beta,
\end{aligned}
$$

où $\mu = \bigoplus_{a \in A} \mu(a)a \in R_{max}(A)$

Le comportement autonome d'un automate (max,+) est la plus petite solution de cette équation:

$$y = \alpha\mu^*\beta$$

Pour exemple (automate G)



$$(x_1\ x_2\ x_3) = (x_1\ x_2\ x_3) \begin{bmatrix} \varepsilon & 2b & 4d \\ 1a & \varepsilon & \varepsilon \\ 3c & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \oplus \alpha$$

$$y = x\beta,$$

where $x = (x_1\ x_2\ x_3)$,
$\alpha = (e\ \varepsilon\ \varepsilon)$ et $\beta = (e\ e\ e)$.

Opérations tensorielles

Si A est une matrice de dimension $m \times n$ et B une matrice de dimension $p \times q$ sur un dioid, alors leur produit de Kronecker (tensoriel) $A \otimes^t B$ est la matrice de dimension $mp \times nq$:

$$A \otimes^t B = \begin{bmatrix} a_{11}B & \cdots & a_{11}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}B & \cdots & a_{mn}B \end{bmatrix}$$

En particulier, $C = A \otimes^t B$ des matrices carrées $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{n}$ et $B = (b_{kl})_{k,l=1}^{m}$ est une matrice de dimension $n.m \times n.m$ avec

$$C_{ik,jl} = a_{ij} \otimes^t b_{kl}.$$

La somme tensorielle des matrices carrées sur un dioide est définie comme

$$A \oplus^t B = A \otimes^t E_m \oplus E_n \otimes^t B,$$

où E_m et E_n sont les matrices d'identité de dimension m et n, resp.

Soient G_1 et G_2 des automates (max,+) avec les matrices morphismes notées μ_1 et μ_2, resp.
et B_1 et B_2 les matrices morphismes des automates booléens correspondants
E_1 et E_2 sont matrices d'identité des dimensions de G_1 et G_2, resp.

La matrice morphisme du produit synchrone $G_1 \| G_2$ admet la décomposition suivante:

$$\mu_{G_1\|G_2}(a) = \begin{cases} \mu_1(a) \otimes^t B_2(a) \oplus B_1(a) \otimes^t \mu_2(a), & \text{if } a \in A_1 \cap A_2 \\ \mu_1(a) \otimes^t E_2, & \text{if } a \in A_1 \setminus A_2 \\ E_1 \otimes^t \mu_2(a), & \text{if } a \in A_2 \setminus A_1 \end{cases} ,$$

où

$$[B_1(a)]_{ij} = \begin{cases} e & \text{si } [\mu_1(a)]_{ij} \neq \varepsilon \\ \varepsilon & \text{si } [\mu_1(a)]_{ij} = \varepsilon \end{cases} \quad \text{et } [B_2(a)]_{ij} = \begin{cases} e & \text{si } [\mu_2(a)]_{ij} \neq \varepsilon \\ \varepsilon & \text{si } [\mu_2(a)]_{ij} = \varepsilon \end{cases}$$

Cas général $n \in N$

Généralisation au cas $n \in \mathbb{Z}_n$

Notation : $\mathbb{Z}_n^a = \{i \in \mathbb{Z}_n : \ a \in A_i\}$.

La matrice morphisme du produit synchrone $G_1 \| \ldots \| G_n$ admet la décomposition suivante:

$$\mu_{G_1\|\ldots\|G_n}(a) = \bigoplus_{i \in \mathbb{Z}_n^a} M_1(a) \otimes^t \ldots M_{i-1}(a) \otimes^t \mu_{S_i}(a) \otimes^t M_{i+1}(a) \otimes^t \ldots M_n(a),$$

où $M_i(a), i \in \mathbb{Z}_n$ sont les matrices de dimensions de $G_i, i \in \mathbb{Z}_n$, resp. définies par

$$M_i(a) = \begin{cases} E_i, & \text{if } a \notin A_i \\ B_i(a), & \text{if } a \in A_i \end{cases}$$

Commande supervisée des automates (max,+).

$x_{C\|G} : A^* \to R_{max}^{m\times n}$ satisfait:

$$
\begin{aligned}
x_{C\|G} &= x_{C\|G}\mu_{C\|G} \oplus \alpha \\
y_{C\|G} &= x_{C\|G}\beta,
\end{aligned}
$$

où $\mu_{C\|G}$ est la matrice morphisme du système contrôlé.

On obtient:

$$
\begin{aligned}
x_{C\|G} &= \alpha\mu_{C\|G}^*, \\
y_{C\|G} &= \alpha\mu_{C\|G}^*\beta,
\end{aligned}
$$

d'où l'intérêt de l'étude des propriétés de $\mu_{C\|G}^*$.

Matrice morphisme du système contrôlé.

Notation : A_c et A_g
$A_c = A_c \setminus A_g \cup (A_c \cap A_g)$ Nous obtenons:

$$\mu_{C||G} = \bigoplus_{u \in A_c \setminus A_g} [\mu_c(a) \otimes^t E_g] u \oplus$$

$$\bigoplus_{a \in A_c \cap A_g} [\mu_c(a) \otimes^t B_g(a) \oplus B_c(a) \otimes^t \mu_g(a)] a \oplus \bigoplus_{a \in A_g \setminus A_c} [E_c \otimes^t \mu_g(a)] a.$$

La décomposition de $\mu_{C||G}$ sépare la partie commande (terme $\bigoplus_{u \in A_c \setminus A_g} [\mu_c(a) \otimes^t E_g] u$) de la partie autonome de $\mu_{C||G}$ (le reste).

Système contrôlé (en boucle fermée)

Notation $X := \bigoplus_{u \in A_c \setminus A_g} [\mu_c(u) \otimes^t E_g] u$ et

$$H := \{ \bigoplus_{a \in A_c \cap A_g} [\mu_c(a) \otimes^t B_g(a) \oplus B_c(a) \otimes^t \mu_g(a)] a \oplus \bigoplus_{a \in A_g \setminus A_c} [E_c \otimes^t \mu_g(a)] a \}^*$$

Alors,

$$\mu^*_{C\|G} = (X \oplus H)^* = H(XH)^* = (HX)^* H.$$

Analogie avec l'approche feedback pour les GET (Cottenceau et al. 1999, 2001).

Commande en JAT:

Etant donnée spécification (modèle de reference) $y_{ref} : A^* \to R_{max}$ nous cherchons le plus grand

$$X = \bigoplus_{u \in A_c \setminus A_g} \mu_c(u)$$

tel que

$$H(XH)^* = H(\bigoplus_{u \in A_c \setminus A_g} [\mu_c(u) \otimes^t E_g] u H)^* \leq \alpha \mathbin{\backslash\!\circ} y_{ref} \mathbin{\circ\!/} \beta,$$

où $\alpha \mathbin{\backslash\!\circ} y_{ref} \mathbin{\circ\!/} \beta$ joue le rôle de matrice G_{ref} dans Cottenceau et al., 2001. Toutes les opérations dans $\mu^*_{C\|G}$: $\oplus$ (si restreinte), $\otimes^t$, $*$, sont résiduables,

donc la théorie de résiduation s'applique!

Projections naturelles des séries formelles

Pour $B \subseteq A$: $P_B : R_{max}(A) \to R_{max}(B)$
$s = \oplus_{w \in A^*} s(w)w \in R_{max}(A)$ $P_B(s) = \oplus_{w \in A^*} s(w)P_B(w)$, où $P_B(w)$ comme pour langages formels, i.e.

$$P_B(a) = \begin{cases} a & \text{si } a \in B \\ \varepsilon & \text{si } a \notin B \end{cases} \quad \text{et}$$

P s'étend aux mots de A^* tel que P est concatenative : $P_B(a_1 \dots a_n) = P_B(a_1) \dots P_B(a_n)$.

Exemple.

$$P_{a,b}(3abc \oplus 4abc^2 \oplus 2ab) = 4ab.$$

Propriétés des projections

Pour $s = \oplus_{w\in A^*} s(w)w \in R_{max}(A)$ et
$s' = \oplus_{w\in A^*} s'(w)w \in R_{max}(A)$:
(i) $P_B(s \otimes s') = P_B(s) \otimes P_B(s')$
(ii) $P_B(s^*) = P_B(s)^*$
(iii) Pour matrices $R = (r_{ij})_{i,j=1}^n$ et $R' = (r'_{ij})_{i,j=1}^m)$ avec $\forall i$ et $\forall j$:
$r_{ij}, r'_{ij} \in R_{max}(A)$ nous avons :

$$P_B(R \otimes^t R') = P_B(R) \otimes^t P_B(R').$$

Proof.

(i) $P_B(s\otimes s') = \oplus_{w\in A^*}(\oplus_{uv=w} s(u)s'(v))P_B(w) = \oplus_{w\in A^*}(\oplus_{uv=w} s(u)s'(v))P_B(uv) =$

$$\oplus_{w\in A^*}(\oplus_{uv=w} s(u)s'(v)P_B(u)P_B(v)) = P_B(s) \otimes P_B(s').$$

(ii) Directement (i) comme $P_B(s^*) = P_B(\oplus_{n=0}^{\infty} s^n) = \oplus_{n=0}^{\infty} P_B(s)^n =$
$P_B(s)^*$.
(iii) Conséquence de (i) et définition du produit tensoriel.

La résiduation de la multiplication tensorielle est simple.

Proposition (Résiduation de la multiplication tensorielle)

Soient X, A, et B matrices carrées sur un dioid complet D de dimensions n, m, et nm, resp.
La plus grande solution de $X \otimes^t A \leq B$ est donnée par

$$X_{ij} \leq \bigwedge_{k,l=1}^{m} B_{ik,jl} \phi A_{kl},$$

où les blocs dans la matrice B sont formés d'après la définition du produit tensoriel.

Dualement, la plus grande solution de $A \otimes^t X \leq B$ est donnée par

$$X_{kl} \leq \bigwedge_{i,j=1}^{m} A_{ij} \backslash\!\!\circ B_{ik,jl}.$$

Hélas, les spécifications basées sur les séries multivariables ne sont pas si pratiques, e.g. l'approche GET permet de spécifier la sortie d'un SFPM par un vecteur des séries univariables.
Pour $A_y \subseteq A$ transitions de sortie
$y_{ref} : N \to R^k_{max}$ vecteur des dateurs (entrée de réference).

Problème de commande correspondant:

$$P_y(y_{C||G}) = P_y(\alpha\mu^*_{C||G}\beta) \leq y_{ref}$$

pour tout $y \in A_Y$.

En utilisant les propriétés des projections nous obtenons $\forall y \in A_Y$:

$$P_y(y_{C||G}) = P_y(\alpha\mu^*_{C||G}\beta) = \alpha P_y H(P_y X P_y H)^*\beta,$$

avec les mêmes H et X comme ci-dessus et

$P_y(y_{C||G}) \in R_{max}(y)$

Problème de commande JAT

Pour la spécification $y_{ref} : N \to R^k_{max}$ il faut trouver les plus grands $\mu_c(a)$ tels que

$$P_y(y_{C\|G}) = P_y(\alpha\mu^*_{C\|G}\beta) \leq y_{ref}$$

$\forall y \in A_Y$, où $X = \bigoplus_{u \in A_c \setminus A_g} [\mu_c(a) \otimes^t E_g]u$.
Donc, $\forall y \in A_Y$

$$\alpha P_y H(P_y X P_y H)^* \beta \leq y_{ref}, \text{ i.e.}$$

$$P_y H(P_y X P_y H)^* \leq \alpha \backslash y_{ref} / \beta,$$

En appliquant la Proposition 3 dans Cottenceau et al., 2001. S'il existe une matrice $D \in R_{max}(y)$ telle que $\alpha \backslash y_{ref} / \beta = HD^*$ ou $D' \in R_{max}(y)$telle que $\alpha \backslash y_{ref} / \beta = D'^* H$ alors il existe le plus grand $P_y X$ tel que $P_y H(P_y X P_y H)^* X \leq \alpha \backslash y_{ref} / \beta$, notamment

$$(P_y X)^{opt} = P_y H \backslash [\alpha \backslash y_{ref} / \beta] / P_y H.$$

Dans la plupart des cas ces équations ne possèdent pas de solution, car projections font l'abstraction des ordonancements possibles.
Il est plus réaliste de considérer des specifications multivariables! Mais afin de les obtenir (specs. multivariables) des heuristiques (e.g. règle deJakcson's EDD) doivent être appliquées.

Exemple

Nous considérons 2 sorties de réference associés aux transitions x_2 et x_4
Les durée des transitions u_1 et u_2 des contrôleurs $C1$ et $C2$ sont à déterminer alors que
$t_C(.,x_1,.) = 2 = t_S(.,x_1,.), t_C(.,x_3,.) = 1 = t_(.,x_3,.), t_S(.,x_4,.) = 3$, $t_S(.,x_2,.) = 1$.
Nous posons ici $C = C_1 \| C_2$.

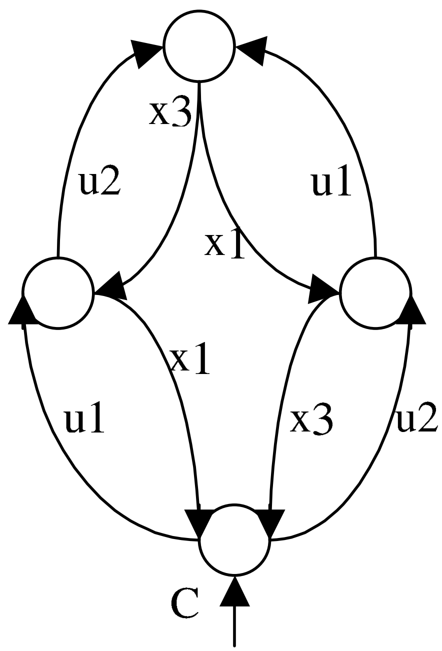


Figure 1: Contrôleur (max,+) pour l'exemple

D'après le théorème de décomposition

$$\mu_{C\|G} = (\mu_c(u_1)\otimes{}^t E_g)u_1 \oplus (\mu_c(u_2)\otimes{}^t E_g)u_2 \oplus E_c \otimes{}^t \mu_g(x_2)x_2 \oplus E_c \otimes{}^t \mu_g(x_4)x_4$$

$$\oplus(\mu_c(x_1)\otimes{}^t B_g(x_1) \oplus B_c(x_1)\otimes{}^t \mu_g(x_1)]x_1 \oplus (\mu_c(x_3)\otimes{}^t B_g(x_3) \oplus B_c(x_3)\otimes{}^t \mu_g(x_3)]x_3$$

avec

$$\mu_c(u_1) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ v_1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & v_1 & \varepsilon \end{bmatrix}, \ \mu_c(u_2) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ v_2 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & v_2 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

Analogiquement,

$$\mu_c(x_1) = \begin{bmatrix} \varepsilon & 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, \ \mu_c(x_3) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

Donc,

$$B_c(x_1) = \begin{bmatrix} \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, \ B_c(x_3) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

Enfin,

$$\mu_g(x_1) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 2 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix},\ \mu_g(x_3) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix},$$

et

$$\mu_g(x_2) = \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix},\ \mu_g(x_4) = \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 3 \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}.$$

Nous avons $\alpha = (e, \varepsilon, \dots, \varepsilon)$ et $\beta = (e, e, \dots, e)$.

Considérons la sortie de réference : dateurs $x_2^{ref}: N \to R_{max}$ et $x_4^{ref}: N \to R_{max}$ associés aux transitions x_2 et x_4. Il faut que

$$P_{x_2}(y_{C\|G}) = P_{x_2}(\alpha \mu^*_{C\|G}\beta) = \alpha P_{x_2} H (P_{x_2} X P_{x_2} H)^* \beta \leq x_2^{ref},$$

et

$$P_{x_4}(y_{C\|G}) = P_{x_4}(\alpha \mu^*_{C\|G}\beta) = \alpha P_{x_4} H (P_{x_4} X P_{x_4} H)^* \beta \leq x_2^{ref}$$

avec H et X ci dessus, i.e. dans cet exemple

$$H = \oplus E_c \otimes^t \mu_g(x_2) x_2 \oplus E_c \otimes^t \mu_g(x_4) x_4 \oplus (\mu_c(x_1) \otimes^t B_g(x_1) \oplus B_c(x_1) \otimes^t \mu_g(x_1)] x_1 \oplus$$
$$(\mu_c(x_3) \otimes^t B_g(x_3) \oplus B_c(x_3) \otimes^t \mu_g(x_3)] x_3 \text{ et}$$
$$X = (\mu_c(u_1) \otimes^t E_g) u_1 \oplus (\mu_c(u_2) \otimes^t E_g) u_2.$$

Le problème de commande JAT est de trouver le plus grand $\mu_c(u_i), i = 1, 2$ tel que

$$\alpha P_{x_2} H (P_{x_2} X P_{x_2} H)^* \beta \leq x_2^{ref},$$

et

$$\alpha P_{x_4} H (P_{x_4} X P_{x_4} H)^* \beta \leq x_2^{ref}.$$

Résiduation de la multiplication matricielle donne:

$$P_{x_2}H(P_{x_2}XP_{x_2}H)^* \leq \alpha \mathbin{\circ\!\!\!\backslash} x_2^{ref} \mathbin{\circ\!\!\!/} \beta,$$

et

$$P_{x_4}H(P_{x_4}XP_{x_4}H)^* \leq \alpha \mathbin{\circ\!\!\!\backslash} x_4^{ref} \mathbin{\circ\!\!\!/} \beta.$$

D'après la Proposition 3 de Cottenceau et al., 2001 nous obtenons:

$$P_{x_2}X \leq P_{x_2}H \mathbin{\circ\!\!\!\backslash} [\alpha \mathbin{\circ\!\!\!\backslash} x_2^{ref} \mathbin{\circ\!\!\!/} \beta] \mathbin{\circ\!\!\!/} P_{x_2}H$$

et

$$P_{x_4}X \leq P_{x_4}H \mathbin{\circ\!\!\!\backslash} [\alpha \mathbin{\circ\!\!\!\backslash} x_4^{ref} \mathbin{\circ\!\!\!/} \beta] \mathbin{\circ\!\!\!/} P_{x_4}H.$$

Pour cet exemple il n'y a pas de solutions á ces équations par manque d'information sur l'ordonancement qui est important.
La méthode reposant sur des projections permet de décider si l'ordonancement est important ou pas dans un exemple concrêt.

Conclusion et Perspectives de recherche

- Commande supervisée des automates (max,+) : approche résiduation
- Commande supervisée : combiner les deux aspects (logique et temporel)
- Extension aux SED plus généraux : automates temporisés avec 1 horloge
- Commande aux observations partielles
- Commande décentralisée et modulaire des automates (max,+)

Timed automata

- Timed automata $(S, A, C, t, s_0))$, or $(S, \langle o, t \rangle)$.
  S ... state set
  A ... event set
  C ... set of clocks
  $t \subseteq S \times A \times S \times AC \times 2^C$ is the nondeterministic transition function
  Transitions are labelled by $Tr = \langle s, a, s', Cond, Z \rangle$, where s is origin, s' is destination, a is the event label, t can occur ony si$Cond = TRUE$ et the clocks in Z are reset.
  Syntax for enabling conditions (AC) :
  $c \equiv k$, where $c \in C$, $k \in R$, et $\equiv \in \{<, >, \leq, \geq, =\}$.
  Extended state : $(s, c) \subseteq S \times R^{\|C\|}$, with s state et c the current values of clocks.

Control of TA

- Behaviors are timed languages, specification as a TA S
- Find a controller $Cont$ such that $L(P \parallel Cont) \subseteq L(S)$ or $L(P \parallel Cont) \cap L(S) = \emptyset$ (negative specification)
- Decidability results for control with full observations (Asarin, Maler, Pnueli, Sifakis, 1998)
- Undecidability results for control with partial observations (Bouyer et al. 2003)
- Decidable classes : negative external specification (Bouyer et al. 2003)
- Timed versions of controllability et observability