

Modélisation de conflits et calcul de bornes dans les systèmes de production par la théorie des dioïdes

Olivier Boutin^{1,2}

sous la direction de Jean Jacques Loiseau¹,
Bertrand Cottenceau² et Anne L'Anton¹

¹IRCCyN - UMR CNRS 6597, Nantes
Équipe ACSED

²LISA - EA 4014, Angers
Équipe MSD

Séminaire du LISA – 3 novembre 2009



Plan de la présentation

Mise en contexte

Modélisation

Routage de
transporteurs

Partage de
ressources

Conclusion et
perspectives

- ▶ Mise en contexte
- ▶ Modélisation
- ▶ Routage de transporteurs
- ▶ Partage de ressources
- ▶ Conclusion et perspectives

Mise en contexte

Modélisation

Routage de
transporteurs

Partage de
ressources

Conclusion et
perspectives

- ▶ **Mise en contexte**
- ▶ Modélisation
- ▶ Routage de transporteurs
- ▶ Partage de ressources
- ▶ Conclusion et perspectives

- Évaluation des performances d'ateliers de production incluant des conflits.
- Deux types de conflits étudiés :
 - Les ressources se partagent les produits ;
 - Les produits se partagent les ressources.
- Utilisation de la théorie des diodes adaptée à l'étude de systèmes sans conflits.
 - Proposition d'un cadre pour son application aux systèmes **avec** conflits.

Exemple de conflit : le routage de transporteurs

Mise en contexte

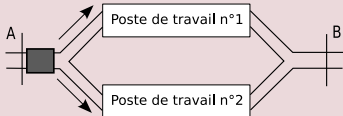
Modélisation

Routage de transporteurs

Partage de ressources

Conclusion et perspectives

Routage entre deux postes



Objectif

Caractériser le comportement entrée-sortie du système global.

- Les deux postes réalisent des opérations différentes.
- Approvisionnements au point A et retour des produits finis au point B.
- Ordre des produits finis potentiellement différent de celui des matières premières correspondantes.
- Notre approche : déterminer un comportement plus lent et un autre plus rapide que celui du système pour évaluer ses performances, de manière approchée.

Exemple de conflit : le partage de ressources

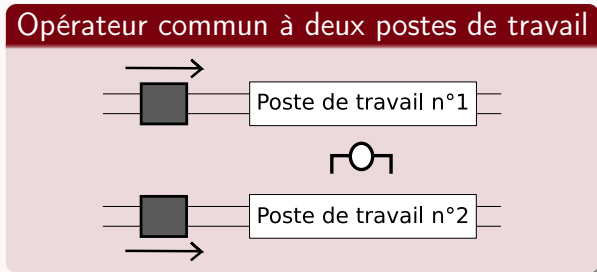
Mise en contexte

Modélisation

Routage de
transporteurs

Partage de
ressources

Conclusion et
perspectives



- Politique d'affectation pseudo-périodique, dépendante des entrées.
- Recherche d'un modèle valable pour toutes les entrées possibles.
- Notre approche : considérer la politique d'affectation pour déterminer des temps d'attente minimaux et maximaux avant de pouvoir disposer de la ressource.

Partie suivante

Mise en contexte

Modélisation

Routage de
transporteurs

Partage de
ressources

Conclusion et
perspectives

- ▶ Mise en contexte
- ▶ **Modélisation**
- ▶ Routage de transporteurs
- ▶ Partage de ressources
- ▶ Conclusion et perspectives

Les dioïdes

Mise en contexte

Modélisation

Routage de
transporteurs

Partage de
ressources

Conclusion et
perspectives

Définition (Baccelli et al., 1992)

Un dioïde est un semi-anneau noté $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$, dont la loi \oplus , appelée « somme », est idempotente : $\forall a, a \oplus a = a$.

Ordre canonique d'un dioïde

$$\forall a, b \in \mathcal{D}, a \preceq b \iff a \oplus b = b.$$

Exemples : les dioïdes $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ et $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$

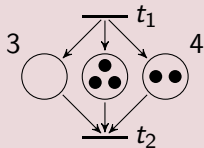
$\overline{\mathbb{Z}}_{max}$	$\overline{\mathbb{Z}}_{min}$
$(\mathbb{Z} \cup \{+\infty, -\infty\}, \max, +)$	$(\mathbb{Z} \cup \{+\infty, -\infty\}, \min, +)$
$3 \oplus 4 = 4 \quad (\max(3, 4) = 4)$	$3 \oplus 4 = 3 \quad (\min(3, 4) = 3)$
$3 \otimes 4 = 7 \quad (3 + 4 = 7)$	$3 \otimes 4 = 7 \quad (3 + 4 = 7)$
$3 \preceq 4$	$4 \preceq 3$

- Contexte algébrique utilisé pour l'étude de systèmes à événements discrets sans conflits (Cuninghame-Green, 1979; Baccelli et al., 1992).
 - Focalisation sur les synchronisations et les retards (déplacements, temps opératoires ou réinitialisations des équipements).
- Un ensemble d'intervalles, muni des opérations adéquates permet lui aussi de définir un diode (Litvinov et Sobolevskiĭ, 2001).
 - Propriété utilisée pour étudier des systèmes dont certains paramètres sont incertains (Lhommeau, 2003).

Les graphes d'événements temporisés

Réseau de Petri (RdP) où chaque place a **exactement** un arc entrant et un arc sortant. Temporisation associée aux transitions ou aux places. (Murata, 1989)

Un GET



- Possibilité de manipuler des temporisations incertaines et bornées dans des intervalles.

Particularité

Comportement d'un GET représenté de manière linéaire dans les diïodes $\bar{\mathbb{Z}}_{min}$ ou $\bar{\mathbb{Z}}_{max}$, en considérant respectivement le comptage des événements ou leurs dates d'occurrence.

Mise en contexte

Modélisation

Routage de transporteurs

Partage de ressources

Conclusion et perspectives

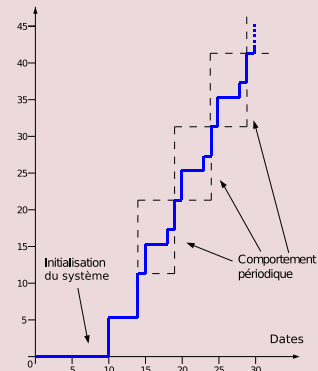
Fonction compteur

Compte le nombre d'événements survenus jusqu'à une certaine date.

- Dans nos problèmes : le nombre de palettes détectées par un capteur à une date donnée.

Représentation graphique de fonctions compteur

Événements

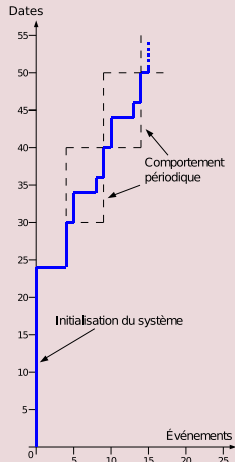


Fonction dateur

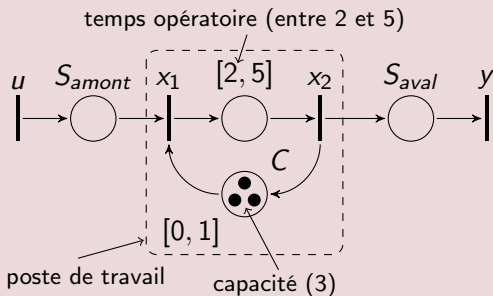
Donne une date aux occurrences d'un événement donné.

- Dans nos problèmes : la date de chaque détection d'une palette par un capteur.

Représentation graphique des fonctions dateur



Poste de travail flexible



- 3 produits opérables en même temps (entre 2 et 5 unités de temps par opération sur un produit).
- Après chaque opération, attente éventuelle d'une unité de temps avant de reprendre le travail (changement d'outil).

- Principe de superposition aussi valable dans les contextes algébriques $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$ et $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$. Sorties d'un système comme la convolution entre ses entrées et sa réponse impulsionnelle H .



$$y(t) = \bigoplus_{i=0}^t H(i) \otimes u(t-i) = (H * u)(t)$$

- Pour un atelier de production, la réponse impulsionnelle est la sortie du système pour un stock infini de matières premières disponible dès le début de l'observation.

Partie suivante

Mise en contexte

Modélisation

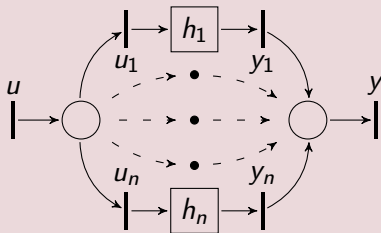
Routage de
transporteurs

Partage de
ressources

Conclusion et
perspectives

- ▶ Mise en contexte
- ▶ Modélisation
- ▶ **Routage de transporteurs**
- ▶ Partage de ressources
- ▶ Conclusion et perspectives

Lignes de production en parallèle



- Entrée u aiguillée vers l'un des u_i . Toutes les sorties y_i collectées en y .
- Des produits peuvent se doubler. Donc pas de représentation possible du comportement entrée-sortie du système global sous forme de convolution.
- Caractérisation de bornes supérieure et inférieure qui encadrent le comportement du système global en fonction des politiques de routage utilisées.

- RdP stochastiques, modèles non linéaires (Baccelli et al., 1991; Baccelli et al., 1992).
- RdP à choix libres, modèle « quasi linéaire » (Baccelli et al., 1996).
- RdP, ensemble d'équations et d'inéquations ne garantissant pas l'unicité des solutions (Libeaut, 1996).
- RdP continus (Cohen et al., 1998).

Notre approche

Obtenir un modèle linéaire par approximation du comportement du système, en comptant les événements dans $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$.

Opérateurs nécessaires aux calculs

Mise en contexte

Modélisation

Routage de transporteurs

Partage de ressources

Conclusion et perspectives

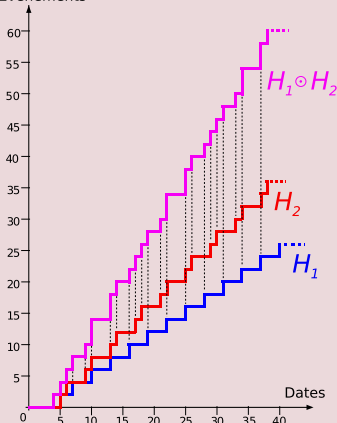
Produit dit « de Hadamard »

Afin de réaliser l'addition de fonctions, on utilise dans $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$ le produit point à point, noté \odot . Soient deux fonctions compteur f et g dans $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$:

$$\begin{aligned}\forall t, (f \odot g)(t) &= f(t) \otimes g(t) \\ &= f(t) + g(t).\end{aligned}$$

Exemple de produit de Hadamard

Événements



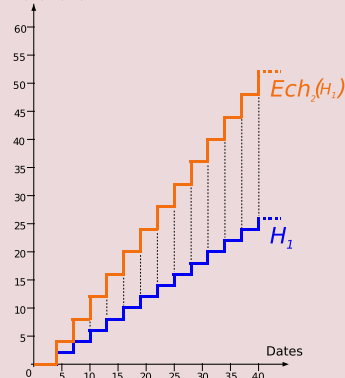
Application de changement d'échelle

L'application de changement d'échelle, notée Ech_n , multiplie une fonction compteur par un entier $n \in \mathbb{N}$.

- On réalise un changement d'échelle du graphe de la fonction.

Exemple de changement d'échelle

Événements



Opérateurs nécessaires aux calculs (cont.)

Mise en contexte

Modélisation

Routage de transporteurs

Partage de ressources

Conclusion et perspectives

Pseudo inverses

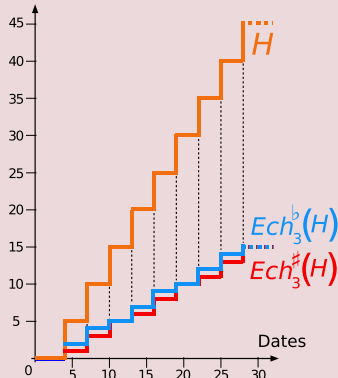
$\text{Ech}_m^b(h) \triangleq$ plus petit x tel que
 $\text{Ech}_m(x) \succcurlyeq h.$

$\text{Ech}_m^\#(h) \triangleq$ plus grand x tel que
 $\text{Ech}_m(x) \preccurlyeq h.$

- Division entière, arrondie à l'entier inférieur ou supérieur.

Exemple de changement d'échelle

Événements

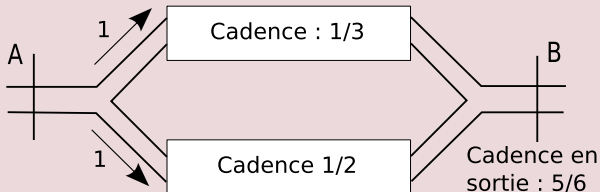


Fonction de routage périodique

Soit un système h constitué de 2 sous-systèmes h_1 et h_2 en conflit. Dans notre cas, m produits entrants sont d'abord routés vers h_1 , puis n de ces événements sont routés vers h_2 , ensuite m d'entre eux vers h_1 et ainsi de suite de manière cyclique.

- On note $r = m|n$ la fonction de routage en amont de h_1 et h_2 .

Exemple de routage



- Le système global ne pourra pas fournir plus de produits finis que l'ensemble des postes de travail qui le composent.
- Ici : $\frac{1}{3} + \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$.
- Cette cadence est indépendante du routage quand une quantité arbitrairement grande de matières premières est disponible dès le lancement du système.

Meilleur comportement possible (cont.)

Mise en contexte

Modélisation

Routage de
transporteurs

Partage de
ressources

Conclusion et
perspectives

- Le meilleur comportement possible est la somme de celui des sous-systèmes qui le composent.
 - Dans le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$: le produit de Hadamard de leurs réponses impulsionnelles.
- Ce meilleur comportement constitue la borne inférieure de tous ceux possible.

Cas de sous-systèmes identiques

Mise en contexte

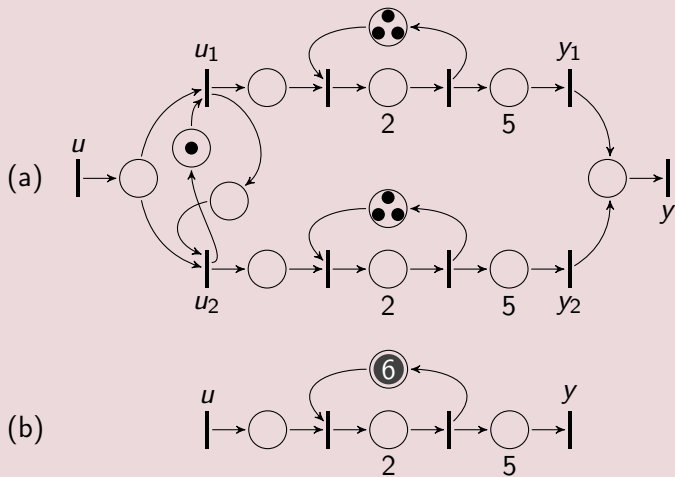
Modélisation

Routage de transporteurs

Partage de ressources

Conclusion et perspectives

Équivalence entre $(h|h)_{1|1}$ (a) et $Ech_2(h)$ (b)



Cas d'un système $(h|h| \cdots |h)_{1|1|\cdots|1}$

La réponse impulsionnelle est exacte et égale à $Ech_n(h)$.

- On retrouve un résultat naturel : rajouter des ressources identiques revient à démultiplier la cadence de capacité de production de la ressource par le nombre d'ajouts.

Influences du routage dans le cas de sous-systèmes différents

Mise en contexte

Modélisation

Routage de transporteurs

Partage de ressources

Conclusion et perspectives

- Le routage a une influence quand les sous-systèmes sont différents, car les produits peuvent se doubler. Deux configurations possibles :
 - Routage équilibré $r = 1|1|\dots|1$;
 - Routage périodique par lots.
- Dans les deux cas, il ne peut pas y avoir pire comportement que lorsque l'on considère que tous les sous-systèmes ont la même allure que le plus lent d'entre eux.

Cas $(h_1|h_2|\dots|h_n)_{1|1|\dots|1}$

$\text{Ech}_n(\bigoplus_{i=0}^n h_i)$.

Cas $(h_1|h_2)_{m|n}$

$\text{Ech}_{m+n}(\text{Ech}_m^b(h_1) \oplus \text{Ech}_n^b(h_2))$.

Récapitulatif (Boutin et al., 2009a; Boutin et al., 2009b)

Mise en contexte

Modélisation

Routage de
transporteurs

Partage de
ressources

Conclusion et
perspectives

Type de sous-systèmes	Type de routage	Comportement entrée/sortie	
n sous-systèmes identiques ($h h \dots h$)	Routage équilibré $1 1 \dots 1$	$\odot_{i=0}^n h = \text{Ech}_n(h)$	
		Borne inf.	Majorant
n sous-systèmes différents ($h_1 h_2 \dots h_n$)	Routage cyclique $1 1 \dots 1$	$\odot_{i=0}^n h_i$	$\text{Ech}_n(\bigoplus_{i=0}^n h_i)$
2 sous-systèmes différents ($h_1 h_2$)	Routage périodique $n m$		$\text{Ech}_{m+n}(\text{Ech}_m^b(h_1) \oplus \text{Ech}_n^b(h_2))$

- Dans le cas d'un routage périodique entre 2 sous-systèmes différents, à partir des paramètres m et n de la fonction de routage $m|n$, on peut déterminer la cadence du comportement majorant celui du système global.

Caractérisation du routage périodique optimal

La fonction de routage $m|n$ peut être choisie de sorte que les deux bornes de l'intervalle aient le même comportement périodique. C'est le cas quand l'intervalle est de taille minimale et que la cadence de production est la meilleure.

Pente asymptotique

Mise en contexte

Modélisation

Routage de transporteurs

Partage de ressources

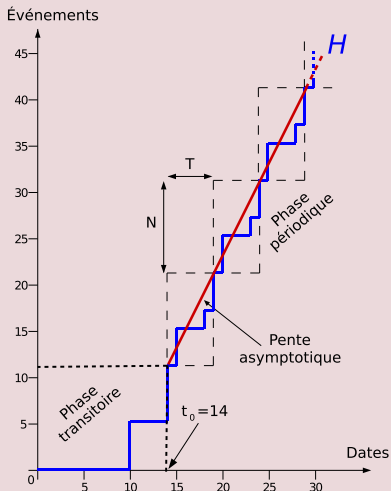
Conclusion et perspectives

Définition

Soit h une fonction compteur telle que $\forall t > t_0, h(t) = N \otimes h(t-T)$.
La pente asymptotique de h est notée $\sigma(h) = \frac{N}{T}$.

- Correspond à la **cadence de production** dans un contexte de gestion de production.

Représentation graphique



- Les GET ont toujours un comportement périodique, après une éventuelle phase transitoire.
 - La fonction de routage entre deux systèmes linéaires parallèles exerce une influence sur la cadence de production du système global.
 - En choisissant $m|n$ telle que $\frac{m}{n} = \frac{\sigma(h_1)}{\sigma(h_2)}$, nous avons

$$\begin{aligned}\sigma(h_1 \odot h_2) &= \sigma\left(\text{Ech}_{m+n}(\text{Ech}_m^b(h_1) \oplus \text{Ech}_n^b(h_2))\right) \\ &= \sigma(h_1) + \sigma(h_2)\end{aligned}$$

Deux lignes parallèles dans un atelier flexible

Mise en contexte

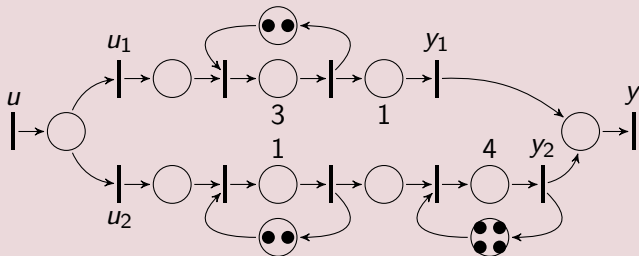
Modélisation

Routage de transporteurs

Partage de ressources

Conclusion et perspectives

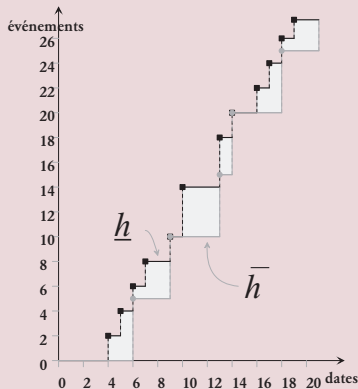
Cas d'atelier



- Les deux cadences de production sont $\sigma(h_1) = 2/3$ et $\sigma(h_2) = 1$. Donc $\frac{2/3}{1} = 2/3$, ce qui implique $m = 2$ et $n = 3$.
 - En appliquant la fonction de routage $r = 2|3$, on garantit une cadence globale de $\sigma((h_1|h_2)_{2|3}) = \sigma(h_1) + \sigma(h_2) = 5/3$.
 - Cette cadence est la meilleure cadence possible.

- Pour toute entrée u , $(h_1|h_2)_{2|3}(u)$, la sortie du système est comprise entre les deux bornes de l'intervalle $[\underline{h} * u, \bar{h} * u]$.
- La zone en blanc correspond aux incertitudes liées au routage.

Réponse impulsionnelle des deux bornes de l'intervalle



Partie suivante

Mise en contexte

Modélisation

Routage de
transporteurs

Partage de
ressources

Conclusion et
perspectives

- ▶ Mise en contexte
- ▶ Modélisation
- ▶ Routage de transporteurs
- ▶ **Partage de ressources**
- ▶ Conclusion et perspectives

Principe

Opérateur travaillant simultanément sur deux postes en même temps.

- Problème si des produits arrivent en même temps sur les deux postes.
- On dispose d'une politique d'affectation, mais on ne peut pas prévoir à l'avance les arrivées de produit.

- Partage d'une seule ressource (Al Saba et al., 2006a).
- Politique d'affectation statique de la ressource (Trouillet et al., 2007; Al Saba et al., 2006b).
- Ensemble d'équations et d'inéquations (Libeaut, 1996; Corrêia et al., 2009).

Notre approche

Découplage virtuel des deux lignes de production, en dédoublant la ressource et contraignant la production par l'ajout de temporisations incertaines.

Les zones de conflits

Mise en contexte

Modélisation

Routage de
transporteurs

Partage de
ressources

Conclusion et
perspectives

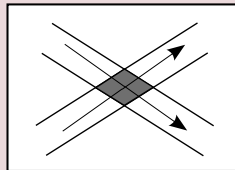
Une section partagée nécessite un ordonnancement prédictif ou en ligne pour être traversée.

Un embranchement de type convergence sera vu comme une ressource gérée par politique d'exclusion mutuelle.

Deux comportements possibles pour les palettes :

- Elles peuvent passer sans avoir à attendre. (meilleur des cas)
- Elles doivent attendre une palette venant de l'autre côté de l'embranchement. (pire des cas)

Section partagée



Modélisation de cet embranchement

Mise en contexte

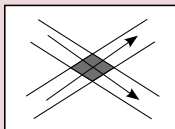
Modélisation

Routage de transporteurs

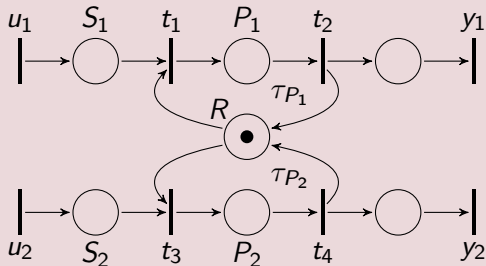
Partage de ressources

Conclusion et perspectives

Principe



Sous forme de Réseau de Petri



D'un RdP à des GET parallèles

(Boutin et al., 2008a; Boutin et al., 2008b)

Mise en contexte

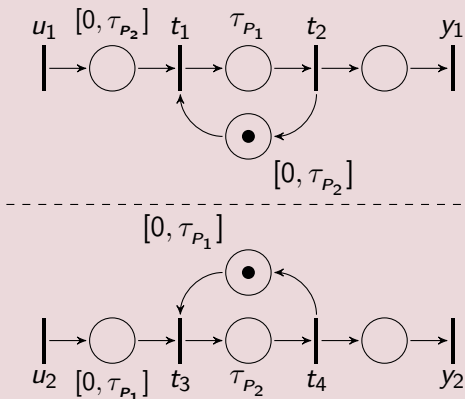
Modélisation

Routage de
transporteurs

Partage de
ressources

Conclusion et
perspectives

Découplage



Un cas d'étude

Mise en contexte

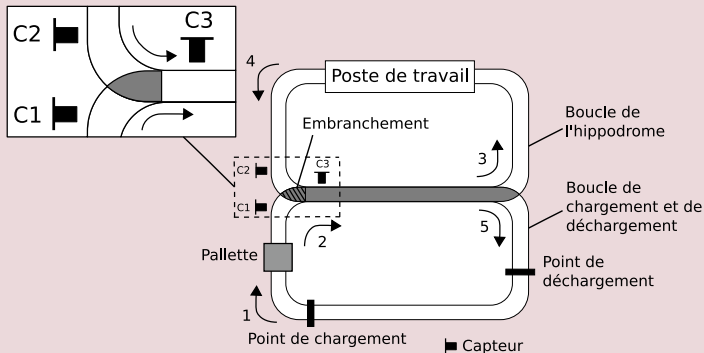
Modélisation

Routage de transporteurs

Partage de ressources

Conclusion et perspectives

Chaîne transitive avec section partagée



- Deux boucles ayant un tronçon commun.
- Besoin de réguler les entrées des palettes sur le système dès le point de chargement pour éviter les blocages.

GET de cette chaîne transitive

Mise en contexte

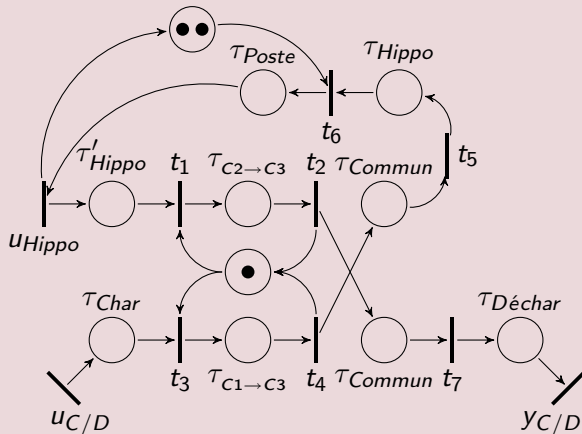
Modélisation

Routage de transporteurs

Partage de ressources

Conclusion et perspectives

Modèle RdP de la ligne de transfert



GET de cette chaîne transitive (suite)

Mise en contexte

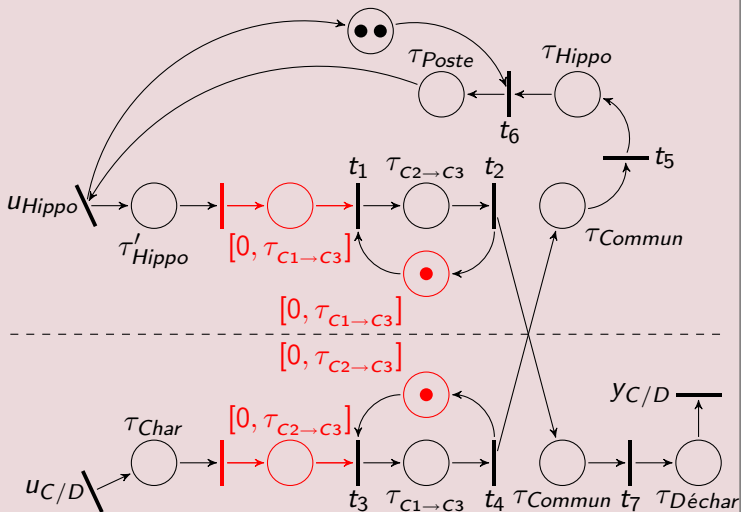
Modélisation

Routage de transporteurs

Partage de ressources

Conclusion et perspectives

GET obtenu par notre approche



Partie suivante

Mise en contexte

Modélisation

Routage de
transporteurs

Partage de
ressources

Conclusion et
perspectives

- ▶ Mise en contexte
- ▶ Modélisation
- ▶ Routage de transporteurs
- ▶ Partage de ressources
- ▶ **Conclusion et perspectives**

- Approche pour la modélisation d'ateliers de production comportant des conflits.
- Caractérisation de systèmes sans conflit, dont le comportement mineur et majeur respectivement celui du système étudié.
- Étude du routage de transporteurs :
 - Équilibré entre un nombre quelconque de sous-systèmes différents.
 - Cyclique entre 2 sous-systèmes différents.
- Étude du partage de ressources avec politique d'affectation dynamique.

- Généraliser les formes de conflits modélisables par des intervalles (partage d'un nombre quelconque de ressources entre un nombre quelconque de sous-systèmes).
- Étudier des systèmes plus complexes, comprenant plusieurs de ces formes de conflit combinées.
- Valider cette approche par une mise en œuvre sur un cas réel (travail déjà réalisé pour des modélisations déterministes (Boutin et al., 2007) - sans intervalles).

Mise en contexte

Modélisation

Routage de
transporteurs

Partage de
ressources

Conclusion et
perspectives

Merci pour votre attention !

Al Saba, M., Boimond, J.-L. et Lahaye, S. (2006a).

On just in time control of flexible manufacturing systems via dioid algebras.

In Proceedings of the 12th IFAC Symposium on INformation COntrol problems in Manufacturing, INCOM'06, volume 2, pages 137 – 142, Saint-Étienne.

Al Saba, M., Lahaye, S. et Boimond, J.-L. (2006b).

On Just In Time Control of Switching Max Plus Linear Systems.

In Proceedings of the 3rd International Conference on Informatics in Control, Automation and Robotics, ICINCO'06, Setúbal, Portugal.

Baccelli, F., Cohen, G. et Gaujal, B. (1991).

Recursive Equations and Basic Properties of Timed Petri Nets.

RR-1432, INRIA.

Disponible à l'adresse

www.inria.fr/rrrt/rr-1432.html.

Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G. J. et Quadrat, J.-P. (1992).

Synchronization and Linearity, An Algebra for Discrete Event Systems.

John Wiley and Sons, New York.

Disponible à l'adresse

cermics.enpc.fr/~cohen-g/documents/BCOQ-book.pdf.

Baccelli, F., Foss, S. et Gaujal, B. (1996).

Free-Choice Petri Nets — An Algebraic Approach.

IEEE Transactions on Automatic Control, 41(12):1751 – 1778.

Boutin, O., Cottenceau, B. et L'Anton, A. (2008a).

Commande de zones de conflits dans une algèbre de dioïde.

In Actes de la 7^e conférence internationale de MOdélisation et SIMulation, MOSIM'08, Paris.

Boutin, O., Cottenceau, B. et L'Anton, A. (2008b).

Dealing with Mutual Exclusion Sections in Production Systems : from Shared Resources to Parallel TEG's.

In Proceedings of the 17th IFAC World Congress, IFAC'08, Séoul, Corée du Sud.

Boutin, O., Cottencaeu, B., L'Anton, A. et Loiseau, J.-J. (2009a).

Modélisation de systèmes de production à routages périodiques dans le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$.

In Actes des 3^{es} Journées Doctorales du GdR MACS, Angers.

Boutin, O., Cottencaeu, B., L'Anton, A. et Loiseau, J.-J. (2009b).

Modelling Systems with Periodic Routing Functions in Dioid $(\min, +)$.

In Proceedings of the 13th IFAC Symposium on INFORMATION CONTROL problems in Manufacturing, INCOM'09, Moscou.

- Boutin, O., L'Anton, A. et Cottenceau, B. (2007).
Emulation as a Means of Designing an Inline Control.
*In Proceedings of the 14th Artificial Intelligence,
Simulation and planning in high autonomy systems
conference and 3rd Conceptual Modeling and
Simulation conference, part of the 1st International
Modeling and Simulation Multiconference, Buenos
Aires, Argentine.*
- Cohen, G., Gaubert, S. et Quadrat, J.-P. (1998).
Algebraic System Analysis of Timed Petri Nets.
In (Gunawardena, 1998).

Corréia, A., Abbas-Turki, A., Bouyekhf, R. et Moudni, A. E. (2009).

A Dioid Model for Invariant Resource Sharing Problems.

IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics – Part A : Systems and Humans, 39(4):770 – 781.

Cuninghame-Green, R. A. (1979).

Minimax algebra, volume 166 de *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems*.

Springer-Verlag.

Gunawardena, J., éditeur (1998).

Idempotency.

Cambridge University Press.

Lhommeau, M. (2003).

Étude de systèmes à événements discrets dans l'algèbre $(\max, +)$. 1. Synthèse de correcteurs robustes dans un dioïde d'intervalles. 2. Synthèse de correcteurs en présence de perturbations.

Thèse de doctorat, ISTIA – Université d'Angers.

Libeaut, L. (1996).

Sur l'utilisation des dioïdes pour la commande des systèmes événements discrets.

Thèse de doctorat, Université de Nantes et École Centrale de Nantes.

Litvinov, G. L. et Sobolevskiï, A. N. (2001).

Idempotent Interval Analysis and Optimization Problems.

Reliable Computing, 7(5):353 – 377.

Murata, T. (1989).

Petri Nets : Properties, Analysis and Applications.

Proceedings of the IEEE, 77(4):541 – 580.

Trouillet, B., Korbaa, O. et Claude Gentina, J. (2007).

Formal Approach of FMS Cyclic Scheduling.

IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics – Part A : Applications and Reviews, 37(1):126 – 137.