

# Conflits et routages dans les systèmes de production

Analyse via le dioïde  $\bar{Z}_{min}$

Olivier Boutin<sup>1,2</sup>, Bertrand Cottenceau<sup>2</sup>, Anne L'Anton<sup>1</sup>

<sup>1</sup>IRCCyN - UMR CNRS 6597, Nantes  
Équipe Analyse et Commande des Systèmes à Événements Discrets  
(ACSED)

<sup>2</sup>LISA - EA 4014, Angers  
Équipe Modèles et Systèmes Dynamiques (MSD)

Séminaires du LISA – 6 janvier 2009



Introduction

Fondements  
théoriques

Partage de  
ressources

Routage de  
transporteurs

Conclusion et  
perspectives

- ▶ **Introduction**
- ▶ Fondements théoriques
- ▶ Partage de ressources
- ▶ Routage de transporteurs
- ▶ Conclusion et perspectives

# Entre l'automatique, la productique et l'informatique

Introduction

Fondements  
théoriques

Partage de  
ressources

Routage de  
transporteurs

Conclusion et  
perspectives

## Motivations de ce travail

Pouvoir aborder de manière **formelle** des systèmes de production complexes.

## Problème à résoudre

Étendre la classe systèmes étudiés (**flow-shops**) (Cohen et al., 1983) aux **job-shops**.

## Apport des travaux présentés ici

Modélisation **dans un dioïde d'intervalle** de phénomènes de **conflits**, en utilisant des règles de gestion périodiques.

Introduction

Fondements  
théoriques

Partage de  
ressources

Routage de  
transporteurs

Conclusion et  
perspectives

## Job-shops

Chaque produit possède sa propre gamme. Nombreux itinéraires.

- Certaines tâches parfois réalisables par plusieurs postes (« job-shop flexible »).
- Nombreuses synchronisations.
- Croisements de flux (embranchements).
  - Ressources partagées et conflits sur l'accès à certaines zones pour le passage de palettes ou de transporteurs.
- Politiques de gestion particulières de ces conflits.

Introduction

Fondements  
théoriques

Partage de  
ressources

Routage de  
transporteurs

Conclusion et  
perspectives

## Dioïdes

Structures algébriques reposant sur l'utilisation de deux lois, dont l'une idempotente et non inversible (souvent **max** ou **min**).

- Changement de notations entraînant une forme **linéaire** pour les relations exprimées à l'aide de ces deux lois.
- Mais pas de représentation possible de conflits. (limitation aux **flow-shops** (Boutin et al., 2007)).
  - Automates («  $(\max, +)$  ») plus adaptés en général pour étudier les conflits, mais nécessitent une politique d'affectation cyclique des ressources (ce qui n'est toujours pas notre cas).

Introduction

Fondements  
théoriques

Partage de  
ressources

Routage de  
transporteurs

Conclusion et  
perspectives

## Notre contribution

Calculs de minorants et de majorants du comportement de systèmes présentant des conflits pour palier l'impossibilité de représentation « directe ».

- Approximation du comportement par inclusion dans un intervalle (Lhommeau et al., 2004).
  - Comportement sans conflit et avec conflits généralisés comme bornes de cet intervalle.
- Calculs possibles sur les bornes (et non sur la représentation du système lui-même).
  - Valeurs propres du système (cadence).
  - Synthèse de lois de commande pour comportement du système en **juste-à-temps**.

Introduction

Fondements  
théoriques

Partage de  
ressources

Routage de  
transporteurs

Conclusion et  
perspectives

- ▶ Introduction
- ▶ **Fondements théoriques**
- ▶ Partage de ressources
- ▶ Routage de transporteurs
- ▶ Conclusion et perspectives

Introduction

Fondements  
théoriques

Partage de  
ressources

Routage de  
transporteurs

Conclusion et  
perspectives

## Définition (Baccelli et al., 1992)

Un dioïde est un semi-anneau noté  $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ , dont la loi  $\oplus$  (somme) est idempotente ( $\forall a, a \oplus a = a$ ).

## Un exemple : le dioïde $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$

En munissant l'ensemble  $\mathbb{Z}$  de la fonction minimum (idempotente) pour somme de l'addition pour produit, on définit un dioïde noté  $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$ .

$$2 \oplus 2 = 2 \quad (\min(2, 2) = 2)$$

$$2 \otimes 3 = 5 \quad (2 + 3 = 5)$$



Introduction

Fondements  
théoriques

Partage de  
ressources

Routage de  
transporteurs

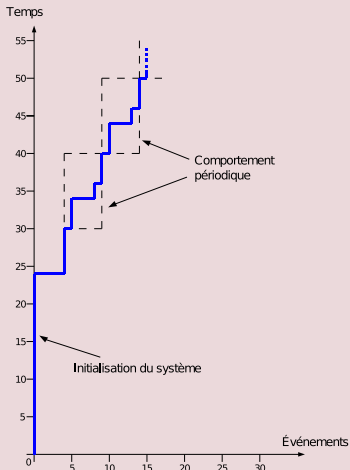
Conclusion et  
perspectives

## Fonction compteur

Fonction représentant un RdP dans le dioïde  $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$ .  
Compte le nombre  
d'événement survenus à une  
certaine date.

- Dans nos applications :  
le nombre de produits  
passés devant un  
capteur à une date  
donnée.

## Représentation graphique des fonctions compteur



Introduction

Fondements  
théoriques

Partage de  
ressources

Routage de  
transporteurs

Conclusion et  
perspectives

## Les Graphes d'Evenements Temporisés (GET)

Réseau de Petri (RdP) tel que chaque place a exactement un arc entrant et un arc sortant. Temporisations associées aux transitions ou aux places.

## Avantage des GET

Tout système représentable par un GET peut l'être dans le dioïde  $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$  (fonctions compteurs).

- Temporisations incertaines et bornées dans des intervalles. Ces bornes correspondent aux comportements extrêmes du système étudié (pas de conflit, conflits généralisés).

Introduction

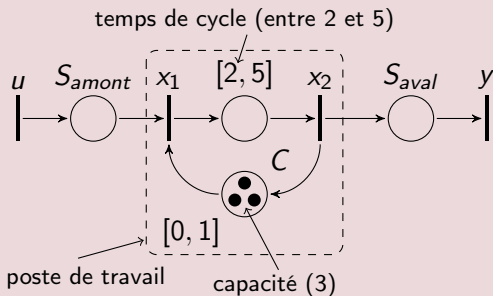
Fondements  
théoriques

Partage de  
ressources

Routage de  
transporteurs

Conclusion et  
perspectives

## Poste de travail avec aléas



- 3 produits opérables en même temps (entre 2 et 5 unités de temps par opération sur un produit).
- Après chaque opération, attente éventuelle d'une unité de temps avant de reprendre le travail (temps de chargement).

Introduction

Fondements  
théoriques

Partage de  
ressources

Routage de  
transporteurs

Conclusion et  
perspectives

- ▶ Introduction
- ▶ Fondements théoriques
- ▶ **Partage de ressources**
- ▶ Routage de transporteurs
- ▶ Conclusion et perspectives

Introduction

Fondements  
théoriques

Partage de  
ressources

Routage de  
transporteurs

Conclusion et  
perspectives

## En modélisation

Définition de deux bornes encadrant le comportement de systèmes incluant des ressources partagées, moyennant une politique d'affectation **périodique** de ces ressources.

- Les comportements de ces deux bornes est représentable par des fonctions compteur (contrairement à celui du système étudié).

## En commande de systèmes

Inhibition d'interblocages, par synthèse de lois de commande grâce représentations aux bornes.

Introduction

Fondements  
théoriques

Partage de  
ressources

Routage de  
transporteurs

Conclusion et  
perspectives

## Exemples

- Postes de travail ou opérateurs partagés.
- Sections et tronçons communs.

## Caractéristiques

- Ordonnancement prédictif ou affectation en ligne des ressources, selon une politique spécifique, pour éviter les conflits.
- En général, une seule opération à la fois sur un seul produit. (exclusion mutuelle)

### Principe

Opérateur travaillant simultanément sur deux postes en même temps, physiquement très proches l'un de l'autre

- Problème si des produits arrivent en même temps sur les deux postes.

### Démarche

Découplage virtuel des deux lignes de production, en dédoublant la ressource et contraignant la production par l'ajout de temporisations.

- Comportements des deux lignes bornés dans un intervalle de comportements possibles (un poste de travail a toujours accès à la ressource / il doit toujours attendre la libération de la ressource partagée).

Introduction

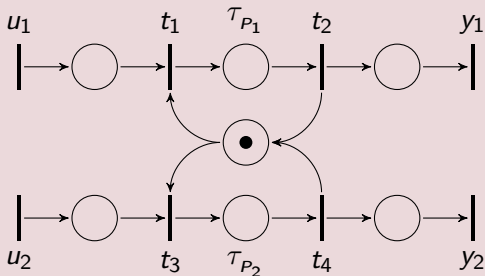
Fondements  
théoriques

Partage de  
ressources

Routage de  
transporteurs

Conclusion et  
perspectives

## Partage de l'opérateur entre deux postes sous forme de RdP





Introduction

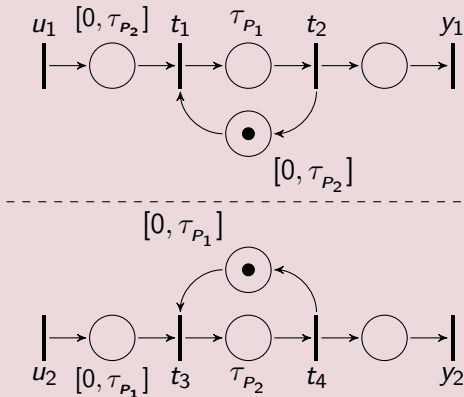
Fondements  
théoriques

Partage de  
ressources

Routage de  
transporteurs

Conclusion et  
perspectives

## Découplage



Introduction

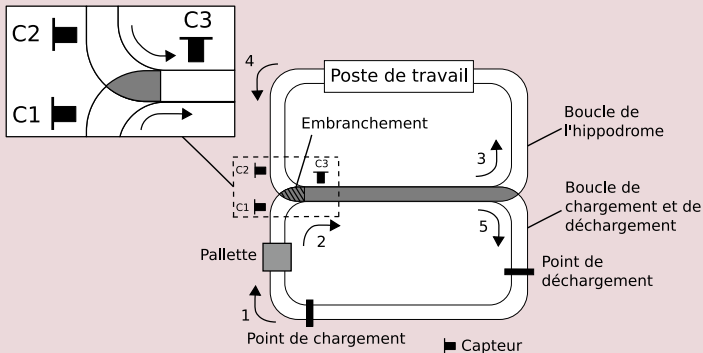
Fondements  
théoriques

Partage de  
ressources

Routage de  
transporteurs

Conclusion et  
perspectives

## Chaîne transitive avec section partagée



## Problème de commande

Éviter les inter-blocage en agissant au niveau du point de chargement (limitation du nombre d'encours maximum).

Introduction

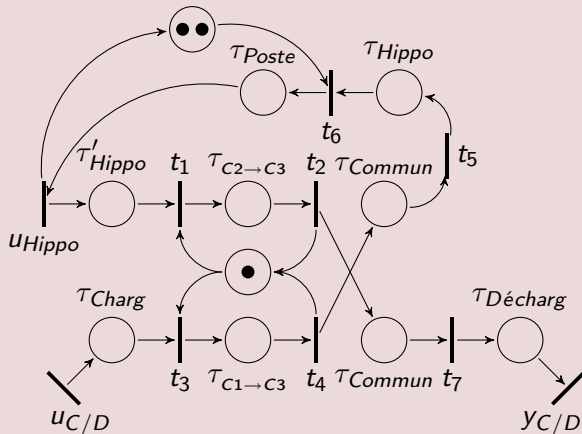
Fondements  
théoriques

Partage de  
ressources

Routage de  
transporteurs

Conclusion et  
perspectives

## Modèle RdP de la ligne de transfert



Introduction

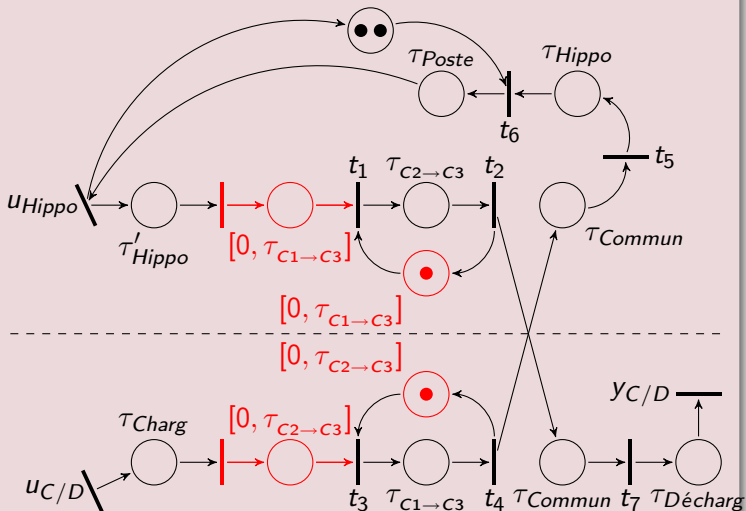
Fondements  
théoriques

Partage de  
ressources

Routage de  
transporteurs

Conclusion et  
perspectives

## GET obtenu par notre approche



Introduction

Fondements  
théoriques

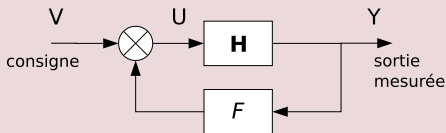
Partage de  
ressources

Routage de  
transporteurs

Conclusion et  
perspectives

- Le nombre de palettes maximum désiré donne un modèle de référence.
- Résiduation (Blyth et Janowitz, 1972) grâce aux fonctions aux bornes des intervalles de comportement des systèmes.
- Obtention d'une commande en boucle fermée de type retour de sortie satisfaisant les critères du juste-à-temps.

## Commande de type retour de sortie



où  $H$  est le système nominal,  $F$  est le contrôleur par retour de sortie et  $V$ ,  $U$  et  $Y$  sont respectivement les signaux d'entrée, d'entrée optimale et de sortie.

Introduction

Fondements  
théoriques

Partage de  
ressources

Routage de  
transporteurs

Conclusion et  
perspectives

- ▶ Introduction
- ▶ Fondements théoriques
- ▶ Partage de ressources
- ▶ **Routage de transporteurs**
- ▶ Conclusion et perspectives

Introduction

Fondements  
théoriques

Partage de  
ressources

Routage de  
transporteurs

Conclusion et  
perspectives

## En modélisation

Définition de deux bornes encadrant le comportement de systèmes incluant des aiguillages entre sous-systèmes mis en parallèle, moyennant une politique de routage **périodique**.

- Différents cas possibles, en fonction des sous-systèmes positionnés en parallèle et du choix des politiques de routage.

Introduction

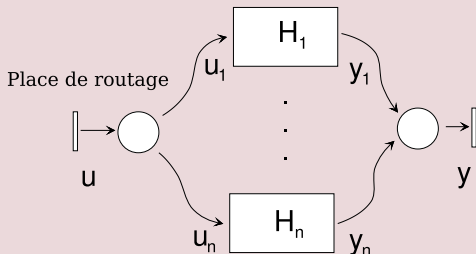
Fondements  
théoriques

Partage de  
ressources

Routage de  
transporteurs

Conclusion et  
perspectives

## Lignes de production en parallèle



où les  $H_i$  sont les réponses impulsionnelles des différents systèmes placés en parallèle. L'entrée  $u$  est routée vers un des  $u_i$  et la sortie  $y$  collecte tous les événements  $y_i$ .

- Ce RdP n'est plus un GET (place de routage).



Introduction

Fondements  
théoriques

Partage de  
ressources

Routage de  
transporteurs

Conclusion et  
perspectives

- Étude du système global via son comportement entrée/sortie.
  - Le signal de sortie est la convolution  $*$  entre le signal d'entrée et la réponse impulsionnelle du système.

$$y(t) = \bigoplus_{i=0}^t H(i) \otimes u(t - i) = (H * u)(t)$$

- Approximation possible de ce comportement, en l'incluant dans un intervalle, pour des politiques de routage **périodiques** particulières.
  - Les bornes sont manipulables grâce aux méthodes « classiques » utilisées dans les dioïdes.

Introduction

Fondements  
théoriques

Partage de  
ressources

Routage de  
transporteurs

Conclusion et  
perspectives

## Produit $\odot$ , dit « de Hadamard »

Produit point à point de fonctions compteur dans  $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$ .

$$\forall t, (f \odot g)(t) = f(t) \otimes g(t).$$

## Application de changement d'échelle

L'application de changement d'échelle, notée  $Ech_n$ , prend pour paramètre une fonction compteur et la multiplie par un entier  $n \in \mathbb{N}$ .

- Multiplication par  $n$  du nombre de jetons du RdP modélisé par la fonction compteur.

Introduction

Fondements  
théoriques

Partage de  
ressources

Routage de  
transporteurs

Conclusion et  
perspectives

## Fonction de routage périodique

Soit un système  $H$  constitué de 2 sous-systèmes  $H_1$  et  $H_2$  en conflit. Dans notre cas,  $m$  produits entrants sont d'abord routés vers  $H_1$ , puis  $n$  de ces événements sont routés vers  $H_2$ , ensuite  $m$  d'entre eux vers  $H_1$  et ainsi de suite de manière cyclique.

- On note  $r = m|n$  la fonction de routage en amont de  $H_1$  et  $H_2$ .
- $$\forall k, \quad u_1(k) = u(\lfloor k/m \rfloor \times (m+n) + (k \bmod m))$$
$$u_2(k) = u(\lfloor k/n \rfloor \times (m+n) + (k \bmod n) + m).$$

# Encadrement du comportement de sous-systèmes en conflits

Introduction

Fondements  
théoriques

Partage de  
ressources

Routage de  
transporteurs

Conclusion et  
perspectives

Type de sous-systèmes	Type de routage	Réponse impulsionnelle	
$n$ sous-systèmes identiques ( $H H \dots H$ )	Routage cyclique $1 1 \dots 1$	$\odot_{i=0}^n H = \text{Ech}_n(H)$	
		Borne inf.	Majorant
$n$ sous-systèmes différents ( $H_1 H_2 \dots H_n$ )	Routage cyclique $1 1 \dots 1$	$\odot_{i=0}^n H_i$	$\text{Ech}_n(\bigoplus_{i=0}^n H_i)$
2 sous-systèmes différents ( $H_1 H_2$ )	Routage périodique $n m$		$\text{Ech}_{m+n}(\text{Ech}_m^b(H_1) \oplus \text{Ech}_n^b(H_2))$

- Borne inférieure atteinte quand les sous-systèmes sont identiques.

Introduction

Fondements  
théoriques

Partage de  
ressources

Routage de  
transporteurs

Conclusion et  
perspectives

## Pente asymptotique

Soit  $H$  une fonction compteur telle que

$\forall t > t_0, H(t) = N \otimes H(t - T)$ . La **pente asymptotique** de  $H$  est notée  $\sigma(H) = \frac{N}{T}$ .

- Correspond à la notion de **cadence** en gestion de production.
- GET sont toujours caractérisés par des comportement ultimement périodiques.
  - On choisit  $m|n$  telle que les bornes d'un intervalle de comportements aient la même pente asymptotique.
  - Correspond à la meilleure cadence, tout en réduisant l'incertitude liée à la modélisation par intervalles.

Introduction

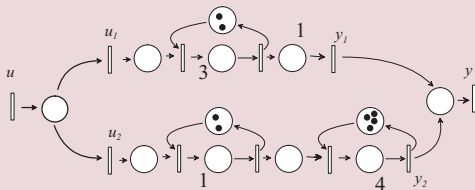
Fondements  
théoriques

Partage de  
ressources

Routage de  
transporteurs

Conclusion et  
perspectives

## Cas d'atelier



- $\sigma(H_1) = 2/3$  et  $\sigma(H_2) = 1$ .
  - Fonction de routage  $r = 2|3$  garantit une cadence globale de  $\sigma((H_1|H_2)_{2|3}) = \sigma(H_1) + \sigma(H_2) = 5/3$ .
- Comportement de l'atelier inclus dans l'intervalle  $[H_1 \odot H_2, \text{Ech}_5(\text{Ech}_2^b(H_1) \oplus \text{Ech}_3^b(H_2))]$ .
  - Borne inférieure  $H_1 \odot H_2 = (\delta^4 \oplus 2\delta^5 \oplus 4\delta^6 \oplus 6\delta^7 \oplus 8\delta^9 \oplus 10\delta^{10} \oplus 14\delta^{13} \oplus 18\delta^{14})(20\delta^{12})^*$ .
  - Majorant  $\text{Ech}_5(\text{Ech}_2^b(H_1) \oplus \text{Ech}_3^b(H_2)) = (\delta^6 \oplus 5\delta^9 \oplus 10\delta^{13} \oplus 15\delta^{14})(20\delta^{12})^*$ .

Introduction

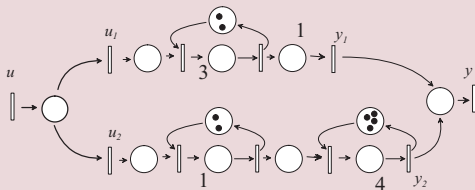
Fondements  
théoriques

Partage de  
ressources

Routage de  
transporteurs

Conclusion et  
perspectives

## Cas d'atelier



- $\sigma(H_1) = 2/3$  et  $\sigma(H_2) = 1$ .
  - Fonction de routage  $r = 2|3$  garantit une cadence globale de  $\sigma((H_1|H_2)_{2|3}) = \sigma(H_1) + \sigma(H_2) = 5/3$ .
- Comportement de l'atelier inclus dans l'intervalle  $[H_1 \odot H_2, \text{Ech}_5(\text{Ech}_2^b(H_1) \oplus \text{Ech}_3^b(H_2))]$ .
  - Borne inférieure  $H_1 \odot H_2 = (\delta^4 \oplus 2\delta^5 \oplus 4\delta^6 \oplus 6\delta^7 \oplus 8\delta^9 \oplus 10\delta^{10} \oplus 14\delta^{13} \oplus 18\delta^{14})(20\delta^{12})^*$ .
  - Majorant  $\text{Ech}_5(\text{Ech}_2^b(H_1) \oplus \text{Ech}_3^b(H_2)) = (\delta^6 \oplus 5\delta^9 \oplus 10\delta^{13} \oplus 15\delta^{14})(20\delta^{12})^*$

Introduction

Fondements  
théoriques

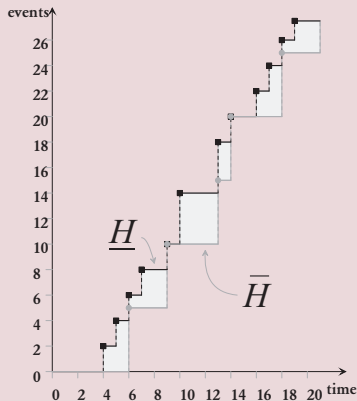
Partage de  
ressources

Routage de  
transporteurs

Conclusion et  
perspectives

- Pour toute entrée  $u$ ,  $(H_1|H_2)_{2|3}(u)$  comprise entre les deux bornes de l'intervalle  $[\underline{H}, \overline{H}]$  calculé précédemment.
- Borne inférieure est le comportement le plus rapide (relation d'ordre définie sur  $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$ ).
- La zone grisée correspond aux incertitudes liées au routage.

## Réponse impulsionnelle des deux bornes de l'intervalle





Introduction

Fondements  
théoriques

Partage de  
ressources

Routage de  
transporteurs

Conclusion et  
perspectives

- ▶ Introduction
- ▶ Fondements théoriques
- ▶ Partage de ressources
- ▶ Routage de transporteurs
- ▶ **Conclusion et perspectives**

Introduction

Fondements  
théoriques

Partage de  
ressources

Routage de  
transporteurs

Conclusion et  
perspectives

- Problème de modélisation directe transposé en un problème d'analyse d'intervalles. Les bornes de ces intervalles nous permettent d'utiliser tous les apports de la théorie des dioïdes.
- Possibilité d'étudier des classes plus larges de systèmes, moyennant l'utilisation de règles de gestion appropriées (périodiques).
  - Extension du champ des cas industriels modélisables formellement dans les dioïdes.

Introduction

Fondements  
théoriques

Partage de  
ressources

Routage de  
transporteurs

Conclusion et  
perspectives

- Définir une approche globale de modélisation, incluant à la fois des ressources partagées et des sections d'exclusion mutuelle (zone sensibles où les chevauchements sont à éviter).
  - Modéliser tout SdP par composition de briques de base «  $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$  linéaires ».
- Évaluer l'intérêt de ces approches dans le cadre de la simulation.
  - Tester le système de commande (issu des approximations de l'étape de modélisation) sur un système physique émulé.
- Permettre la modélisation d'une gestion de chaînes logistiques multi-sites.
  - Ressources partagées (camions) entre plusieurs systèmes complexes (usines).

Introduction

Fondements  
théoriques

Partage de  
ressources

Routage de  
transporteurs

Conclusion et  
perspectives

Merci de votre attention !

Système d'équation correspondant à la politique de  
gestion d'une ressource partagée

$$\begin{cases} t_1(k) = u_1(k) \otimes \tau_a \oplus t_2(k-1) \otimes \tau_b \\ t_2(k) = \tau_{P_1} \otimes t_1(k) \\ t_3(k) = u_2(k) \otimes \tau_c \oplus t_4(k-1) \otimes \tau_d \\ t_4(k) = \tau_{P_2} \otimes t_3(k) \end{cases}$$

avec  $\tau_a, \tau_b \in [0, \tau_{P_2}]$  et  $\tau_c, \tau_d \in [0, \tau_{P_1}]$ .

Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G. J. et Quadrat, J.-P.  
(1992).

*Synchronization and Linearity, An Algebra for Discrete  
Event Systems.*

John Wiley and Sons, New York.

Disponible à l'adresse

[cermics.enpc.fr/~cohen-g/documents/BCOQ-book.pdf](http://cermics.enpc.fr/~cohen-g/documents/BCOQ-book.pdf)

Blyth, T. S. et Janowitz, M. F. (1972).

*Residuation Theory.*

Pergamon press.

Boutin, O., Cottenceau, B. et L'Anton, A. (2007).

Online Control of a (max,+) Linear Emulated  
Production System.

*In* (Yang et al., 2007), page 321.

Cohen, G., Dubois, D., Quadrat, J.-P. et Viot, M. (1983).  
Analyse du comportement périodique de systèmes de  
production par la théorie des dioïdes.

RR-0191, INRIA.

Disponible à l'adresse

[www.inria.fr/rrrt/rr-0191.html](http://www.inria.fr/rrrt/rr-0191.html).

Lhommeau, M., Hardouin, L., Cottenceau, B. et Jaulin, L.  
(2004).

Interval Analysis and Dioid : Application to Robust  
Controller Design for Timed Event Graphs.

*Automatica*, 40(11):1923 – 1930.

Annexe

Notations dans les  
structures  
algébriques de  
dioïdes

Pour aller plus loin

References

Yang, S., Chen, G., Thomas, A., Artiba, A. et Xu, Z.,  
éditeurs (2007).

*Proceedings of the 2nd International Conference on  
Industrial Engineering and Systems Management,  
IESM'07, Pékin, Chine.* Tsinghua University Press.