

Approximation plate d'un système hybride à hystérésis

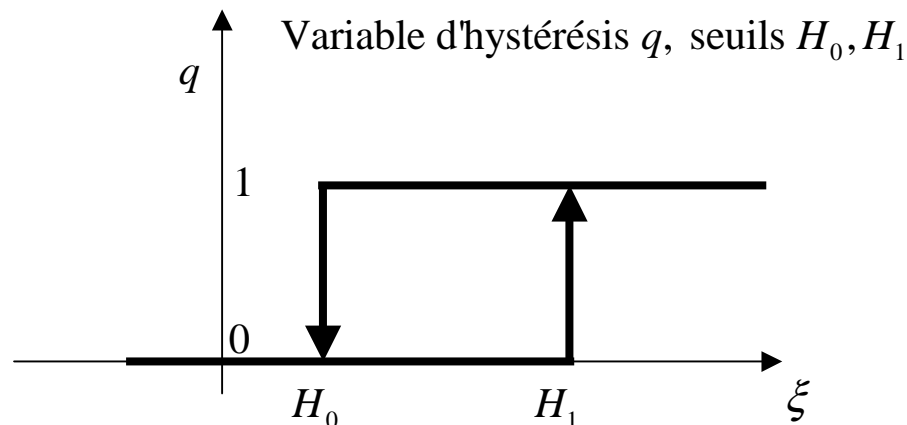
J.-C. Jolly

LISA – 23/06/2009

Systeme hybride à hystérésis

Cas général :

$$\begin{cases} \dot{X} = f(X, q) \\ \xi = LX, q = q(\xi) \end{cases}$$

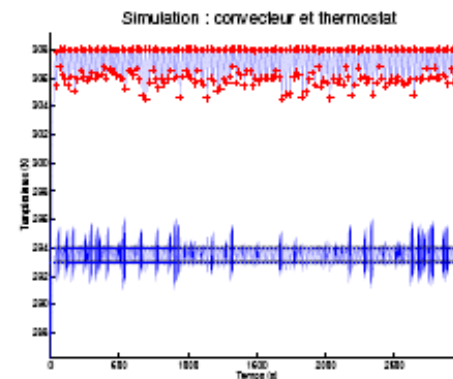
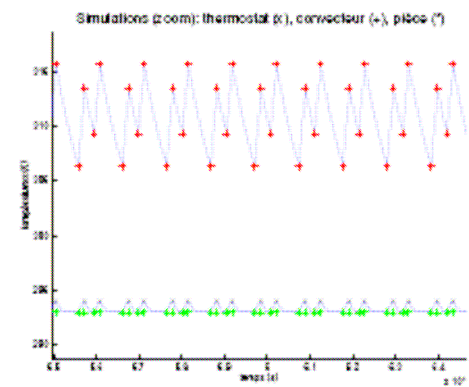
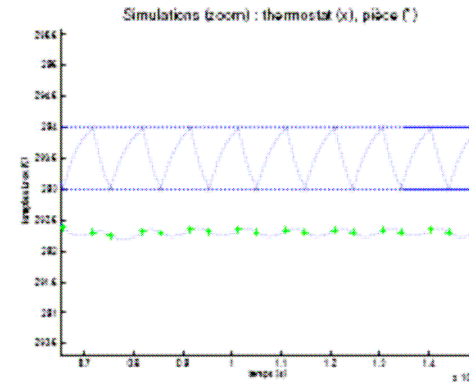


- Suite des instants de commutations : $(t_n)_{n \in \mathbb{N}}, t_n = \text{solution implicite de } LX(t_n) = H_i, i = 0, 1$
- Suite des durées entre commutations : $(\sigma_n)_{n \in \mathbb{N}}, \sigma_n = t_n - t_{n-1} = \psi_{q_n}(X_{n-1}), \psi_{q_n}$ implicite
- Suite des états correspondants : $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}, X_n = g_{q_n}(\sigma_n, X_{n-1}) = G_{q_n}(X_{n-1}), G_{q_n}(\cdot) = g_{q_n}(\psi_{q_n}(\cdot), \cdot)$
- Soit $h_{q_n} = G_{q_n} \circ G_{q_{n-1}}$. Comme $q_n = q(t_n^+)$ alterne entre 1 et 0, on a $h_{q_n} = h_1$ ou h_0 .
- Le couple (h_0, h_1) est le système discret qui pilote le système hybride à hystérésis.

Réponses

- La réponse fréquente est un 1-cycle limite
correspondant à un point fixe (X^0, X^1) de (h_0, h_1) ,
et des temps de cycle (σ^0, σ^1)
- Une réponse plus générale est un n -cycle limite $(X^0, X^1, \dots, X^{2n-1})$
correspondant à un point fixe (X^0, X^n) de (h_0^n, h_1^n) ,
avec
$$\begin{cases} X^{n-1} = h_0(X^{n-2}) = h_0^2(X^{n-3}) = \dots = h_0^{n-1}(X^0) \\ X^{2n-1} = h_1(X^{2n-2}) = h_1^2(X^{2n-3}) = \dots = h_1^{n-1}(X^n) \end{cases}$$

et des temps de cycle $(\sigma^0, \sigma^1, \dots, \sigma^{2n-1})$
- On peut aussi observer un comportement chaotique



Méthode dans le cas linéaire

- Intégration exacte entre t_{n-1} et $t_n \Rightarrow g_{q_n}$
- Détermination numérique des temps de cycle (Newton) $\Rightarrow \psi_{q_n}$
- Calcul des points fixes de $(h_0^n, h_1^n) \Rightarrow$ détermination des n – cycles limites
- Jacobienne de (h_0, h_1) , multiplicateurs caractéristiques \Rightarrow stabilité des n – cycles limites
- Dérivées d'ordre supérieur \Rightarrow conditions suffisantes de bifurcation

Cette méthodologie devient inopérante dès que l'on perd l'intégrabilité exacte, ce qui est le cas général en non-linéaire.

Cas non-linéaire : linéariser n'a pas de sens

– Un n – cycle est défini par $2n$ points X^0, \dots, X^{2n-1} .

Il n'y a pas de critère de choix d'un point X^* plutôt qu'un autre pour le voisinage de linéarisation.

– L'approximation par un développement limité

$$\dot{X} = f(X^*, q) + Df(X^*, q) \cdot (X - X^*) + \frac{1}{2} D^2 f(X, q) \cdot (X - X^*)^2 + \dots$$

d'ordre élevé est hors de portée.

– Le système discret associé au système linéarisé $\dot{X} = f(X^*, q) + \frac{\partial f}{\partial X}(X, q)(X - X^*)$ n'est pas

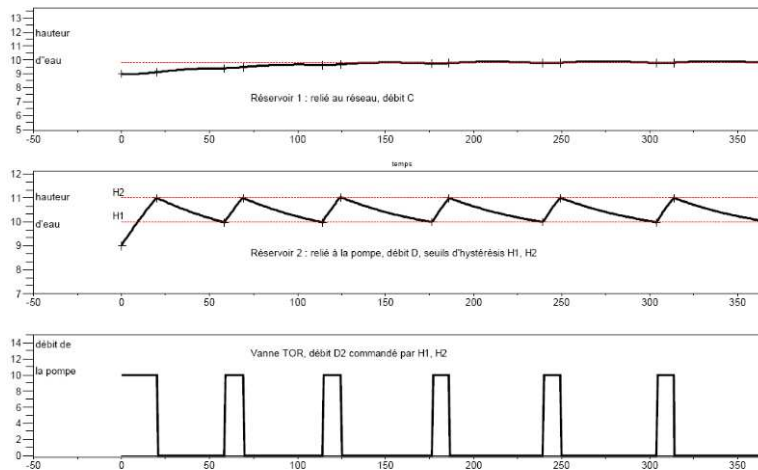
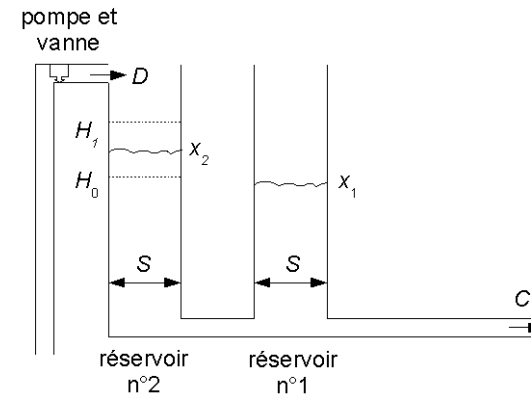
le linéarisé $\frac{\partial(h_0, h_1)}{\partial(X^0, X^1)}$ du système discret associé au système initial $X = f(X, q)$.

Application considérée : système à deux bacs

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = sk\sqrt{|x_2 - x_1|} - c \\ \dot{x}_2 = -sk\sqrt{s(x_2 - x_1)} + qd \end{cases}$$

où $c = \frac{C}{S}$, $d = \frac{D}{S}$, $k = \frac{K}{S}$,

$$s = s(t) = \text{sign}(x_2(t) - x_1(t)), q = q(x_2(t)).$$



Solution exacte

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 \\ y_2 = x_2 - x_1 \end{cases} \quad \begin{cases} \dot{y}_1 = qd - c \Leftrightarrow y_1(t) = y_n^1 + (qd - c)(t - t_n) \text{ sur } [t_n, t_{n+1}] \\ \dot{y}_2 = -2sk\sqrt{sy_2} + qd + c \end{cases} \quad (1)$$

$$\text{Résolution de (2) : } u = -\frac{t}{k}, y(u) = \sqrt{sy_2(t)}, (2) \Leftrightarrow \begin{cases} yy'_u = y - \beta_{s,q}, \\ \beta_{s,q} = \frac{s}{2k}(qd + c) \end{cases} \quad (3),$$

(équation d'Abel de la première forme)

$$v = -\beta_{s,q}u, (3) \Leftrightarrow yy'_v = -\frac{y}{\beta_{s,q}} + 1 \quad (4),$$

$$\xi = y + \frac{v}{\beta_{s,q}}, \frac{1}{v'_\xi} = y'_v + \frac{1}{\beta_{s,q}}, (4) \Leftrightarrow v'_\xi = \xi - \frac{v}{\beta_{s,q}} \Leftrightarrow v = \alpha \exp\left(-\frac{\xi}{\beta_{s,q}}\right) + \beta_{s,q}\xi - \beta_{s,q}^2 \quad (5)$$

$$\text{On a trouvé : } y = \xi - \frac{v}{\beta_{s,q}} = -\frac{\alpha}{\beta_{s,q}} \exp\left(-\frac{\xi}{\beta_{s,q}}\right) + \beta_{s,q},$$

$$t = -ku = -k(y - \xi) = \frac{kv}{\beta_{s,q}} = k \left(\frac{\alpha}{\beta_{s,q}} \exp\left(-\frac{\xi}{\beta_{s,q}}\right) + \xi - \beta_{s,q} \right) = f_{s,q}(\xi), \xi = f_{s,q}^{-1}(t),$$

et donc

$$\begin{cases} y_2 = sy^2 = s \left(\frac{\alpha}{\beta_{s,q}} \exp\left(-\frac{f_{s,q}^{-1}(t)}{\beta_{s,q}}\right) - \beta_{s,q} \right)^2, \text{ qui est défini à l'inversion près de } f_{s,q}. \\ \alpha \text{ constante d'intégration réelle} \end{cases}$$

Relation remarquable des temps de 1-cycle

Relation entre σ^0, σ^1 :

$$(1) \Rightarrow y_{n+1}^1 = y_n^1 + (q_n d - c)\sigma_n \Leftrightarrow x_{n+1}^1 = x_n^1 + (q_n d - c)\sigma_n - (x_{n+1}^2 - x_n^2).$$

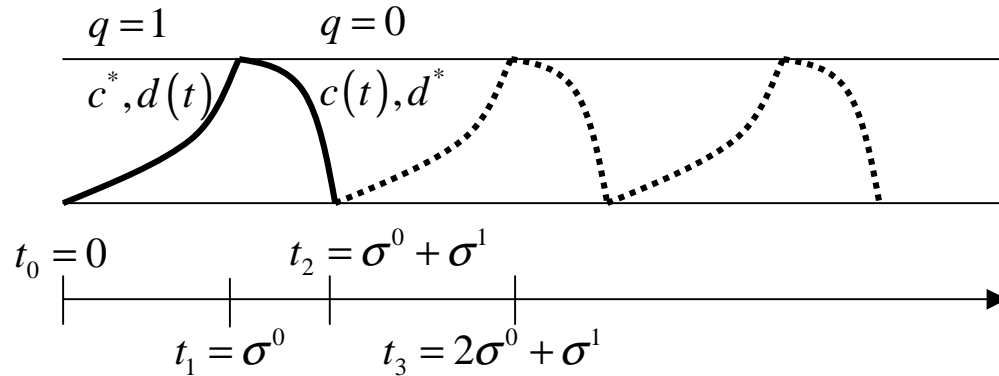
Or on a $x_{n+1}^2 - x_n^2 = (2q_n - 1)\Delta H, \Delta H = H_1 - H_0$, d'où

$$\begin{pmatrix} x_{n+1}^1 \\ x_{n+1}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n^1 \\ x_n^2 \end{pmatrix} + q_n \begin{pmatrix} d\sigma_n + 2\Delta H \\ 2\Delta H \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \Delta H + c\sigma_n \\ \Delta H \end{pmatrix}. \text{ En composant avec le rang suivant, on a :}$$

$$\begin{pmatrix} x_{n+2}^1 \\ x_{n+2}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_n^1 \\ x_n^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} d(q_n\sigma_n + (1-q_n)\sigma_{n+1}) - c(\sigma_n + \sigma_{n+1}) \\ 0 \end{pmatrix}. \text{ La condition de 1-cycle donne :}$$

$$c\sigma^1 = (d-c)\sigma^0$$

Sortie plate



- Sortie plate x_1 sur $[0, \sigma^0]$:

$$(1) \Rightarrow x_2 = x_1 + \frac{s}{k^2} (\dot{x}_1 + c^*)^2$$

$$\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = d - c^* \Rightarrow d = 2 \left(\dot{x}_1 + \frac{s}{k^2} \ddot{x}_1 (\dot{x}_1 + c^*) \right) + c^*$$

- Sortie plate x_2 sur $[\sigma^0, \sigma^0 + \sigma^1]$:

$$(2) \Rightarrow x_1 = x_2 - \frac{s}{k^2} (\dot{x}_2)^2$$

$$\dot{x}_1 + \dot{x}_2 = -c^* \Rightarrow c = -2\dot{x}_2 \left(1 - \frac{s}{k^2} \ddot{x}_2 \right)$$

- Condition de continuité en t_0 (ou t_2) et t_1 pour x_2 :

$$x_0^1 + \frac{s_0}{k^2} (\dot{x}_0^1 + c^*)^2 = H_0, x_1^1 + \frac{s_1}{k^2} (\dot{x}_1^1 + c^*)^2 = H_1 \quad (7)$$

- Condition de continuité en t_0 (ou t_2) et t_1 pour x_1 :

$$x_0^1 = H_0 - \frac{s_0}{k^2} (\dot{x}_0^2)^2, x_1^1 = H_1 - \frac{s_1}{k^2} (\dot{x}_1^2)^2 \quad (6)$$

- Contraintes :
$$\begin{cases} d(t) \geq 0 \text{ sur } [0, \sigma^0] \\ c(t) \geq 0 \text{ sur } [\sigma^0, \sigma^0 + \sigma^1] \end{cases} \quad (8)$$

Approximation par un polynôme d'Hermite

- Sur $[0, \sigma^0]$: $x_1 = x_0^1 p_{0,0} + x_1^1 p_{1,0} + \dot{x}_0^1 p_{0,1} + \dot{x}_1^1 p_{1,1}$

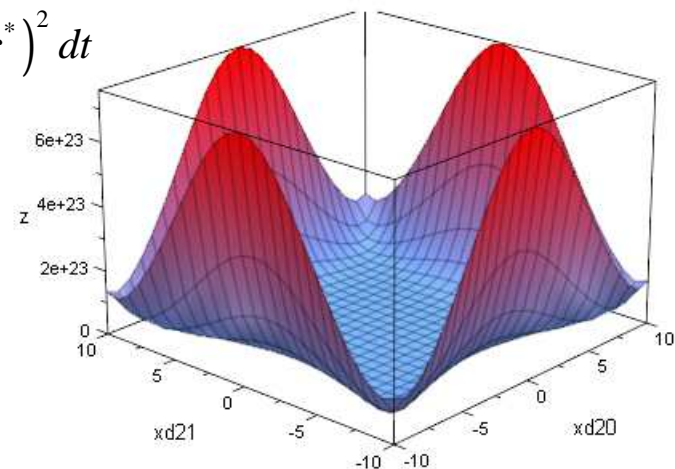
$$p_{0,0} = \left(\frac{t - \sigma^0}{\sigma^0}\right)^2 \left(1 - 2\left(\frac{t - \sigma^0}{\sigma^0}\right)\frac{t}{\sigma^0}\right), p_{1,0} = \left(\frac{t}{\sigma^0}\right)^2 \left(1 - 2\frac{t}{\sigma^0}\left(\frac{t - \sigma^0}{\sigma^0}\right)\right),$$

$$p_{0,1} = t \left(\frac{t - \sigma^0}{\sigma^0}\right)^2, p_{1,1} = (t - \sigma^0) \left(\frac{t}{\sigma^0}\right)^2.$$

- Formules analogues pour x_2 sur $[\sigma^0, \sigma^0 + \sigma^1]$. Compte tenu de $x_0^2 = H_0, x_1^2 = H_1$, il reste 6 paramètres $x_0^1, x_1^1, \dot{x}_0^1, \dot{x}_1^1, \dot{x}_0^2, \dot{x}_1^2$ soumis aux contraintes égalité (6), (7), (8).

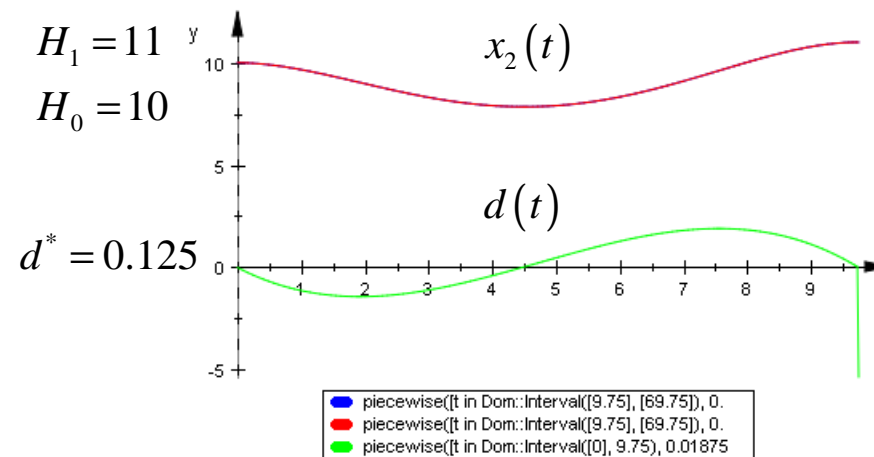
Cela fait 2 paramètres libres, mettons \dot{x}_0^2, \dot{x}_1^2 , avec des conditions de domaine.

- Critère : $J(c, d) = \int_0^{\sigma^0} (d(t) - d^*)^2 dt + \int_{\sigma^0}^{\sigma^0 + \sigma^1} (c(t) - c^*)^2 dt$



Résultats

Sur $[0, \sigma^0]$:



- Par simulation : $x_0^1 = 9.77, x_1^1 = 9.79, \sigma^0 = 9.75, \sigma^1 = 55.5$
- Résultat graphique insatisfaisant.
- Difficultés :
 - valeur de s ;
 - signe de $c(t), d(t)$;
 - augmenter le nombre de points pour améliorer la satisfaction du critère.
- Pire : la convergence des dérivées de x_1, x_2 n'est pas assurée ... ?

Les polynômes d'Hermite ne semblent pas adaptés à l'approximation plate.