Stabilité d'une certaine classe de systèmes à commutation

Ulysse Serres (IECN)

collaboration avec P. Riedinger (CRAN) et J.-C. Vivalda (LMAM)

Angers, 23 juin 2009

Systèmes linaires à commutation

Définition

On appelle système linéaire à commutation, un système dynamique (temps continu) de la forme

$$\dot{x}(t) = A_{i(t)}x(t), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad A_i \in \{A_1, \ldots, A_N\},$$

où

- $A_1, \ldots, A_N$ sont des matrices carrées de taille d.
- L'application $i(\cdot) : \mathbb{R}_+ \to \{1, \ldots, N\}$ est appelée fonction de commutation.

Systèmes linaires à commutation

Définition

On appelle système linéaire à commutation, un système dynamique (temps continu) de la forme

$$\dot{x}(t) = A_{i(t)}x(t), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad A_i \in \{A_1, \ldots, A_N\},$$

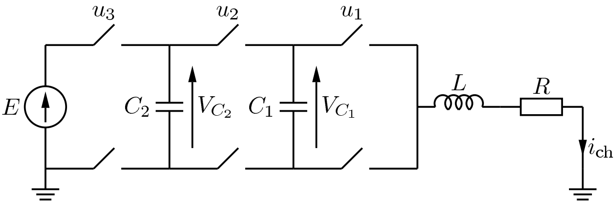
où

- $A_1, \ldots, A_N$ sont des matrices carrées de taille d.
- L'application $i(\cdot) : \mathbb{R}_+ \to \{1, \ldots, N\}$ est appelée fonction de commutation.

Définition

On dit que ℓ est un point ω-limite issu de x_0, si $x(0) = x_0$ et s'il existe une suite (t_n) tendant vers l'infini telle que $x(t_n) \to \ell$ quand $n \to \infty$. On note $\omega(x_0)$ l'ensemble de tous les points ω-limites issus de x_0.

Schéma :



État : $x = (V_{C_1}, V_{C_2}, i_{ch})$, Contrôle : $u = (u_1, u_2, u_3)$, Observation : i_{ch}

Objectif :

- Reconstruire à l'aide d'un observateur de Luenberger l'état complet du système $x(t)$ ne connaissant que l'intensité i_{ch} circulant dans la charge.

Dynamique du système

Notations :

- $x(t) = (x_1(t), x_2(t), x_3(t)) = (V_{C_1}, V_{C_2}, i_{ch}) \in \mathbb{R}^3$,
- $u = (u_1, u_2, u_3) \in \{0, 1\}^3$.

Modèle (continu) dynamique du convertisseur à 3 niveaux :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = F(u(t))x(t) + G(u(t)) \\ y(t) = Cx(t), \end{cases}$$

où

$$F(u) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{u_2-u_1}{C_1} \\ 0 & 0 & \frac{u_3-u_2}{C_2} \\ -\frac{u_2-u_1}{L} & -\frac{u_3-u_2}{L} & -\frac{R}{L} \end{pmatrix}, \quad G(u) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ u_3 \frac{E}{L} \end{pmatrix}, \quad C^T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Construction de l'observateur de type Luenberger

La dynamique d'un observateur de Luenberger s'écrit

$$\dot{\hat{x}} = F(u)\hat{x} - L(u)(C\hat{x} - y) + G(u), \quad L(u) \in \mathbb{R}^{3\times 1},$$

et celle de l'erreur $e = \hat{x} - x$ s'écrit

$$\dot{e}(t) = A(u(t))e(t), \quad \text{où} \quad A(u) = F(u) - L(u)C. \tag{1}$$

Construction de l'observateur de type Luenberger

La dynamique d'un observateur de Luenberger s'écrit

$$\dot{\hat{x}} = F(u)\hat{x} - L(u)(C\hat{x} - y) + G(u), \quad L(u) \in \mathbb{R}^{3\times 1},$$

et celle de l'erreur $e = \hat{x} - x$ s'écrit

$$\dot{e}(t) = A(u(t))e(t), \quad \text{où} \quad A(u) = F(u) - L(u)C. \tag{1}$$

Suivant les valeurs de u, 8 choix sont possibles pour $A(u)$; on peut donc réécrire l'équation (1) sous la forme d'un système à commutation :

$$\dot{e}(t) = A_{i(t)}e(t), \quad A_{i(t)} \in \{A_1, \ldots, A_8\}. \tag{2}$$

Construction de l'observateur de type Luenberger

La dynamique d'un observateur de Luenberger s'écrit

$$\dot{\hat{x}} = F(u)\hat{x} - L(u)(C\hat{x} - y) + G(u), \quad L(u) \in \mathbb{R}^{3\times 1},$$

et celle de l'erreur $e = \hat{x} - x$ s'écrit

$$\dot{e}(t) = A(u(t))e(t), \quad \text{où} \quad A(u) = F(u) - L(u)C. \tag{1}$$

Suivant les valeurs de u, 8 choix sont possibles pour $A(u)$; on peut donc réécrire l'équation (1) sous la forme d'un système à commutation :

$$\dot{e}(t) = A_{i(t)}e(t), \quad A_{i(t)} \in \{A_1, \ldots, A_8\}. \tag{2}$$

- On dit que l'observateur converge si $e(t) \to 0$ quand $t \to \infty$.

Construction de l'observateur de type Luenberger

La dynamique d'un observateur de Luenberger s'écrit

$$\dot{\hat{x}} = F(u)\hat{x} - L(u)(C\hat{x} - y) + G(u), \quad L(u) \in \mathbb{R}^{3\times 1},$$

et celle de l'erreur $e = \hat{x} - x$ s'écrit

$$\dot{e}(t) = A(u(t))e(t), \quad \text{où} \quad A(u) = F(u) - L(u)C. \tag{1}$$

Suivant les valeurs de u, 8 choix sont possibles pour $A(u)$; on peut donc réécrire l'équation (1) sous la forme d'un système à commutation :

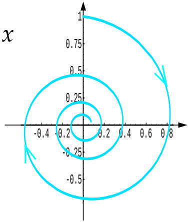
$$\dot{e}(t) = A_{i(t)}e(t), \quad A_{i(t)} \in \{A_1, \ldots, A_8\}. \tag{2}$$

- On dit que l'observateur converge si $e(t) \to 0$ quand $t \to \infty$.
- On est donc ramené à étudier la convergence vers zéro du système linéaire à commutation (2)

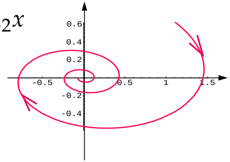
Stabilité des systèmes à commutation

Le problème de la stabilité asymptotique est non trivial même si $N = 2$

$\dot{x} = A_1 x$



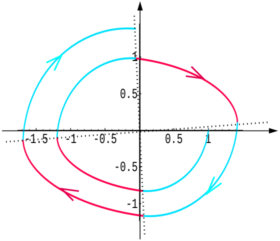
$\dot{x} = A_2 x$



Asymptotiquement stables

$\Longrightarrow$

$\dot{x} = u(t)A_1 x + (1 - u(t))A_2 x$



Instable

Quelques résultats récents

Définition

On dit que le système commuté

$$\dot{x}(t) = u(t)A_1x(t) + (1-u(t))B_2x(t), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad u(t) \in [0,1], \quad (3)$$

est GUAS si pour tout signal $t \mapsto u(t)$ à valeurs dans $[0,1]$, le système (3) est asymptotiquement stable et si le taux de décroissance exponentielle est uniforme par rapport au signal.

Les couples de matrices (A_1, A_2) pour lesquels le système (3) est GUAS sont caractérisés (CNS) ; voir :

1. Boscain, SIAM J. Control Optim., 2002
2. Balde, Boscain, Commun. Pure Appl. Anal., 2008
3. Balde, Boscain & Mason, à paraître dans Int. J. Control.

Quelques résultats récents

Définition

On dit que le système commuté

$$\dot{x}(t) = u(t)A_1x(t) + (1 - u(t))B_2x(t), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad u(t) \in [0,1], \quad (3)$$

est GUAS si pour tout signal $t \mapsto u(t)$ à valeurs dans $[0,1]$, le système (3) est asymptotiquement stable et si le taux de décroissance exponentielle est uniforme par rapport au signal.

Les couples de matrices (A_1, A_2) pour lesquels le système (3) est GUAS sont caractérisés (CNS) ; voir :

1. Boscain, SIAM J. Control Optim., 2002
2. Balde, Boscain, Commun. Pure Appl. Anal., 2008
3. Balde, Boscain & Mason, à paraître dans Int. J. Control.

Nouveauté : la preuve du résultat est basée sur une analyse géométrique du portrait de phase.

Résultat important sur la stabilité

Définition

On appelle fonction de Lyapunov commune (FLC) toute fonction $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ vérifiant

- $V(0) = 0$;
- $V(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$;
- V est strictement décroissante le long des trajectoires (non nulles) du système.

Théorème

Si le système à commutation

$$\dot{x}(t) = A_{i(t)}x(t), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad A_i \in \{A_1, \dots, A_N\},$$

admet une FLC, alors il est GUAS.

Résultat important sur la stabilité

Définition

On appelle fonction de Lyapunov commune (FLC) toute fonction $V : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}_+$ vérifiant

- $V(0) = 0$;
- $V(x) > 0$ pour tout $x \neq 0$;
- V est strictement décroissante le long des trajectoires (non nulles) du système.

Théorème

Si le système à commutation

$$\dot{x}(t) = A_{i(t)}x(t), \quad x \in \mathbb{R}^d, \quad A_i \in \{A_1, \ldots, A_N\},$$

admet une FLC, alors il est GUAS.

Ce n'est pas le cas pour le système issu du convertisseur.

Propriétés du SC issu du convertisseur

Rappel : dynamique de l'erreur

$$\dot{x}(t) = A_{i(t)}x(t), \quad \text{avec} \quad A_i = F_i - L_i C.$$

On peut choisir les matrices de gain L_i de sorte que le système à commutation issu du convertisseur soit tel que :

- Les différentes dynamiques admettent une fonction de Lyapunov *faible* commune $(\exists\ P > 0, \quad \forall\ x, \quad \forall\ i, \quad x^T(A_i^T P + PA_i)x \leqslant 0)$.
- Les matrices A_i n'ont pas de valeurs propres imaginaires pures autres que 0.
- $\bigcap_{i=1}^{N} \operatorname{Ker} A_i = \{0\}$.

Propriétés du SC issu du convertisseur

Rappel : dynamique de l'erreur

$$\dot{x}(t) = A_{i(t)}x(t), \quad \text{avec} \quad A_i = F_i - L_iC.$$

On peut choisir les matrices de gain L_i de sorte que le système à commutation issu du convertisseur soit tel que :

- Les différentes dynamiques admettent une fonction de Lyapunov *faible* commune ($\exists\ P > 0, \quad \forall\ x, \quad \forall\ i, \quad x^T(A_i^TP + PA_i)x \leqslant 0$).
- Les matrices A_i n'ont pas de valeurs propres imaginaires pures autres que 0.
- $\bigcap_{i=1}^{N} \operatorname{Ker} A_i = \{0\}$.

On suppose de plus que lorsqu'un mode est activé, il l'est sur un intervalle $[a_n, a_{n+1})$ de longueur non nulle.

Une condition de convergence vers zéro avec dwell-temps

Définition (dwell-temps *fort*)

On dit que le mode j satisfait la condition de dwell-temps fort s'il existe $\tau > 0$ tel que pour tout $n_j \in \mathbb{N}$ vérifiant $i|_{[a_{n_j}, a_{n_j+1})} = 1$, on a
$a_{n_j+1} - a_{n_j} \geqslant \tau$.
En d'autres termes, la suite des longueurs des intervalles durant lesquels le mode j est activé a une limite inférieure strictement positive.

Théorème

Si chaque mode satisfait l'hypothèse de dwell-temps fort, alors $x(t) \longrightarrow 0$ quand $t \longrightarrow \infty$.

Notion de dwell-temps faible

Définition (dwell-temps *faible*)

On dit que le mode j satisfait la condition de dwell-temps faible si la suite des longueurs des intervalles durant lesquels le mode j est activé ne tend pas zéro quand $t \longrightarrow \infty$.

Notion de dwell-temps faible

Définition (dwell-temps *faible*)

On dit que le mode j satisfait la condition de dwell-temps faible si la suite des longueurs des intervalles durant lesquels le mode j est activé ne tend pas zéro quand $t \longrightarrow \infty$.

Peut-on remplacer l'hypothèse de dwell-temps fort par l'hypothèse de dwell-temps faible dans le théorème précédent ?

Notion de dwell-temps faible

Définition (dwell-temps *faible*)

On dit que le mode j satisfait la condition de dwell-temps faible si la suite des longueurs des intervalles durant lesquels le mode j est activé ne tend pas zéro quand $t \longrightarrow \infty$.

Peut-on remplacer l'hypothèse de dwell-temps fort par l'hypothèse de dwell-temps faible dans le théorème précédent ?

Non sauf en dimension 2.

Théorème (P. Riedinger, J.-C. Vivalda, U. S.)

En dimension 2, si chaque mode satisfait une hypothèse *dwell-temps faible*, alors toute trajectoire du système converge vers zéro.

Une condition de convergence vers zéro sans dwell-temps

On note $M_i = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle A_i x, x \rangle = 0\}$ et $M = \cap_{i=1}^N M_i$.

Définition (activation permanente)

On dit que le mode i satisfait l'hypothèse d'activation permanente si $\lambda(\{t \geqslant 0 \mid \alpha_i(t) = 1\}) = +\infty$.

Une condition de convergence vers zéro sans dwell-temps

On note $M_i = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle A_i x, x \rangle = 0\}$ et $M = \cap_{i=1}^{N} M_i$.

Définition (activation permanente)

On dit que le mode i satisfait l'hypothèse d'activation permanente si $\lambda(\{t \geqslant 0 \mid \alpha_i(t) = 1\}) = +\infty$.

Définition (activation persistante)

On dit que le mode i satisfait l'hypothèse d'activation persistante si, asymptotiquement, sa durée d'activation ne peut pas être négligée devant la durée d'activation des autres modes.

Une condition de convergence vers zéro sans dwell-temps

On note $M_i = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle A_i x, x \rangle = 0\}$ et $M = \cap_{i=1}^N M_i$.

Définition (activation permanente)

On dit que le mode i satisfait l'hypothèse d'activation permanente si $\lambda(\{t \geqslant 0 \mid \alpha_i(t) = 1\}) = +\infty$.

Définition (activation persistante)

On dit que le mode i satisfait l'hypothèse d'activation persistante si, asymptotiquement, sa durée d'activation ne peut pas être négligée devant la durée d'activation des autres modes.

Théorème (P. Riedinger, J.-C. Vivalda, U. S.)

Si chaque mode satisfait les hypothèses d'activation permanente et persistante, alors $\omega(x_0) \subset M$.

Une condition de convergence vers zéro sans dwell-temps

On note $M_i = \{x \in \mathbb{R}^d \mid \langle A_i x, x\rangle = 0\}$ et $M = \cap_{i=1}^N M_i$.

Définition (activation permanente)

On dit que le mode i satisfait l'hypothèse d'activation permanente si $\lambda(\{t \geqslant 0 \mid \alpha_i(t) = 1\}) = +\infty$.

Définition (activation persistante)

On dit que le mode i satisfait l'hypothèse d'activation persistante si, asymptotiquement, sa durée d'activation ne peut pas être négligée devant la durée d'activation des autres modes.

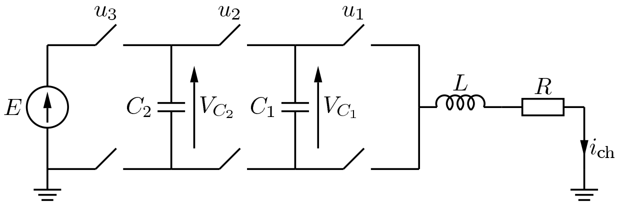
Théorème (P. Riedinger, J.-C. Vivalda, U. S.)

Si chaque mode satisfait les hypothèses d'activation permanente et persistante, alors $\omega(x_0) \subset M$.

Corollaire

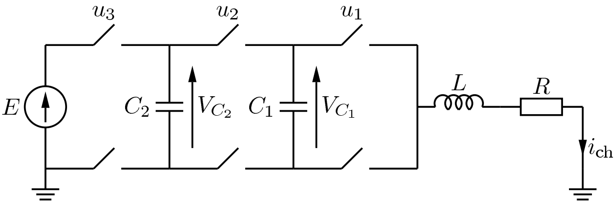
Si de plus $M = \{0\}$, alors $x(t) \to 0$ quand $t \to \infty$.

Retour au convertisseur multiniveaux



Pas de dwell-temps sur les modes mais un dwell-temps sur les interrupteurs

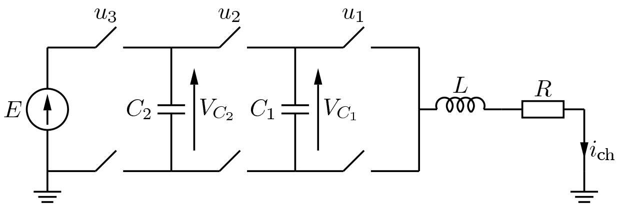
Retour au convertisseur multiniveaux



Pas de dwell-temps sur les modes mais un dwell-temps sur les interrupteurs

Question : *Le dwell-temps sur les interrupteurs suffit-il à assurer la convergence vers zéro de l'observateur (Luenberger) ?*

Retour au convertisseur multiniveaux



Pas de dwell-temps sur les modes mais un dwell-temps sur les interrupteurs

Question : *Le dwell-temps sur les interrupteurs suffit-il à assurer la convergence vers zéro de l'observateur (Luenberger) ?*

Réponse : NON et même pire ; l'ensemble ω-limite pour le système issu du convertisseur n'est pas nécessairement réduit à un point.

Perspectives

Travaux en collaboration avec M. Sigalotti (IECN) et J.-C. Vivalda (LMAM)

- Asservissement des convertisseurs multiniveaux
- Propriétés asymptotiques des systèmes dynamiques hybrides

Références

- « Uniform Stability of Switched Linear Systems: Extensions of LaSalle's Invariance Principle »,
  Hespanha, IEEE Trans. Automat. Control, 2004
- « On stability analysis of linear discrete-time switched systems using quadratic Lyapunov functions »,
  Mason, Sigalotti, Daafouz, Proceedings of the 46th IEEE Conference on Decision and Control, CDC'07, 2007
- « Invariance principles for switching systems via hybrid systems techniques »,
  Goebel, Sanfelice, Teel, Systems Control Lett., 2008
- « On the observability of the flying capacitor converter »,
  Riedinger, Sigalotti, Daafouz, Proceedings of the 10th European Control Conference, Budapest, Hungary, 2009

Références

- « Floating voltages estimation in three-cell converters using a discrete-time Kalman filter »,
  Bensaid, Fadel, PESC. IEEE 32nd Annual, 2001
- « Adaptive observer for multi-cell chopper »,
  Benmansour, de Leon, Djemaï, Second ISCCSP, 2006
- « On the algebraic characterization of invariant sets of switched linear systems »,
  Riedinger, Sigalotti, Daafouz, preprint 2009.
- « On the convergence of linear switched systems »,
  Serres, Vivalda, Riedinger, preprint 2009.