

THESE DE DOCTORAT DE

L'UNIVERSITE D'ANGERS
COMUE UNIVERSITE BRETAGNE LOIRE

ECOLE DOCTORALE N° 602
Sciences pour l'Ingénieur
Spécialité : Génie Industriel

Par

Koffisse Rodrigue SOHOIN

Définition d'une méthodologie d'estimation de fiabilité et de qualification de systèmes mécanique en phase de développement

Thèse présentée et soutenue à « Angers », le « 22/01/2020 »

Unité de recherche : Laboratoire Angevin de Recherche en Ingénierie des Systèmes (LARIS), POLYTECH Angers
Laboratoire de Mécanique de Normandie (LMN), INSA Rouen
Faurecia Automotive Seating, Caligny

Thèse N° : 139334

Rapporteurs avant soutenance : Composition du Jury :

Mohamed ICHCHOU, Professeur,
Ecole Centrale de Lyon

Léo GERVILLE-REACHE, Maître de Conférences, HdR,
Université de Bordeaux

Président :

Bruno CASTANIER,

Professeur,
Université d'Angers

Examineurs :

Mihaela BARREAU,

Maître de Conférences, HdR,
Université d'Angers

Djelali ATTAF,

Docteur, R&D Quality Manager,
FAURECIA

Directeur de thèse :

Fabrice GUERIN,

Professeur,
Université d'Angers

Co-directeur de thèse :

Abdelkhalak EL HAMI,

Professeur,
INSA de Rouen

Co-encadrant de Thèse :

Hassen RIAHI,

Maître de conférences,
Université d'Angers

Dédicaces :

*A ma chérie Believer,
A ma fille adorée Naomie,
Et à mes chers parents.*

*« Most people say that it is the intellect
which makes a great scientist.
They are wrong : it is character. »*

Albert Einstein

L'auteur du présent document vous autorise à le partager, reproduire, distribuer et communiquer selon les conditions suivantes :



- Vous devez le citer en l'attribuant de la manière indiquée par l'auteur (mais pas d'une manière qui suggérerait qu'il approuve votre utilisation de l'œuvre).
- Vous n'avez pas le droit d'utiliser ce document à des fins commerciales.
- Vous n'avez pas le droit de le modifier, de le transformer ou de l'adapter.

Consulter la licence creative commons complète en français :
<http://creativecommons.org/licences/by-nc-nd/2.0/fr/>



REMERCIEMENTS

« *Un mot de remerciement peut souvent accomplir ce qui autrement était impossible.* »

B.C. Forbes

Le présent manuscrit est le fruit d'un travail de thèse mené dans le cadre d'un partenariat entre la société Faurecia Automotive Seating (FSA) site de Caligny, le Laboratoire Angevin de Recherche en Ingénierie des Systèmes (LARIS EA7315 - ISTIA) et le Laboratoire de Mécanique de Normandie (LMN EA3828 - INSA Rouen).

Mes premiers remerciements s'adressent à mon directeur de thèse Monsieur Fabrice GUERIN, que j'ai eu la chance de connaître depuis mon stage de fin d'étude d'ingénieur Génie industriel (au moment où j'ai commencé à découvrir le domaine de la fiabilité) et qui m'as transmis cette passion pour l'ingénierie de la fiabilité. Je tiens à lui témoigner toutes mes gratitudes pour l'encadrement, les orientations scientifiques et techniques qu'il a su me prodiguer tout au long de ce travail de thèse.

Je tiens à remercier l'entreprise FAURECIA qui a investi dans cette thèse et particulièrement, mes encadrants industriels Monsieur Djelali ATTAF et Madame Sandra BIDEF, pour leurs prodigieux conseils et tout ce qu'ils m'ont permis d'apprendre à leurs côtés, tant sur le plan technique que professionnel. Mes remerciements vont également à Monsieur Abdelkhalak EL HAMI, pour avoir co-dirigé cette thèse de doctorat. Je lui suis reconnaissant pour le bon accueil qui m'a été réservé à l'INSA-Rouen, et pour ses conseils qui ont énormément contribué à l'aboutissement de ce travail.

Je voudrais particulièrement remercier mon co-encadrant Monsieur Hassen RIAHI, qui a toujours été présent pour répondre à mes questions, apporter un regard critique constructif et éclairé sur mon travail, et qui a également contribué énormément à la correction de mon manuscrit. J'ai beaucoup appris en travaillant avec lui.

J'exprime mes vifs remerciements à Monsieur Léo GERVILLE-REACHE, et à Monsieur Mohamed ICHCHOU, pour avoir accepté de rapporter ce travail de recherche ainsi qu'au président du Jury monsieur Bruno CASTANIER et à Madame Mihaela BARREAU pour l'intérêt qu'ils ont porté à mes travaux en participation à ma soutenance de thèse tant qu'examineurs.

Je souhaite aussi remercier très sincèrement tout le Personnel du LARIS, pour l'accueil chaleureux et pour leurs disponibilités qui ont rendu très agréables toutes ces années passées au sein du LARIS.

Je fais un clin d'œil spécial à mes collègues doctorants en particulier à Nadare et Khaoula, pour tous les bons moments de partage et pour tous leurs soutiens.

J'adresse à présent, mes chaleureux remerciements à ma très chère épouse Believer, pour son amour, sa patience, et son soutien sans faille tout au long de ces années. Mes gratitudes à mes parents qui m'ont toujours fait confiance et soutenu tout au long de mon parcours académique avec le peu de moyens dont ils disposaient.

Pour finir, je souhaite remercier tous ceux qui, de près ou de loin ont contribué d'une manière ou d'une autre à la réussite de cette épreuve longue et difficile.

Table des matières

Table des matières	12
Table des figures	13
Liste des tableaux	17
Nomenclature	19
1 Introduction générale	21
1.1 Contexte	22
1.2 Problématique de l'estimation de fiabilité en phase de développement	23
1.3 Objectifs de la thèse	26
1.4 Organisation du document	29
2 Notions générales sur la fiabilité	31
2.1 Introduction	34
2.2 Caractérisation de la fiabilité	35
2.2.1 Mesures associées à la fiabilité	35
2.2.1.1 Fonction de fiabilité	35
2.2.1.2 Fonction de répartition et fonction de densité	36
2.2.1.3 Taux de défaillance instantané	36
2.2.1.4 MTTF	37
2.2.2 Principales lois de distributions utilisées en fiabilité	37
2.2.2.1 Loi normale	37
2.2.2.2 Loi LogNormale	38
2.2.2.3 Loi Weibull	38
2.2.2.4 La loi de Birnbaum-Saunders	39
2.2.2.5 La loi du Khi-deux	40
2.2.3 Théorie de l'estimation	41
2.2.3.1 Estimateur ponctuel	41
2.2.3.2 L'estimation par Maximum de Vraisemblance	42
2.2.3.3 Classification des méthodes d'estimation de fiabilité	44

2.2.4	Fiabilité dans le cycle de vie d'un produit	45
2.2.4.1	Courbe en baignoire	45
2.2.4.2	Cycle de vie d'un système mécanique	45
2.2.4.3	Fiabilité dans le cycle de développement d'un produit	46
2.2.5	Particularité de la fiabilité mécanique	47
2.2.5.1	Mécanismes de défaillance des composants mécaniques	47
2.2.5.2	Modèle de fiabilité de composants mécaniques standards	48
2.2.5.3	Fiabilité de composants mécaniques spécifiques : Méthode R-C	49
2.3	Fiabilité prévisionnelle par couplage mécano-probabiliste	51
2.3.1	Modélisation probabiliste de l'incertain	52
2.3.1.1	Types d'incertitudes	52
2.3.1.2	Modèles probabilistes	53
2.3.1.3	Transformation isoprobabiliste	54
2.3.1.4	Propagation de l'incertitude	57
2.3.2	Formulation mathématique du problème de fiabilité	58
2.3.2.1	Fonction d'état limite	58
2.3.2.2	Expression de la probabilité de défaillance	59
2.3.3	Notion d'indice de fiabilité	60
2.3.3.1	Indice de Rjanitzyne-Cornell	60
2.3.3.2	L'indice de Hasofer et Lind	61
2.3.3.3	Recherche du point de conception	62
2.3.4	Calcul de la probabilité de défaillance	63
2.3.4.1	Simulations Monte-Carlo	64
2.3.4.2	First and Second Order Reliability Method (FORM/SORM)	66
2.3.4.3	Méthode de surface de réponse quadratique	70
2.4	Fiabilité expérimentale par les essais	72
2.4.1	Les types d'essais	72
2.4.1.1	Les essais de robustesse	72
2.4.1.2	Les essais d'estimation de la fiabilité	73
2.4.1.3	Les essais de déverminage	73
2.4.2	Estimation de la fiabilité par les essais accélérés	74
2.4.2.1	Plan d'essais accélérés	75
2.4.2.2	Modèles Standards de Vie Accélérée	76
2.4.2.3	Modèles d'accélération courants	79
2.4.3	Essais bayésiens	81
2.4.3.1	Objectif des essais bayésiens	81
2.4.3.2	Principe des essais bayésiens	81
2.5	Conclusion	83

3 Méthodologie d'estimation de fiabilité et de qualification en phase de développe-

ment	85
3.1 Introduction	87
3.2 Estimation numérique de la fiabilité prévisionnelle	88
3.2.1 Méthode de développement en polynômes de chaos (DCP)	88
3.2.2 Méthode de décomposition de la dimension (MDD)	91
3.2.3 Étude comparative	94
3.3 Estimation de fiabilité par couplage RETEX-Numérique	98
3.3.1 Position du problème	98
3.3.2 Méthode basée sur un facteur de similitude	98
3.3.2.1 Définition d'un facteur de similitude	98
3.3.2.2 Estimation de fiabilité pour une nouvelle conception	100
3.4 Méthode basée sur une fonction de transfert temporel	103
3.4.1 Principe de la fonction de transfert	103
3.4.2 Construction de la fonction de transfert	106
3.4.2.1 Discrétisation du domaine de la fiabilité	106
3.4.2.2 Durées de vie expérimentale et numérique de la conception de référence	106
3.4.2.3 Fonction de transfert temporel de la conception de référence	107
3.4.3 Construction de la distribution des durées de vie et estimation de fiabilité	108
3.5 Amélioration par actualisation Bayésienne inverse	111
3.5.1 L'approche Bayésienne inverse	111
3.5.2 Actualisation Bayésienne par Markov Chain Monte Carlo	112
3.5.3 L'algorithme de Metropolis-Hastings (<i>MH</i>)	113
3.5.4 Réglage paramétrique de l'algorithme <i>MCMC – HS</i>	115
3.6 Qualification en phase de développement	116
3.6.1 Plan de démonstration	116
3.6.1.1 Plan de démonstration classique	116
3.6.1.2 Plan de démonstration Bayésien	117
3.6.2 Estimation Bayésienne de fiabilité	119
3.6.2.1 Principe de l'approche Bayésienne	119
3.6.2.2 Détermination des estimateurs Bayésiens	121
3.6.2.3 Détermination de la distribution a priori à partir d'informa- tions disponibles	123
3.6.3 Estimation Bayésienne avec pondération de l'a priori	124
3.6.3.1 Principe de détermination du facteur de pondération	125
3.6.3.2 Utilisation du facteur de pondération	126
3.6.3.3 Estimation de la distribution a posteriori pondérée	126
3.7 Conclusion	127
4 Application à un composant mécanique automobile	129

4.1	Introduction	131
4.2	Mécanisme d'endommagement du verrou	132
4.2.1	Définition du dommage par fatigue	132
4.2.2	Les phases de l'endommagement par fatigue	134
4.2.3	Calcul de durée de vie en fatigue	135
4.2.3.1	Approche $S - N$: Diagramme d'endurance de Wöhler	135
4.2.3.2	Approche $\epsilon - N$: Diagramme de Manson-Coffin	137
4.3	Fiabilité expérimentale par analyse du RETEX	142
4.3.1	Présentation des résultats d'essais accélérés	143
4.3.2	Choix du modèle de durée de vie accélérée	143
4.3.3	Loi d'accélération et fiabilité expérimentale	146
4.4	Fiabilité prévisionnelle par simulation numérique	149
4.4.1	Modèle mécanique déterministe	149
4.4.1.1	Modèle élastoplastique et modèle de fatigue oligocyclique	150
4.4.1.2	Identification des paramètres du modèle de fatigue	152
4.4.2	Modèle mécano-probabiliste	153
4.4.2.1	Construction du modèle de substitution	154
4.4.2.2	Moments statistiques et analyse de fiabilité	155
4.5	Analyse de fiabilité du nouveau développement	158
4.5.1	Fiabilité prévisionnelle du nouveau développement	159
4.5.2	Estimation basée sur le facteur de similitude	163
4.5.3	Estimation basée sur la fonction de transfert temporel	166
4.5.4	Amélioration de l'estimation de la fiabilité par actualisation inverse des paramètres de conception	170
4.6	Plan de qualification du nouveau mécanisme	178
4.6.1	Plan de démonstration classique et Bayésien	178
4.6.2	Estimation Bayésienne de fiabilité après essais	180
4.7	Conclusion	182
5	Conclusions et perspectives	185
5.1	Introduction	186
5.2	Propositions et résultats obtenus	186
5.3	Perspectives	189
	Bibliographie	191

Table des figures

1.1	Les Différents types de mécanismes de siège automobile chez FAURECIA	22
1.2	Fiabilité en conception dans le processus de développement	24
1.3	Organigramme de la méthodologie proposée	28
2.1	(a) Fonction de fiabilité et (b) fonction de répartition	36
2.2	Fonction de taux de défaillance pour différentes distributions	40
2.3	Courbe en baignoire	45
2.4	Cycle de vie d'un système mécanique	46
2.5	Cycle de fiabilisation d'un produit	47
2.6	Méthode contrainte résistance probabiliste : Diagramme de Warner	50
2.7	Illustration du couplage mécano-probabiliste	51
2.8	Finalités de la propagation d'incertitudes	57
2.9	Notions de surface d'état limite, de domaine de défaillance et de domaine de sécurité	59
2.10	probabilité de défaillance	59
2.11	Représentation de l'Indice de Cornell	60
2.12	Représentation de indice de Hasofer Lind	62
2.13	Illustration de l'algorithme HLRF (Diop, 2015)	63
2.14	Tirage aléatoire d'un nombre u^r uniformément distribué entre 0 et 1	65
2.15	Illustration de la méthode de simulations de Monte-Carlo	66
2.16	(a) Surface d'état limite et point de conception dans l'espace physique aléatoire, (b) Approximations <i>FORM</i> et <i>SORM</i> dans l'espace aléatoire standard	67
2.17	Profil d'essai sous stress constant	75
2.18	Profil d'essai sous stress échelonné	76
2.19	Profil d'essai sous stress cyclique	76
2.20	Principe des modèles <i>SVA</i>	77
2.21	Définition du modèle de régression	77
2.22	Principe des essais accélérés	80
2.23	Principe des essais bayésiens	82
3.1	Comparaison de l'uniformité du remplissage spatial des nombres pseudo-aléatoires, de l'échantillonnage de l'hypercube latin et de la séquence de Sobol	90

3.2	L'économie $card(\mathfrak{S}_N^{p,i})/card(\mathfrak{S}_n^p)$ par rapport au nombre de variables aléatoires pour un PC de degré $p = 8$	90
3.3	Plan d'expériences (a) $n = 1, s = 1$, (b) $n = 2, s = 1$, (c) $n = 2, s = 2$ (d) Points d'intégration Gauss-Hermite	94
3.4	(a) Tuyau fissuré, (b) Loi de comportement de Rambreg-Osgood	95
3.5	Conditions de chargement et maillage	96
3.6	Réponse mécanique J , (a) densité de probabilité, (b) fonction de répartition	97
3.7	Représentation de la fiabilité numérique et expérimentale sur le graphe fonctionnelle LogNormale	99
3.8	Procédure d'utilisation du facteur de similitude	101
3.9	Linéarité des versions de mécanismes	102
3.10	(a) Principe des essais accélérés, (b) Définition de la fonction de transfert temporel	104
3.11	Procédure d'estimation de fiabilité pour une nouvelle conception	105
3.12	Durées de vie $t_{\mathcal{D}_{ref}}^{exp}(i)$ et $t_{\mathcal{D}_{ref}}^{num}(i)$ pour une même fiabilité $\mathcal{D}_R(i)$	107
3.13	Obtention de durées de vie $t_{\mathcal{D}_{up}}^{exp}(i)$ à partir de la FTT et de $t_{\mathcal{D}_{up}}^{num}(i)$	109
3.14	Principe de détermination du facteur de pondération	125
4.1	Localisation du verrou de commande sur le siège auto	131
4.2	Verrou de commande : Version \mathcal{D}_{ref}	131
4.3	cycle et histoire de chargement	133
4.4	Types de cycle de chargement	133
4.5	Évolution de l'endommagement en fatigue	134
4.6	La courbe de Wöhler	135
4.7	Variabilité de la courbe S-N	137
4.8	Courbe de Manson-Coffin-Basquin	138
4.9	Méthode des 4 points	139
4.10	Essais accélérés sur verrou de commande \mathcal{D}_{ref}	142
4.11	Représentation des durées de vies accélérées en condition nominale	147
4.12	Loi d'accélération	148
4.13	Fiabilité expérimentale de la version de référence \mathcal{D}_{ref} du mécanisme	148
4.14	(a) Esquisse de \mathcal{D}_{ref} , (b) Cycles de chargement subis par le mécanisme	150
4.15	Modèle éléments finis 3D de la conception de référence \mathcal{D}_{ref}	150
4.16	(a) Loi de Ramberg-Osgood, (b) Modèle Coffin-Manson-Morrow	151
4.17	Processus de calcul de la durée de vie en fatigue N_f	153
4.18	Technique de méta-modélisation	155
4.19	Évaluation de la précision du modèle de substitution pour la conception de référence \mathcal{D}_{ref}	156
4.20	Densité de probabilité de la durée de vie en fatigue N_f de \mathcal{D}_{ref}	157
4.21	Comparaison des fonctions de fiabilité expérimentale et numérique du mécanisme de référence \mathcal{D}_{ref}	158

4.22	Nouvelle version \mathcal{D}_{up} du mécanisme	159
4.23	(a) Esquisse de la nouvelle conception \mathcal{D}_{up} , (b) Chargement appliqué à la nouvelle conception \mathcal{D}_{up}	160
4.24	Modèle éléments finis 3D de la nouvelle conception \mathcal{D}_{up}	160
4.25	Évaluation de l'exactitude du modèle de substitution pour \mathcal{D}_{up}	161
4.26	Fonction de densité de probabilité de la durée de vie en fatigue N_f pour \mathcal{D}_{up}	162
4.27	Fonction de fiabilité numérique obtenue pour \mathcal{D}_{up}	162
4.28	Linéarité entre les modèles mécaniques \mathcal{M}^{ref} et \mathcal{M}^{up}	163
4.29	Courbe de fiabilité estimée de \mathcal{D}_{up} comparée à la courbe numérique et points expérimentaux	165
4.30	Comparaison des modèles de régression utilisés pour construire la fonction de transfert temporel	167
4.31	Comparaison de <i>fiabilité expérimentale</i> estimée et de fiabilité numérique de \mathcal{D}_{up}	168
4.32	Comparaison de la fonction de fiabilité obtenue par l'approche <i>FTT</i> proposée et des résultats d'essais réalisés sur la nouvelle conception \mathcal{D}_{up}	169
4.33	Comparaison des résultats des deux approches d'estimation proposées	169
4.34	Évolution du taux d'acceptation en fonction du facteur d'échelle	171
4.35	Algorithme M-H avec une variance trop large variance ($s=10$)	172
4.36	Algorithme M-H avec une variance trop petite variance ($s=0.005$)	172
4.37	Algorithme M-H avec une variance raisonnable ($s=0.55$)	173
4.38	Algorithme M-H avec ($s=0.55$) et une taille d'échantillon de $N = 10^5$	173
4.39	Comparaison des densités a priori et actualisées des paramètres d'entrée de \mathcal{D}_{ref}	174
4.40	Comparaison de la fiabilité numérique actualisée et a priori pour la conception \mathcal{D}_{ref}	175
4.41	Comparaison de la fiabilité numérique actualisée et a priori pour la conception \mathcal{D}_{up}	176
4.42	Comparaison de la fiabilité numérique actualisée et celles obtenues par méthodes <i>FS</i> et <i>FTT</i> pour la conception \mathcal{D}_{up}	177
4.43	Estimation de la fiabilité de \mathcal{D}_{up} par approche Bayésienne classique	181
4.44	Estimation de la fiabilité de \mathcal{D}_{up} par approche Bayésienne avec pondération	182

Liste des tableaux

3.1	Caractéristiques statistiques des paramètres incertains	96
3.2	Estimations des moments statistiques	96
4.1	Modèles mathématiques de courbe S-N	137
4.2	Résultats des essais accélérés sur le mécanisme \mathcal{D}_{ref}	143
4.3	Moments statistiques distribution LogNormale des résultats d'essais	144
4.4	Résultats du Test de Ratio de vraisemblance	144
4.5	Paramètres du modèle d'accélération et de la répartition de la durée de vie en fatigue du modèle de référence	146
4.6	Paramètres matériau du mécanisme	151
4.7	Type de distribution et caractéristiques statistiques des paramètres incertains du modèle de référence	154
4.8	Moments statistiques de la durée de vie en fatigue de la conception de référence	156
4.9	Paramètres de la distribution numérique des durées de vie de \mathcal{D}_{ref}	157
4.10	Paramètres incertains de la nouvelle conception \mathcal{D}_{up}	160
4.11	Moments statistiques de la durée de vie numérique pour la nouvelle conception \mathcal{D}_{up}	161
4.12	Paramètres de la distribution de durées de vie numérique pour \mathcal{D}_{up}	161
4.13	Moments statistiques des durées de vie expérimentales de la version \mathcal{D}_{ref} du mécanisme	164
4.14	Moments statistiques des durées de vie numériques versions \mathcal{D}_{ref} et \mathcal{D}_{up} du mécanisme	164
4.15	Paramètres de la distribution de durées de vie numérique pour la nouvelle version	164
4.16	Paramètres de la distribution de durées de vie numérique pour la version de référence	164
4.17	Paramètres de la distribution de durées de vie estimées pour la nouvelle version	165
4.18	Estimations des paramètres de la fonction de transfert temporel	166
4.19	Paramètres estimés par la méthode <i>FTT</i> de la distribution LogNormale de durées de vie <i>expérimentale</i> de la nouvelle version \mathcal{D}_{up}	168
4.20	Calcul des distances de Kolmogorov-Smirnov	170
4.21	caption	174

4.22	Moments statistiques actualisés de la durée de vie numérique pour \mathcal{D}_{ref}	175
4.23	Paramètres actualisés de la distribution de durées de vie numérique pour \mathcal{D}_{ref}	175
4.24	Moments statistiques actualisés de la durée de vie numérique pour \mathcal{D}_{up}	175
4.25	Paramètres actualisés de la distribution de durées de vie numérique pour \mathcal{D}_{up}	176
4.26	Comparaison des distances de Kolmogorov-Smirnov après actualisation	177
4.27	Plan démonstration zéro défaillance : nombre d'essais à réaliser pendant t_{essai}	179
4.28	Information sur la fiabilité R_{demo} à t_{demo}	179
4.29	Résultats par approche Bayésienne classique	181
4.30	Résultats par approche Bayésienne avec pondération	182

Nomenclature

Acronyms / Abbreviations

<i>FAS</i>	FAURECIA Automotive Seating
<i>FMDS</i>	Fiabilité, Maintenabilité, Disponibilité, Sécurité
<i>FORM</i>	First Order Reliability Method
<i>FORM</i>	Second Order Reliability Method
<i>FS</i>	Facteur de Similitude
<i>FTT</i>	Fonction de Transfert Temporel
<i>MCMC</i>	Markov Chain Monte-Carlo
<i>MCS</i>	Monte-Carlo Simulations
<i>MDD</i>	Méthode de Décomposition de la Dimension
<i>MEF</i>	Méthode des éléments finis
<i>MH</i>	Metropolis-Hastings
<i>MV</i>	Maximum de Vraisemblance
P_f	Probabilité De Défaillance
<i>PCE</i>	Polynomial Chaos Expansion
<i>RAMS</i>	Reliability, Availability, Maintainability, Safety
<i>RETEX</i>	Retour d'expériences
<i>SdF</i>	Sûreté de Fonctionnement
<i>SRQ</i>	Surface de Réponse Quadratique
<i>SVA</i>	Standards de Vie Accélérée
<i>SVM</i>	Support Vector Machine



1

Introduction générale

« The science of today is the technology of tomorrow. »

Edward Teller

Contents

1.1	Contexte	22
1.2	Problématique de l'estimation de fiabilité en phase de développement	23
1.3	Objectifs de la thèse	26
1.4	Organisation du document	29

1.1 Contexte

En commençant cette introduction générale, notons que l'origine des travaux relatifs à cette thèse émane d'un besoin industriel exprimé par la société FAURECIA Automotive Seating (FAS) du site de Caligny. FAS est un équipementier automobile d'envergure internationale qui conçoit, développe et fabrique l'ensemble des composants du siège automobile comme les armatures, les mécanismes ou les moteurs. Il assemble également des sièges complets avant et arrière. Les mécanismes (figure 1.1) ont pour but d'assurer le réglage du siège et sont répartis en trois principaux types de produits génériques à savoir les glissières, permettant de faire coulisser le siège ; les articulations, permettant de régler l'inclinaison du dossier et les poignées à pompage, permettant de régler la hauteur du siège. A noter qu'un siège représente 5% du coût global d'un véhicule. FAURECIA est premier mondial des mécanismes et structures de sièges et troisième mondial des sièges complets.



Fig. 1.1. Les Différents types de mécanismes de siège automobile chez FAURECIA

L'automobile est un secteur très concurrentiel pour les équipementiers. De plus, afin de garantir la sécurité des clients finaux (les automobilistes), les réglementations en matière de sécurité et de sûreté de fonctionnement sont de plus en plus exigeantes aux regards de la complexité des fonctions à assurer et des environnements de fonctionnement. Dans ce contexte, pour garder sa part de marché et l'étendre à d'autres partenaires, il devient incontournable pour l'équipementier d'assurer et de prouver *la qualité dans le temps* de ses produits. Cette notion de qualité dans le temps ou dans la durée, sous entend la fiabilité du produit.

En effet, il est largement reconnu aujourd'hui, en particulier dans l'industrie automobile, que la fiabilité est l'un des paramètres les plus importants qui caractérisent la performance des produits. On admet donc que, les produits ayant le plus haut niveau de fiabilité sont les plus disponibles et les plus sûrs. Pour ces raisons, les clients sont de plus en plus intéressés par des produits de haut niveau de fiabilité, et les fabricants sont contraints de recourir à des méthodes et outils efficaces de prévision, d'estimation et de démonstration de fiabilité.

La particularité de FAURECIA se situe dans la diversité de ses produits avec un fort aspect d'innovation. Ceci rend difficile la standardisation d'une démarche de fiabilité englobant toute la diversité de produits. En effet, FAURECIA a une organisation particulière de son processus de conception dans le sens où il y a deux phases de conception : la phase innovation où sont développés des produits dits « génériques » et une phase programme où les génériques sont

adaptés et deviennent des « applicatifs ». Les génériques sont donc des concepts innovants de mécanismes pouvant être utilisés pour plusieurs cahiers des charges et/ou plusieurs clients. Pour le service mécanisme, il n'existe que quelques références génériques de chaque type de produit. En revanche, il existe un grand nombre d'applicatifs de chaque référence. Par exemple, pour une glissière le profil est générique en revanche les accroches avec le siège, ou le planché véhicule peuvent être différents selon les applicatifs.

Dans ce contexte, l'estimation de la fiabilité de nouveaux produits, au début du processus de développement (Phase innovation), présente un grand intérêt. Elle aidera l'équipementier à améliorer la fiabilité de ses produits avant d'atteindre le marché et, par conséquent, à faire face efficacement à la concurrence. En effet, à ce stade, au tout début du cycle de vie du produit, les ingénieurs ont encore une grande marge de manœuvre pour revoir la conception. Dans le cas contraire, où ces modifications sont apportées durant des étapes plus avancées du cycle de vie du produit (Phase programme), cela pourrait engendrer d'énormes pertes de temps et entraîner des coûts supplémentaires. Il est alors nécessaire pour FAURECIA de mettre en place, une démarche de fiabilité propre à ses réalités et qui englobe des méthodes et outils efficaces d'estimation et de démonstration de fiabilité s'intégrant au plus tôt dans l'étude de conception des produits. C'est ce contexte qui motive la présente thèse de doctorat.

1.2 Problématique de l'estimation de fiabilité en phase de développement

Par le passé, on note lors du processus de développement de produits, l'introduction tardive d'une démarche de formalisation de la fiabilité future des produits. Les essais de fiabilité ne viennent que comme une validation finale du produit conçu. Autrement dit, une estimation de la fiabilité du produit n'est disponible qu'après avoir déroulé tout le processus de conception. Dans le cas où le niveau de cette fiabilité n'est pas satisfaisant, il faut réitérer toutes les étapes de ce processus jusqu'à l'atteinte du niveau requis. Cette manière traditionnelle de faire ne permet plus aujourd'hui aux entreprises, de faire face efficacement aux nouvelles exigences des clients et la tendance est l'intégration d'une démarche de fiabilité au plus tôt dans le processus de développement (figure 1.2).

En mécanique, les trois dernières décennies ont vu l'émergence de méthodes de calcul probabiliste (Schuëller and Stix, 1987) qui pourraient constituer une alternative intéressante pour résoudre le problème d'estimation de la fiabilité en phase de développement. En plus de l'estimation de la fiabilité, ces méthodes permettent aussi d'effectuer des analyses de sensibilité, ou encore des analyses de tendance centrale. Brièvement, et dans le contexte d'estimation de la fiabilité, ces méthodes nécessitent d'abord la modélisation des différentes sources d'incertitudes, ensuite le développement d'un modèle physique, explicite ou implicite, permettant de décrire avec précision le mode de défaillance auquel est soumis le composant mécanique, enfin

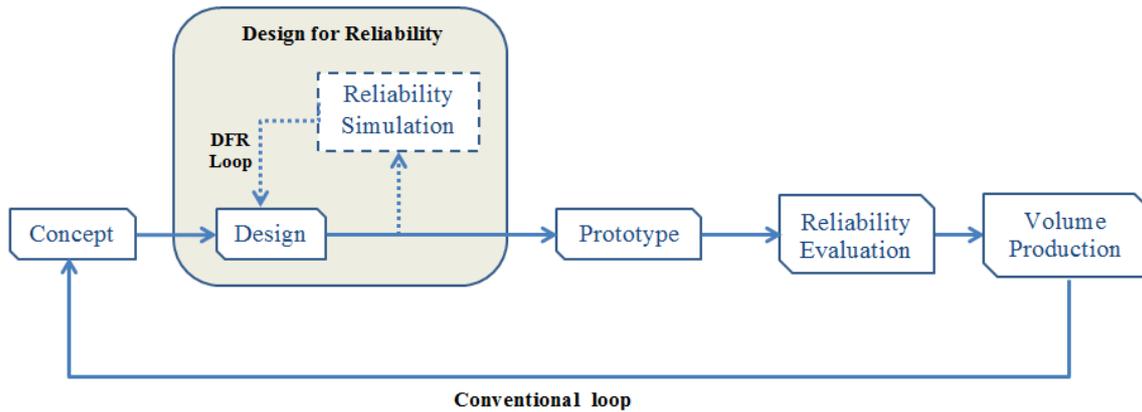


Fig. 1.2. Fiabilité en conception dans le processus de développement

l'estimation de fiabilité est obtenue en utilisant une stratégie de couplage mécano-probabiliste permettant la propagation des incertitudes à travers le modèle physique.

Malheureusement, la plupart de ces approches d'évaluation de la fiabilité sont inefficaces pour le traitement de problèmes d'ingénierie, principalement parce que, d'une part, la simulation des modèles mécaniques demandent des simplifications au niveau de la modélisation et d'important temps de calcul puisqu'ils sont souvent disponibles sous forme implicite (par exemple, le modèle éléments finis); d'autre part le nombre de paramètres incertains pourrait être très élevé ce qui induirait une évolution exponentielle du nombre d'appels du modèle mécanique (Caffisch et al., 1997). De plus, le temps de calcul est sensible au niveau de fiabilité cible. En effet, plus le niveau de fiabilité cible est élevé (moins la probabilité de défaillance de la cible est faible), ce qui est le cas des composants automobiles, plus le temps de calcul est élevé pour obtenir des résultats précis. L'utilisation des approches fiabilistes nécessite souvent de faire certaines hypothèses, par exemple, sur le type de distribution des paramètres incertains (normale, uniforme, ...) et/ou sur les paramètres statistiques (moyenne, écart-type, ...) associés, puisque les informations ne sont pas souvent disponibles. Ceci peut expliquer l'écart significatif souvent observé entre les estimations obtenues par ces méthodes fiabilistes et la fiabilité réelle du produit. Par conséquent, la seule utilisation d'approches numériques *brutes* pour réaliser une analyse de fiabilité au cours d'un processus de qualification de produits peut conduire à des résultats erronés.

Dans le même temps, une analyse de fiabilité basée sur des données expérimentales limitées (pour raisons de coûts) n'est pas une tâche triviale, et réaliser des essais supplémentaires, chaque fois que l'on a de nouveaux produits, ne serait pas non plus la meilleure solution. Heureusement, les composants mécaniques sont principalement évolutifs et non révolutionnaires, en particulier pour l'industrie automobile. En effet, pour un produit donné, les nouvelles versions ont souvent la même structure que le modèle de référence, et seules quelques petites modifications sont effectuées. Ainsi, l'estimation de la fiabilité au début du processus de développement du produit peut être bien traitée, si l'on est en mesure d'intégrer les données disponibles sur des produits similaires ou des versions antérieures, comme information préalable.

Dans ce contexte, les approches bayésiennes, qui combinent des données expérimentales et numériques de fiabilité, ont suscité un grand intérêt dans la littérature. Un type d'approches bayésiennes consiste d'abord à attribuer une distribution a priori à la probabilité de défaillance ou aux paramètres de la distribution de durées de vie en fonction des connaissances existantes sur le produit, puis à mettre à jour cette distribution lorsque de nouvelles informations sont disponibles (Martz and Waller, 1982). Par exemple, pour améliorer la précision de l'estimation de distribution de durées de vie d'un composant automobile (Joint) tout en réduisant le nombre de d'essais, (Guerin and Hambli, 2007) ont proposé une estimation bayésienne des paramètres de la loi de distribution (LogNormale) en incorporant comme connaissances a priori, des résultats obtenus par calcul éléments finis (durée de vie moyenne en fatigue mécanique) et avis d'expert (variance). Une telle approche ne peut être utilisée que lorsque des informations pertinentes sont disponibles pour construire la distribution a priori. Le deuxième type d'approches (Kiureghian, 1989) consiste tout d'abord à caractériser les réponses (par exemple le niveau de contrainte) du modèle constitutif (c'est-à-dire le modèle mécanique) à travers une propagation des incertitudes associées aux paramètres d'entrée. Ensuite, les données fournies au moyen d'essais sur les paramètres d'entrée sont utilisées pour mettre à jour leur distribution respective et, par conséquent, mettre à jour l'estimation de fiabilité. Malheureusement, cette dernière approche souffre d'un manque de cohérence, puisqu'elle n'utilise pas les données des essais de fiabilité. Pour cette raison (Zhang and Mahadevan, 2001) ont développé une approche originale capable d'utiliser les données d'essais de fiabilité en conjonction avec les méthodes fiabilistes. Malgré que, les auteurs aient démontré son efficacité que sur des exemples académiques ; cette méthode pourrait être étendue facilement à des problèmes pratiques d'ingénierie.

(Guida and Pulcini, 2002 ; Guida et al., 2009) ont proposé une procédure bayésienne pour l'estimation de la fiabilité de nouveaux composants automobiles améliorés, en utilisant à la fois des données de défaillance relatives à des versions précédentes et des informations préalables sur le processus technique utilisé pour la modification du produit lui-même au lieu de données nécessitant des essais de fiabilité supplémentaires. En effet, dans le cadre d'une amélioration de produits, l'objectif principal des concepteurs est d'éviter les modes de défaillance critiques observés dans les versions précédentes, à travers des modifications. Si de telles modifications sont efficaces, on peut éliminer la plupart des défauts de la conception précédente et, par conséquent, réduire la probabilité de défaillance associée à la nouvelle conception. L'efficacité des modifications de conception est mesurée au moyen d'un facteur d'amélioration défini comme étant le rapport entre la nouvelle probabilité moyenne de défaillance du modèle amélioré et la probabilité de défaillance du modèle de référence. Ces facteurs sont ensuite représentés par des variables aléatoires pour capturer les incertitudes sur l'efficacité des modifications de conception. Cette approche prend également en compte l'effet des conditions de travail et la réduction des coûts. Avec une application sur un sous-système amélioré utilisé dans un modèle de voiture déjà commercialisé, les auteurs ont démontré que l'approche fournit une estimation plus précise de la probabilité de défaillance.

L'utilisation conjointe du calcul bayésien et de l'inférence floue est également étudiée en vue d'analyse de fiabilité en phase de développement. Dans ce contexte, (Yadav et al., 2003) ont développé une approche capable de prendre en compte des informations qualitatives telles que le jugement d'ingénieurs, l'avis d'experts, les conditions d'exploitation et environnementale. En effet, au début du processus de développement de nouveaux produits, peu ou pas d'informations quantitatives sont disponibles, en particulier pour l'analyse de fiabilité. En utilisant le système d'inférence floue, différents types d'informations qualitatives peuvent être abordées et intégrées à l'approche bayésienne pour améliorer sa capacité. La distribution a priori de la probabilité de défaillance est modélisée par la distribution de Weibull où ses paramètres sont estimés à partir des données de garantie d'anciens produits similaires, puis elle est mise à jour via le système d'inférence floue. L'applicabilité de cette approche aux problèmes d'ingénierie a été illustrée, à travers l'analyse de fiabilité d'un système amélioré de direction automobile, pour lequel des informations qualitatives et des données d'essais de fiabilité sont disponibles. Cette même dernière idée a été reprise par (Liu et al., 2013) et améliorée par l'intégration d'un réseau de neurones artificiel qui fournit une cartographie précise entre les entrées et les sorties, lorsque des modèles explicites et implicites ne sont pas disponibles. Cette approche est très utile pour effectuer des analyses de fiabilité sur des systèmes non linéaires complexes, tels que ceux rencontrés dans l'industrie automobile.

1.3 Objectifs de la thèse

On retient de ce qui précède que l'estimation de la fiabilité en phase de développement reste un problème difficile, principalement en raison du manque de données disponibles et du coût élevé des campagnes d'essais, et nécessite de toujours chercher à développer des méthodologies adaptées au contexte. En effet, les approches expérimentales nécessitent des prototypes et des équipements de tests et peuvent devenir coûteux, notamment dans un contexte d'innovation intense, où chaque nouveau développement peut parfois remettre en question les moyens de test existants. Par conséquent, il est clair que lorsque les méthodes basées sur la simulation numérique sont suffisamment efficaces et pertinentes, elles peuvent constituer une alternative intéressante. En effet, les solutions numériques offrent de nombreuses possibilités et avantages. Elles fournissent une estimation de la fiabilité plus tôt dans le processus de développement à faible coût et permettent d'étudier plusieurs solutions de conception pour en choisir une meilleure. Cependant, à cause des simplifications et hypothèses dont elles sont sujettes, elles restent limitées pour des applications industrielles.

Dans l'industrie automobile, au sein d'une même famille de produits mécaniques, les produits présentent de grandes similitudes d'une version à l'autre car les nouveaux développements sont des adaptations de précédentes pour répondre aux nouvelles spécifications des clients ou proposer des produits innovants sur le marché. Pour l'équipementier *FAS*, l'estimation de fiabilité des versions de mécanismes, au cas par cas, indépendamment des versions antérieures, est une

approche inopportune et coûteuse qui ne permet pas de répondre rapidement aux exigences de fiabilité. L'objectif de *FAS* est donc de standardiser une démarche efficace d'estimation de fiabilité, pouvant englober toute la diversité des versions, et s'intégrant au plus tôt dans l'étude de conception des produits. Pour ce faire, aux vues des difficultés relevées précédemment, le travail de thèse vise au développement d'une méthodologie pour l'estimation de fiabilité combinant approches numériques et retour d'expérience existant pour améliorer l'estimation de fiabilité en phase de développement de sous ensembles mécaniques développés par *FAS*. Comme illustré sur la figure 1.3, la méthodologie envisagée se subdivise en plusieurs phases.

La première phase des travaux de la thèse sera la construction de distribution de fiabilité d'un mécanisme de référence sélectionné pour l'étude en exploitant le Retour d'expériences (*RETEX*) dont dispose *FAURECIA*. Ce *RETEX* est essentiellement constitué de résultats d'essais de plusieurs natures. Selon le but particulier visé par l'essai, on peut distinguer les essais de sûreté, les essais fonctionnels, et les essais de durabilité ou d'endurance. Il existe aussi des essais accélérés réalisés dans le cadre de projet d'étude de fiabilité sur certains mécanismes.

Parallèlement à la construction des modèles de fiabilité basée sur le *RETEX*, la deuxième phase consiste au développement de l'analyse de la fiabilité prévisionnelle par simulation numérique permettant d'étudier l'influence des différents paramètres de conception qui peuvent représenter la géométrie, les propriétés des matériaux et le chargement. Généralement les structures mécaniques sont dimensionnées dans un contexte déterministe, mais dans la réalité les paramètres de conception ne sont pas parfaitement connus et il est plus judicieux de les modéliser par des variables aléatoires afin de tenir compte de l'incertitude inhérente à chacun d'eux. Le modèle numérique envisagé sera donc un modèle mécano-probabiliste. Il sera alors possible en définissant des critères de résistance, d'établir une ou plusieurs fonctions de performance du sous-ensemble mécanique et obtenir une estimation prévisionnelle de sa fiabilité.

Dans la troisième phase, il s'agira de réaliser pour ce mécanisme de référence, une analyse comparative des fonctions de fiabilité expérimentale (obtenue à partir du *RETEX*) et celle obtenue à partir du modèle numérique mécano-probabiliste. En effet, à cause d'un certain nombre de simplifications nécessaires dans la modélisation numérique (au niveau de la géométrie, des caractéristiques matériaux, des chargements, des conditions limites, choix de maillage, etc...), un écart est induit entre la fonction de fiabilité prévisionnelle (numérique) et la fonction de fiabilité expérimentale. La quatrième phase, une des plus importantes de la méthodologie, consistera donc à définir une méthode de passage entre les deux fonctions de fiabilité. Ensuite, dans le cadre de développement d'un mécanisme similaire au mécanisme de référence, on réalisera dans un premier temps une analyse pour juger de la similarité des deux versions de mécanismes ; c'est la cinquième phase. Si les deux mécanismes sont jugés similaires, on procède donc à la construction de la loi de fiabilité numérique prévisionnelle pour la nouvelle version de mécanisme (sixième phase), et enfin en septième phase, grâce à la méthode de passage entre fiabilité expérimentale et numérique précédemment définie, on peut déterminer une estimation

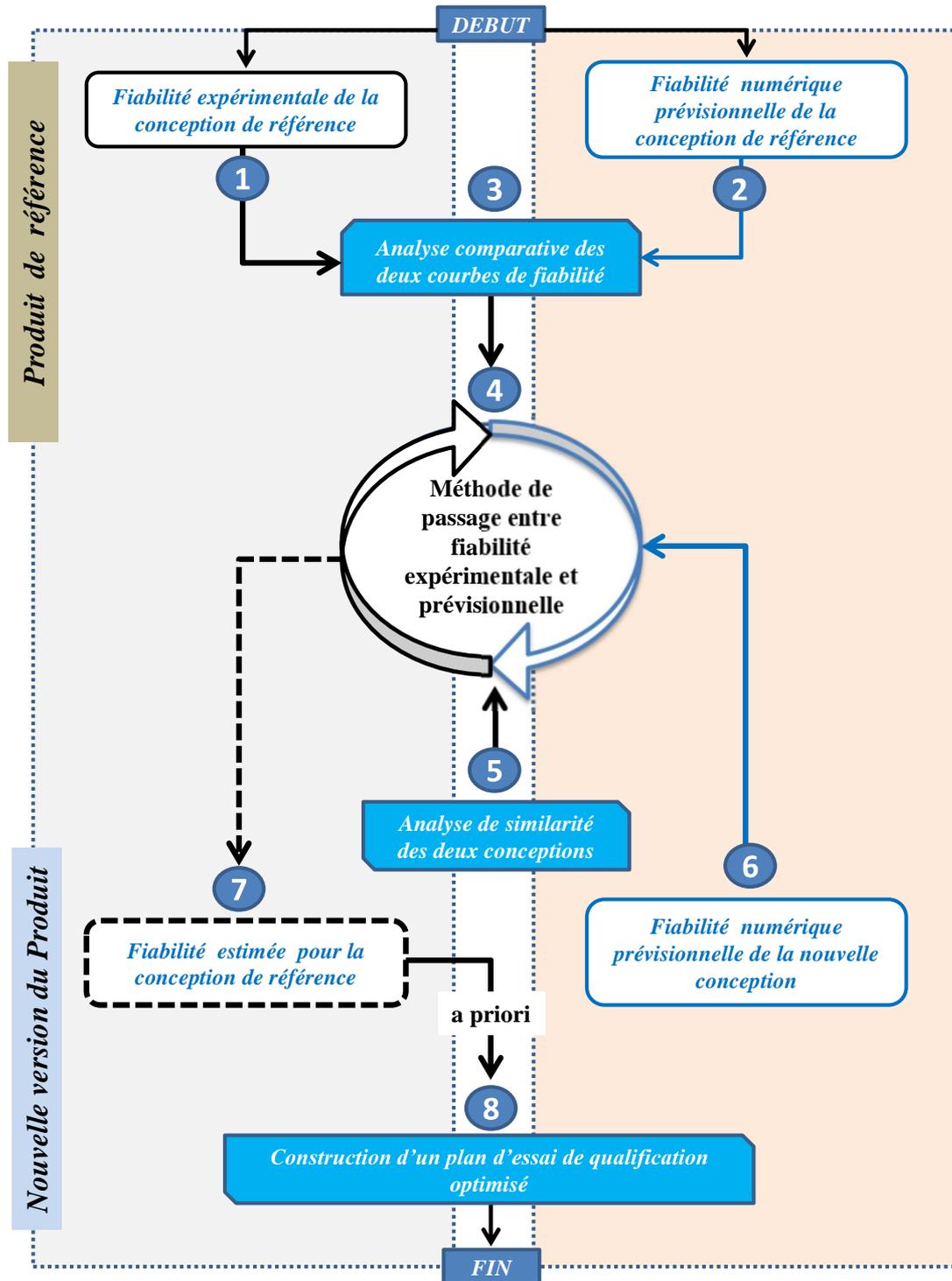


Fig. 1.3. Organigramme de la méthodologie proposée

de la *fiabilité expérimentale* pour la nouvelle version du mécanisme. Notons qu'à ce stade, cette appellation est abusive pour la nouvelle version de mécanisme, car il ne s'agit pas de la vraie fonction de fiabilité obtenue par analyse de résultats d'essais, mais plutôt d'une estimation intégrant la fonction de fiabilité numérique et le retour d'expérience existant sur le mécanisme de référence. Nous désignerons donc cette estimation par fonction de fiabilité a priori associée au

nouveau développement.

Pour finir, les travaux de thèse visent également à développer une méthode de qualification du nouveau développement utilisant une démarche bayésienne pour augmenter la qualité d'estimation dans un contexte de faibles tailles d'échantillon, permettant ainsi l'optimisation des coûts d'essais.

1.4 Organisation du document

Dans le présent chapitre, **chapitre 1**, ont été exposé le contexte dans lequel se situe ce travail de thèse, la problématique à résoudre ainsi que les objectifs visés. Le **chapitre 2** est une synthèse bibliographique présentant les notions générales de la fiabilité. Dans ce chapitre, nous avons eu à définir les différentes caractéristiques de la fiabilité, à situer la fiabilité dans les différentes phases du cycle de développement de produits. Les méthodes d'estimation de fiabilité tout au long du cycle de développement ont été exposées avec un accent particulier sur l'estimation prévisionnelle de fiabilité par couplage mécano-probabiliste. Le **chapitre 3** est consacré à la présentation de la méthodologie proposée dans le cadre de ce travail de thèse. Il détaille une technique de couplage mécano-probabiliste basée sur un méta-modèle pour l'estimation prévisionnelle de fiabilité, puis une méthode d'intégration du retour d'expérience existant dans l'estimation de fiabilité d'un nouveau développement. Le **chapitre 4** présente une application de la méthodologie sur un composant mécanique automobile sollicité en fatigue mécanique. Il est composé d'une partie sur l'analyse du retour d'expérience qui est disponible sous forme de résultats d'essais accélérés, une partie sur l'analyse de modèles mécaniques déterministes (Calcul éléments finis), une partie sur l'estimation prévisionnelle de fiabilité, une partie sur l'estimation de fiabilité de la nouvelle conception et une démarche d'optimisation de la qualification. Pour finir, le **chapitre 5**, expose les conclusions générales ainsi que les différentes perspectives relatives à ce travail de thèse.



2

Notions générales sur la fiabilité

« I like to learn. That's an art and a science. »

Katherine Johnson

Contents

2.1	Introduction	34
2.2	Caractérisation de la fiabilité	35
2.2.1	Mesures associées à la fiabilité	35
2.2.1.1	Fonction de fiabilité	35
2.2.1.2	Fonction de répartition et fonction de densité	36
2.2.1.3	Taux de défaillance instantané	36
2.2.1.4	MTTF	37
2.2.2	Principales lois de distributions utilisées en fiabilité	37
2.2.2.1	Loi normale	37
2.2.2.2	Loi LogNormale	38
2.2.2.3	Loi Weibull	38
2.2.2.4	La loi de Birnbaum-Saunders	39
2.2.2.5	La loi du Khi-deux	40
2.2.3	Théorie de l'estimation	41
2.2.3.1	Estimateur ponctuel	41
2.2.3.2	L'estimation par Maximum de Vraisemblance	42

2.2.3.3	Classification des méthodes d'estimation de fiabilité	44
2.2.4	Fiabilité dans le cycle de vie d'un produit	45
2.2.4.1	Courbe en baignoire	45
2.2.4.2	Cycle de vie d'un système mécanique	45
2.2.4.3	Fiabilité dans le cycle de développement d'un produit	46
2.2.5	Particularité de la fiabilité mécanique	47
2.2.5.1	Mécanismes de défaillance des composants mécaniques	47
2.2.5.2	Modèle de fiabilité de composants mécaniques standards	48
2.2.5.3	Fiabilité de composants mécaniques spécifiques : Méthode R-C	49
2.3	Fiabilité prévisionnelle par couplage mécano-probabiliste	51
2.3.1	Modélisation probabiliste de l'incertain	52
2.3.1.1	Types d'incertitudes	52
2.3.1.2	Modèles probabilistes	53
2.3.1.3	Transformation isoprobabiliste	54
2.3.1.4	Propagation de l'incertitude	57
2.3.2	Formulation mathématique du problème de fiabilité	58
2.3.2.1	Fonction d'état limite	58
2.3.2.2	Expression de la probabilité de défaillance	59
2.3.3	Notion d'indice de fiabilité	60
2.3.3.1	Indice de Rjanitzyne-Cornell	60
2.3.3.2	L'indice de Hasofer et Lind	61
2.3.3.3	Recherche du point de conception	62
2.3.4	Calcul de la probabilité de défaillance	63
2.3.4.1	Simulations Monte-Carlo	64
2.3.4.2	First and Second Order Reliability Method (FORM/SORM)	66
2.3.4.3	Méthode de surface de réponse quadratique	70
2.4	Fiabilité expérimentale par les essais	72
2.4.1	Les types d'essais	72
2.4.1.1	Les essais de robustesse	72
2.4.1.2	Les essais d'estimation de la fiabilité	73
2.4.1.3	Les essais de déverminage	73
2.4.2	Estimation de la fiabilité par les essais accélérés	74
2.4.2.1	Plan d'essais accélérés	75
2.4.2.2	Modèles Standards de Vie Accélérée	76
2.4.2.3	Modèles d'accélération courants	79
2.4.3	Essais bayésiens	81
2.4.3.1	Objectif des essais bayésiens	81

2.4.3.2	Principe des essais bayésiens	81
2.5	Conclusion	83

2.1 Introduction

La notion de fiabilité devient incontournable dans presque tous les secteurs d'activités, notamment l'aéronautique, le ferroviaire, l'automobile et les systèmes d'informations. Dans ces secteurs, les systèmes développés sont de plus en plus complexes et doivent fonctionner dans des environnements très contraignants. En effet, dans le contexte industriel actuel, les besoins évoluent très rapidement, la concurrence plus rude avec des clients de plus en plus exigeants en matière de fiabilité et de sécurité, exigences auxquelles les industriels doivent répondre pour rester concurrentiels. Qu'est ce donc la fiabilité ? quelles sont ses caractéristiques et quelles sont les méthodes d'évaluations ? C'est ce qui fait l'objet de ce chapitre bibliographique.

Il serait inapproprié d'introduire la fiabilité sans au préalable définir la sûreté de fonctionnement. La sûreté de fonctionnement (*SdF*), est l'ensemble des outils et méthodes qui permettent d'analyser, de caractériser, d'évaluer, de quantifier, de prévoir et de maîtriser les défaillances des systèmes.

Par défaillance, on sous-entend, la cessation de l'aptitude d'une entité à accomplir une fonction requise.

On rencontre dans la littérature, plusieurs propositions de définition de la sûreté de fonctionnement. Elle se définit comme ; la science des défaillances (Villemeur, 1988); la confiance justifiée dans le service délivré (Arlat and Laprie, 1995); ou encore le maintien de la qualité dans le temps (Mortureux, 2001).

La (*SdF*) se caractérise par la mise en place d'un processus d'étude intégré aux différentes phases de développement du système et se décrit généralement sous l'acronyme *FMDS* (d'après la définition dans (Fournier, 1993)) qui rappelle ses quatre grandeurs caractéristiques que sont la fiabilité, la maintenabilité, la disponibilité et la sécurité ou en anglais *RAMS* (Reliability, Availability, Maintainability, Safety). On peut définir ces termes comme suit :

- **La fiabilité** est l'aptitude d'une entité à accomplir les fonctions requises dans des conditions données pendant une durée donnée.
- **La disponibilité** est l'aptitude d'une entité à être en état d'accomplir les fonctions requises dans les conditions données et à un instant donné.
- **La maintenabilité** est l'aptitude d'une entité à être maintenue ou rétablie dans un état dans lequel elle peut accomplir une fonction requise, lorsque la maintenance est réalisée dans des conditions données avec des procédures et des moyens prescrits.
- **La sécurité** est l'aptitude d'une entité à éviter de faire apparaître, dans des conditions données, des événements critiques ou catastrophiques.

On peut ressortir de là que la fiabilité d'un système ou d'une entité, est une grandeur qui permet de juger de la performance dudit système dans le temps.

L'analyse de fiabilité recouvre de multiples aspects : l'analyse de défaillance des systèmes, la fiabilité prévisionnelle, les banques de données de fiabilité, les essais de fiabilité, la fiabilité opérationnelle, les méthodes prévisionnelles de fiabilité et de sécurité, l'assurance de la fiabilité et de la qualité (Villemeur, 1988).

Dans le domaine de la mécanique, l'analyse de la fiabilité est un outil très important pour caractériser le comportement du produit dans les différentes phases de vie, mesurer l'impact des modifications de conception sur l'intégrité du produit, qualifier un nouveau produit et améliorer ses performances tout au long de sa mission (Tebbi, 2005).

Ainsi, il est important pour les concepteurs, de veiller tout au long du processus de développement d'un système, à la croissance de fiabilité, afin d'atteindre les objectifs escomptés de fiabilité. La croissance de fiabilité se définit comme un ensemble de moyens à déployer afin de respecter les engagements de fiabilité contractuels imposés par le client et ce, dès la phase d'offre ou d'avant-projet. L'objectif est que le système soit mature lors de la mise en service opérationnel et que le déverminage ait été idéalement effectué avant livraison chez le client.

2.2 Caractérisation de la fiabilité

2.2.1 Mesures associées à la fiabilité

2.2.1.1 Fonction de fiabilité

La fiabilité ou fonction de survie (figure 2.1) est une caractéristique d'un dispositif exprimée par la probabilité qu'il accomplisse une fonction requise, dans des conditions données pendant une durée donnée. En terme mathématique, elle est représentée par la fonction $R(t)$ qui est la probabilité que le dispositif soit non défaillant sur l'intervalle de temps $[0, t]$, en supposant qu'il n'est pas défaillant à l'instant $t = 0$. Soit T la variable aléatoire non négative représentant le temps de bon fonctionnement du dispositif. T peut être continue ou discrète. La fonction de fiabilité s'écrit donc :

$$R(t) = \text{Prob}(T \geq t) \quad (2.1)$$

$R(t)$ est une fonction décroissante sur l'intervalle $[0, +\infty]$ avec $R(0) = 1$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} R(t) = 0$

La variable temps peut prendre plusieurs sens en fonction du type de problème étudié. Elle peut désigner par exemple, le nombre de cycles de verrouillage - déverrouillage d'une articulation de siège automobile, le nombre de tours pour un moteur, ou le nombre de kilomètres (distance parcourue) pour une voiture, etc...

De la fonction de fiabilité, nous définissons dans les paragraphes suivants, quelques autres caractéristiques de la fiabilité.

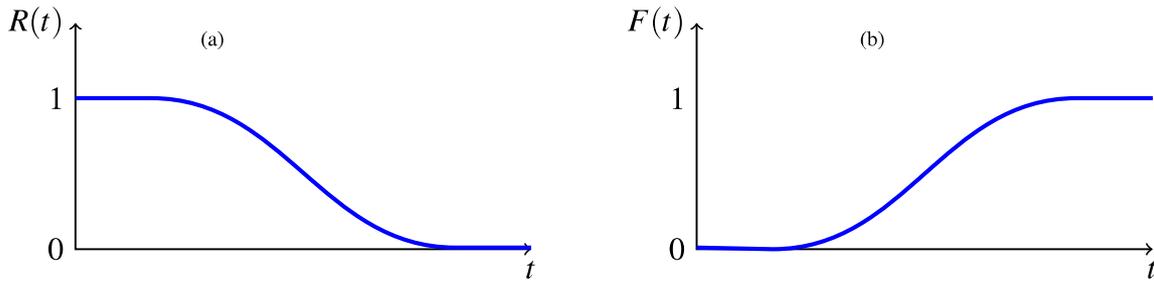


Fig. 2.1. (a) Fonction de fiabilité et (b) fonction de répartition

2.2.1.2 Fonction de répartition et fonction de densité

Le complément de la fiabilité, appelé fonction cumulée de défaillance ou fonction de répartition des temps de défaillance (figure 2.1), est défini par :

$$F(t) = 1 - R(t) \quad (2.2)$$

La dérivée de la fonction de répartition par rapport au temps, permet de définir une nouvelle fonction $f(t)$ appelée fonction de densité :

$$f(t) = dF(t)/dt = -dR(t)/dt \quad (2.3)$$

$f(t).dt$ représente la probabilité instantanée de défaillance à un temps spécifique t .

2.2.1.3 Taux de défaillance instantané

Le taux de défaillance $\lambda(t)$ ou encore taux de panne, représente la probabilité conditionnelle, divisée par dt , de défaillance du matériel dans l'intervalle de temps $[t, t + dt]$, sachant que ce matériel a survécu jusqu'à l'instant t :

$$\lambda(t) = \frac{-dR(t)/dt}{R(t)} = f(t)/R(t) \quad (2.4)$$

On en déduit l'expression suivante de la fiabilité :

$$R(t) = e^{-\int_0^t \lambda(v).dv} \quad (2.5)$$

Dans le cas où le taux de défaillance λ est constant, on a alors une loi de survie exponentielle, c'est à dire $R(t) = e^{-\lambda t}$.

Terminons cette partie par la définition d'une autre caractéristique qui est le temps moyen de fonctionnement.

2.2.1.4 MTTF

Le temps moyen de fonctionnement jusqu'à la première défaillance que l'on désigne en anglais *MTTF* (Mean Time To Failure) est défini par l'expression suivante :

$$MTTF = \int_0^{\infty} t \cdot f(t) \cdot dt \quad (2.6)$$

On démontre grâce à l'équation (2.3) et une intégration par partie de l'équation (2.6), l'expression suivante du MTTF :

$$MTTF = \int_0^{\infty} R(t) \cdot dt \quad (2.7)$$

2.2.2 Principales lois de distributions utilisées en fiabilité

Dans les études de fiabilité, de nombreuses lois statistiques sont utilisées pour analyser les données de durée de vie. Il a été vérifié que dans la démarche fréquentielle ou classique que nous expliciterons par la suite, plus de quatre-vingt-dix pour cents des études probabilistes de fiabilité utilisent la loi exponentielle, la loi normale, la loi LogNormale, la loi de Weibull à deux paramètres, la loi bêta, la loi Gamma et la loi uniforme. Dans le cadre de cette thèse nous nous intéresserons aux lois les plus utilisées en fiabilité mécanique à savoir; la loi normale, la loi LogNormale, la loi Weibull et la loi de Birnbaum-Saunders qui sont des lois à taux de défaillance variable contrairement à la loi exponentielle qui est une distribution à taux de défaillance constant. Pour finir, la loi Khi-deux beaucoup plus utilisée pour estimer les intervalles de confiance est présentée.

2.2.2.1 Loi normale

La loi normale (ou de Laplace-Gauss) est la plus répandue et la plus utilisée des lois de probabilités usuelles. Lorsqu'une variable est le résultat de la multiplication d'un grand nombre de petits facteurs indépendants, elle peut être modélisée par une loi normale. Ceci vaut à la loi normale, l'appellation de loi des grands nombres.

Pour une loi normale de moyenne μ et d'écart-type σ , on définit la fonction de densité par :

$$f(t) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp \left[-\frac{1}{2} \left(\frac{t-\mu}{\sigma} \right)^2 \right] = \phi \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \quad (2.8)$$

Et sa fonction de répartition par :

$$F(t) = \int_{-\infty}^t f(x) \cdot dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^t e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right)^2} \cdot dx = \Phi \left(\frac{x-\mu}{\sigma} \right) \quad (2.9)$$

Où ϕ et Φ représentent respectivement la fonction de densité et la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

En fiabilité, la distribution normale est utilisée pour représenter la distribution des durées de vie de dispositifs en fin de vie (usure) (Chapouille, 1980) car le taux de défaillance $\lambda(t) = f(t)/R(t)$ est toujours croissant (figure 2.2). Le même auteur suggère l'utilisation de la distribution normale que dans le cas où la moyenne des durées de vie est supérieure à trois fois l'écart-type, ceci afin de réduire jusqu'à 0.1% la probabilité théorique de trouver une durée de vie négative.

2.2.2.2 Loi LogNormale

La loi LogNormale aussi appelée loi de Galton est souvent utilisée en fiabilité pour modéliser la défaillance par fatigue. En effet, elle est basée sur le modèle de dommage cumulatif. C'est à dire, la quantité de dégradation d'un instant à l'autre est un petit multiple aléatoire de la quantité totale des dégradations déjà présentes (Ammar, 2013). Notons que lorsqu'une variable t est distribuée suivant une loi LogNormale, son logarithme népérien $\ln(t)$ est distribué suivant une loi normale. Lorsqu'elle est définie par les paramètres μ_{LN} et σ_{LN} , l'expression de sa fonction de survie est la suivante :

$$R(t) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(t) - \mu_{LN}}{\sigma_{LN}}\right) \quad (2.10)$$

μ_{LN} représente le paramètre d'échelle et σ_{LN} le paramètre de forme.

La fonction de densité d'une distribution LogNormale est la suivante :

$$f(t) = \frac{1}{t\sigma_{LN}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(t) - \mu_{LN}}{\sigma_{LN}}\right)^2} \quad (2.11)$$

Sa fonction de répartition $F(t)$ s'obtient par :

$$F(t) = 1 - R(t) = \int_0^t \frac{1}{x\sigma_{LN}\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln(x) - \mu_{LN}}{\sigma_{LN}}\right)^2} dx \quad (2.12)$$

La loi LogNormale peut être utile dans la modélisation de données asymétriques vers la droite. On peut remarquer comme représenté sur la figure 2.2, que le taux de défaillance obtenu par distribution LogNormale, croît rapidement vers un maximum, puis décroît.

2.2.2.3 Loi Weibull

Elle est très utilisée pour évaluer la mortalité infantile ou le vieillissement des matériels. Elle concerne les matériels dont les taux de défaillance évoluent comme une fonction puissance du temps. La fonction de survie d'une loi Weibull de paramètre η , β , et γ est définie par :

$$R(t) = e^{-\left(\frac{t-\gamma}{\eta}\right)^\beta} \quad (2.13)$$

Où ($\eta > 0$) est le paramètre d'échelle; ($\beta >$) est le paramètre de forme et γ le paramètre de position.

Pour une loi Weibull à deux paramètres (plus usuelle), $\gamma = 0$. On en déduit le taux de défaillance $\lambda(t)$:

$$\lambda(t) = \frac{\beta}{\eta} \left(\frac{t}{\eta}\right)^{\beta-1} \quad (2.14)$$

Interprétation du taux de défaillance(voir figure 2.2) :

- Quand $\beta > 1$, le taux de défaillance est croissant et traduit donc un comportement de vieillissement du système.
- Quand $\beta < 1$, le taux de défaillance est décroissant. Ceci modélise un système dans sa phase de mortalité infantile.
- Quand $\beta = 1$, le taux de défaillance devient constant. On retrouve alors le cas d'un modèle exponentiel des durées de vie qui en réalité, n'est qu'un cas particulier du modèle de Weibull.

L'expression de la vitesse du vieillissement est obtenue par la dérivée du taux de défaillance. On remarque donc que dans le cas de vieillissement du système, le vieillissement s'accélère quand $\beta > 2$ (Bousquet, 2006).

2.2.2.4 La loi de Birnbaum-Saunders

Cette loi à deux paramètres (α et β), a été proposée par Birnbaum et Saunders (Birnbaum and Saunders, 1969a,b) pour caractériser la distribution des temps de défaillances dues à la propagation de fissure par fatigue.

Dans le cas d'une variable aléatoire non négative T représentant les instants de défaillance, cette distribution est obtenue en tenant compte des caractéristiques de base du processus de fatigue. La densité de probabilité d'une loi Birnbaum et Saunders est donnée par la formule :

$$f(t) = \left(\frac{1}{2\sqrt{2\pi\alpha^2\beta t^2}}\right) \frac{t^2 - \beta^2}{\left(\frac{t}{\beta}\right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\beta}{t}\right)^{\frac{1}{2}}} \exp\left[-\frac{1}{2\alpha^2} \left(\frac{t}{\beta} + \frac{\beta}{t} - 2\right)\right] \quad (2.15)$$

Avec $t > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

La fonction de fiabilité s'écrit :

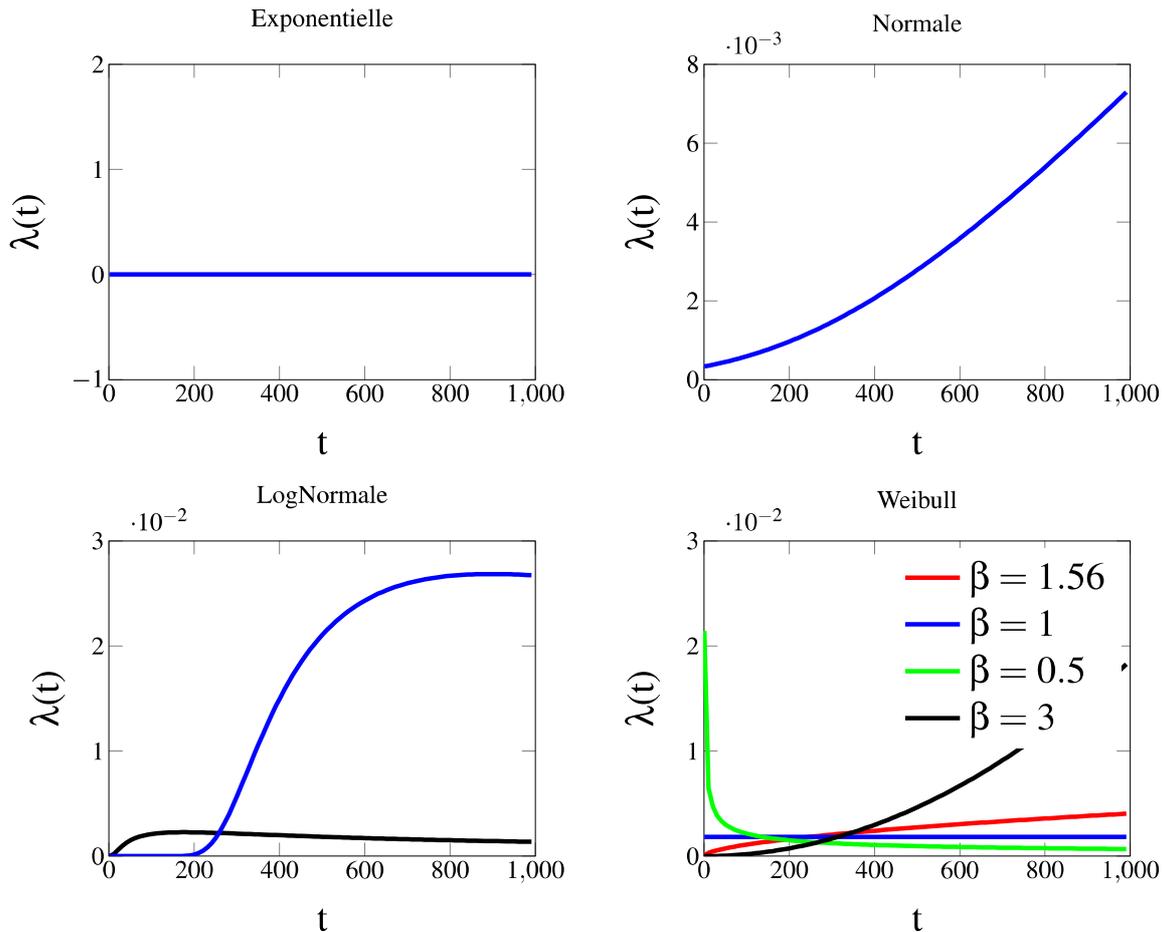


Fig. 2.2. Fonction de taux de défaillance pour différentes distributions

$$R(t) = 1 - \Phi \left\{ \frac{1}{\alpha} \left[\left(\frac{t}{\beta} \right)^{\frac{1}{2}} - \left(\frac{\beta}{t} \right)^{\frac{1}{2}} \right] \right\}, \alpha > 0, \beta > 0 \quad (2.16)$$

Où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite.

2.2.2.5 La loi du Khi-deux

Contrairement aux lois précédentes, la loi du Khi-deux, ne sert pas à modéliser directement la fiabilité, mais essentiellement au calcul des limites de confiance lors des estimations par intervalle de confiance (Tebbi, 2005). Cette loi est caractérisée par un paramètre $\nu \in \mathbb{N}$ appelé *degrés de liberté*.

La fonction densité de probabilité d'une loi de Khi-deux à ν degrés de liberté s'écrit :

$$f_{\nu}(t) = \frac{2^{-\frac{\nu}{2}}}{\Gamma\left(\frac{\nu}{2}\right)} \cdot e^{-\frac{t}{2}} \cdot t^{\frac{\nu}{2}-1} \quad (2.17)$$

Dans cette formule, Γ est la fonction Gamma d'Euler définie par :

$$\Gamma(x) = \int_0^{\infty} e^{-u} u^{x-1} du \quad (2.18)$$

Lors de l'analyse de la distribution d'observations données qui peuvent être par exemple dans le cas de ce travail de thèse, des temps de défaillance obtenus par essais ; une fois la classe de loi choisie, il est nécessaire d'estimer les paramètres de la loi de distribution. Pour poser quelques bases de la démarche statistique généralement utilisée, nous présentons brièvement dans la section suivante, la théorie de l'estimation.

2.2.3 Théorie de l'estimation

En statistique quand on parle d'estimation d'un paramètre, ceci consiste à déterminer ce qu'on appelle l'estimateur ponctuel ainsi qu'un intervalle de confiance associé. Après avoir défini l'estimateur ponctuel, nous présentons, la méthode d'estimation par maximum de vraisemblance (MV) [Le Cam \(1990\)](#) qui permet de déterminer en même temps que les estimateurs ponctuels, la matrice variance covariance qui rend possible la construction des intervalle de confiance.

2.2.3.1 Estimateur ponctuel

On s'intéresse à une caractéristique X d'une population dont la loi appartient à une famille paramétrique de lois dépendantes d'un paramètre réel inconnu $\theta \in \Theta \subset \mathbb{R}_p, p \geq 1$. Pour une variable continue X , on note $f_{\theta}(x)$ la densité de la loi de X au point x . On considère un sondage de taille n de la population (l'observation de X sur n individus), noté (x_1, \dots, x_n) . Soit, $X = (X_1, \dots, X_n)$ l'échantillon aléatoire associé à ce sondage, dont une réalisation particulière est (x_1, \dots, x_n) . On appelle statistique toute Variable Aléatoire (V.A.) qui dépend de l'échantillon (X_1, \dots, X_n) mais qui ne dépend pas du paramètre inconnu θ . On peut citer par exemple la moyenne empirique \bar{X}_n ou encore $\sum_{j=1}^n X_j$.

Soit g_n une application sur Θ . On appelle estimateur ponctuel de $g(\theta)$ toute statistique T prenant ses valeurs dans $g(\Theta)$. Ici on utilise l'indice n pour souligner la dépendance de l'estimateur à la taille de l'échantillon X . Si l'on considère un échantillon simple suivant une loi normale,

$$X_i \sim N(\mu, \sigma^2) \in \mathbb{R}^+ \quad (2.19)$$

on peut inférer sur les valeurs de l'espérance μ et de la variance σ^2 , de la fonction de répartition de la loi normale : $\Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$.

On détermine donc l'estimateur $\hat{\theta}$ de θ grâce à la moyenne empirique comme estimateur de l'espérance et la variance empirique comme estimateur de la variance.

2.2.3.2 L'estimation par Maximum de Vraisemblance

Considérons n matériels identiques mis en essai, sur lesquels on observe k défaillances aux instants (t_1, t_2, \dots, t_k) et $(n - k)$ censures à l'instant t_c . On suppose que ces occurrences sont indépendantes. Si f et R représentent respectivement les fonctions de densité et de fiabilité de paramètres $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_r)$, on définit la fonction de vraisemblance par le produit des probabilités de chaque occurrence :

$$\mathcal{L}(t, \theta) = \left(\prod_{j=1}^k f(t_j, \theta) \right) R(t_c, \theta)^{n-k} \quad (2.20)$$

L'estimateur du MV $\hat{\theta}$ est la valeur de θ qui permet de maximiser la fonction de vraisemblance [Nikulin et al. \(2007a\)](#) :

$$\hat{\theta} = \operatorname{argmax}(\mathcal{L}(t, \theta)) \quad (2.21)$$

Pour des raisons de simplicité, on préfère généralement maximiser la log-vraisemblance $\ln \mathcal{L}(t, \theta)$ par rapport à θ sans altérer le point de maximisation de la fonction. Si la fonction de log-vraisemblance est dérivable par rapport à θ alors l'estimateur du MV vérifie :

$$\left(\frac{\partial \ln \mathcal{L}(T, \theta)}{\partial \theta} \right)^T = \left(\frac{\partial \ln \mathcal{L}(T, \theta)}{\partial \theta_1}, \dots, \frac{\partial \ln \mathcal{L}(T, \theta)}{\partial \theta_2} \right)^T = 0 \quad (2.22)$$

Dans la méthode de détermination des intervalles de confiance, on utilise l'information de Fisher sous l'hypothèse de normalité [Nikulin et al. \(2007b\)](#). Elle est définie comme la matrice des dérivées d'ordre deux de la log-vraisemblance calculée pour $\theta = \hat{\theta}$ qui satisfait l'équation (2.22). Elle est alors définie comme la matrice de covariance :

$$I(\theta; \theta_j) = E_a \left[\left(\frac{\partial \ln \mathcal{L}(T, \theta)}{\partial \theta_1} \right) \left(\frac{\partial \ln \mathcal{L}(T, \theta)}{\partial \theta_2} \right) \right] \quad (2.23)$$

On suppose que $\psi(\theta)$ est le vecteur d'estimateur de $E(T)$ avec $T = (T_1, \dots, T_n)^T$, de matrice de covariance $\operatorname{cov}_\theta$. Si la matrice d'information de Fisher $I(\theta)$ est définie positive, la borne de Cramer-Rao impose :

$$\operatorname{cov}_\theta(T) \geq \left(\frac{\partial \psi(\theta)}{\partial \theta} \right) [I(\theta)]^{-1} \left(\frac{\partial \psi(\theta)}{\partial \theta} \right)^T \quad (2.24)$$

Où : $\frac{\partial \psi(\theta)}{\partial \theta}$ est une matrice qui a le ij^{eme} élément donné par $\frac{\partial \psi_i(\theta)}{\partial \theta_j}$.

D'après Fisher, si T est un estimateur sans biais de θ , c'est à dire que $\psi(\theta) = \theta$, alors l'inéquation (2.24) est simplifiée par :

$$\operatorname{cov}_\theta(T) \geq I(\theta)^{-1} \quad (2.25)$$

La variance de $\hat{\theta}$, $Var(\hat{\theta})$ est calculée par la matrice de Fisher qui s'écrit, si la log-vraisemblance $L_i(t_i, \theta_i)$ est dérivable d'ordre deux, telle que :

$$\hat{F} = \begin{bmatrix} -\frac{\partial^2 L_i}{\partial \theta_1^2} & -\frac{\partial^2 L_i}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \cdots & -\frac{\partial^2 L_i}{\partial \theta_1 \partial \theta_r} \\ -\frac{\partial^2 L_i}{\partial \theta_1 \partial \theta_2} & \ddots & & -\frac{\partial^2 L_i}{\partial \theta_2 \partial \theta_r} \\ \cdots & & \ddots & \cdots \\ -\frac{\partial^2 L_i}{\partial \theta_r \partial \theta_1} & -\frac{\partial^2 L_i}{\partial \theta_r \partial \theta_2} & \cdots & -\frac{\partial^2 L_i}{\partial \theta_r^2} \end{bmatrix} \quad (2.26)$$

La matrice inverse de Fisher représente la matrice estimée de Variance Covariance

$$\hat{\Sigma} \hat{F}^{-1} = \begin{bmatrix} Var(\hat{\theta}_1) & Cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) & \cdots & Cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_r) \\ Cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2) & \ddots & & Cov(\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_r) \\ \cdots & & \ddots & \cdots \\ Cov(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_r) & Cov(\hat{\theta}_2, \hat{\theta}_r) & \cdots & Var(\hat{\theta}_r) \end{bmatrix} \quad (2.27)$$

La construction des intervalles de confiance se base sur l'hypothèse de normalité de distribution d'un paramètre, issue du fait que les évaluations de MV sont asymptotiquement normales. Ainsi, pour un paramètre θ dont l'estimateur de MV à partir d'une grande taille d'échantillon est $\hat{\theta}$, on a :

$$z = \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sqrt{\hat{\theta}}} \quad (2.28)$$

avec :

$$P(x \leq z) = \Phi(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^z e^{-\frac{t^2}{2}} dt \quad (2.29)$$

Pour un niveau de confiance α donné, on peut encadrer z par :

$$P(z_{min} < z < z_{max}) = \alpha \quad (2.30)$$

Soit, à partir de l'équation (2.29) :

$$P\left(-\omega_{1-\alpha/2} < \frac{\hat{\theta} - \theta}{\sqrt{\hat{\theta}}} < \omega_{1-\alpha/2}\right) = \alpha \quad (2.31)$$

avec ω_α définit par $\alpha = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\omega_\alpha}^{\infty} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$

On obtient donc les limites de confiance de $\hat{\theta}$ pour un niveau de confiance α donné en simplifiant l'équation (2.31) :

$$\hat{\theta} - \omega_{1-\alpha/2} \sqrt{Var(\hat{\theta})} < \hat{\theta} < \hat{\theta} + \omega_{1-\alpha/2} \sqrt{Var(\hat{\theta})} = \alpha \quad (2.32)$$

2.2.3.3 Classification des méthodes d'estimation de fiabilité

Les méthodes d'estimation peuvent être classées selon deux grandes considérations. Une première classification peut être opérée selon la connaissance ou non d'une loi paramétrique pour décrire la courbe de fiabilité et une deuxième classification suivant la démarche statistique engagée.

a) Classification selon la connaissance sur la loi paramétrique

On distingue les méthodes suivantes :

- *Méthodes non-paramétriques* : elles n'émettent aucune hypothèse sur l'existence d'une loi de distribution (caractérisée par un ou plusieurs paramètres), pour approcher la courbe de fiabilité. Elles consistent essentiellement à construire de manière empirique des courbes de fiabilité, sous forme d' *escalier*. Elles sont très utiles lorsqu'aucune distribution ne décrit de manière satisfaisante les données de durées de vie, cependant ce sont des méthodes de faible précision.
- *Méthodes paramétriques* : elles font l'hypothèse d'une loi continue, dépendante de certains paramètres et qui approche la courbe de fiabilité (par régression ou maximum de vraisemblance par exemple). Elles sont plus précises que les méthodes non-paramétriques mais pour cela il faut au préalable connaître et bien définir une loi de distribution des données.

b) Classification selon la démarche statistique

On distingue ici les méthodes dites « fréquentielles » et les méthodes dites « Bayésiennes ».

La démarche fréquentielle ou classique s'appuie sur un retour d'expérience de faits observés. Elle est basée sur la notion de probabilité objective (Usureau, 2001). La probabilité d'occurrence d'un événement est approchée sa fréquence. La démarche fréquentielle se heurte à certaines limites et difficultés (Guerin, 2005) comme, la nécessité d'avoir un échantillon suffisamment grand pour réduire l'intervalle de confiance sur les estimateurs ; la complexité mathématique, une forte sensibilité aux données fortement censurées. La méthode du Maximum de Vraisemblance est de type fréquentiel.

Prendre en compte à la fois le retour d'expérience objectif et les connaissances « a priori » plus subjectives (avis d'expert, etc...) pour évaluer la probabilité des événements dans le futur, est la caractéristique de la démarche bayésienne. Les techniques bayésiennes permettent de lever certaines limites et difficultés rencontrées avec les techniques fréquentielles, notamment :

- Elles sont utilisées pour réduire la taille des essais à réaliser,
- Elles améliorent l'estimation des paramètres de la fiabilité du produit par l'intégration du passé (données disponibles sur le produit concerné), surtout lorsque la connaissance a

priori est très informative.

- Elles permettent de traiter le cas « zéro » défaillance observée.

2.2.4 Fiabilité dans le cycle de vie d'un produit

2.2.4.1 Courbe en baignoire

La courbe en baignoire représente l'évolution du taux de défaillance en fonction du temps le long du cycle de vie du matériel. Elle permet de diviser le cycle de vie en trois phases principales : la phase de jeunesse, la phase de vie utile et la phase de vieillissement. Le positionnement dans l'une des trois différentes phases de la courbe en baignoire est lié à la valeur du paramètre de forme de la loi de Weibull (voir sous section 2.2.2.3).

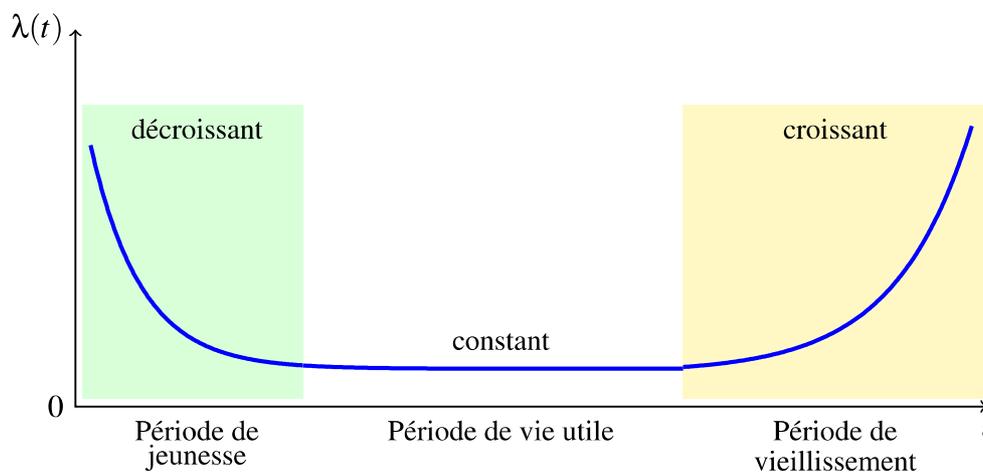


Fig. 2.3. Courbe en baignoire

L'allure de la courbe en baignoire peut changer selon le type de produit (électronique, informatique ou mécanique) (O'Connor, 1987). Le cycle de vie des composants électroniques est représenté de la même manière que la courbe en baignoire présentée sur la figure 2.3. Dans ce cas, la phase de jeunesse où l'on observe une décroissance rapide du taux de défaillance représente la période de déverminage ou d'élimination des défauts de conception ou de fabrication du produit. Ensuite dans la deuxième phase, on observe un taux de défaillance constant qui signifie que la fréquence des défaillances (qui ont un caractère aléatoire) est indépendante de l'âge du produit. C'est généralement dans cette phase que les études de fiabilité prévisionnelle sont réalisées (Estimation du paramètre λ du modèle exponentiel de fiabilité). Pour finir, dans la phase de vieillissement, le taux de défaillance croît au fil du temps. L'on est alors en présence des phénomènes d'usure, de corrosion, fatigue etc...

2.2.4.2 Cycle de vie d'un système mécanique

La particularité du cycle de vie d'un système mécanique (figure 2.4) est l'inexistence de la phase de durée de vie utile. Il comporte deux phases :

- La première et la plus courte, définit la période de mortalité infantile. Elle est caractérisée par une décroissance du taux de défaillance dues généralement aux améliorations des propriétés internes et surfaciques (traitement thermique, rodage etc...). Les lois de probabilité utilisées pour cette phase sont la loi de Weibull ($\beta < 1$) et la loi LogNormale ($\sigma > 1$).
- La deuxième phase et la plus longue, est la période de vieillissement du système, modélisée par un taux de défaillance croissant au cours du temps caractéristique des phénomènes de corrosion, d'usure, de déformation, de fatigue etc... Les lois de probabilité utilisées pour cette phase sont la loi de Weibull ($\beta > 1$) et la loi LogNormale ($\sigma < 1$).

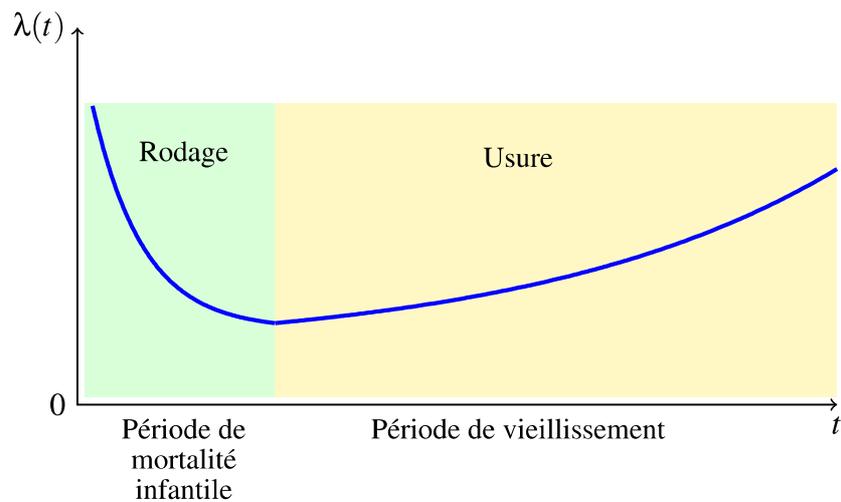


Fig. 2.4. Cycle de vie d'un système mécanique

Contrairement aux composants électroniques, les calculs de la fiabilité pour des composants mécaniques se font essentiellement dans la période de vieillissement, en utilisant des lois de probabilité dont le taux de défaillance est fonction du temps telles que la loi LogNormale, Weibull, etc...(Tebbi, 2005).

2.2.4.3 Fiabilité dans le cycle de développement d'un produit

En fonction du niveau où l'on se situe dans le cycle de développement du produit, on distingue trois catégories d'étude de fiabilité :

- La fiabilité prévisionnelle (dès le début du projet) ;
- La fiabilité expérimentale (développement, maturité, production) ;
- La fiabilité opérationnelle (en exploitation, données du retour d'expériences).

La figure 2.5, permet de situer dans le cycle de développement du produit, chaque type d'étude de fiabilité ainsi que les méthodes et outils associés :

Comme le montre la figure 2.5, la fiabilité prévisionnelle, fait appel d'une part à des méthodes dites qualitatives comme l'Analyse des Risques Préliminaires (APR), l'Analyse des Modes de

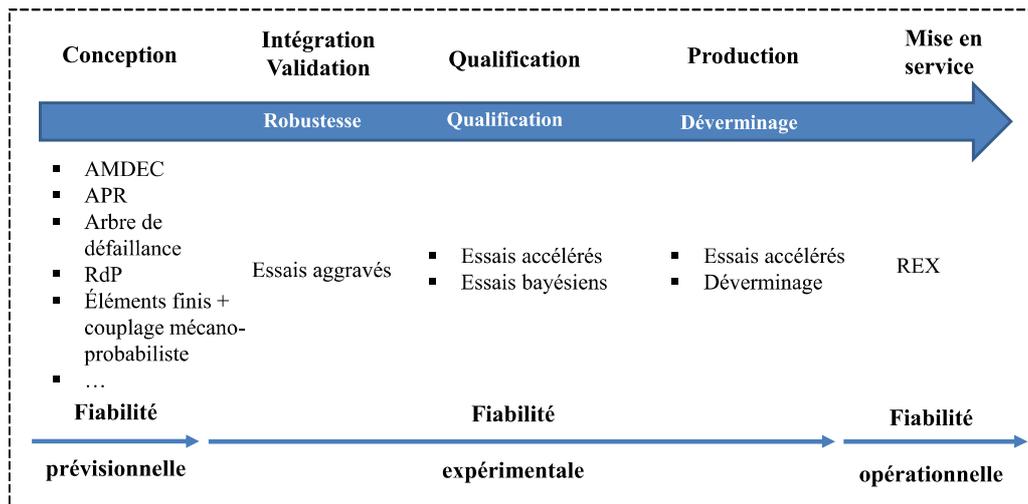


Fig. 2.5. Cycle de fiabilisation d'un produit

Défaillances, de leurs Effet et Criticité (*AMDEC*) etc..., et d'autre part à des méthodes quantitatives comme les Arbres de Défaillances, les diagrammes de fiabilité etc... Dans le cas de systèmes complexes, des méthodes de modélisation comme les réseaux de pétri (*RdP*) ou les chaînes de Markov sont utilisées. Il faut noter qu'en mécanique, l'estimation de fiabilité prévisionnelle en phase de conception est généralement obtenue par des méthodes de couplage mécano-probabiliste faisant appels aux calculs par éléments finis.

L'étude de la fiabilité expérimentale donne lieu à la mise en œuvre de trois types d'essais de fiabilité que nous détaillons dans la suite. Ce sont les essais de robustesse ou essais aggravés (sur les premiers prototypes), les essais d'estimation de la fiabilité (lorsque le produit est mature) et les essais de déverminage (lors de la production).

La fiabilité opérationnelle quant à elle, s'appuie sur les données obtenues du retour d'expérience. Ce dernier est généralement basé sur la collecte et la gestion de faits techniques, observés pendant toute la durée de vie du système, de sa mise en service jusqu'à sa désintégration ([Mihalache, 2007](#)).

2.2.5 Particularité de la fiabilité mécanique

Pour mener à bien une étude de fiabilité, il est important d'identifier en fonction du profil de mission du produit, les différents modes de défaillance associés. En mécanique, les défaillances des composants ont des origines variées, dont les plus fréquentes sont détaillées ci-après.

2.2.5.1 Mécanismes de défaillance des composants mécaniques

Les composants mécaniques sont caractérisés par des mécanismes de dégradation souvent complexes, d'origines variées (fatigue, fluage, fissuration, usure, corrosion/oxydation, désagrégation) ([Mihalache, 2007](#)) :

- La fatigue consiste en la dégradation ou la modification des propriétés mécaniques des matériaux, suite à l'application répétée d'un chargement cyclique ou d'une vibration, conduisant à une rupture.
- Le fluage est un mécanisme de dégradation lié au chargement et à la température conduisant à une déformation du matériau (allongement ou élongation). Ce mécanisme devient prépondérant dès que la température du matériau dépasse le tiers de la température de fusion (exprimée en ° K).
- L'usure est liée au frottement entre deux pièces mécaniques provoquant l'augmentation du jeu entre elles (élimination de matière). Exemple : les pneus, les roulements.
- La plupart des métaux sont détériorés par l'interaction avec l'oxygène (la corrosion ou l'oxydation).

Dans la suite de cette thèse, nous nous intéressons à la fatigue mécanique qui est la plus importante source de défaillance pour les composants mécaniques.

2.2.5.2 Modèle de fiabilité de composants mécaniques standards

L'une des méthodes classique d'estimation de fiabilité mécanique est l'utilisation des recueils de données qui constituent de recommandations ou de règles établies grâce à un processus d'expertise.

En électronique, un domaine où le calcul de fiabilité est pratiqué depuis de nombreuses années, les bases de données de fiabilité sont disponibles et nombreuses (à l'instar de la norme *MIL-HDBK-217-F* et du guide méthodologique de fiabilité *FIDES*) ce qui n'est pas le cas en mécanique, où l'utilisation des recueils est plus récente ([Demri, 2009](#)).

En mécanique, les recueils de données peuvent être utilisés pour étudier la fiabilité d'un composant mécanique standard. On peut énumérer comme recueils de données mécaniques, *AVCO*, *NPRD*, *NSWC*, *EIREDA*, etc...dont une bonne synthèse est réalisée dans ([Tebbi, 2005](#)) :

- *AVCO* : c'est un manuel américain très ancien regroupant des tables de données de fiabilité comme des durées de vie moyennes des taux de défaillance génériques sous forme de nombre de défaillances par million d'heures et par million de cycles en fonction des conditions d'environnement.
- *NPRD* : c'est un rapport du centre RAC (Reliability Analysis Center), très utilisé pour évaluer la fiabilité des composants et dispositifs non électronique.
- *NSWC* : c'est un catalogue publié par la Marine des États-Unis (Naval Surface Warfare Center), il fournit des modèles de taux de défaillance, supposés constants, pour des classes fondamentales de composants mécaniques tels que les ressorts, les moteurs, les freins, les embrayages, etc.

- **EIREDA** (European Reliability Industry Data Handbook) : donne des taux de défaillance, supposés constants, pour des produits mécaniques et électroniques en fonctionnement et en sollicitation, à l'usage des centrales nucléaires.
- **FARADA** (Failure Rate Data) fournit des données de fiabilité pour des composants de toutes natures : une estimation des taux de défaillance, nombre de pannes observées, type de pièce, mode d'utilisation, etc.

Dans le cas d'un composant mécanique spécifique, les méthodes probabilistes comme la méthode résistance-contrainte seront plus adaptées pour estimer la fiabilité de ce composant.

2.2.5.3 Fiabilité de composants mécaniques spécifiques : Méthode R-C

De manière générale, le dimensionnement de structures se fait en considérant un mode de défaillance donné. Il est basé sur l'établissement d'une relation mécanique caractérisant son état en fonction des variables de la structure. Cette relation mécanique est composée de deux termes :

1. un premier terme noté C donnant l'état de sollicitation de la structure (efforts internes s'exerçant dans la structure) en fonction d'un mode de ruine donné (statique, fatigue, etc...),
2. et un deuxième noté R caractérisant la résistance à cette sollicitation ou contrainte exercée.

Deux démarches de dimensionnement se distinguent : l'approche déterministe et l'approche probabiliste encore appelée la méthode résistance-contrainte ($R - C$).

Le principe de l'approche déterministe est basé sur l'utilisation d'un coefficient de sécurité K (imposé par des normes) qui intègre toutes les incertitudes et marges de sécurité. Le coefficient de sécurité K se calcule comme suit :

$$K = \frac{R}{C} \quad (2.33)$$

Ensuite, pour valider la conception on vérifie si le coefficient K calculé reste supérieur à un coefficient de sécurité seuil préalablement fixé. Cette approche conduit généralement d'une part à un surdimensionnement de la structure (K grand pour réduire les risques), et d'autre part à une augmentation du risque de ruine ou de défaillance, lorsqu'on cherche à réduire K sans maîtriser son évaluation.

Pour intégrer de manière plus adéquate les incertitudes relatives aux variables de conception, la méthode probabiliste d'évaluation de la fiabilité a été développée depuis de nombreuses années ([Mayer, 1926](#)).

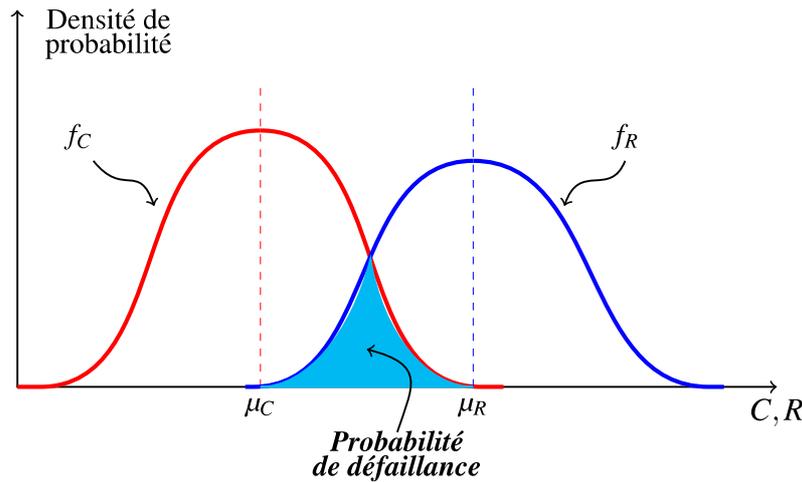


Fig. 2.6. Méthode contrainte résistance probabiliste : Diagramme de Warmer

Dans une démarche probabiliste, les variables du problème mécanique à savoir R et C ne sont pas déterministes. Elles sont considérées comme des variables aléatoires avec des lois de distributions associées (figure 2.6). La figure 2.6 prend l'appellation de diagramme de Warmer. La probabilité de défaillance P_f est estimée à partir de ces deux variables aléatoires, comme la probabilité que la résistance soit inférieure à la contrainte appliquée durant la durée de vie du système. D'un point de vue mathématique P_f est calculée à partir de la relation suivante :

$$P_f = \text{Prob}(R \leq C) \quad (2.34)$$

$$P_f = \int \int_{\{(R,S)|r \leq c\}} f_{R,S}(r,c) dr dc \quad (2.35)$$

Où $f_{R,S}$, représente la densité de distribution conjointe des variables R et S .

Dans le cas où les deux variables sont indépendantes l'expression de P_f devient :

$$P_f = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{r=0}^c f_R(r) dr \right) f_C(c) dc \quad (2.36)$$

ou

$$P_f = \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\int_{c=0}^r f_C(c) dc \right) f_R(r) dr \quad (2.37)$$

Avec f_R , et f_C les densités de distribution respectives des variables R et S .

Selon les cas, l'intégrale peut s'avérer plus ou moins complexe à évaluer. Plusieurs méthodes d'évaluation existent et seront présentées dans la section suivante, où nous abordons l'estimation de fiabilité mécanique prévisionnelle dans un cadre plus globale qu'est le couplage mécano-

probabiliste.

2.3 Fiabilité prévisionnelle par couplage mécano-probabiliste

Une analyse de fiabilité en mécanique porte essentiellement sur le calcul de probabilité de défaillance ou de ruine d'un système mécanique vis-à-vis d'un critère de défaillance qui prend en considération les incertitudes sur les paramètres de conception dudit système. Le fait d'inclure les incertitudes comme des variables aléatoires permet de modéliser le risque comme une probabilité de défaillance. Cette approche est plus fine qu'une approche déterministe où les grandeurs sont fixées à des valeurs nominales (Lemaitre, 2014).

Le concept de critère de défaillance peut être défini comme la confrontation de deux quantités fondamentales désignées respectivement par la « Capacité » et la « Demande » du système (Riahi, 2013).

Avant de présenter les différentes méthodes, il nous convient de rappeler certaines notions de base relatives au couplage mécano-probabiliste (figure 2.7).

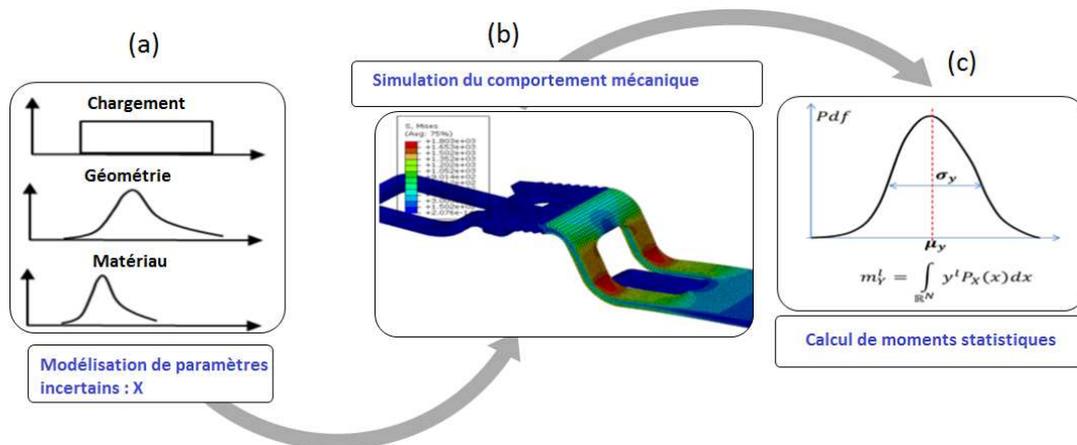


Fig. 2.7. Illustration du couplage mécano-probabiliste

En effet, généralement en mécanique, l'analyse prévisionnelle de la fiabilité nécessite la construction d'un modèle dit mécano-fiabiliste. On appelle modèle mécano-fiabiliste, le modèle qui associe une procédure de calcul mécanique et une procédure de calcul fiabiliste (Lemaire, 2005).

Le calcul mécanique est généralement réalisé par la méthode des éléments finis (MEF). La MEF Oudin (2008) est une méthode de résolution par discrétisation de problèmes physiques (qu'on peut décrire par des équations aux dérivées partielles sur un domaine spatial). En résumé, les étapes suivantes sont nécessaires :

- Le maillage qui consiste en un découpage du modèle spatial en éléments finis ;
- Écriture de l'équation aux dérivées partielles (simplifiée) sur chaque élément fini ;
- Rassemblement des expressions des équations aux dérivées partielles locales pour appliquer les conditions aux limites du problème.

Il faut noter que chaque système d'équations linéaires peut se représenter par une matrice ce qui permet d'obtenir après rassemblement une matrice globale. La résolution de ce système global donne la solution approchée au problème. Cette résolution peut demander d'énormes efforts de calculs en fonction de la nature du problème. Dans la pratique, les ingénieurs calculs utilisent des logiciels de calcul comme Cast3m, Abaqus, Ansys, etc. . .

Le couplage de modèles mécaniques et des approches probabilistes a gagné beaucoup d'intérêt dans la littérature au cours des dernières années (Sudret, 2012).

Ces méthodes cherchent à estimer la probabilité de défaillance de la structure en tenant compte de la variabilité des paramètres tels que la géométrie des structures, les propriétés des matériaux et le chargement. Elles sont structurées en trois principales phases : la modélisation des sources d'incertitudes (figure 2.7 (a)), l'analyse du comportement de la structure au travers d'un modèle mécanique (figure 2.7 (b)), et la propagation des incertitudes ou la quantification de l'effet des incertitudes sur les réponses du modèle mécanique (figure 2.7 (c)).

Cette section est essentiellement inspirée des travaux de thèses de (Gille-Genest, 1999) (Dubourg, 2011) et les références (Ditlevsen and Madsen, 1996), (Lemaire, 2005), (Lemaire, 2014), (Sudret, 2012), (El Hami and Radi, 2011).

2.3.1 Modélisation probabiliste de l'incertain

L'intérêt de l'analyse probabiliste des structures, est la prise en compte de la variabilité des paramètres incertains tels que, les propriétés des matériaux constitutifs, les dimensions géométriques et les sollicitations appliquées.

Les sources d'incertitudes peuvent être diverses. En mécanique, on peut avoir des incertitudes d'ordre statistique et des incertitudes épistémiques.

La modélisation des différentes sources d'incertitudes est une étape capitale quand on veut mener des analyses probabilistes. Cela fait appel principalement à des méthodes statistiques pour le choix du modèle probabiliste adéquat (variable ou processus aléatoire), ainsi que leurs paramètres (moments statistiques, auto-corrélation).

2.3.1.1 Types d'incertitudes

Dans la littérature on rencontre deux types d'incertitudes qui impactent l'activité de modélisation au cours du processus de conception de systèmes mécaniques ainsi que l'évaluation de leur fiabilité (Oberkampf et al., 2001) : les variabilités intrinsèques ou incertitudes aléatoires et les incertitudes épistémiques ou résultant d'un manque de connaissance.

Nous reprenons dans les paragraphes suivants, la description proposée par (Hähnel, 2007) sur ces différents types d'incertitudes :

a) Incertitudes aléatoires

Décrivent les variations inhérentes à la nature même des paramètres ou des phénomènes considérés. De manière générale, ce type d'incertitude peut être décrit par une quantité distribuée, définie sur un intervalle de valeurs possibles. Ces variabilités intrinsèques sont par exemple observées au niveau :

- des propriétés géométriques des systèmes mécaniques issues des procédés de fabrication (e.g. diamètre ou longueur d'un axe) ;
- des durées et des amplitudes de sollicitation dues à l'environnement (e.g. températures, profil de la chaussée) ;
- des propriétés de matériaux non uniformes (e.g. module de Young).

Ces incertitudes aléatoires sont donc également dénommées incertitudes irréductibles dans la mesure où même si l'on dispose d'une connaissance complète du paramètre, celui-ci ne peut tout simplement pas être caractérisé de manière déterministe.

b) Incertitudes épistémiques

Elles modélisent un manque de connaissance, ou une incomplétude de l'information sur les caractéristiques du système mécanique en cours de conception donnant lieu à la définition de modèles mathématiques qui idéalisent de manière inexacte les paramètres ou les phénomènes physiques.

Ces incertitudes sont également appelées incertitudes réductibles ou subjectives. En particulier, elles peuvent être réduites en utilisant des modèles plus fins et/ou en collectant des données en nombre plus important et plus précises.

2.3.1.2 Modèles probabilistes

Soit un ensemble Ω muni d'une probabilité P . On appelle variable aléatoire, $V(\omega)$ une fonction de l'aléa $\omega \in \Omega$. Fixer ω revient à tirer une réalisation de cette variable aléatoire $v = V(\omega = \omega_0)$ (Lemaire, 2005).

On considère à présent une fonction $V(x, t, \omega)$ de l'espace du temps et de l'aléa. Une réalisation $V(x, t, \omega_0)$ est une trajectoire de cette fonction pour un aléa fixé. Le terme processus stochastique (ou processus aléatoire) désigne une telle fonction. Elle peut être indexée uniquement sur le temps (exemple : l'accélération d'un séisme en un point) ou sur l'espace (exemple : la répartition spatiale d'un module d'élasticité).

Le choix de l'un de ces deux modèles est dicté d'une part, par la nature physique du paramètre incertain à modéliser (à titre d'exemple, pour les paramètres à valeurs positives, le choix d'une loi normale peut être problématique puisqu'elle est définie sur \mathbb{R}) ; d'autre part du degré de réalisme qu'on veut apporter à nos analyses. Par exemple, si on veut prendre en compte la dépendance de la variabilité du module d'élasticité de la position (x) le long d'une poutre, un modèle

probabiliste de type processus aléatoire sera le plus adéquat, sinon un modèle probabiliste de type variable aléatoire sera suffisant.

2.3.1.3 Transformation isoprobabiliste

Souvent, la résolution d'un problème probabiliste dans l'espace physique (Domaine de définition réel des paramètres incertains) n'est pas triviale. Pour cette raison on lui préfère, une résolution dans un espace standard dans lequel les paramètres incertains sont représentés par des variables aléatoires normales centrées réduites indépendantes.

Cela est dû principalement aux caractéristiques mathématiques de ces dernières, qui rend plus facile la manipulation du calcul probabiliste.

Le passage de l'espace physique à l'espace standard se fait, à l'aide de transformations isoprobabilistes. Les plus connues sont celles développées par Nataf et Rosenblatt.

a) Cas des variables indépendantes

Si les variables X_i sont indépendantes et si les fonctions de distributions sont connues, la transformation \mathbf{T} la plus simple consiste à transformer séparément chaque variable X_i en une variable U_i normale centrée réduite par :

$$u_i = T_i(x_i) \quad (2.38)$$

$$T : u_i = \Phi^{-1}(F_{X_i}(x_i)) \quad (2.39)$$

$$T^{-1} : x_i = F_{X_i}^{-1}(\Phi(u_i)) \quad (2.40)$$

Où F_{X_i} est la fonction de distribution de la variable X_i .

Dans le cas particulier où la variable X_i suit une loi gaussienne $N(\mu_{X_i}, \sigma_{X_i})$ la transformation \mathbf{T} est :

$$T : u_i = \frac{x_i - m_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \quad (2.41)$$

Il s'agit d'une transformation linéaire qui associe une loi Gaussienne pour x_i à une loi Gaussienne (de moyenne nulle et de variance unitaire $N(0, 1)$) pour u_i .

Si la variable X_i suit une loi LogNormale $LN(\mu_{X_i}, \sigma_{X_i})$, $\ln(X_i)$ suit une loi normale de paramètres (λ, ζ) , avec :

$$\lambda_{X_i} = \ln(m_{X_i} \sqrt{1 + (\frac{\sigma_{X_i}}{m_{X_i}})^2}) \quad (2.42)$$

Et

$$\zeta_{X_i} = \sqrt{\ln(1 + (\frac{\sigma_{X_i}}{m_{X_i}})^2)} \quad (2.43)$$

On se ramène ainsi au cas d'une variable gaussienne. La transformation \mathbf{T} est alors :

$$T : u_i = \frac{\ln(x_i) - m_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \quad (2.44)$$

Si les variables X_i suivent des lois quelconques de fonction de répartition $F_{X_i}(x_i)$, il est possible de trouver la transformation \mathbf{T} en écrivant l'égalité des probabilités pour les variables x_i et u_i :

$$\Phi(u_i) = F_{X_i}(x_i) \quad (2.45)$$

On a donc :

$$T : u_i = \Phi^{-1}(F_{X_i}(x_i)) \quad (2.46)$$

On note que si F_{X_i} est inversible pour toute valeur de x_i , la transformation inverse est définie par :

$$T^{-1} : x_i = F_{X_i}^{-1}(\Phi(u_i)) \quad (2.47)$$

Dans le cas où les variables sont dépendantes, les transformations de Rosenblatt ou de Nataf peuvent être utilisées.

b) Transformation de Rosenblatt

La transformation de Rosenblatt (Rosenblatt, 1952) est utilisable lorsque la fonction de répartition conjointe et la fonction de densité conjointe des variables sont connues. On considère aussi dans cette transformation, que toutes les fonctions de répartition sont absolument continues (Ditlevsen and Madsen, 1996). Elle est obtenue par la forme récursive suivante :

$$\left\{ \begin{array}{l} u_1 = \Phi^{-1}(F_{X_1}(x_1)) \\ u_2 = \Phi^{-1}(F_{X_2}(x_2|x_1)) \\ \dots \\ u_i = \Phi^{-1}(F_{X_i}(x_i|(x_1 \dots x_{i-1}))) \\ \dots \\ u_n = \Phi^{-1}(F_{X_n}(x_n|(x_1 \dots x_{n-1}))) \end{array} \right. \quad (2.48)$$

où $F_{X_i}(x_i|(x_1 \dots x_{i-1}))$ est la fonction de répartition de X_i conditionnellement à $X_1 = x_1, \dots, X_{i-1} = x_{i-1}$.

Cette définition de la transformation de Rosenblatt requiert la connaissance de la densité conjointe. Or en pratique, on ne connaît généralement que les moyennes, les écart-types et parfois une matrice de covariances, ainsi que les densités marginales des variables aléatoires (Nguyen, 2007).

c) Transformation de Nataf

La transformation de Nataf (Nataf, 1962) ne nécessite que la connaissance des moyennes m_{X_i} , des écarts-types σ_{X_i} , de la matrice de corrélation $\rho_{X_i X_j} = \rho_{ij}$ et des distributions marginales de X_i .

Connaissant les distributions marginales des composantes X_i de X , soit $F_{X_i}(X_i)$ pour la fonction de répartition, on définit d'abord les variables normales centrées unitaires $\hat{U} = (\hat{U}_1, \dots, \hat{U}_2)$, lesquelles sont corrélées deux à deux :

$$\hat{u}_i = \Phi^{-1}(F_{X_i}(x_i)), i = 1, 2 \quad (2.49)$$

Les corrélations ρ_{ij} des variables sont obtenues par l'équation suivante :

$$\rho_{ij} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\frac{x_i - m_{X_i}}{\sigma_{X_i}} \right) \left(\frac{x_j - m_{X_j}}{\sigma_{X_j}} \right) \phi_2(\hat{u}_i, \hat{u}_j, \rho_{ij}^*) d\hat{u}_i d\hat{u}_j \quad (2.50)$$

ϕ_2 est la densité conjointe d'un vecteur gaussien de dimension 2, de composantes centrées réduites et de coefficient de corrélation fictif ρ_{ij}^* .

La transformation en variables indépendantes s'écrit alors :

$$u_i = T_i(x_j) = \sum_j \Gamma_{0,ij} \hat{u}_j = \sum_j \Gamma_{0,ij} \Phi^{-1}(F_{X_j}(x_j)) \quad (2.51)$$

Où $[\Gamma_0]$ est l'inverse de la matrice triangulaire inférieure de la décomposition de Cholesky de la matrice de corrélation $[\rho]$.

2.3.1.4 Propagation de l'incertitude

Soit le modèle numérique constitué d'un ensemble de variables d'entrée représentées par le vecteur aléatoire $X = (X_1, \dots, X_p)$ et d'une fonction mathématique (a priori inconnue) qui fait correspondre à ces entrées un ensemble de variables aléatoires de sortie Y .

Si l'on fait l'hypothèse que la variable de sortie Y est un scalaire, on peut écrire le modèle comme suit :

$$\begin{aligned} f : \quad \mathbb{R}^p &\rightarrow \mathbb{R} \\ X &\mapsto Y = f(X) \end{aligned} \tag{2.52}$$

Une fois que le modèle probabiliste utilisé pour représenter la variabilité des paramètres incertains (X_1, \dots, X_p) est identifié, l'étape suivante du calcul probabiliste sera d'évaluer l'effet de ces incertitudes sur la variabilité des paramètres de sortie du modèle mécanique. Dans le vocabulaire du calcul probabiliste, cette étape est désignée par "propagation d'incertitudes". Généralement, cette dernière peut avoir trois finalités (Figure 2.8) : l'analyse de tendance centrale, l'analyse de sensibilité, l'analyse de fiabilité. Dans la suite nous développons que la finalité analyse de fiabilité.

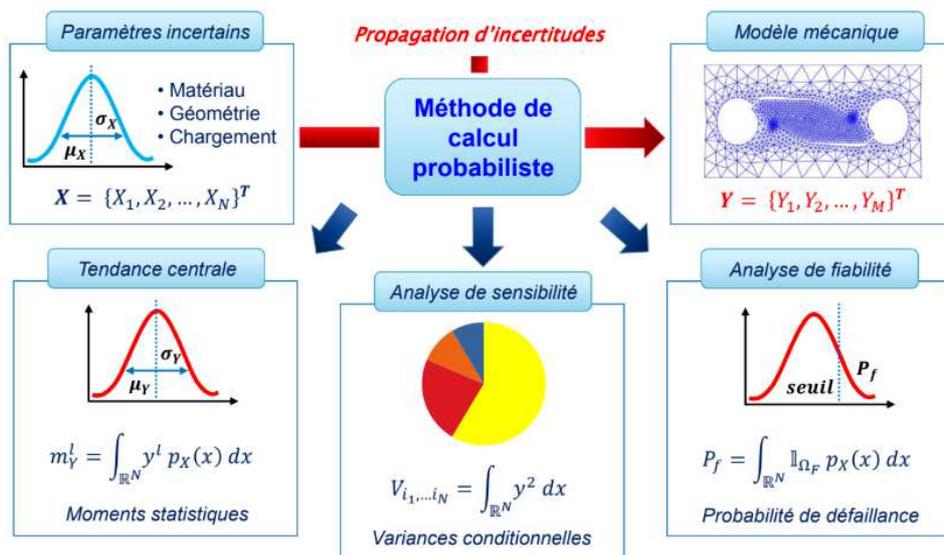


Fig. 2.8. Finalités de la propagation d'incertitudes

Pour effectuer de la propagation d'incertitudes, on aura besoin d'une stratégie de couplage. Elle peut être soit intrusive, soit non-intrusive :

- **Méthodes intrusives** : Dans ce cas, on est contraint de manipuler les équations gouvernant le comportement mécanique pour introduire l'aléa associé aux paramètres incertains. On fait appel le plus souvent à des développements en série entières. La méthode intrusive demande beaucoup d'hypothèses et de développement théorique.

- **Méthodes non-intrusives** : Elle ne nécessite que la connaissance d'un échantillon (fini) de couples entrées-sorties du modèle et ne fait aucune hypothèse structurelle sur f . Dans ce cas, le modèle mécanique est considéré comme une "boite noire" et la propagation d'incertitudes est effectuée par la simulation de ce dernier (calcul déterministe) en un nombre fini de points échantillonnés dans l'espace de variabilité des paramètres incertains. Ensuite, un post-traitement statistique est effectué sur les réponses du modèle mécanique pour obtenir une estimation de la probabilité de défaillance dans le cas où on visait des analyses de fiabilité. Les méthodes non-intrusives sont les plus utilisées lorsque le modèle mécanique est sous forme implicite.

Avant d'aborder les méthodes d'estimations de fiabilité, il nous convient de poser certaines bases de la formulation mathématique du problème de fiabilité.

2.3.2 Formulation mathématique du problème de fiabilité

Plusieurs phénomènes physiques peuvent être à l'origine d'une défaillance. On peut citer par exemple, la fatigue, le fluage, la présence de fissures, la plastification etc... Dans l'analyse de fiabilité des structures, la performance du système est mathématiquement décrite par un critère de défaillance qui dépend de la réponse mécanique (aléatoire) du système, d'éventuels paramètres déterministes additionnels (par exemple, un seuil codifié) ou des variables aléatoires (par exemple, une résistance incertaine).

L'insatisfaction à ce critère de défaillance, provoque un mode de défaillance de la structure. La modélisation probabiliste d'un mode de défaillance se fait par la définition d'une fonction G appelée fonction d'état limite ou fonction de performance.

2.3.2.1 Fonction d'état limite

Elle est définie comme une fonction des variables aléatoires (X_1, X_2, \dots, X_n) , qui représentent les paramètres incertains (x_1, x_2, \dots, x_n) , souvent rassemblés dans le vecteur aléatoire $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}^T$ par soucis de simplicité. La fonction $G(X)$ est par construction une variable aléatoire qui permet de définir en fonction de ses valeurs, l'état de fonctionnement de la structure. Ainsi, l'espace aléatoire peut être divisé en deux régions :

- **le domaine de défaillance**, $\Omega_F = \{x \in \mathcal{D}_X | G(x) \leq 0\}$. On parle d'état de défaillance de la structure ;
- **le domaine de sécurité**, $\Omega_S = \{x \in \mathcal{D}_X | G(x) > 0\}$. On dit aussi que la structure est en état de bon fonctionnement.

L'ensemble des points $\Gamma = \{x \in \mathcal{D}_X | G(x) = 0\}$ représente la *surface de l'état limite* qui est la frontière entre les domaines de défaillance et de sécurité.

En mécanique de structures et en particulier en génie civil, on distingue deux typologies d'état limite :

- **ELS** (État Limite de Service) qui permet de vérifier que les déformations ne gênent pas le bon fonctionnement du système,
- **ELU** (État Limite Ultime) pour vérifier qu'il n'y a pas de dégradations irréversibles.

La figure 2.9, illustre schématiquement ces concepts dans le cas d'un espace aléatoire bidimensionnel.

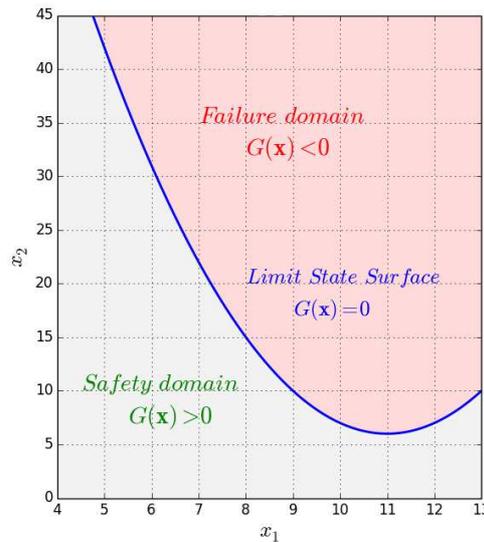


Fig. 2.9. Notions de surface d'état limite, de domaine de défaillance et de domaine de sécurité

2.3.2.2 Expression de la probabilité de défaillance

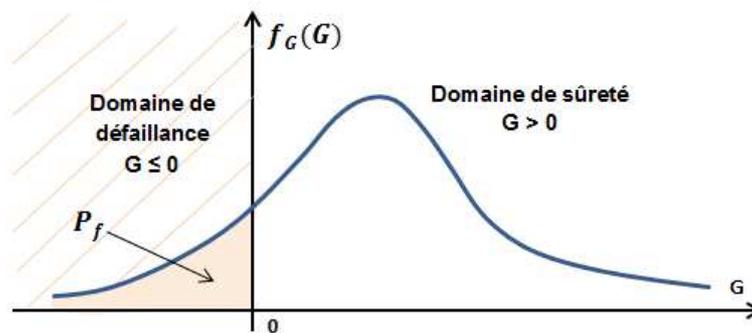


Fig. 2.10. probabilité de défaillance

A partir de la construction de la fonction d'état limite, la probabilité de défaillance P_f (Figure 2.10), qui est par définition complémentaire de la fiabilité R , i.e. $R = 1 - P_f$, s'obtient comme suit :

$$P_f = Prob[G(x) \leq 0] = \int_{G(x) \leq 0} p_X(x) dx \tag{2.53}$$

où p_X est la densité de probabilité conjointe du vecteur aléatoire X . On constate donc que, l'estimation de la probabilité de défaillance P_f n'est autre que le calcul d'une intégrale multidimensionnelle.

Outre, la probabilité de défaillance, une autre mesure de la performance ou de la sécurité d'une structure mécanique est l'indice de fiabilité que nous abordons ci-après.

2.3.3 Notion d'indice de fiabilité

La notion d'indice de fiabilité est introduite dans les années 1950 par Rjanitzyne. Les deux indices de fiabilité les plus utilisées en fiabilité des structures sont l'indice de de *Rjanitzyne-Cornell* et l'indice de *Hasofer et Lind*.

2.3.3.1 Indice de Rjanitzyne-Cornell

Il est obtenu à partir de la moyenne et de l'écart type de la fonction de performance G :

$$\beta_c = \frac{\mu_G}{\sigma_G} \quad (2.54)$$

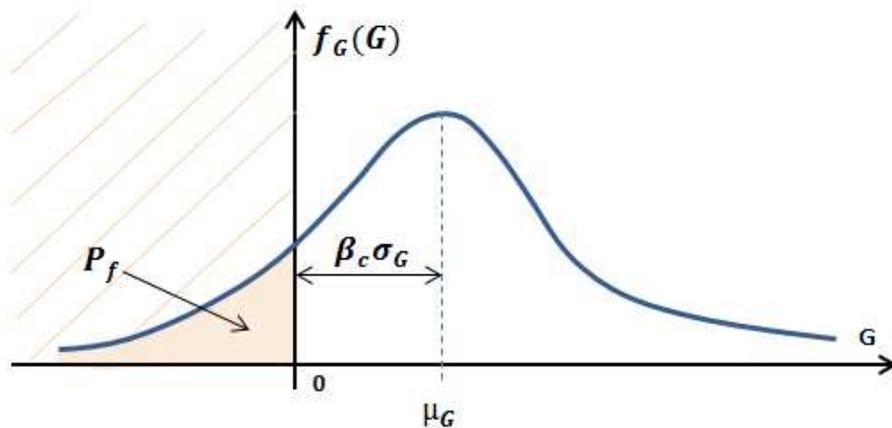


Fig. 2.11. Représentation de l'Indice de Cornell

Comme représenté sur la figure 2.11, l'écart entre le point moyen μ_G et l'état limite ($G = 0$) est mesuré par β_c fois l'écart type σ_G .

Pour différentes expressions du même état limite, l'indice β_c conduit à différentes valeurs. C'est son inconvénient. On peut illustrer cela à travers l'exemple suivant :

1. Première expression de l'état limite $G(r,s)=r-c=0$

Dans ce cas l'indice est :

$$\beta_c = \frac{m_r - m_c}{\sqrt{\sigma_s^2 + \sigma_r^2}} \quad (2.55)$$

2. Deuxième expression de l'état limite $G(r,s)=1-c/r=0$

L'indice devient :

$$\beta_c = \frac{m_s}{\sqrt{\left(\frac{\sigma_r}{m_s}\right)^2 + \sigma_s^2 \left(\frac{m_r}{m_s}\right)^2}} \quad (2.56)$$

L'indice de *Hasofer et Lind* présenté ci-dessous permet de lever cette difficulté.

2.3.3.2 L'indice de Hasofer et Lind

La proposition faite par *Hasofer et Lind* est de ramener les variables physiques dans un nouvel espace des variables aléatoires centrées réduites et statistiquement indépendantes (espace aléatoire standard). C'est la transformation isoprobabiliste que nous avons abordé plus haut dans la section 2.3.1.3. En résumé, pour une variable aléatoire gaussienne x de moyenne μ_X et d'écart type σ_X dans l'espace physique, son image dans l'espace standard est $u = (x - \mu_X)/\sigma_X$.

Pour une variable aléatoire indépendante mais de loi quelconque, elle s'obtient à partir de l'égalité des fonctions de répartition.

En lui appliquant la transformation isoprobabiliste $T : X \rightarrow U$, la fonction d'état limite $G(X)$ devient :

$$H(U) = G \circ T(U) \quad (2.57)$$

La probabilité de défaillance P_f est alors égale à :

$$P_f = Prob(H(U) \leq 0) \quad (2.58)$$

soit :

$$P_f = \int_{H(u) \leq 0} \Phi_m(u) du \quad (2.59)$$

Φ_m est la densité multi-normale centrée réduite. L'indice de fiabilité est défini comme étant la distance euclidienne de l'origine O de l'espace normal standard à la surface d'état limite $H(u) = 0$ au point P^* le plus proche de l'origine.

Il faut donc résoudre le problème de minimisation sous contrainte suivant :

$$\begin{aligned} \beta_{HL} &= \text{distance}(O, H(u) = 0) \\ &= \min_{H(u) \leq 0} \sqrt{\{u\}^T \cdot \{u\}} \end{aligned} \quad (2.60)$$

Par convention, l'indice β_{HL} est compté positif si le point origine O appartient au domaine de sûreté et négatif sinon.

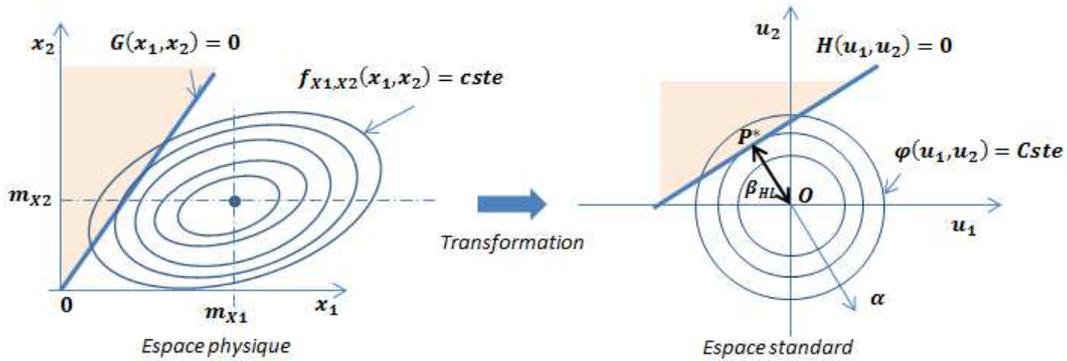


Fig. 2.12. Représentation de l'indice de Hasofer Lind

Soient u^* le vecteur solution du problème et P^* le point de la surface d'état limite tel que $OP^* = u^*$. P^* est appelé le point de conception ou point de défaillance le plus probable (*MPFP* : *Most Probable Failure Point*). Par ailleurs :

$$u^* = -\beta_{HL}\alpha \quad (2.61)$$

α est le vecteur normal à la surface $H(u) = 0$ au point u^* , soit son gradient normalisé. La valeur α_i représente l'influence de la variable aléatoire U_i sur l'état limite et une approximation de l'influence de la variable physique X_i qui lui est associée.

2.3.3.3 Recherche du point de conception

Afin de déterminer le point de conception, il faut résoudre le problème de minimisation sous contraintes. Dans le cas d'analyse de fiabilité, on fait appel à l'algorithme d'optimisation du premier ordre de Hasofer-lind-Rackwitz-Fiessler (*HL-RF*) (Rackwitz and Flessler, 1978 ; Rackwitz, 1976) est une amélioration de l'algorithme de *Hasofer-lind*, qui suppose gaussiennes et non corrélées les variables de base. Le principe de cet algorithme est illustré par la figure 2.13.

On peut le résumer par les étapes suivantes (Lemaire, 2005) :

1. Choisir le point de départ $\{u\}^0$, généralement l'origine du repère ($k = 0$) ;
2. Évaluer la fonction d'état limite $H(u^{(k)})$;
3. Ensuite, calculer le gradient de l'état limite $\{\nabla H(u)\}^{(k)}$ et sa norme $\|\{\nabla H(u)\}^{(k)}\|$, puis on en déduit le vecteur des cosinus directeur à l'itération k $\{\alpha\}^k$ par :

$$\{\alpha\}^k = \frac{\{\nabla H(u)\}^{(k)}}{\|\{\nabla H(u)\}^{(k)}\|} \quad (2.62)$$

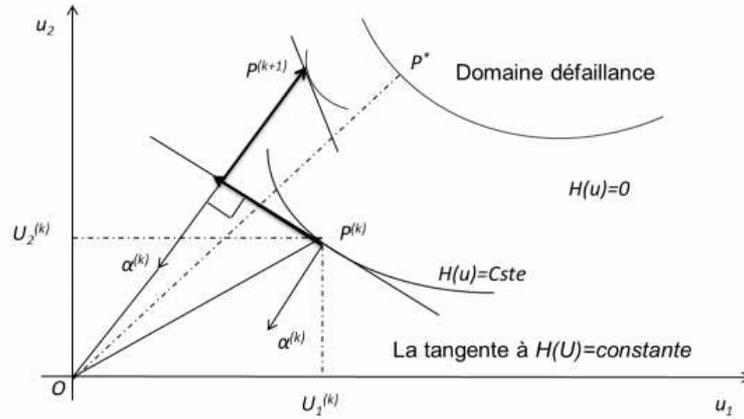


Fig. 2.13. Illustration de l'algorithme HLRF (Diop, 2015)

4. Calculer β_k comme suit :

$$\beta^{(k)} = -\langle u \rangle^{(k)} \alpha^{(k)} + \frac{\{\nabla H(u)\}^{(k)}}{\|\{\nabla H(u)\}^{(k)}\|} \quad (2.63)$$

5. Calculer $\{u\}^{(k+1)}$ avec la relation :

$$u^{(k+1)} = -\beta^{(k)} \alpha^{(k)} \quad (2.64)$$

6. Si $\|\{u\}^{(k+1)} - \{u\}^{(k)}\| \leq \epsilon$, la convergence est atteinte, on arrête le calcul itératif, sinon on incrémente $k : k = k + 1$ et on passe à l'étape 2.

2.3.4 Calcul de la probabilité de défaillance

Comme nous l'avons précédemment établi, l'évaluation de la probabilité de défaillance, revient à calculer l'intégrale multidimensionnelle (voir équation (2.53)). Cette intégrale peut s'avérer très complexe à calculer. En effet, l'intégrande n'est pas toujours connue de manière explicite, et la frontière du domaine d'intégration $G(X \leq 0)$ est souvent non linéaire.

Les méthodes de calcul peuvent être regroupées en diverses catégories :

- **Calcul formel** (analytique) ou numérique (quadrature) ;
- **Les méthodes de simulation** pour évaluer P_f sur l'intégralité du domaine de défaillance Ω_F : simulations de Monte-Carlo, tirages d'importance, tirages conditionnés ;
- **Les méthodes d'approximation**, qui consiste en une idéalisation du domaine de défaillance Ω_F permettant le calcul d'une valeur approchée de P_f à partir d'un indice de fiabilité β : la méthode *FORM* et méthode *SORM*, etc... ;
- **Les méta-modèles** : les méthodes de surface de réponse quadratique par exemple.

Un calcul analytique n'est en réalité envisageable que dans de cas simples. Pour contourner cette difficulté, des méthodes numériques sont les plus utilisées. Leur efficacité dépendra principalement de la complexité de la fonction d'état limite G (explicite ou implicite) et de la dimension n du problème (le nombre de paramètres incertains). Notons aussi que, le calcul par intégration numérique peut être délicat, surtout dans le cas où P_f est du même ordre de grandeur que celui des erreurs numériques.

Dans ce qui suit, nous présentons quelques méthodes de calcul de la probabilité de défaillance P_f .

2.3.4.1 Simulations Monte-Carlo

La méthode de simulations de Monte-Carlo (*MCS*) ([Metropolis and Ulam, 1949](#)) est la plus populaire des méthodes d'estimation de probabilité de défaillance. Pour évaluer l'intégrale P_f donnée par l'équation (2.53) on introduit la fonction indicatrice de défaillance \mathbb{I}_{Ω_f} définie par :

$$\mathbb{I}_{\Omega_f}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } G(X) \leq 0 \\ 0 & \text{si } G(X) > 0 \end{cases} \quad (2.65)$$

Le principe de base de la méthode *MCS* consiste à interpréter la probabilité de défaillance P_f comme l'espérance mathématique de la fonction indicatrice \mathbb{I}_{Ω_f} . C'est à dire :

$$\begin{aligned} P_f &= \int_D \mathbb{I}_{\Omega_f}(x) p_X(x) dx \\ P_f &= \mathbb{E}[\mathbb{I}_{\Omega_f}(x)] \end{aligned} \quad (2.66)$$

où, p_X est la densité conjointe de probabilité du vecteur aléatoire X .

Les principales étapes d'implémentation de la méthode de simulations Monte-Carlo sont les suivantes :

- **Étape 1** : Soit le vecteur aléatoire de conception $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)^T$. La fonction de répartition F_{X_i} de chacune des variables X_i étant connue, l'échantillon $x^r = (x_1^r, x_2^r, \dots, x_n^r)$, réalisation du vecteur aléatoire X , est obtenu en calculant chaque x_i^r par :

$$x_i^r = F_{X_i}^{-1}(u^r) \quad (2.67)$$

Où u^r est un tirage aléatoire d'un nombre uniformément distribué entre 0 et 1 (figure 2.14).

- **Étape 2** : Évaluation de la fonction indicatrice de défaillance, \mathbb{I}_{Ω_f} , pour chaque échantillon.
- **Étape 3** : Calcul d'un estimateur \hat{P}_f de la probabilité de défaillance P_f après M simulations des étapes 1 – 2, par la moyenne empirique :

$$\hat{P}_f = \frac{1}{M} \sum_{r=1}^M \mathbb{I}_{\Omega_F}(x^k) \quad (2.68)$$

dont la variance est donnée par :

$$\text{var}[\hat{P}_f] = \frac{1}{M} \hat{P}_f (1 - \hat{P}_f) \quad (2.69)$$

et le coefficient de variation par :

$$CV_{MCS} = \sqrt{\text{var}[\hat{P}_f] / \hat{P}_f} = \frac{1}{M} \hat{P}_f (1 - \hat{P}_f) \quad (2.70)$$

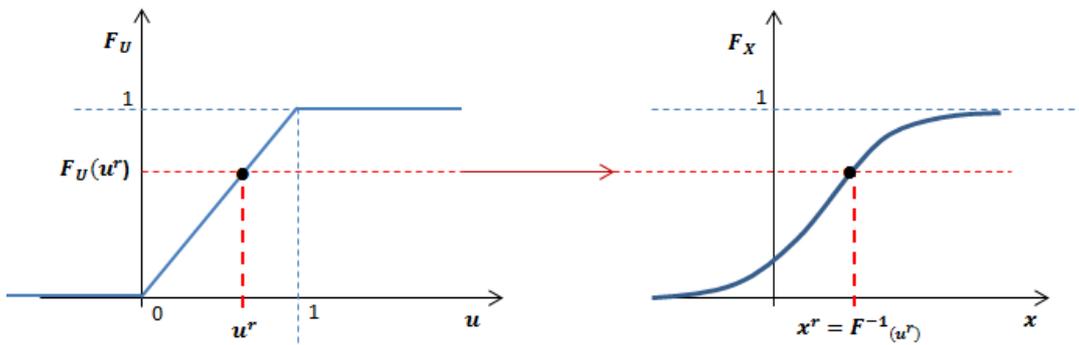


Fig. 2.14. Tirage aléatoire d'un nombre u^r uniformément distribué entre 0 et 1

Il est important de noter que \hat{P}_f est un estimateur sans biais de P_f , et le taux de convergence (i.e le coefficient de variation) des simulations de Monte-Carlo, défini au sens des moindres carrés, est indépendant de la dimension n du vecteur aléatoire X . Malheureusement, l'expérience a montré que la méthode de simulations de Monte-Carlo devient inutilisable pour calculer la probabilité de défaillance d'ordre élevé, principalement en raison de sa convergence lente (en \sqrt{M}). En pratique, il faut un nombre important de simulations pour obtenir une bonne approximation de la probabilité de défaillance (le résultat est exact lorsque le nombre de tirage M tend vers l'infini); entre 10^{p+2} et 10^{p+3} pour obtenir une probabilité de 10^{-p} pour un niveau de confiance de 95% et une erreur admise de 20% sur les résultats. Par exemple, pour estimer une probabilité de défaillance de 10^{-6} , qui est souvent le niveau cible pour les composants automobiles, avec un coefficient de variation Δ_{MCS} de 5%, plus de $4 \cdot 10^8$ évaluations de l'intégrande de l'équation (2.53) devraient être effectuées.

Pour illustration, sur la figure 2.9 (b), les points noirs sont dans le domaine de sécurité ou de non-défaillance (tels que $G(x) > 0$) et les croix rouges sont dans le domaine de défaillance (tel que $G(x) < 0$). Comme on peut le voir, puisque la défaillance simulée est un événement rare (i.e. $P_f < 10^{-3}$), seul un des 10^3 tirages appartient au domaine de défaillance.

Ainsi, la méthode de Monte-Carlo reste un outil efficace lorsque, d'une part, la probabilité de défaillance P_f à estimer n'est pas trop faible et d'autre part, lorsque la fonction d'état limite G est explicitement connue. En effet, dans le cas où G est représentée par un modèle implicite

(code éléments finis par exemple) nécessitant des temps de calcul conséquents, le coût de calcul nécessaire à une bonne approximation du p_f par la méthode *MCS* devient insupportable.

La convergence des simulations de Monte-Carlo peut être améliorée si la répartition des points de simulation dans l'espace aléatoire est plus uniforme. On peut citer dans ce sens, des méthodes de tirages Hyper-cube latin (McKay et al., 1979) et les séquences quasi-Monte-carlo (Niederreiter, 1992).

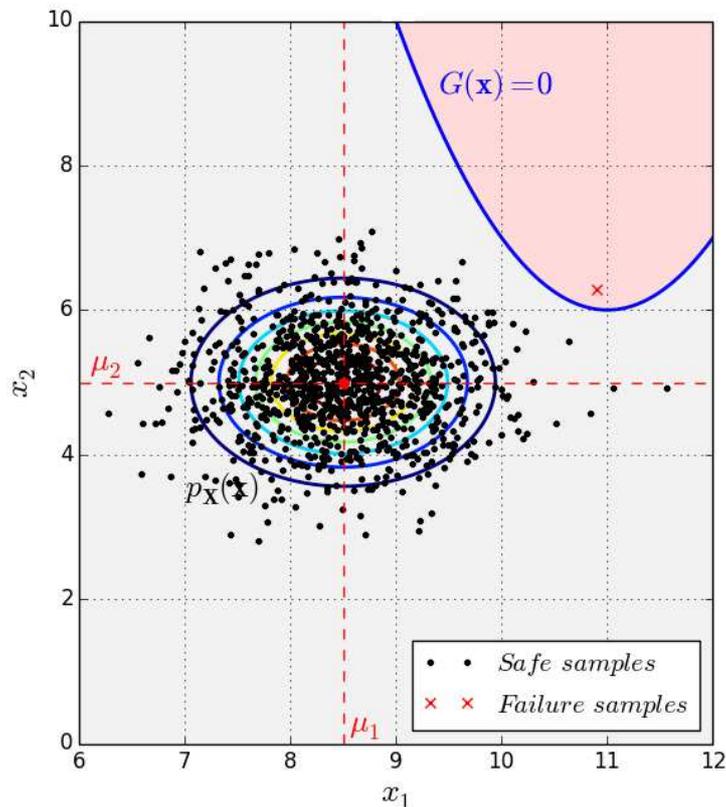


Fig. 2.15. Illustration de la méthode de simulations de Monte-Carlo

Pour surmonter l'inefficacité des méthodes de simulations dans le traitement de problèmes réels plus complexes, des méthodes d'approximation ont été proposées dans la littérature (Madsen et al., 1986). Nous nous intéressons dans ce qui suit aux méthodes d'approximations de premier ordre (*FORM*) et de deuxième ordre (*SORM*).

2.3.4.2 First and Second Order Reliability Method (FORM/SORM)

L'idée principale est de calculer la probabilité de défaillance au moyen d'un nombre limité d'évaluations de la fonction d'état limite G en contournant le calcul de l'intégrale multidimensionnelle dans l'équation (2.53).

a) First Order Reliability Method (FORM)

Pour appliquer la méthode *FORM*, le problème de fiabilité est réécrit dans l'espace aléatoire standard, où le vecteur aléatoire $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}^T$ est écrit en fonction de variables aléa-

toires normales standard $U = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}^T$, au moyen de la transformation isoprobabiliste $X = T(U)$ (voir figure 2.16 (a)).

Dans le cas général, où les composantes du vecteur aléatoire X sont dépendantes, la transformation de Rosenblatt ou celle de Nataf (Ditlevsen and Madsen, 1996) sont utilisées.

Par conséquent, la probabilité de défaillance dans l'équation (2.53) est réécrite comme suit :

$$P_f = \int_{G(x \leq 0)} p_X(x) dx = \int_{H(u) \leq 0} \varphi_U(u) du \quad (2.71)$$

Où $H(U) \equiv G \circ T(U) = G(X)$ est la fonction d'état limite dans l'espace aléatoire standard et φ_U est la fonction de densité de probabilité multinormale standard.

L'idée de la méthode *FORM* est de substituer, dans l'espace aléatoire standard, la fonction d'état limite H par un hyperplan qui lui est tangent (notons le Z), au point de défaillance le plus probable P^* , qui est défini comme le point de la surface d'état limite le plus proche de l'origine de l'espace aléatoire standard (voir figure 2.16 (b)). Il est obtenu en résolvant le problème d'optimisation sous contraintes suivant :

$$\begin{cases} \|u^*\| = \min_{u \in \mathbb{R}^n} \|u\| \\ \text{subject to } H(u) = 0 \end{cases} \quad (2.72)$$

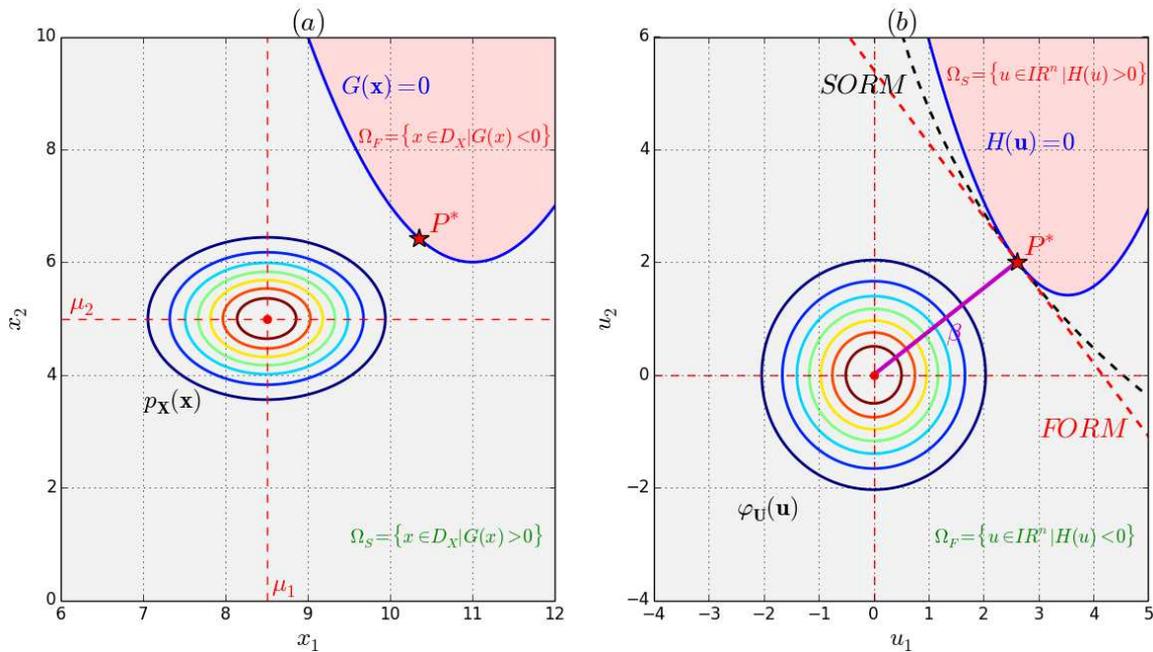


Fig. 2.16. (a) Surface d'état limite et point de conception dans l'espace physique aléatoire, (b) Approximations *FORM* et *SORM* dans l'espace aléatoire standard

Une fois les coordonnées $u^* = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}^T$ du point de défaillance le plus probable P^* trouvées, l'indice de fiabilité de Hasofer-Lind est calculé par :

$$\beta_{HL} = \|u^*\| \quad (2.73)$$

Ensuite, l'approximation de premier ordre de la probabilité de défaillance s'obtient par :

$$P_f \approx P_{f,FORM} = \Phi(-\beta_{HL}) \quad (2.74)$$

Un des inconvénients majeurs de la méthode *FORM* est la difficulté à estimer l'erreur de calcul de la probabilité de défaillance. Une solution de validation est alors de faire appel aux simulations de Monte-Carlo. Le nombre de calculs nécessaires dépend directement du nombre de variables aléatoires du problème.

L'équation de l'hyperplan Z , peut s'écrire comme suit :

$$z(u) = \alpha^T u + \beta_{HL} \quad (2.75)$$

Où α , représente le vecteur des cosinus directeur α_i (dont la valeur varie entre -1 et 1) associé à U_i .

A l'issue de la méthode *FORM*, on obtient donc en plus d'une estimation de la probabilité de défaillance P_f , le point de de défaillance le plus probable P^* dans l'espace normé et potentiellement la sensibilité de la probabilité de défaillance aux différents aléas du problème grâce aux cosinus directeurs obtenus à partir de l'équation (2.76) :

$$\alpha_i = -\frac{1}{\beta_{hl}} u_i^* \quad (2.76)$$

Si le cosinus directeur d'une variable aléatoire U_i est positif, la variable est dite de résistance, et si le cosinus directeur est négatif, la variable est dite de sollicitation.

L'approximation *FORM* est souvent satisfaisante, surtout pour les valeurs élevées de l'indice de fiabilité, à condition que le point de défaillance le plus probable P^* soit bien identifié.

La précision de la méthode *FORM* dépend fortement de la courbure de la surface d'état limite au point de conception et donc de la non linéarité de la fonction $H(u) = 0$. Si la surface d'état limite est :

- convexe alors $P_{f,FORM} > P_f$, on surestime P_f ;
- concave alors $P_{f,FORM} < P_f$, on sous-estime P_f ;

Il est clair à partir de la figure 2.16 (b) que l'approximation *FORM* est exacte que lorsque la fonction d'état limite réelle est linéaire. Malheureusement, cette situation est rarement rencon-

trée dans les problèmes réels. Pour cette raison, la méthode de fiabilité du second ordre a été développée.

b) Second Order Reliability Method (SORM)

La méthode *SORM*, schématiquement représenté sur la figure 2.16 (b), cherche à mieux approcher la surface d'état limite, en utilisant une surface quadratique au lieu d'un hyperplan, ce qui convient pour réduire l'erreur qu'on peut commettre sur l'estimation de la probabilité de défaillance.

D'après Breitung (Breitung, 1984), l'estimation *SORM* de la probabilité de défaillance écrit :

$$\begin{aligned} P_f \approx P_{f,SORM} &= \Phi(-\beta_{HL}) \times \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \beta_{HL} \cdot \kappa_i}} \\ &= P_{f,FORM} \times \prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \beta_{HL} \cdot \kappa_i}} \end{aligned} \quad (2.77)$$

où $\kappa_i, i \in 1, \dots, (n-1)$ sont les courbures principales de la fonction d'état limite au point de défaillance le plus probable P^* .

Comme on peut le voir de l'équation (2.77), *SORM* améliore simplement l'estimation de la probabilité de défaillance donnée par *FORM*, à travers une pondération par un facteur de correction $\prod_{i=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{1 + \beta_{HL} \cdot \kappa_i}}$ incluant des informations sur la courbure de la fonction d'état limite. On note que ces courbures sont prises comme des quantités positives pour la fonction d'état limite convexe.

Cette approximation (Equation (2.77)) est appelée formule de **Breitung** (Breitung, Karl, 1984). On parle aussi de méthode « *FORM asymptotique* ». Dans le même contexte, **Tvedt** (Tvedt, 1983) propose une autre forme de correction :

$$P_{f,SORM,Tvedt} = T_1 + T_2 + T_3 \quad (2.78)$$

Avec :

$$\begin{aligned} T_1 &= \Phi(-\beta_{HL}) \prod_{i=1}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{1 + k_i \beta_{HL}}} \\ T_2 &= [\beta_{HL} \Phi(-\beta_{HL}) - \phi(-\beta_{HL})] \left(\prod_{i=1}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{1 + k_i \beta_{HL}}} - \prod_{i=1}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{1 + k_i (1 + \beta_{HL})}} \right) \\ T_3 &= (1 + \beta) [\beta_{HL} \Phi(-\beta_{HL}) - \phi(-\beta_{HL})] \left(\prod_{i=1}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{1 + k_i \beta_{HL}}} - \Re \prod_{i=1}^{m-1} \frac{1}{\sqrt{1 + k_i (j + \beta_{HL})}} \right) \end{aligned} \quad (2.79)$$

Breitung (Breitung, 1984) a montré que l'approximation donnée par *SORM* est exacte pour des valeurs élevées de l'indice de fiabilité, car elle tend vers la valeur exacte de la probabilité de défaillance lorsque l'indice de fiabilité est infini. Cependant, *SORM* devient inefficace lorsque la dimension du problème de fiabilité n est élevée. Ceci est principalement dû au calcul des $(n - 1)$ courbures, qui nécessitent l'évaluation des dérivées du second ordre de la fonction d'état limite par rapport aux variables aléatoires. Cela pourrait induire un coût de calcul insupportable, en particulier pour des fonctions d'état limite implicites, où les dérivées du second ordre sont calculées au moyen d'une méthode de différences finies. Pour cette raison, seule l'analyse *FORM* est souvent réalisée pour des problèmes d'ingénierie.

L'effort de calcul majeur, lorsqu'on utilise des approximations *FORM* et *SORM*, est induit par la procédure de recherche du point de défaillance le plus probable P^* . En effet, pour résoudre le problème d'optimisation sous contrainte défini par l'équation (2.72), des techniques de calcul basées sur une projection de gradient sont souvent utilisées (Liu and Der Kiureghian, 1991), comme l'algorithme bien connu de Hasofer-Lind-Rackwitz-Fiesser (*HLRF*) (Rackwitz and Flessler, 1978), qui nécessitent le calcul des dérivées du premier ordre de la fonction d'état limite par rapport aux variables aléatoires à chaque itération, jusqu'à ce que la convergence soit obtenue. Malheureusement, l'algorithme *HLRF* est inefficace pour les problèmes où la fonction d'état limite est bruitée ou fortement non linéaire, puisque la convergence est obtenue après un grand nombre d'itérations et par conséquent un grand nombre d'évaluations de la fonction d'état limite.

2.3.4.3 Méthode de surface de réponse quadratique

La méthode de Surface de Réponse Quadratique (*SRQ*) offre une bonne alternative pour réduire le coût de calcul par rapport aux méthodes classiques présentées précédemment, tout en conservant une bonne capacité prédictive (Bererliche, 2010).

a) Principe de la méthode de SRQ

La méthode *SRQ* cherche à substituer la fonction d'état limite $H(u)$ implicite par une autre fonction explicite $\tilde{H}(u)$ obtenue par approximation polynomiale quadratique.

La surface de réponse (*SR*) est dite (El Hami and Radi, 2011) :

- Globale si elle simule le phénomène mécanique sur l'ensemble du domaine de variation des paramètres entrant en jeu appelés facteurs,
- Locale si elle est construite dans un sous-domaine particulier.

Les méthodes *SRQ* diffèrent, soit par les termes retenus dans la formulation de l'approximation polynomiale quadratique (avec ou sans termes croisés), soit par le critère de convergence adopté, soit par le type de plan d'expériences (i.e. les points d'expérimentation utilisés dans la régression) (Riahi, 2013).

Le plan d'expériences dont le choix doit être judicieusement étudié, permettra de générer un jeu de réalisations de la réponse du modèle mécanique étudié en combinant différents niveaux des variables aléatoires de base. Ces points, serviront ensuite à évaluer la fonction d'état limite. Généralement, les points d'expérimentation sont générés autour du point moyen (c'est à dire autour des valeurs moyennes des variables aléatoires de base).

b) Formulation mathématique de la méthode de SRQ

L'expression d'une surface quadratique sous sa forme complète est donnée par :

$$\tilde{H}(u) = a_0 + \sum_{i=1}^n a_i u_i + \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n a_{ij} u_i u_j \quad (2.80)$$

Où les a_i, a_{ij} sont les coefficients du polynôme, et u_i les composantes du vecteur u .

Sous forme matricielle, l'équation 2.80 devient :

$$\tilde{H}(u) = \left[\dots (u_i^p u_j^q)_k \dots \right] \{ \dots a_k \dots \}^T \quad \tilde{H}(u) = [Z] \{a\} \quad (2.81)$$

telles que $p + q \in \{0, 1, 2\}$; $i, j = 1 \dots n$; $k = 1, \dots, l$.

Une surface de réponse par plan d'expériences passe par les deux étapes suivantes :

1. On recherche une surface de réponse approchée, $\tilde{H}^{(k+1)}(u)$, par une méthode de régression en utilisant le résultat d'un plan d'expériences autour de la k^{ime} approximation du point de défaillance le plus probable $P^{*(k)}$.
2. On recherche le nouveau point $P^{*(k+1)}$ par une méthode d'optimisation (par exemple l'algorithme *HLLRF*) en se basant sur la nouvelle surface de réponse (approchée à l'étape 1).

Les deux étapes seront ensuite itérées jusqu'à convergence vers le point de défaillance le plus probable.

c) Calcul des coefficients d'une SRQ

Dans un plan d'expériences constitué de n_e expériences, l'ensemble des n_e évaluations de la fonction d'état limite, décrites par l'équation (2.81), peut s'écrire sous la forme matricielle suivante :

$$\left\{ H(u^{(r)}) \right\} = \left\{ z^{(r)} \right\} \{a\} \quad ; \quad r = 1, \dots, n_e \quad (2.82)$$

$\left\{ z^{(r)} \right\}$ est une matrice de dimension $n_e \times l$.

Par la méthode des moindres carrées, on déduit, un estimateur $\{\hat{a}\}$ des n_e coefficients $\{a\}$:

$$\text{Min} \sum_{r=1}^{n_e} (\tilde{H}(u^{(r)}) - H(u^{(r)}))^2 \quad (2.83)$$

Et on obtient :

$$\{\hat{a}\} = ([Z]^T [Z])^{-1} [Z]^T \{H(u^{(r)})\} \quad (2.84)$$

Bien que l'approximation polynomiale quadratique soit construite à chaque itération de l'algorithme d'optimisation, la méthode reste efficace par rapport aux simulations de Monte-Carlo ou à l'utilisation brute de la méthode *FORM*.

Dans les dernières années, les techniques de méta-modélisation ont connu une grande avancée, et d'autres approches ont été développées, telles que celles basées sur le développement en chaos polynomial (*PCE*), la méthode de collocation (Bressollette et al., 2010; Riahhi et al., 2010, 2011), la méthode Support Vector Machine (*SVM*) (Tipping, 2001; Rocco and Moreno, 2002; Bichon et al., 2011), le krigeage (Bichon et al., 2011; Zhang et al., 2015), les réseaux de neurones (Hurtado and Alvarez, 2001) et la méthode de décomposition de la dimension (*MDD*) (Xu and Rahman, 2005).

Après avoir présenté différentes méthodes d'estimation prévisionnelle de fiabilité mécanique, en gardant la logique de la fiabilité dans le cycle de développement de produits, nous abordons à présent, la fiabilité expérimentale, ou encore l'estimation de fiabilité basée sur les essais.

2.4 Fiabilité expérimentale par les essais

Cette partie reprend les notions essentielles rencontrées en essais de fiabilité et se base essentiellement sur les références suivantes : (Guerin, 2005; Tebbi, 2005; Beaumont, 2013; Voiculescu, 2009; Fatemi, 2012; Augé, 1998; Laronde, 2011).

L'étude de la fiabilité expérimentale donne lieu à la mise en œuvre de trois types d'essais de fiabilité que nous détaillons dans les sections suivantes : Ce sont les essais de robustesse ou essais aggravés (sur les premiers prototypes), les essais d'estimation de la fiabilité (lorsque le produit est mature) et les essais de déverminage (lors de la production).

2.4.1 Les types d'essais

2.4.1.1 Les essais de robustesse

Les essais dits de robustesse ou essais aggravés sont réalisés sur les premiers prototypes pour connaître les faiblesses et les marges de conception, en les soumettant à des sollicitations éche-

lonnées (climatiques, vibratoires, électriques, etc...) c'est à dire des sollicitations dont on augmente les niveaux jusqu'à apparition d'une défaillance.

Selon (CETIM, 2005), « les essais aggravés consistent à soumettre une entité matérielle de conception nouvelle (pièce, composant, assemblage, etc...), à des contraintes d'environnement et/ou de fonctionnement sous des niveaux croissants pouvant atteindre les limites de résistance des technologies, à évaluer les marges de fonctionnement et à déceler rapidement, pour pouvoir les corriger, les défauts inhérents à la conception (produit et/ou procédés qui réduisent ces marges à des valeurs inacceptables) »

Les essais aggravés sont en général préconisés pour trois catégories de produit ou système :

1. Les nouveaux systèmes (en particulier lorsque ceux-ci revêtent un caractère complexe et/ou innovant) ;
2. Les systèmes soumis à de lourdes contraintes sécuritaires ;
3. Les systèmes évoluant dans des environnements sévères et/ou difficiles à quantifier.

Les essais aggravés permettent d'améliorer :

- la robustesse du système par l'amélioration des marges de fonctionnement ;
- le processus de maturation rendant par définition le système d'avantage « mûre ».

De nombreux essais aggravés existent comme : *STRIFE* (STRESS for LIFE) (McLean, 1993), *ESS* (Environmental Stress Screen) (Kececioglu and Sun, 1999), *HALT* (McLean, 2009).

2.4.1.2 Les essais d'estimation de la fiabilité

Ce sont des essais menés en phase de maturité du produit pour estimer sa fiabilité. Ils consistent à vérifier que les objectifs de fiabilité sont respectés en reproduisant les conditions d'utilisation du produit (cycle de marche/arrêt, température, humidité, etc...).

Pour cela, on dispose de deux stratégies d'essai :

1. les essais de détermination consistant à déterminer la valeur d'une caractéristique (MTTF, probabilité de défaillance, etc...) ou les paramètres de la loi de mortalité d'un système ;
2. les essais de démonstration permettant de montrer si la valeur d'une caractéristique de fiabilité d'un système est conforme ou non aux objectifs fixés.

2.4.1.3 Les essais de déverminage

Le principe de ces essais consiste à soumettre les produits sortant de fabrication à des sollicitations d'environnement (climatiques, vibratoires, etc...) pendant une durée donnée de manière à faire apparaître les défauts de jeunesse qui peuvent être de différentes natures :

- composants faibles ;
- défauts de fabrication ;
- faiblesses de conception (produits nouveaux) si elles n'ont pas été éliminées auparavant.

A l'issue de l'opération de déverminage, tous les produits de la production triée se trouvent dans la période utile. Il existe de nombreuses techniques d'essai de déverminage (McLean, 2009 ; Kececioglu and Sun, 2003) dont : Burn in, ESS (environmental stress screening), HASS (Highly Accelerated Stress Screen), HASA (Highly Accelerated Stress Audit) .

2.4.2 Estimation de la fiabilité par les essais accélérés

Le but des essais accélérés est de réduire les durées des campagnes d'essais. Plusieurs chercheurs ont travaillé à la mise en place de ces types d'essais. On peut citer les références suivantes (Nelson, 1990), (O'Connor, 2003), (Caruso and Dasgupta, 1998), (Vassilious and Mettas, 2001), (Guérin et al., 2004).

Le principe de ces essais est de sévérer les conditions d'essais, c'est à dire en testant les unités à des niveaux de stress ou sollicitation plus élevés (température élevée, tension électrique élevée, humidité élevée, contrainte mécanique élevée etc...) qu'en conditions nominales ce qui permet de mettre plus rapidement en évidence les défaillances du système.

Les essais accélérés peuvent s'appliquer à toutes les catégories de matériels en employant différents types de stress (mécaniques, électriques, climatiques ...) les plus adaptées vis à vis des modes de défaillance attendus sur ces matériels (Fatemi, 2012) :

- **Contraintes mécaniques** : torsion, flexion, flexion rotative, chocs mécaniques, vibrations, vibrations acoustiques, traction/compression, etc. La fatigue est le mode de dégradation le plus communément utilisé pour les composants mécaniques ;
- **Contraintes électriques** : cela inclue la tension, l'intensité du courant, la fréquence, choc électrique etc... La tension est le stress électrique le plus communément utilisé puisqu'il génère rapidement des défaillances ;
- **Contraintes climatiques** (ou environnementales) : la température et les cycles thermiques sont les stress les plus couramment utilisés. Il est nécessaire d'appliquer des niveaux appropriés pour conserver les modes de défaillance d'origine. D'autres stress peuvent être appliqués comme les ultraviolets, le brouillard salin, la poussière, l'humidité, etc...
- **Contraintes spécifiques au matériel.**

Il existe plusieurs types d'essais accélérés :

1. Les essais de robustesse : les essais **HALT** pour (Highly Accelerated Life Test) ;
2. Les essais d'estimation : les essais accélérés **ALT** (Accelerated Life Test) ;
3. Les essais de déverminage : les essais **HASS** (Highly Accelerated Stress Screen).

2.4.2.1 Plan d'essais accélérés

A partir des travaux de (Pham, 2003), (Nelson, 1990), (Vassilious and Mettas, 2001), (Meeker and Escobar, 2014), on résume comme suit, les paramètres dont dépend la définition d'un plan d'essais accélérés :

- **Les stress d'accélération et les limites opérationnelles** (les limites sont obtenues par des essais aggravés). Les stress peuvent être de toute nature (mécanique, électrique, climatique, etc...) et leurs durées de manifestation de tout ordre (constante, échelonnée, progressive, cyclique ou aléatoire). Le nombre et les niveaux des stress appliqués sont choisis en fonction du produit étudié avec la conservation du mécanisme de défaillance d'origine tout en accélérant suffisamment l'essai ;
- **Les modes et mécanismes de défaillance** : dans un essai accéléré, les mécanismes d'endommagement provoqués doivent être représentatifs des conditions normales d'emploi. Chaque mode de défaillance peut être provoqué par un ou plusieurs types de contraintes ;
- **Le nombre de dispositifs testés à chaque niveau de contrainte**, donnant la précision des estimations ;
- **Un modèle de vie accélérée**, qui relie la durée de vie sous les conditions accélérées à celles sous les conditions normales d'utilisation.

On rencontre plusieurs profils de stress :

a) Le chargement constant (indépendant du temps)

On soumet chaque composant à un niveau de contrainte constant supérieur à la normale.

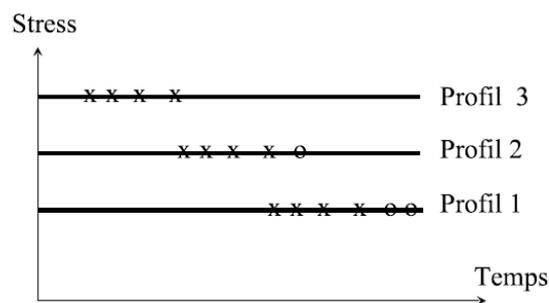


Fig. 2.17. Profil d'essai sous stress constant

b) Le chargement variable (en fonction du temps)

La contrainte choisie, évolue en fonction du temps. Elle peut être augmentée d'une manière échelonnée, progressive, cyclique ou aléatoire etc...

- La contrainte échelonnée : la contrainte est appliquée de manière échelonnée par des niveaux croissants ou décroissants dans le temps (par paliers) jusqu'à l'apparition d'une défaillance,

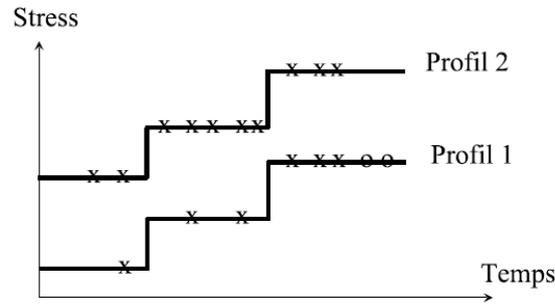


Fig. 2.18. Profil d'essai sous stress échelonné

- La contrainte progressive : la contrainte est augmentée de manière linéaire dans le temps (croissance linéaire).
- La contrainte cyclique : la contrainte est appliquée selon une amplitude et une fréquence données.

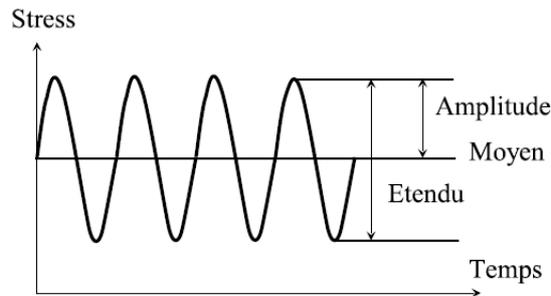


Fig. 2.19. Profil d'essai sous stress cyclique

- La contrainte aléatoire : la sollicitation suit un profil aléatoire (couramment utilisée en vibration).

2.4.2.2 Modèles Standards de Vie Accélérée

Les SVA définis par Bagdonavicius et Nikulin ((Nikulín et al., 2007b),(Bagdonavičius et al., 2000), (Tebbi, 2005), (Voiculescu, 2009)) sont des modèles basés sur une fonction de transfert et qui permettent d'obtenir les fonctions de fiabilité à partir de résultats d'essais effectués à des niveaux de contraintes plus élevés que les conditions nominales d'utilisation (cf. figure 2.20). Cela permet a priori de réduire la durée de l'essai (d'où son "accélération"). On considère un ensemble de contraintes, pour lequel on dit que plus la contrainte augmente, plus la fiabilité devient faible. L'objectif des essais accélérés Dodson and Schwab (2006) est de déterminer l'évolution de la fonction de fiabilité en fonction de l'évolution de la contrainte. On suppose que la durée de vie T_S d'un produit sous le stress S est une variable aléatoire de fonction de fiabilité :

$$R_S(t) = Prob(T_S > t), t > 0 \quad (2.85)$$

Soit R_{S_0} la fiabilité au niveau d'effort nominal S_0 , et R_S la fiabilité sous un stress constant S , le modèle SVA décrit :

$$R_S(t) = R_{S_0}(r(S).t) \tag{2.86}$$

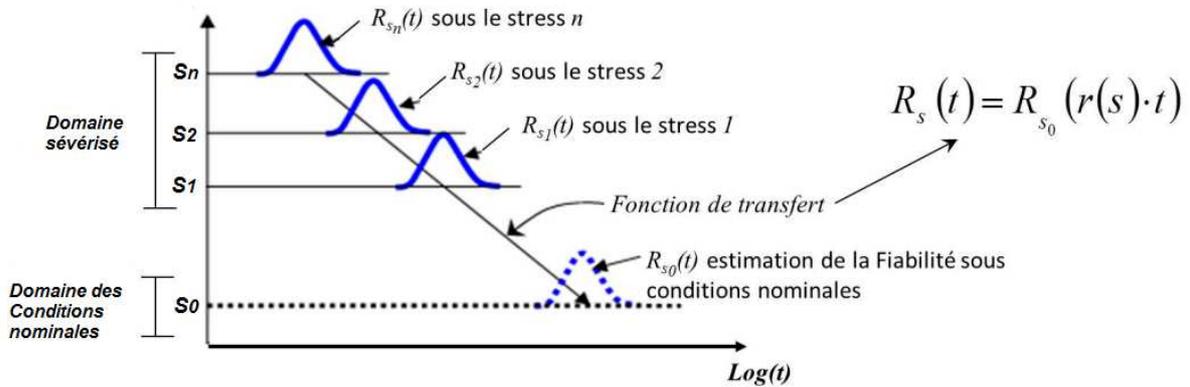


Fig. 2.20. Principe des modèles SVA

Où r représente la fonction de transfert où encore loi d'accélération (voir figure 2.20) et $r(S_0) = 1$. Si la fonction de transfert est complètement inconnue, il devient impossible d'estimer la fiabilité sous conditions nominales. C'est pourquoi r est choisie dans une certaine classe de fonction (e.g. Arrhenius, Eyring (Voiculescu, 2009), (Tebbi, 2005)). Pour l'analyse de la durée de vie le modèle log-linéaire est souvent choisi pour définir le modèle de régression

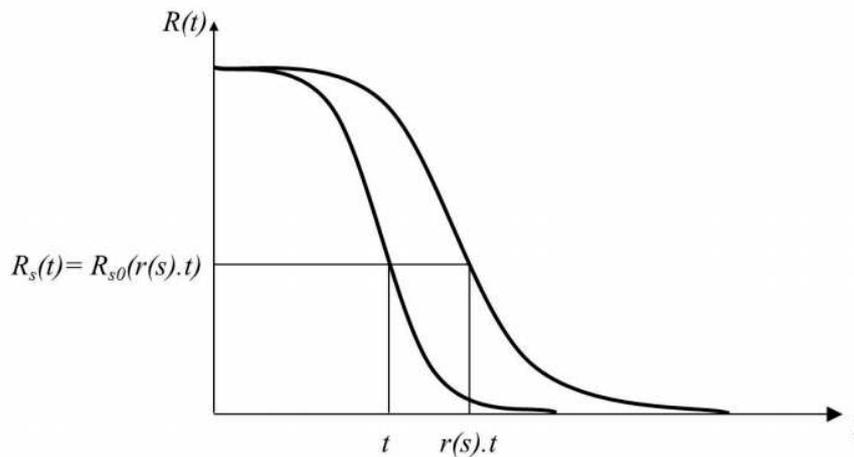


Fig. 2.21. Définition du modèle de régression

Considérons un plan d'essai classique (Nelson, 1990) consistant à utiliser plusieurs niveaux de contraintes constantes S_1, S_2, \dots, S_k avec $S_1 < S_2 < \dots < S_k$ et soit $S_0 (S_0 < S_1)$ la contrainte usuelle qui ne sera pas utilisée dans la construction du plan d'essai. On considère r dans une certaine classe de fonctions. Nikulin et Bagdonavicius considèrent une forme exponentielle. Si le modèle (équation (2.87)) est vérifié sur l'ensemble des contraintes considérées, alors pour

tout S_1, S_2 appartenant à cet ensemble :

$$R_{S_2}(t) = R_{S_1}(\rho(S_1, S_2).t) \quad (2.87)$$

$$\text{où } \rho(S_1, S_2) = \frac{r(S_2)}{r(S_1)}$$

Supposons une contrainte (stress) unidimensionnelle S appartenant à l'ensemble considéré. Le taux de changement d'échelle est déterminé par la dérivée :

$$\delta(S) = \lim_{\Delta S \rightarrow 0} \frac{\rho(S, S + \Delta S) - \rho(S, S)}{\Delta S} = \frac{d \log(r(S))}{dS} \quad (2.88)$$

On a donc pour tout S de l'ensemble :

$$r(S) = e^{\int_{S_0}^S \delta(v) dv} \quad (2.89)$$

Supposons que $\delta(S)$ soit proportionnelle à une fonction connue $u(S)$ de la contrainte :

$$\delta(S) = \beta_1 u(S), \beta_1 > 0 \quad (2.90)$$

Alors,

$$r(S) = e^{\beta_0 + \beta_1 z(S)} \quad (2.91)$$

où $z(S)$ est une fonction primitive de $u(S)$, β_0 et β_1 sont des paramètres inconnus. Dans le cas particulier de $\delta(S) = \beta_1/S$, alors on a :

$$r(S) = e^{\beta_0 + \beta_1 \log(S)} = \alpha S^{\beta_1}, \quad (2.92)$$

avec $\alpha = e^{\beta_0}$. Ce modèle correspond au modèle de puissance inverse de Basquin. Ainsi, l'équation (2.87) s'écrit :

$$R_S(t) = R_{S_0}(e^{\beta^T z_t}) \quad (2.93)$$

Où $\beta = (\beta_0, \dots, \beta_m)^T$ est le vecteur de paramètres et $z = (z_0, \dots, z_m)$ le vecteur de primitives (avec $z_0 = 1$) de u_1, \dots, u_m , avec $\delta(s) = \beta_1 u_1(s) + \dots + \beta_m u_m(s)$. On trouve dans la littérature de nombreuses applications des modèles SVA, principalement dans l'électronique (Caruso and Dasgupta, 1998), (Nelson, 1990) mais beaucoup moins en mécanique.

2.4.2.3 Modèles d'accélération courants

Plusieurs modèles d'accélération, définis pour chaque type de composants et matériaux existent dans la littérature (Nelson, 1990). Dans les paragraphes suivants sont présentés quelques modèles d'accélération les plus utilisés pour des stress à profil constants.

a) Modèle d'Arrhenius

Il est utilisé lorsque le mécanisme d'endommagement est sensible à la température (en particulier : diélectrique, semi-conducteur, batterie, lubrifiant et graisse, plastique et filament de lampe incandescente). La loi d'Arrhenius modélise la durée de vie τ du produit comme fonction de la température T :

$$\tau = Ae^{\left(\frac{B}{T}\right)} \quad (2.94)$$

Avec : A et B des constantes positives, et T la température absolue.

b) Modèle de Peck

Ce modèle est utilisé lorsque le mécanisme d'endommagement est sensible à la température T et à l'humidité H (en particulier : composants électriques, conducteur aluminium et composants mécaniques soumis à la rupture). Le modèle de Peck est définie par :

$$\tau = A(H)^{-m}e^{\left(\frac{E_a}{kT}\right)} \quad (2.95)$$

Avec : A et m les paramètres de la loi d'accélération de Peck, T la température, H l'humidité, k la constante de Boltzmann ($8.617110^{-5}eV/K$) et E_a (en eV) l'énergie d'activation.

c) Modèle puissance inverse

Le modèle de puissance inverse convient au cas où le mécanisme d'endommagement est sensible à un stress particulier (par exemple : diélectrique, roulement à billes ou rouleaux, composants optoélectroniques, composants mécaniques soumis à la fatigue et filament de lampe incandescente).

La loi de puissance inverse décrit la cinétique d'une dégradation sous stress constant V , et la durée de vie est donnée par l'équation :

$$\tau = \left(\frac{A}{V}\right)^\gamma \quad (2.96)$$

Avec : A et γ les constantes du modèle, V un stress constant.

Le modèle de Basquin (très utilisé pour la fatigue) est un modèle puissance inverse.

d) Modèle d'Eyring

Ce dernier est utilisé lorsque le mécanisme d'endommagement est sensible à la température T et un stress V (en particulier : composants électriques, conducteur aluminium et composants mécaniques soumis à la rupture). Le modèle d'Eyring est défini par :

$$\tau = \left(\frac{A}{T}\right) e^{\left(\frac{B}{kT}\right)} e^{(V(C+\frac{D}{kT}))} \quad (2.97)$$

Avec : T la température absolue, V un stress donné, $k : 8.617110^{-5} eV/K$ (constante de Boltzmann); A , B , C et D les paramètres du modèle.

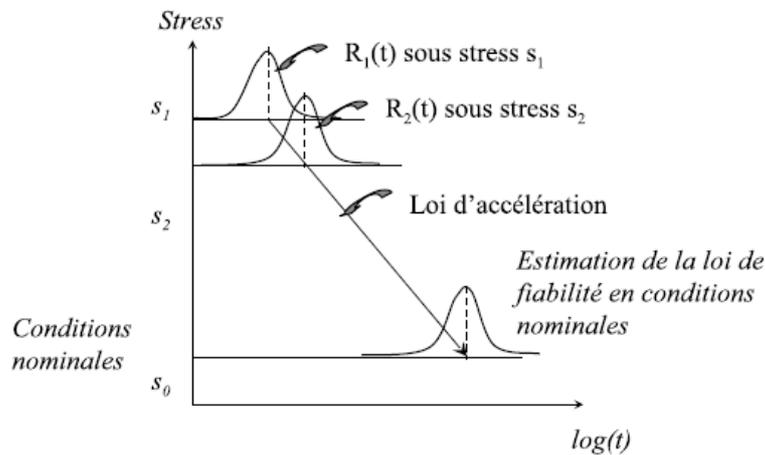


Fig. 2.22. Principe des essais accélérés

Pour finir on peut résumer le principe d'un plan d'essai accéléré (Figure 2.22) comme suit :

- On réalise des essais accélérés qui consistent à solliciter les composants à différents niveaux accélérés de stress s_i (plus sévères qu'en conditions nominales s_0);
- On fait l'hypothèse que la distribution des temps de défaillance est identique aux différents niveaux de stress (y compris dans les conditions nominales) et que le paramètre de forme de la distribution soit le même pour tous les niveaux de stress;
- On choisit un modèle d'accélération adapté à la nature du problème du mécanisme d'endommagement et dont les résultats d'essais à différents niveau de stress permettent de déterminer les paramètres;
- Ainsi, il est possible de construire la fonction de fiabilité dans les conditions sévères $R_s(t)$ et à l'aide de la loi d'accélération (Facteur d'accélération FA), de déduire la fiabilité dans les conditions nominales $R_{s_0}(t)$:

$$R_s(t) = R_{s_0}(FA.t) \quad (2.98)$$

Les essais accélérés permettent de réduire les durées des essais. Dans la section suivante nous présenterons les essais de type bayésiens dont l'objectif et l'intérêt est d'améliorer la qualité d'estimation des paramètres de fiabilité dans un contexte de faible taille d'échantillon.

2.4.3 Essais bayésiens

Les essais accélérés permettent de précipiter plus rapidement la défaillance des composants réduisant ainsi les longues durées que peuvent nécessiter certains essais, surtout pour des produits avec des niveaux de fiabilité élevés. Cependant, il reste la problématique de la taille d'échantillon nécessaire à investir dans les essais pour une bonne estimation des paramètres de fiabilité.

2.4.3.1 Objectif des essais bayésiens

En effet, les prototypes sur lesquels sont souvent effectués les essais d'estimation prennent une proportion importante dans le coût de développement des produits et les industriels cherchent un meilleur compromis entre investissement et qualité d'estimation de fiabilité. Pour apporter une solution à la problématique posée, certains chercheurs ont proposé et développé une méthodologie d'essai s'inspirant du domaine médical et basée sur l'inférence bayésienne.

Les principaux travaux sur l'inférence bayésienne en fiabilité se retrouvent essentiellement dans les références suivantes : (Ringler, 1979 ; Procaccia et al., 1992 ; Procaccia and Morilhat, 1996 ; Lannoy et al., 1994 ; Lannoy and Procaccia, 2001 ; Sander and Badoux, 1991 ; Ross, 2003) etc... Parmi les travaux récents, nous pouvons énumérer les travaux de (Guerin, 2005 ; Guérin et al., 2010 ; Usureau, 2001 ; Bousquet, 2006) qui ont une forte contribution dans le développement des techniques des essais bayésiens et sur lesquels se repose principalement cette partie de notre document.

2.4.3.2 Principe des essais bayésiens

Supposons que l'on souhaite estimer la distribution de la durée de vie d'un composant industriel donné. On désigne par $X = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un échantillon de résultats d'essais où x_i correspond à une durée de vie du composant. On suppose que cet échantillon est issu d'une loi de distribution dont les paramètres représentés par le vecteur θ sont inconnus. On désigne par $f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta)$, la fonction de vraisemblance de la réalisation X .

Soit $g(\theta)$ la densité de probabilité de θ connue à partir des avis d'experts, du retour d'expérience (essais sur produits similaires) ou de bases de données de fiabilité. On appelle $g(\theta)$ la densité de probabilité a priori de θ . Elle modélise une connaissance a priori ou une information subjective sur le vecteur des paramètres inconnus θ .

L'approche bayésienne cherche à améliorer l'estimation de θ en combinant cette connaissance a priori avec la fonction de vraisemblance (connaissance objective) obtenue par les essais au travers du *théorème de Bayes* (figure 2.23).

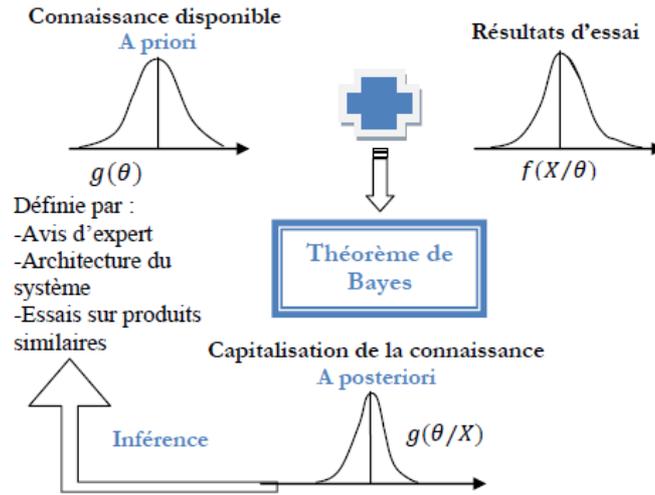


Fig. 2.23. Principe des essais bayésiens

La fonction de densité de probabilité résultante notée ici $g(\theta/X)$ est appelée densité à posteriori de θ . Elle est obtenue par l'équation :

$$g(\theta|X) = \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) \cdot g(\theta)}{\int_{D(\theta)} f(x_1, x_2, \dots, x_n | \theta) \cdot g(\theta) \cdot d\theta} \quad (2.99)$$

A partir de la densité à priorité de θ , on peut déduire les densités de chaque paramètre θ_i :

$$g(\theta_i) = \int_{j=1, \dots, n, j \neq i} \dots \int g(\theta|X) \cdot d\theta_j \quad (2.100)$$

Ensuite, il sera possible de déterminer les estimateurs ponctuels du paramètre θ_i qui correspond au moment d'ordre 1 (équation (2.101)) et sa variance qui correspond au moment centré d'ordre 2 (équation (2.102)) :

$$\hat{\theta}_i = \int_{D(\theta_i)} \theta_i g_i(\theta_i) \cdot d\theta_i \quad (2.101)$$

$$g(\theta_i) = \int_{D(\theta_i)} (\theta_i - \hat{\theta}_i)^2 g_i(\theta_i) \cdot d\theta_i \quad (2.102)$$

On pourra également définir l'intervalle de confiance bilatérale symétrique au niveau de confiance $1 - \alpha$ tel que :

$$\text{Prob}(\theta_i^{inf} \leq \hat{\theta}_i \leq \theta_i^{sup}) = 1 - \alpha \quad (2.103)$$

Où les bornes θ_i^{inf} et θ_i^{sup} sont obtenues en résolvant les équations suivantes :

$$\int_{D(\theta_i)}^{\theta_i^{inf}} g_i(\theta_i).d\theta_i = \alpha/2 \quad (2.104)$$

$$\int_{D(\theta_i)}^{\theta_i^{sup}} g_i(\theta_i).d\theta_i = 1 - \alpha/2 \quad (2.105)$$

La figure suivante (figure 2.23) résume l'application de l'inférence bayésienne pour l'estimation de la fiabilité.

2.5 Conclusion

Dans ce chapitre bibliographique, nous avons abordé les différentes notions relatives à la fiabilité. Nous avons situé la fiabilité aussi bien dans les différentes phases du cycle de développement de produits, que dans le cycle de vie de produits. On comprend ainsi, le grand intérêt que les industriels qui conçoivent les produits et les clients ou utilisateurs finaux portent à la fiabilité. En effet, pour l'un, un produit fiable garantie une bonne performance en fonctionnement et donc une réduction de retour clients ; et pour l'autre, un produit fiable réduit les coûts de maintenance, et garantie un allongement de durée de vie. En résumé, un produit fiable assure une sécurité et une bonne qualité sur la durée.

Nous avons ensuite présenté, les méthodes d'estimation de fiabilité prévisionnelle, en partant des plus classiques aux plus avancées, en relevant les limites des unes et des autres. Dans le même contexte, une part importante a été accordée au couplage mécano-probabiliste. En effet, comme nous l'avons relevé, en mécanique, les bases de données de fiabilité sont très limitées et portent sur des composants très spécifiques, contrairement aux composants électroniques. Lorsqu'il ne s'agit plus de composants standard, les formes des structures mécaniques sont très variables et nécessitent une évaluation particulière de fiabilité.

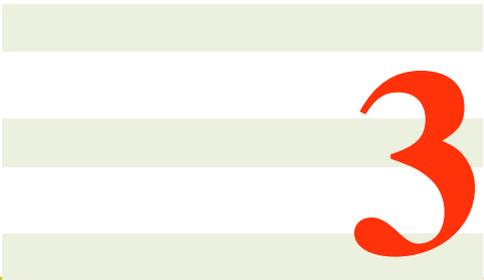
Le couplage mécano-probabiliste semble une alternative intéressante pour étudier la fiabilité en conception. Il permet, l'étude de la fiabilité prévisionnelle d'une structure mécanique au regard d'une performance attendue, en tenant compte de la variabilité des différents paramètres de conception de la structure (matériaux, géométrie, chargement) et de l'effet de cette variabilité sur la réponse du modèle mécanique. Lorsque les modèles mécaniques sont très complexes, ce qui est souvent le cas, nous avons montré l'intérêt de recourir aux méta-modèles encore appelés modèles de substitution.

Pour finir, dans un premier temps, les méthodes d'estimation de fiabilité par essais ont été présentées, avec un accent sur les essais accélérés qui permettent de réduire les durées de campagnes d'essais, et les méthodes bayésiennes qui elles permettent de réduire les nombres d'essais à réaliser.

La problématique d'estimation de fiabilité est donc d'un grand intérêt et la tendance est l'amé-

lioration de la qualité d'estimation tout en optimisant les coûts inhérents. Dans le cas de développement de nouveaux produits, l'autre défi est d'obtenir cette estimation au plus tôt dans la phase de développement, avant d'anticiper les améliorations si nécessaires. Les approches purement numériques et purement expérimentales sont limitées dans ce contexte.

Dans la suite de ce manuscrit, nous proposons donc une méthodologie pour répondre à la problématique d'estimation de fiabilité au plutôt dans la phase de développement d'un nouveau produit. Les notions abordées dans ce chapitre bibliographique, à l'instar de la fiabilité prévisionnelle mécanique, les essais accélérés et les essais bayésiens, constituent des ingrédients pour la méthodologie envisagée.



3

Méthodologie d'estimation de fiabilité et de qualification en phase de développement

« Everything is theoretically impossible, until it is done. »

Robert A. Heinlein

Contents

3.1	Introduction	87
3.2	Estimation numérique de la fiabilité prévisionnelle	88
3.2.1	Méthode de développement en polynômes de chaos (DCP)	88
3.2.2	Méthode de décomposition de la dimension (MDD)	91
3.2.3	Étude comparative	94
3.3	Estimation de fiabilité par couplage RETEX-Numérique	98
3.3.1	Position du problème	98
3.3.2	Méthode basée sur un facteur de similitude	98
3.3.2.1	Définition d'un facteur de similitude	98
3.3.2.2	Estimation de fiabilité pour une nouvelle conception	100
3.4	Méthode basée sur une fonction de transfert temporel	103
3.4.1	Principe de la fonction de transfert	103

3.4.2	Construction de la fonction de transfert	106
3.4.2.1	Discrétisation du domaine de la fiabilité	106
3.4.2.2	Durées de vie expérimentale et numérique de la conception de référence	106
3.4.2.3	Fonction de transfert temporel de la conception de référence	107
3.4.3	Construction de la distribution des durées de vie et estimation de fiabilité	108
3.5	Amélioration par actualisation Bayésienne inverse	111
3.5.1	L'approche Bayésienne inverse	111
3.5.2	Actualisation Bayésienne par Markov Chain Monte Carlo	112
3.5.3	L'algorithme de Metropolis-Hastings (<i>MH</i>)	113
3.5.4	Réglage paramétrique de l'algorithme <i>MCMC – HS</i>	115
3.6	Qualification en phase de développement	116
3.6.1	Plan de démonstration	116
3.6.1.1	Plan de démonstration classique	116
3.6.1.2	Plan de démonstration Bayésien	117
3.6.2	Estimation Bayésienne de fiabilité	119
3.6.2.1	Principe de l'approche Bayésienne	119
3.6.2.2	Détermination des estimateurs Bayésiens	121
3.6.2.3	Détermination de la distribution a priori à partir d'informa- tions disponibles	123
3.6.3	Estimation Bayésienne avec pondération de l'a priori	124
3.6.3.1	Principe de détermination du facteur de pondération	125
3.6.3.2	Utilisation du facteur de pondération	126
3.6.3.3	Estimation de la distribution a posteriori pondérée	126
3.7	Conclusion	127

3.1 Introduction

Il est largement reconnu aujourd'hui et en particulier dans l'industrie automobile, que la fiabilité est l'un des paramètres les plus importants qui caractérisent la performance des produits. En effet, la fiabilité traduit l'aptitude du produit à fonctionner sans défaillance dans des conditions données et sur une durée donnée. Les produits ayant le plus haut niveau de fiabilité sont susceptibles d'être plus sûrs et dans une mesure plus disponibles. Pour ces raisons, les clients sont de plus en plus intéressés par des produits très fiables, et les industriels sont contraints de fournir le niveau de fiabilité associé à leurs produits au même niveau que leurs prix. Dans ce contexte, l'estimation de la fiabilité des nouveaux produits, au début de leur cycle de vie, présente un grand intérêt. Elle aide les industriels à améliorer la fiabilité de leurs produits avant qu'ils atteignent le marché et, par conséquent, à faire face efficacement à la concurrence. En effet, à ce stade de développement, les ingénieurs ont encore une grande marge de manœuvre pour revoir la conception. Dans le cas contraire, les modifications apportées aux stades ultérieures du cycle de vie des produits pourraient prendre du temps et entraîner des coûts supplémentaires.

Dans le cas des composants automobiles, l'évaluation de la fiabilité mécanique est généralement basée sur l'analyse statistique des données, qui sont issues d'essais dans le cas d'un nouveau produit, tels que les essais accélérés (Escobar and Meeker, 2006); ou des données collectées pendant le cycle de vie d'anciennes versions dans le cas de développement de versions améliorées d'un produit existant. Dans les deux cas, l'estimation de la fiabilité en phase de développement, reste un problème difficile, principalement en raison du coût élevé du processus de tests d'une part, et d'autre part, du manque et/ou de la qualité insuffisante de données disponibles.

Dans la phase de développement d'un produit, l'analyse de fiabilité mécanique par des méthodes de simulation numérique, est de plus en plus appréciée dans l'industrie automobile. Ceci, en raison des différentes possibilités qu'elles offrent. Cependant, ces méthodes numériques ne permettent pas à elles seules, une validation suffisante et réaliste de la fiabilité future du produit. Par ailleurs, les concepteurs automobiles disposent très souvent, d'un retour d'expérience (notamment issu d'essais) suffisant sur la fiabilité de leurs développements antérieurs. Aussi, dans un contexte où les produits présentent des similarités importantes, l'exploitation du retour d'expérience est opportune.

Au regard des difficultés exposées ci-dessus, il est plus que nécessaire, d'exploiter d'autres voies de solutions afin de proposer une méthodologie plus adaptée à la problématique d'estimation de fiabilité mécanique en phase de développement. Nous proposons deux approches que nous décrivons brièvement dans un premier temps du plus simple au plus complexe avant de les détailler plus tard.

La première approche repose sur l'analyse de similitude entre la fiabilité prévisionnelle obtenue par une méthode numérique et la fiabilité expérimentale. L'idée est d'établir un facteur permettant de quantifier le degré de similitude entre ces deux distributions, pour une version

de référence \mathcal{D}_{ref} d'un produit donné. Ensuite, ce facteur peut être utilisé dans des conditions données pour améliorer l'usage direct des résultats de la méthode numérique d'estimation de fiabilité dans le cadre de développement d'une nouvelle version \mathcal{D}_{up} .

La deuxième proposition consiste à combiner l'analyse de fiabilité numérique et le principe de la fonction de transfert temporel (*FTT*), inspiré de l'analyse des essais accélérés (Nelson, 1990; Bagdonavicius and Nikulin, 2001). La *FTT* dans notre contexte est une fonction associée au design de référence \mathcal{D}_{ref} , et permettant le passage d'une fiabilité prévisionnelle numérique à la fiabilité expérimentale et vice-versa. Ainsi, pour une nouvelle version \mathcal{D}_{up} du produit, sa fonction de fiabilité escomptée est estimée en utilisant la *FTT* et sa fonction de fiabilité numérique.

Nous noterons par la suite par *fiabilité expérimentale*, celle estimée par notre méthodologie, pour la distinguer de la fiabilité expérimentale basée sur de vrais essais.

Dans les deux approches proposées, nous faisons recours à un modèle mécanique pour calculer numériquement les durées de vie et en déduire la fiabilité prévisionnelle. Nous détaillons dans la section suivante le choix de la méthode d'estimation numérique de fiabilité prévisionnelle.

3.2 Estimation numérique de la fiabilité prévisionnelle

Les stratégies classiques de couplage mécano-probabiliste, telles que celles présentées dans le chapitre 2, souffrent d'inefficacité lors du traitement de problèmes d'ingénierie pour lesquels, d'une part, le modèle mécanique est le plus souvent disponible sous une forme implicite complexe, et d'autre part, le nombre de paramètres incertains peut être très élevé induisant une montée exponentielle du nombre d'appels au modèle mécaniques lors du calcul probabiliste. Pour pallier à ce problème, l'idée est d'utiliser des stratégies de couplage basées sur la technique de méta-modélisation, dont l'efficacité a été approuvée (Boyd, 1989). Dans ce qui suit, on explorera deux d'entre elles à savoir, la méthode de développement en polynômes de chaos (*DCP*) (Ghanem and Spanos, 1990) et la méthode de décomposition de la dimension (*MDD*) (Rabitz and Ali, 1999).

3.2.1 Méthode de développement en polynômes de chaos (*DCP*)

Considérons un modèle mécanique, représenté mathématiquement par la fonction $y = \mathcal{M}(x)$, où certains de ses paramètres d'entrée, rassemblés dans le vecteur n -dimensionnel $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T$ sont incertains, et soit $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}^T$ un vecteur aléatoire associé à x , qui est entièrement décrit par sa fonction de densité de probabilité conjointe f_X . Sous cette condition, il est clair que la réponse y (qui peut représenter par exemple, une contrainte mécanique, un déplacement ou une durée de vie en fatigue ...) fournie par le modèle \mathcal{M} est une quantité aléatoire, avec Y le modèle probabiliste (variable aléatoire) associé. L'approximation polynomiale d'ordre p de la réponse Y , donnée par la méthode *DCP*, peut être écrite dans l'espace aléatoire standard, comme :

$$Y \approx \hat{\mathcal{M}} = \hat{\mathcal{M}} \circ T(U) = \sum_{|\alpha| \leq p} a_\alpha \Psi_\alpha(U) \quad (3.1)$$

avec $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ des multi-index, et a_α des coefficients déterministes inconnus,

$U = \{U_1, U_2, \dots, U_n\}^T$ est la variable gaussienne standard n -dimensionnelle associée à la variable aléatoire n -dimensionnelle $X = \{X_1, X_2, \dots, X_n\}^T$, obtenue grâce à la transformation probabiliste T . Les Ψ_α sont des polynômes multivariés.

Puisque le méta-modèle *DCP* est écrit dans l'espace aléatoire standard, c'est-à-dire que l'approximation polynomiale $\hat{\mathcal{M}}$ est une fonction de variables aléatoires gaussiennes indépendantes, les polynômes multivariés Ψ_α peuvent être facilement obtenus par tensorisation de N polynômes d'Hermite orthonormés uni-variés $\{H_{\alpha_k}\}_{k=1}^n$:

$$\Psi_\alpha(u) = H_{\alpha_1}(u_1) \times \dots \times H_{\alpha_n}(u_n) \quad (3.2)$$

En exploitant l'orthonormalité de la base polynomiale tronquée $\{\Psi_\alpha, |\alpha| \leq p\}$, les coefficients inconnus a_α peuvent être calculés par des méthodes de projection spectrale telles que, les techniques de simulation ou de quadrature. Ici, la méthode de régression basée sur un plan d'expérience efficace est utilisée. Les estimations des a_α sont calculées par la minimisation de l'erreur quadratique moyenne du méta-modèle $\hat{\mathcal{M}}$ de la réponse mécanique y .

Le problème de régression peut être posé comme suit :

$$\text{Trouver } \hat{a} \text{ qui minimise } E [(a^T \Psi_\alpha(U) - \mathcal{M}(U))^2] \quad (3.3)$$

où $E[\cdot]$ désigne l'espérance mathématique.

Le taux de convergence des estimateurs des coefficients inconnus peut être amélioré en utilisant des suites à discrédance faible telles que celles de *Sobol* (Dai and Wang, 2009), qui donnent une meilleure uniformité du remplissage de l'espace que les nombres pseudo-aléatoires ou l'échantillonnage hypercube latin (figure 3.1).

Soit $\mathfrak{S}_n^p = \{\alpha \in n^n \text{ tel que } |\alpha| \leq p\}$ un ensemble d'index associé à un PC de degré p , avec $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$. Par conséquent, le nombre de termes dans le *DCP* est :

$$\text{card}(\mathfrak{S}_n^p) = \binom{n+p}{p} = \frac{(n+p)!}{n!p!}. \quad (3.4)$$

Il est clair que le nombre d'appels au modèle mécanique implicite, nécessaire pour construire le *DCP*, peut s'avérer prohibitif, puisque le nombre de termes du *DCP* est à croissance polynomiale avec le nombre de paramètres d'entrée incertains n , et l'ordre ou le degré p du *DCP*. Pour

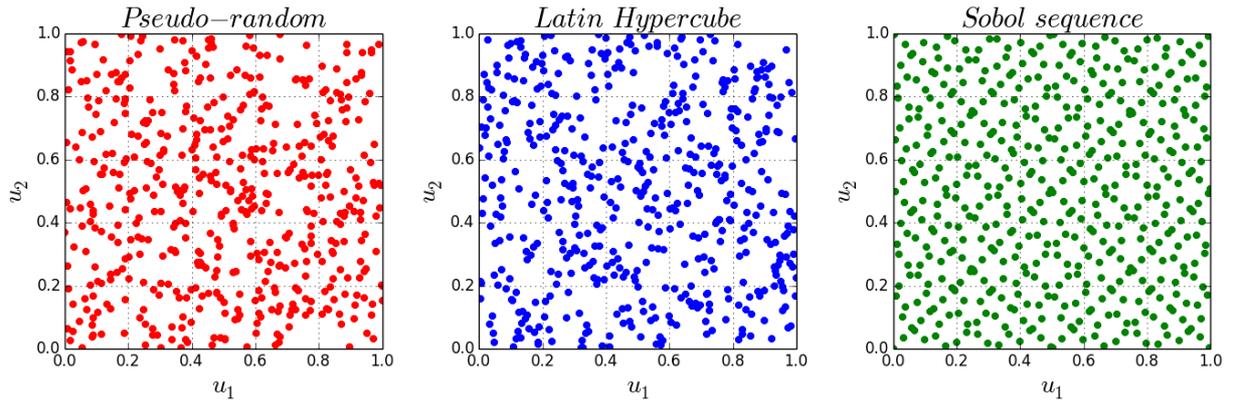


Fig. 3.1. Comparaison de l'uniformité du remplissage spatial des nombres pseudo-aléatoires, de l'échantillonnage de l'hypercube latin et de la séquence de Sobol

contourner ce problème, une stratégie de troncature efficace, qui vise à conserver les termes du *DCP* associés à l'interaction d'ordre faible (Blatman, 2009), est employée. En effet, les pratiques d'ingénierie ont montré que souvent les interactions d'ordre élevé ($i.e > 3$) n'ont pas d'effets significatifs sur les réponses du modèle mécanique.

Soit i l'ordre maximum des interactions conservées, selon (An and Owen, 2001), le nombre de termes du méta-modèle *DCP* est $\text{card}(\mathfrak{S}_n^{p,i})$, avec $\mathfrak{S}_n^{p,i} = \{\alpha \in n^n \text{ de sorte que } |\alpha| \leq p \text{ et } \sum_{k=1}^n I_{\alpha_k > 0} \leq i\}$. Il est clair que, si les interactions d'ordre élevé ont un effet faible, l'économie définie comme le rapport de $\text{card}(\mathfrak{S}_n^{p,i})$ à $\text{card}(\mathfrak{S}_n^p)$ peut être très significative comme le montre la figure 3.2.

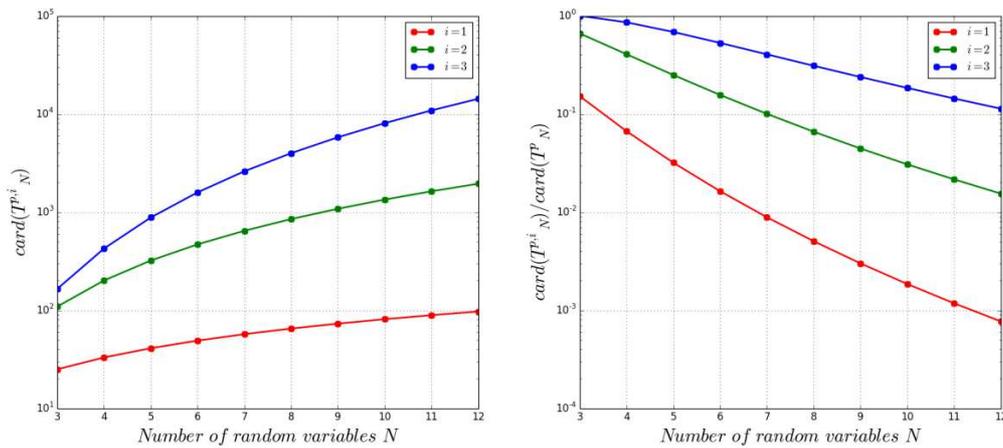


Fig. 3.2. L'économie $\text{card}(\mathfrak{S}_n^{p,i})/\text{card}(\mathfrak{S}_n^p)$ par rapport au nombre de variables aléatoires pour un PC de degré $p = 8$

Une fois les estimateurs \hat{a}_α des coefficients inconnus sont obtenus, les moments statistiques tels que la moyenne $\mu_Y^{p,i}$ et la variance $V_Y^{p,i}$ de Y peuvent être calculés analytiquement (Blatman, 2009), comme suit :

$$\mu_Y^{p,i} = \hat{a}_0 \quad (3.5)$$

$$V_Y^{p,i} = \sum_{|\alpha| \leq p} \hat{a}_\alpha^2 \quad (3.6)$$

Notons que les moments statistiques d'ordre supérieur, tels que l'asymétrie et l'aplatissement, peuvent être facilement obtenus de la même manière.

La fonction de densité de probabilité f_Y de la réponse mécanique peut être obtenue par une technique basée sur les moments (Pearson, 1963) en utilisant les estimateurs des quatre premiers moments statistiques, ou en effectuant des simulations de Monte-Carlo sur le méta-modèle *DCP*.

En plus, des analyses de sensibilités basées sur la décomposition de la variance peuvent être effectuées sans efforts de calcul supplémentaires. En effet, les indices de sensibilité de Sobol (Sobol, 1993) peuvent être obtenus via un post-traitement sur les coefficients du *DCP*.

Soit \mathfrak{S}_k l'ensemble des indices $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ tels que seuls les composants α_k , $k \in \{1, \dots, n\}$ sont non nuls, les indices de sensibilité de Sobol du premier ordre (Sudret, 2008), associés au k^{th} variable aléatoire, sont les suivants :

$$S_{1,k}^{p,i} = \frac{1}{V_Y^{p,i}} \sum_{\alpha \in \mathfrak{S}_k} \hat{a}_\alpha^2 \quad (3.7)$$

Les indices de sensibilité totaux de Sobol sont donnés par :

$$S_{T,k}^{p,i} = \frac{1}{V_Y^{p,i}} \sum_{\alpha \in \mathfrak{S}_k^T} \hat{a}_\alpha^2 \quad (3.8)$$

où \mathfrak{S}_k^T désigne l'ensemble de tous les indices $\alpha = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n\}$ avec un k^{th} composant non nul.

3.2.2 Méthode de décomposition de la dimension (MDD)

L'idée clé de la méthode de décomposition de la dimension est de construire une surface de réponse pour approximer une relation de type entrée-sortie. Cette approche consiste à discrétiser une fonction multidimensionnelle en un ensemble de sommes finies et hiérarchiques de fonctions simples des variables aléatoires de base. Dans la suite, les formulations mathématiques sont développées dans l'espace aléatoire standard.

Considérons à nouveau le modèle mathématique \mathcal{M} représentatif du modèle mécanique à étudier. Soit $u = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}^T$, le vecteur n -dimensionnel représentant les paramètres incertains dans l'espace aléatoire standard. Selon la méthode de décomposition de la dimension, la réponse y peut être décomposée en fonctions élémentaires, comme suit :

$$y = \mathcal{M}(u) = y_0 + \sum_{k=1}^n y_k(u_k) + \sum_{k_1=1}^n \sum_{k_2 > k_1}^n y_{k_1, k_2}(u_{k_1}, u_{k_2}) + \cdots + y_{k_1, \dots, k_n}(u_{k_1}, \dots, u_{k_n}) \quad (3.9)$$

avec y_0 est une constante réelle, obtenue comme réponse en évaluant le modèle \mathcal{M} à un point de référence spécifique $u^r = \{u_1^r, u_2^r, \dots, u_n^r\}^T$ (par exemple le point moyen). y_k , y_{k_1, k_2} et y_{k_1, \dots, k_n} sont respectivement des fonctions unidimensionnelles, bidimensionnelles et n -dimensionnelles. Il est à noter que ce développement n'est valide que pour des variables aléatoires indépendantes, et peut être facilement étendue au cas de réponse non-scalaire $y = \{y_1, y_2, \dots, y_m\}^T$, $m > 1$.

Pour une mise en œuvre pratique, le développement ci-dessus doit être tronqué et seuls les composants d'ordre faible doivent être pris en compte. Par conséquent, l'approximation s -dimensionnelle \hat{y}_s de la réponse y est la suivante :

$$y \cong \tilde{y}_s = \sum_{i=0}^s (-1)^i C_{n-s+i-1}^i \sum_{k_1=1}^{n-s+i-1} \cdots \sum_{k_{s-i}=k_{s-i-1}-1}^n y_{k_1, \dots, k_{s-i}}(\tilde{u}) \quad (3.10)$$

avec $y_{k_1, \dots, k_{s-i}}$ des fonctions à $(s-i)$ variables représentant la contribution d'ordre $(s-i)$ parmi les paramètres $u_{k_1}, \dots, u_{k_{s-i}}$ rassemblés dans le vecteur \tilde{u} .

Dans le cas où l'effet des interactions d'ordre élevé est faible, il est clair à partir de l'équation (3.10) que la méthode de décomposition de la dimension peut être très efficace pour approcher des modèles implicites coûteux en temps de calcul. En effet, dans la littérature, on distingue deux usages : la réduction de la dimension des intégrales multidimensionnelles telles que celles rencontrées dans les calculs de moments statistiques d'une quantité aléatoire, ou encore la construction de surface de réponse de modèles non connus sous forme explicite.

Par définition, le moment statistique d'ordre l de la variable aléatoire Y représentant la variabilité de la réponse y induite par les paramètres incertains du modèle \mathcal{M} , s'écrit :

$$m_Y^l \cong \mathbb{E}[Y^l] = \int_{\Omega_Y} y^l p_Y(y) dy = \int_{\mathbb{R}^n} \mathcal{M}^l(u) \varphi_U(u) du \quad (3.11)$$

où $\mathbb{E}[\cdot]$ désigne l'espérance mathématique et φ_U est la fonction de densité de probabilité multivariée standard.

L'évaluation de l'intégrale (3.11), en utilisant des algorithmes de calcul traditionnels tels que les règles de quadratures, n'est pas une tâche triviale, en particulier dans le cas d'intégrande implicite et d'intégration de dimension élevée. En remplaçant, l'intégrande dans l'équation (3.11) par son approximation donnée par la méthode de décomposition de la dimension, basée sur l'équation (3.10), le moment statistique m_Y^l d'ordre l est réécrit comme suit :

$$m_Y^l \cong \sum_{i=0}^s (-1)^i C_{n-s+i-1}^i \sum_{k_1=1}^{n-s+i-1} \cdots \sum_{k_{s-i}=k_{s-i-1}-1}^n \mathbb{E} \left[y_{k_1, \dots, k_{s-i}}^l(\tilde{u}) \right] \quad (3.12)$$

Le terme d'espérance $\mathbb{E} \left[y_{k_1, \dots, k_{s-i}}^l(\tilde{u}) \right]$ dans l'équation ci-dessus, a l'expression suivante :

$$\mathbb{E} \left[y_{k_1, \dots, k_{s-i}}^l(\tilde{u}) \right] = \int_{\mathbb{R}^{(s-i)}} y_{k_1, \dots, k_{s-i}}^l(\tilde{u}) \varphi_{\tilde{U}}(\tilde{u}) d\tilde{u} \quad (3.13)$$

avec $\varphi_{\tilde{u}}$, la fonction de densité de probabilité de la variable aléatoire normale $(s-i)$ -dimensionnelle $\tilde{U} = \{U_{k_1}, \dots, U_{k_{s-i}}\}^T$.

Maintenant, à partir des équations (3.12) et (3.13), il est clair que le calcul du moment statistique m_Y^l est réduit à l'évaluation d'un ensemble d'intégrales de dimension $(s-i)$ au plus, au lieu de dimension n , plus fastidieux. Ces intégrales élémentaires peuvent être calculées avec précision et efficacité par quadrature de Gauss. Afin d'avoir une image complète de la variabilité de la réponse y , sa fonction de densité de probabilité p_Y peut être facilement construite en utilisant une technique basée sur les moments statistiques (Pearson and Tukey, 1965). Notez que l'utilisation d'une telle technique nécessite un niveau de précision élevé sur les estimateurs des quatre premiers moments statistiques de la quantité aléatoire, à savoir la moyenne, l'écart-type, l'asymétrie et l'aplatissement.

Dans le développement précédent, l'approximation donnée par la méthode de décomposition de la dimension est utilisée implicitement pour réduire la dimension des intégrales. Autrement dit, sans vraiment construire la surface de réponse. Il ressort de l'équation 3.10 qu'une formulation analytique de la réponse du modèle est obtenue si et seulement si les fonctions composantes $y_{k_1, \dots, k_{s-i}}$, dérivées par le processus de décomposition, sont connues. Ce problème peut être facilement résolu en les considérant comme des fonctions de forme. En effet, les fonctions composantes peuvent être simplement construites par projection sur une base polynomiale. Dans ce travail, l'interpolation polynomiale est basée sur la base de Lagrange, comme suit :

$$y_{k_1, \dots, k_{s-i}}(u_{k_1}, \dots, u_{k_{s-i}}) = \sum_{j_1=1}^N \cdots \sum_{j_{s-i}=1}^N \mathcal{M}(u_{k_1}^{j_1}, \dots, u_{k_{s-i}}^{j_{s-i}}) \times l_{j_1}(u_{k_1}) \times \cdots \times l_{j_{s-i}}(u_{k_{s-i}}) \quad (3.14)$$

où $l_{j_{s-i}}(u_{k_{s-i}})$ sont des polynômes de Lagrange unidimensionnels construits autour d'un ensemble de points expérimentaux $u_{k_{s-i}}^{j_{s-i}}$, $1 \leq j_{s-i} \leq N$, $\mathcal{M}(u_{k_1}^{j_1}, \dots, u_{k_{s-i}}^{j_{s-i}})$ sont des coefficients réels.

Une étape supplémentaire nécessaire avant la construction de l'approximation polynomiale, est de construire un plan d'expérience approprié. Les composantes du plan d'expérience peuvent être choisies comme les points d'intégration de Gauss-Hermite, utilisés précédemment dans le calcul de l'espérance dans l'équation (3.13), ou des points répartis uniformément autour d'un

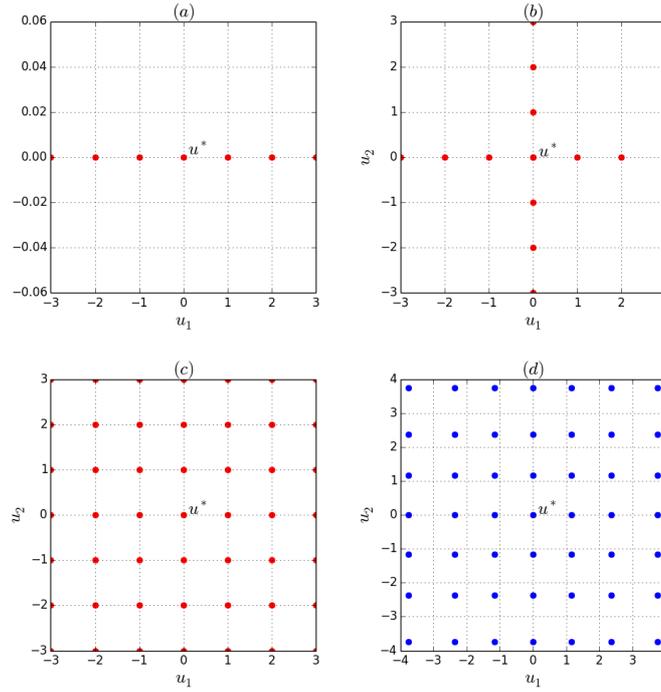


Fig. 3.3. Plan d'expériences (a) $n = 1, s = 1$, (b) $n = 2, s = 1$, (c) $n = 2, s = 2$ (d) Points d'intégration Gauss-Hermite

point de référence $u^r = \{u_1^r, u_2^r, \dots, u_n^r\}^T$, obtenus par la formule récursive suivante (Xu and Rahman, 2005) :

$$\left\{ u_k^j \right\}_{j=1}^N = \left\{ u_k^r - \frac{N-1}{2\delta_k}, u_k^r - \frac{N-3}{2\delta_k}, \dots, u_k^r, \dots, u_k^r + \frac{N-3}{2\delta_k}, u_k^r + \frac{N-1}{2\delta_k} \right\} \quad (3.15)$$

où u_k^r est la coordonnée du point de référence dans la direction k de l'espace aléatoire et δ_k est une perturbation qui contrôle la distance entre les points du plan d'expérience.

Le choix approprié du point de référence est d'une grande importance pour avoir une interpolation précise. Il a été démontré que le point moyen donne de bons résultats lorsqu'il s'agit de l'analyse des moments statistiques. Dans le cas de l'analyse de fiabilité, le point de défaillance le plus probable P^* est le meilleur candidat. Cependant, une analyse FORM doit être effectuée pour calculer ses coordonnées, ce qui augmente probablement le temps de calcul. La figure 3.3 montre une comparaison de plans expérimentaux obtenus par la formule récursive (équation (3.15)) pour différentes dimensions n et ordre de décomposition s , et les points d'intégration de Gauss-Hermite.

3.2.3 Étude comparative

Dans ce paragraphe nous nous intéressons à l'évaluation de la précision et l'efficacité des deux approches de construction de méta-modèle présentées précédemment, pour effectuer de la propagation d'incertitudes à travers un modèle mécanique. Nous considérons un tuyau fissuré sol-

licité par une pression interne $P = 15.5$ MPa et une traction axiale $\sigma_t = 100$ MPa, comme il est montré sur la figure 3.4(a). Le tuyau de longueur $L = 1000$ mm, a un rayon interne $R_i = 393.5$ mm, et une épaisseur $t = 62.5$ mm. Il contient une fissure circonférentielle de longueur initiale $a = 15$ mm.

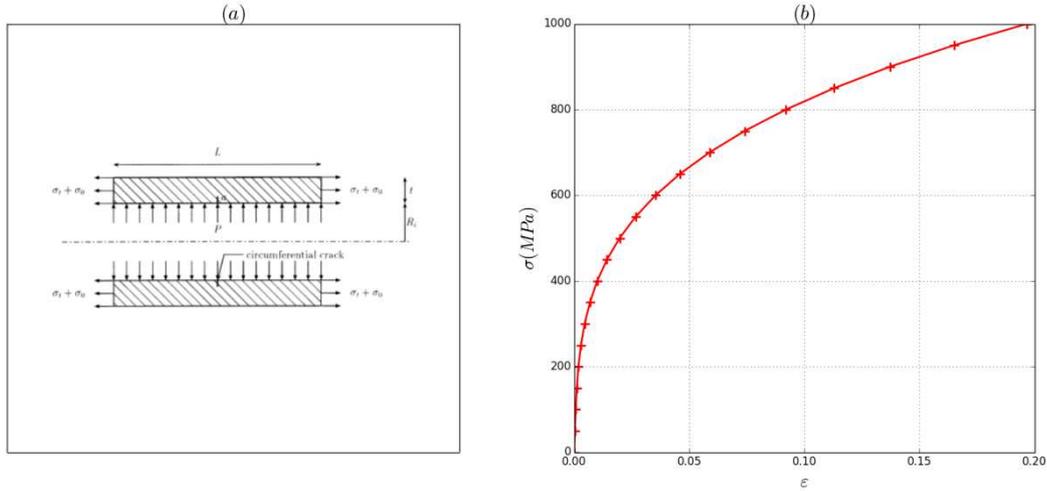


Fig. 3.4. (a) Tuyau fissuré, (b) Loi de comportement de Ramberg-Osgood

Compte tenu des conditions aux limites, aux extrémités du tuyau, la pression interne P induit des efforts de traction longitudinale, en plus de la traction axiale σ_t . La pression σ_0 due aux effets de bord s'écrit :

$$\sigma_0 = \frac{R_i^2}{(R_i - t)^2 - R_i^2} P \quad (3.16)$$

Le tuyau est fabriqué en acier dont le comportement suit la loi de Ramberg-Osgood :

$$\epsilon = \frac{\sigma}{E} + \alpha \frac{\sigma_y}{E} \left(\frac{\sigma}{\sigma_y} \right)^n \quad (3.17)$$

où σ et ϵ désignent respectivement la contrainte et la déformation, E le module de Young, σ_y la limite élastique, n le coefficient d'écrouissage et α le coefficient de la loi de Ramberg-Osgood. La courbe contrainte-déformation associée à cette loi de comportement est donnée par la figure 3.4 (b).

Plusieurs méthodes ont été développées afin de caractériser la singularité du champ de contraintes au voisinage de la pointe de la fissure. Les facteurs d'intensité de contraintes sont souvent utilisés lorsque le comportement du matériau constitutif est élastique. Dans le cas où le matériau exhibe un comportement élastoplastique, on fait appel à l'intégrale J dont l'évaluation est basée sur le calcul du taux de restitution d'énergie. La propagation de fissures est observée lorsque l'intégrale J dépasse la ténacité du matériau J_{Ic} . Malheureusement, dans le cas de problèmes d'ingénierie, pour lesquels la géométrie des structures et les conditions de chargement sont com-

plexes, l'évaluation de l'intégrale J n'est possible qu'à l'aide d'approches numériques. Dans ce contexte, un modèle éléments finis est développé sur le logiciel Cast3m afin d'évaluer le comportement du tuyau fissuré. En raison de la symétrie du tuyau (i.e. problème axisymétrique), seul le quart de la géométrie est modélisé. Le maillage est composé de 709 éléments quadratiques et de 1553 nœuds. La figure 3.5 illustre le maillage et les conditions de chargement.

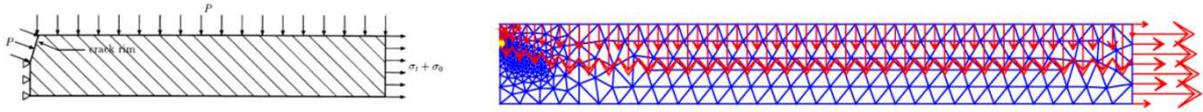


Fig. 3.5. Conditions de chargement et maillage

Dans un premier temps nous nous intéressons à l'étude de l'effet de l'incertitude qui entache le module de Young E , la limite élastique σ_y et les deux paramètres n et α de la loi de Ramberg-Osgood, sur la variabilité de la réponse mécanique représentée par l'intégrale J . Les paramètres incertains sont modélisés par des variables aléatoires indépendantes dont le type et les caractéristiques statistiques sont donnés dans le tableau 3.1.

TABLE 3.1 Caractéristiques statistiques des paramètres incertains

Paramètre	Distribution	μ	σ
E	lognormale	175500 MPa	1000 MPa
σ_y	lognormale	259.5 MPa	10 MPa
n	normale	3.5	0.1
α	normale	1.15	0.15

TABLE 3.2 Estimations des moments statistiques

Méthode		Moments statistiques				Nombre d'appels au MEF	
		μ	σ	δ	κ		
DCP	$p=1, q=2$	28.212	2.093	0	3	16	
	$p=2, q=3$	28.161	1.960	0.253	3.093	81	
MDD	$q=2$	28.145	1.969	-0.048	0.353	9	
	$q=3$	28.146	1.967	-0.002	1.596	13	
	$p=1$	$q=4$	28.152	1.967	0.003	1.606	17
		$q=5$	28.158	1.965	-0.002	1,612	21
	$q=6$	28.160	1.963	0.005	1.609	25	
	$p=2$	$q=2$	28.144	1.964	0.210	1.946	33
$q=3$		28.161	1.961	0.255	3.092	67	
SMC		28.162	1.962	0.254	3.091	10000	

Les quatre premiers moments statistiques de la réponse mécanique sont calculés par différentes approches : la méthode du Développement en Chaos Polynômial (*DCP*) et la Méthode de Décomposition de la Dimension (*MDD*). Les estimations sont comparées à celles obtenues par 10000 Simulations de Monte-Carlo (*SMC*) effectuées directement sur le modèle éléments finis. On note que, les coefficients du *DCP* sont calculés par quadrature de Gauss-Hermite, dont le

nombre de points d'intégration $q = p + 1$ est choisi automatiquement en fonction de l'ordre p du *DCP*. Quant aux intégrales élémentaires résultantes de l'approche *MDD* elles sont calculées aussi par quadrature de Gauss-Hermite dont l'ordre q est pris comme variable afin d'étudier son effet sur la précision des estimations.

Les résultats donnés dans le tableau 3.2 montrent que la méthode *DCP* d'ordre 2 et la méthode *MDD* aussi d'ordre 2 donnent des estimations précises des quatre premiers moments statistiques puisque l'écart avec les résultats des Simulation de Monte-Carlo est très faible pour une précision $\varepsilon = 10^{-3}$. On constate aussi que la méthode *MDD* est la plus efficace puisque la convergence est atteinte au bout de 67 appels au modèle éléments finis contre 81 appels pour la méthode *DCP*. En plus de sa facilité d'implémentation, la méthode *MDD* offre le meilleur compromis entre précision et efficacité, par conséquent elle sera utilisée dans la suite de ce travail pour faire de la propagation d'incertitudes. En plus de l'estimation des moments statistiques, la densité de probabilité de la réponse mécanique est construite en utilisant une méthode de moments, et est comparée à celle obtenue par les simulations de Monte-Carlo.

La figure 3.6 (a) montre que les résultats obtenus par les deux méthodes sont en bon accords. La densité de probabilité donne plus d'informations, que les moments statistiques, sur la variabilité de la réponse mécanique puisque pour chaque scénario possible elle donne sa probabilité d'occurrence. L'intégration de la densité de probabilité donne la fonction de répartition de la réponse mécanique. Cette dernière peut être interprétée comme l'évolution de la probabilité de défaillance vis-à-vis d'un état-limite $G(X) = J_{I_c} - J(E, \sigma_y, n, \alpha)$, où J_{I_c} est la ténacité du matériau, prise ici comme déterministe.

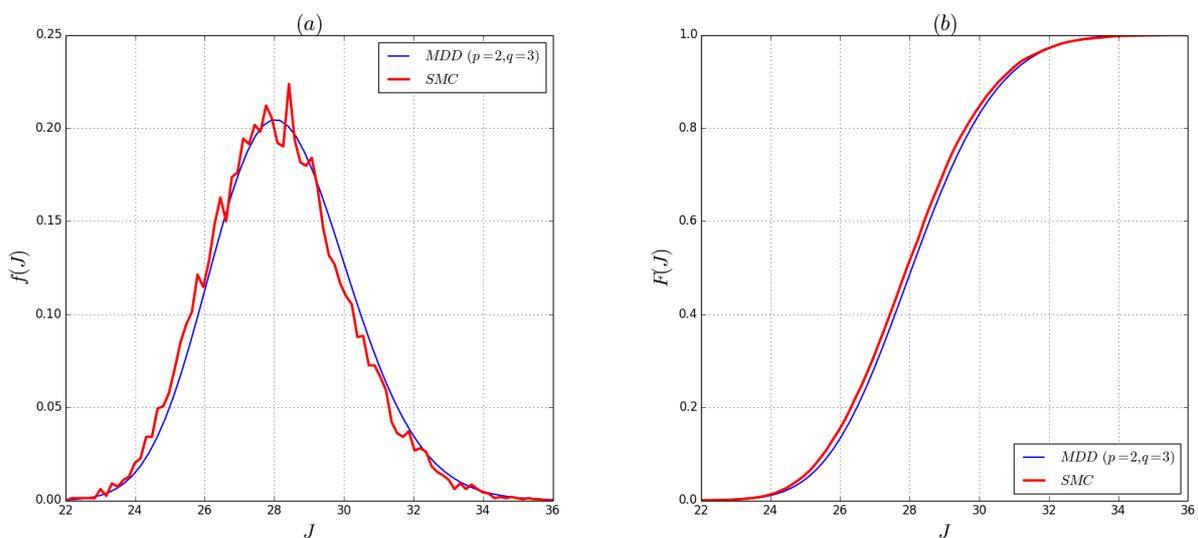


Fig. 3.6. Réponse mécanique J , (a) densité de probabilité, (b) fonction de répartition

3.3 Estimation de fiabilité par couplage RETEX-Numérique

3.3.1 Position du problème

Soit un design \mathcal{D}_{ref} dont on connaît la fonction de fiabilité expérimentale $R_{\mathcal{D}_{ref}}^{exp}(t)$ construite à partir de données de retour d'expérience (*RETEX*), ainsi que la fonction de fiabilité numérique $R_{\mathcal{D}_{ref}}^{num}(t)$ obtenue par une méthode de couplage mécano-probabiliste.

La question qui se pose est la suivante : comment utiliser les deux fonctions $R_{\mathcal{D}_{ref}}^{exp}(t)$ et $R_{\mathcal{D}_{ref}}^{num}(t)$ comme a priori pour déterminer la fonction de fiabilité expérimentale $R_{\mathcal{D}_{up}}^{exp}(t)$ d'une nouvelle version \mathcal{D}_{up} de la version de référence \mathcal{D}_{ref} . Afin de répondre à cette question, deux méthodes seront développées dans la suite ; la première basée sur la définition d'un facteur de similitude (FS) et la deuxième faisant appel à la construction d'une fonction de transfert temporel (FTT).

3.3.2 Méthode basée sur un facteur de similitude

En procédant à une analyse comparative de la fonction prévisionnelle (numérique) de fiabilité avec la fonction de fiabilité obtenue par retour d'expérience, il arrive généralement qu'on observe un écart entre les deux fonctions de fiabilité. En effet, le but de la simulation numérique en ingénierie est de disposer d'une première solution, afin d'optimiser si nécessaire les conceptions avant la phase de prototypage. Il n'est pas question ici de construire une solution exacte de la fiabilité attendue du mécanisme. Par ailleurs, lors de la simulation numérique, plusieurs hypothèses simplificatrices sont implicitement utilisées. Elles peuvent concerner la géométrie, les caractéristiques matériaux, ainsi que les chargements et les conditions limites. On note aussi que les influences du procédé de mise en forme des pièces ne sont pas souvent prises en compte dans les modèles.

En supposant que les conditions de simulation du modèle mécanique sont bien contrôlées, on peut déduire que l'écart observé entre la fiabilité numérique et celle de référence obtenue à partir du retour d'expérience (*RETEX*), est dû essentiellement au manque d'informations sur le matériau et les simplifications opérées dans la modélisation. La méthodologie vise donc à proposer une manière d'utiliser néanmoins ces résultats numériques pour une première estimation de fiabilité de nouveaux mécanismes (nouvelles version d'un mécanisme de référence existant) en développement. Pour ce faire, nous nous proposons dans la section suivante, d'établir un facteur de similitude entre la fiabilité numérique et expérimentale.

3.3.2.1 Définition d'un facteur de similitude

Par définition, d'un point de vue géométrique, la similitude est une transformation isomorphe dans laquelle le rapport de similitude ou facteur de similitude, est une constante, une relation, etc... qui permet de mesurer le degré de similitude entre deux grandeurs et de retrouver une grandeur à partir de la connaissance de ce facteur.

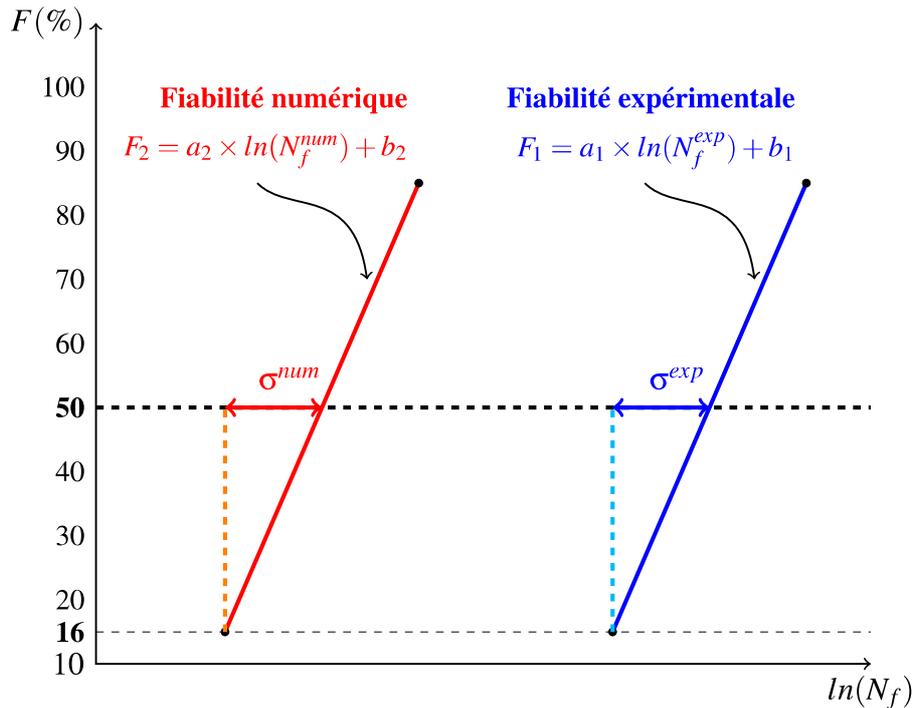


Fig. 3.7. Représentation de la fiabilité numérique et expérimentale sur le graphe fonctionnelle LogNormale

Dans cette étude, les durées de vie des produits sont supposées distribuées suivant une loi LogNormale (μ, σ) , où μ désigne le facteur d'échelle et σ le facteur de forme. On s'intéresse dans un premier temps à la version de référence \mathcal{D}_{ref} d'un produit donné. Supposons, qu'on représente sur le graphe fonctionnel de la distribution LogNormale, les courbes de fiabilité expérimentale et numérique (figure 3.7) associées à \mathcal{D}_{ref} . Sur ce graphe, les distributions expérimentale et numérique sont représentées par des droites d'équations respectives :

$$F_1 = a_1 \times \ln(N_f^{exp}) + b_1 \quad (3.18)$$

et

$$F_2 = a_2 \times \ln(N_f^{num}) + b_2 \quad (3.19)$$

où, N_f^{exp} et N_f^{num} représentent respectivement la durée de vie expérimentale et numérique.

Il faut noter que la position relative des deux droites F_1 et F_2 sur la figure 3.7 est juste illustrative. On peut avoir le cas où F_1 est positionnée avant F_2 .

Pour chacune des droites, l'abscisse correspondant à l'ordonnée $F = 50\%$ correspond à la valeur du paramètre μ . Notons, que la valeur médiane de durée de vie s'obtient par $\exp(\mu)$.

Si $a_1 \approx a_2$, cela suppose que les deux droites sont parallèles. C'est le cas où les paramètres de forme des deux distributions LogNormales (expérimentale et numérique) sont identiques. On

aura alors qu'un décalage horizontal entre les deux droites fonctionnelles. Par conséquent, la similitude entre les deux droites se résume dans le rapport des abscisses, images d'une même valeur donnée (F_i) de l'ordonnée, par chacune des deux droites.

On sait que pour ($F = 50\%$), l'abscisse pour chacune des droites, correspond au paramètre d'échelle μ de la distribution LogNormale qu'elle représente. On peut donc établir le facteur de similitude comme suit :

$$F_S = \frac{\mu^{num}}{\mu^{exp}} \quad (3.20)$$

Hypothèse : On peut considérer que ce facteur de similitude reste constant d'une version de mécanisme à l'autre. En effet, pour chaque conception, les hypothèses et les approximations faites lors des simulations numériques de fiabilité, sont de mêmes natures et aux mêmes niveaux, car les conceptions sont souvent semblables.

Ainsi, il sera envisageable de déterminer une première estimation de la distribution du retour d'expérience (fiabilité expérimentale) pour une nouvelle version \mathcal{D}_{up} du produit à partir de la connaissance de la loi de fiabilité numérique obtenue par simulation et en appliquant le facteur de similitude. C'est ce qui fera l'objet de la section suivante.

3.3.2.2 Estimation de fiabilité pour une nouvelle conception

a) Processus d'estimation

Pour une nouvelle conception \mathcal{D}_{up} , on ne dispose que du modèle mécanique. La simulation numérique permet d'avoir une première estimation de fiabilité. Cette solution étant obtenue à partir d'hypothèses simplificatrices, quasiment identiques à celles de la version de référence, il est possible de déterminer la fiabilité expérimentale, en utilisant le coefficient de similitude, qui sera confirmée par des essais ultérieurs.

Le but de l'utilisation du facteur de similitude établi précédemment, est de pouvoir atténuer les effets d'une solution numérique peu précise sur l'estimation de fiabilité de la nouvelle conception, en intégrant la connaissance expérimentale disponible sur la conception de référence \mathcal{D}_{ref} .

A partir de ce qui précède, les étapes de la procédure d'estimation de fiabilité pour une nouvelle conception peuvent se résumer comme suit (figure 3.8) :

- Définir le facteur de similitude sur la version \mathcal{D}_{ref} du mécanisme,
- Estimer par simulation numérique la fiabilité pour la version \mathcal{D}_{up} ,
- Appliquer le facteur de similitude pour obtenir l'estimation du *RETEX* (fiabilité expérimentale) pour la version \mathcal{D}_{up} .

Une étape intermédiaire, peut s'avérer nécessaire entre l'étape 2 et 3. En effet, nous avons supposé que le facteur de similitude reste identique et transposable sur les versions ultérieures

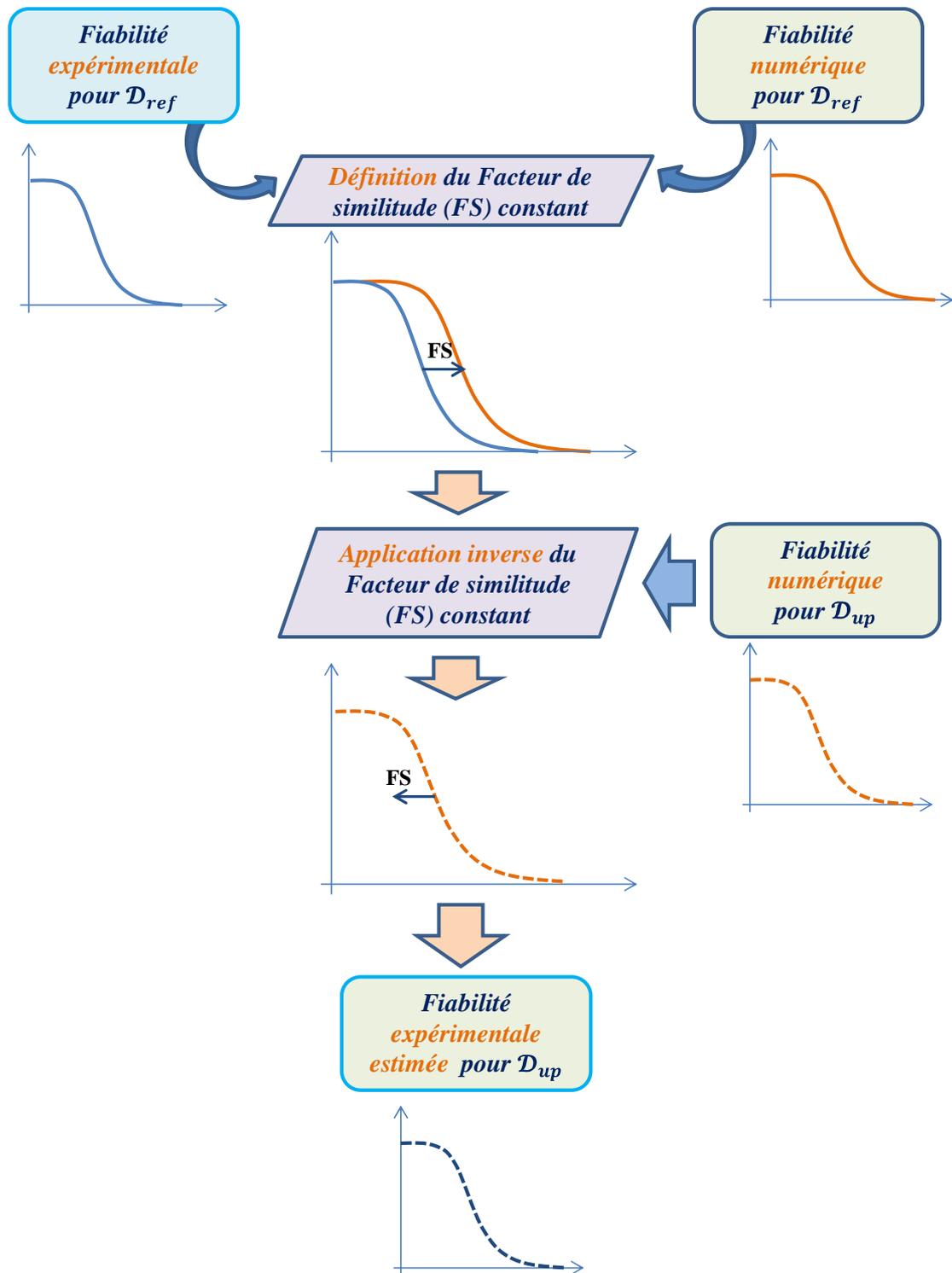


Fig. 3.8. Procédure d'utilisation du facteur de similitude

du produit, à cause de la similarité des conceptions. Dans ce qui suit, nous proposons une démarche permettant de valider cette hypothèse. Elle est basée sur l'étude de linéarité entre les versions.

b) Linéarité entre les deux conceptions \mathcal{M}^{ref} et \mathcal{M}^{up}

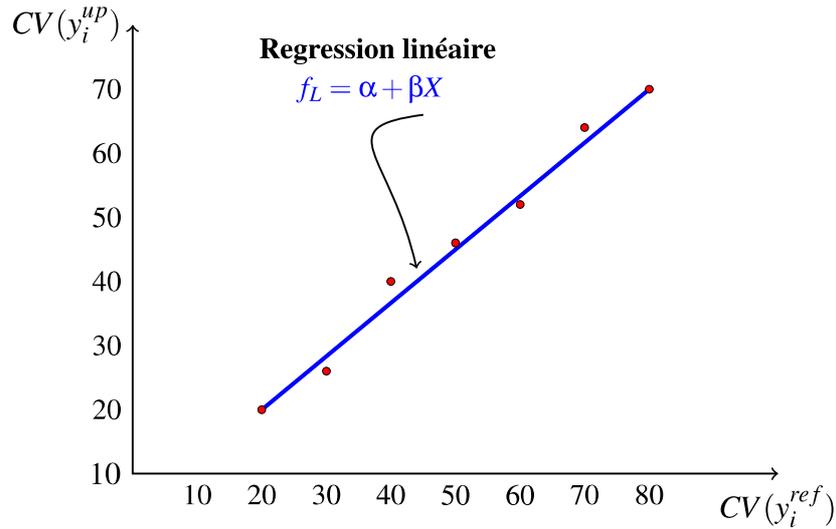


Fig. 3.9. Linéarité des versions de mécanismes

Considérons à nouveau le modèle mécanique \mathcal{M} , dont la réponse est représentée mathématiquement par la fonction : $y = \mathcal{M}(x)$, où $x = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}^T$ est un vecteur aléatoire n -dimensionnel de l'espace physique, regroupant les paramètres d'entrée incertains du modèle mécanique. Chaque paramètre x_i est défini par une valeur moyenne m_{x_i} et un coefficient de variation CV_{x_i}

Pour la version de référence, le modèle mécanique \mathcal{M}^{ref} associé s'écrit :

$$y^{ref} = \mathcal{M}^{ref}(x^{ref}) \quad (3.21)$$

De même pour la nouvelle version, on a le modèle mécanique \mathcal{M}^{up} décrit par :

$$y^{up} = \mathcal{M}^{up}(x^{up}) \quad (3.22)$$

La procédure d'étude de linéarité, consiste à introduire des niveaux de perturbation (coefficients de variation) identiques sur les paramètres d'entrée aléatoires des deux modèles mécano-probabilistes \mathcal{M}^{ref} et \mathcal{M}^{up} , puis calculer les coefficients de variation $CV(y)$ de la réponse y pour chaque niveau de perturbation et pour chaque modèle. Ensuite on représente sur un graphique l'ensemble de points $\{CV(y_i^{ref}), CV(y_i^{up})\}$; $i = 1, 2, \dots, P$ où i correspond à un niveau de perturbation, et P , le nombre total de niveaux.

Pour déterminer la linéarité des deux versions \mathcal{M}^{ref} et \mathcal{M}^{up} , on ajuste l'ensemble des points de la figure 3.9 par une fonction linéaire :

$$f_L = \alpha + \beta X \quad (3.23)$$

En fonction de la valeur de la pente β on jugera de la linéarité des deux versions : si β est proche

de 1, cela suppose que les deux versions de mécanisme conservent presque la même sensibilité aux perturbations (i.e variabilités) sur les paramètres d'entrée de leur modèle numérique. On peut ainsi valider l'hypothèse de constance du facteur de similitude.

c) Estimation de la fiabilité

Une fois, la constance du facteur de similitude vérifiée et validée, on pourra donc obtenir une estimation de la *fiabilité expérimentale* du nouveau développement, à partir de la fiabilité numérique basée sur la méthode de couplage mécano-probabiliste et le facteur de similitude.

En effet, la constance du facteur de similitude entre les versions revient à écrire :

$$F_S = \frac{\mu_{\mathcal{D}_{ref}}^{num}}{\mu_{\mathcal{D}_{ref}}^{exp}} = \frac{\mu_{\mathcal{D}_{up}}^{num}}{\mu_{\mathcal{D}_{up}}^{exp}} \quad (3.24)$$

Le paramètre d'échelle $\mu_{\mathcal{D}_{up}}^{exp}$ de la distribution LogNormale des durées de vie de la nouvelle conception s'obtient facilement par :

$$\mu_{\mathcal{D}_{up}}^{exp} = \frac{\mu_{\mathcal{D}_{up}}^{num}}{F_S} \quad (3.25)$$

La constance du facteur de similitude supposant par le même biais, la constance du paramètre de forme de la distribution LogNormale. On peut donc en déduire que le paramètre de forme de la distribution des durées de vie de la nouvelle conception est identique à celui de la distribution de durées de vie de la conception de référence :

$$\sigma_{\mathcal{D}_{up}}^{exp} = \sigma_{\mathcal{D}_{ref}}^{exp} \quad (3.26)$$

Une estimation de la fonction de fiabilité expérimentale $R_{\mathcal{D}_{up}}^{exp}$ du nouveau développement s'obtient finalement par :

$$\hat{R}_{\mathcal{D}_{up}}^{exp}(N) = 1 - \Phi\left(\frac{\ln(N) - \mu_{\mathcal{D}_{up}}^{exp}}{\sigma_{\mathcal{D}_{up}}^{exp}}\right) \quad (3.27)$$

3.4 Méthode basée sur une fonction de transfert temporel

3.4.1 Principe de la fonction de transfert

Au cours du processus de qualification de produits, une approche basée sur les essais accélérés (Nelson, 1990) est souvent utilisée pour l'estimation de fiabilité. Brièvement, la technique des essais accélérés (figure 3.10 (a)), vise à réduire la durée d'essai nécessaire pour observer la

défaillance des organes testés, en appliquant des niveaux de contraintes beaucoup plus sévères que celles endurées dans les conditions de fonctionnement normales.

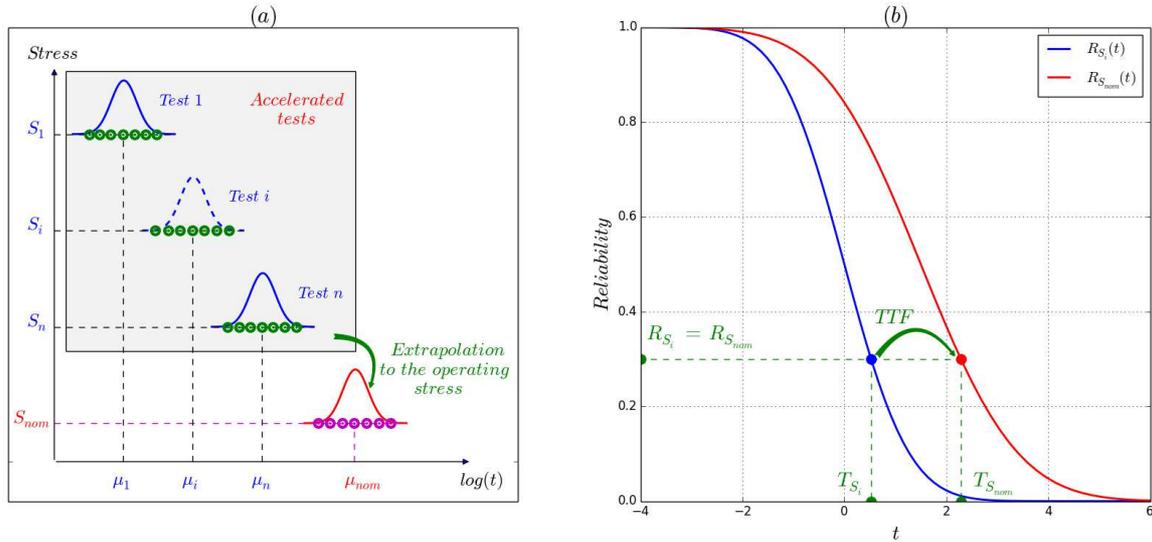


Fig. 3.10. (a) Principe des essais accélérés, (b) Définition de la fonction de transfert temporel

Les durées de vie observées lors de ces essais accélérés sont ensuite utilisées pour construire la fonction de fiabilité $R_{S_i}(t)$ associée aux conditions de chargement accélérées. Enfin, au moyen d'une fonction de transfert, également appelée loi d'accélération, la fonction de fiabilité $R_{S_i}(t)$ est extrapolée pour obtenir la vraie fonction de fiabilité $R_{S_{nom}}(t)$, associée aux conditions de fonctionnement normales (voir figure 3.10 (b)). Pour des raisons pratiques, il est supposé (Nikulic et al., 2010) que les temps de défaillance observés à différents niveaux de contraintes sont linéairement dépendants, et que la transformation de l'échelle de temps est constante, c'est-à-dire que nous avons une véritable accélération linéaire. Par conséquent, la fonction de fiabilité dans les conditions accélérées $R_{S_i}(t)$ peut être liée à la fonction de fiabilité dans les conditions normales $R_{S_{nom}}(t)$ comme suit :

$$R_{S_i}(t) = R_{S_{nom}}(FTT(t)) \quad (3.28)$$

où FTT est la fonction de transfert temporel.

La méthodologie proposée dans cette section s'inspire du principe du FTT . Considérons la conception de référence \mathcal{D}_{ref} et $h(t)$ la fonction de transfert temporel associée, qui mesure en quelque sorte l'écart entre la fonction de fiabilité expérimentale $R_{\mathcal{D}_{ref}}^{exp}(t)$ et la fonction de fiabilité numérique $R_{\mathcal{D}_{ref}}^{num}(t)$. Notons que, les deux fonctions de fiabilité $R_{\mathcal{D}_{ref}}^{exp}(t)$ et $R_{\mathcal{D}_{ref}}^{num}(t)$ correspondent aux conditions normales de fonctionnement du composant.

Maintenant, considérons une nouvelle version \mathcal{D}_{up} , de la conception de référence \mathcal{D}_{ref} , pour laquelle, la fonction de fiabilité numérique $R_{\mathcal{D}_{up}}^{num}(t)$ peut être calculée.

hypothèse : On suppose que seules quelques modifications sont effectuées sur \mathcal{D}_{ref} pour conce-

