Sujet de Master SDS

Encadrant : Sébastien Lagrange
(Bureau E36)

Boundary Value Problem

Les équations différentielles jouent un rôle extrêmement important en pratique : elles permettent de modéliser des systèmes qui évoluent dans le temps. Par exemple, la balle frappée par un golfeur suit une trajectoire $q(t) = (x(t), y(t))$ qui satisfaisait une équation différentielle de la forme

$$\begin{pmatrix} \dot{q}(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = F(\dot{q}(t), q(t))$$

avec des conditions initiales

$$q(t = 0) = q_0, \dot{q}(t = 0) = \dot{q}_0.$$

$q_0 = (x_0, y_0)$ décrit la position initiale de la balle de golf avant le lancé et $\dot{q}_0 = (\dot{x}_0, \dot{y}_0)$ la vitesse initiale de la balle. Noter que l'équation différentielle qui régit le déplacement de la balle peut être obtenu par les lois de Newton (voir cours Modélisation et Simulation en 3A).
Grâce aux méthodes de simulation comme Euler ou Runge et Kutta, il est possible d'approximer la solution de cette équation différentielle, c'est-à-dire de prédire de déplacement de la balle de golf.

Le sujet de ce stage consiste à s'intéresser aux équations différentielles à conditions initiales dites séparées :

$$\begin{pmatrix} \dot{q}(t) \\ q(t) \end{pmatrix} = F(\dot{q}(t), q(t))$$

avec

$$q(t = 0) = q0, q(t = tf) = q_{tf}$$

Une partie des conditions permettant de résoudre l'équation différentielle est constituée de conditions initiales $q(t = 0) = q0$ et l'autre partie de conditions finales $q(t = tf) = q_{tf}$.
Pour ce problème, la vitesse initiale $\dot{q}_0$ (classiquement connue pour résoudre l'équation différentielle) est ici une inconnue. Cependant cette inconnue $\dot{q}_0$ doit être compatible avec la condition finale $q(t = tf) = q_{tf}$ donnée.
Cette équation différentielle à conditions séparées est donc plus complexe a résoudre. Ce problème est connu sous le nom de Boundary Value Problem.
Si on considère à nouveau le problème du golfeur, l'équation différentielle qui régit le mouvement de la balle est identique mais les conditions sont : q_0 est la position initiale de la balle et q_{tf} est la position finale de la balle (par exemple dans le trou !). Il s'agit de trouver la vitesse initiale a donner à la balle (i.e. $\dot{q}_0$)

de telle sorte qu'elle termine sa trajectoire dans le trou (i.e. $q(t = tf) = q_{tf}$).

Pour résoudre ce problème à conditions séparées, il existe des méthodes numériques appelées méthodes de tirs. Le principe itératif est de choisir une valeur arbitraire pour $\dot{q}_0$, puis de simuler l'équation différentielle pendant tf unités de temps. Si la trajectoire obtenue pour q vérifie $q(t = tf) = q_{tf}$ le problème est résolu, sinon on recommence avec une autre valeur pour $\dot{q}_0$.

L'objectif de stage est de proposer :

— une nouvelle méthode pour résoudre ce problème basée sur l'analyse par intervalles,

— de réaliser un logiciel illustrant les résultats obtenus pour le cas du "putting problème" (problème du golfeur).

Mots Clés : Boundary Value Problem, Shooting method, Putting problem.

Référence : https ://www.jstor.org/stable/pdf/2132661.pdf

Vidéo sur le boundary condition problem :
https ://www.youtube.com/watch ?v=E97SZm2ZrBo