M2 SDS : Analyse d'atteignabilité d'un système max-plus incertain par apprentissage automatique

M. Lhommeau

1 Introduction

La théorie des systèmes à événements discrets s'est constituée ces dernières années à partir de l'étude des systèmes de production, réseaux de transports, systèmes informatiques... Elle s'intéresse à des problèmes d'évaluation de performance (calcul de taux de production, de débit), à des questions de vérification et de synthèse de commande (nécessité de satisfaire certaines contraintes logiques, comme l'absence de blocage, ou l'exclusion mutuelle), ainsi qu'à des problèmes d'optimisation (ex: nombre optimal de processeurs ou de machines pour réaliser une tâche donnée).

Ces systèmes ont pour points communs la présence de phénomènes de synchronisation, de saturation ou de concurrence liées à l'occurrence d'événements (arrivée d'un client, interruption d'une tâche, ...). Il est difficile de tenir compte de ces phénomènes avec les outils familiers de l'automaticien (équations différentielles, équations récurrentes, ...).

Lors de ce master recherche, on s'intéressera à une sous-classe de Systèmes à Événements Discrets (SED) modélisable par des graphes d'événements temporisés (sous-classe des réseaux de Petri). Cette classe a le mérite d'admettre une représentation linéaire à condition de se placer dans une nouvelle algèbre, à savoir le dioïde (ou demi-anneau idempotent) $\mathbb{R}_{\max} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$, communément appelé algèbre $(\max, +)$, structure dans laquelle $2 \oplus 1 = 2$ ($= \max(2, 1)$) et $1 \otimes 1 = 2$ $(= 1 + 1)$ [BCOQ92]. Modulo ce changement d'algèbre, toutes les notions de l'Automatique classique s'étendent: représentation d'état, représentation entrée-sortie, séries de transfert ...

On peut décrire la dynamique de ces systèmes dans l'algèbre (max,+) sous la forme :

$$\mathbf{x}(k+1) \quad = \quad A(k) \otimes \mathbf{x}(k) \oplus B(k) \otimes \mathbf{u}(k) \tag{1}$$

avec $A(k) \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$, $B(k) \in \mathbb{R}^{n\times p}, \mathbf{x}(k) \in \mathcal{X} \subseteq \mathbb{R}_{\max}^{n}$ et $\mathbf{u}(k) \in \mathcal{U} \subset \mathbb{R}_{\max}^{p}$. Afin de tenir des compte des incertitudes de modélisation, les entrées des matrices sont considérées comme des valeurs aléatoires (distribuées selon une densité probabilité à support borné). Plus précisément, chaque entrée des matrices prend une valeur arbitraire dans le support de la densité de probabilité. On peut alors écrire, $\forall k \geq 0$, $A(k) \in [A] = [\underline{A}, \overline{A}]$ et $B(k) \in [\underline{B}, \overline{B}]$.

2 Objectif

Un des enjeux dans l'étude de ces systèmes dynamiques consiste à montrer que tous les comportements possibles satisfont, ou non, certaines propriétés. Un outil de base important pour mener à bien cet objectif est le calcul d'ensembles atteignables, c'est-à-dire l'ensemble des points pour lesquels il existe une commande permettant au système de les atteindre. Formellement, soit $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{X}_0 \subseteq \mathcal{X}$ une condition initiale, l'ensemble atteignable (cf. Fig 2), correspond à l'ensemble de tous les futurs états $\mathbf{x}(N)$ à l'instant N étant donné une séquence de commande $\{\mathbf{u}(0), \mathbf{u}(1), \ldots, \mathbf{u}(N-1)\}$.

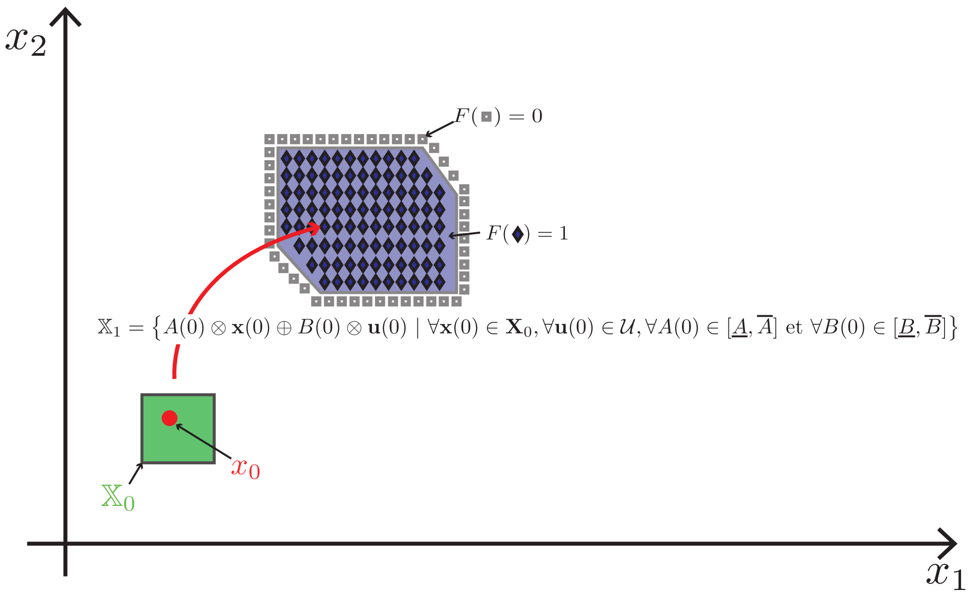

Figure 1: $\mathbb{X}_0$: ensemble des états initiaux, $\mathbb{X}_1$: ensemble des états atteignables à $k = 1$.

L'objectif de ce stage est de développer un nouvel algorithme basé sur des méthodes d'intelligence artificielle pour le calcul de cet ensemble atteignable. Plus précisément, on va chercher à formuler le problème d'atteignabilité comme un problème d'apprentissage automatique [AFG22] d'une fonction de classification F qui permet de décrire la géométrie de la frontière de l'ensemble atteignable :

$$F(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x} \in \text{à l'ensemble atteignable} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} . \tag{2}$$

Cet apprentissage automatique sera réalisé en ligne [Wik23].

References

[AFG22] Pierre-Cyril Aubin-Frankowski and Stéphane Gaubert. Tropical reproducing kernels and optimization, 2022.

[BCOQ92] F. Baccelli, G. Cohen, G.J. Olsder, and J.P. Quadrat. *Synchronization and Linearity : An Algebra for Discrete Event Systems*. Wiley and Sons, 1992.

[Wik23] Wikipedia. Data-driven control system — Wikipedia, the free encyclopedia. http://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Data-driven%20control%20system&oldid=1129550873, 2023. [Online; accessed 13-March-2023].