

# Une application de la technique de lissage de Kalman à l'identification des instants de défaillance pour un système décrit par une EDP parabolique

**Mohamed Salim BIDOU**

Laurent AUTRIQUE, Laetitia PEREZ, Sylvain VERRON

LARIS - Laboratoire Angevin de Recherche en Ingénierie des Systèmes,  
62 avenue Notre Dame du Lac, 49000 Angers, France.

## Contexte et objectifs

- Contexte



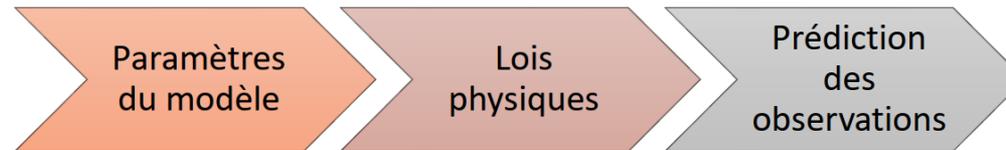
Nonlinear Wave  
 Black-Scholes DEigensystem  
 Parabolic  
**PDES**  
 Linear  
 HeatD Solve Burgers  
 Schrödinger Hyperbolic  
 Elliptic Laplace

(Équation aux dérivées partielles)

*Les problèmes inverses en  
thermique*

# Les problèmes inverses en thermique

## Problème direct



## Problème inverse



### ➤ Exemple des problèmes inverses en thermique

- ❖ Le problème de reconstruction d'état initial
- ❖ Les problèmes d'estimation de paramètres
- ❖ Les problèmes d'estimation de sources
- ❖ Les problèmes d'estimation de formes de domaines

## Principaux aspects des problèmes inverses de conduction de la chaleur (PICC)

- L'unicité de la solution des PICC ne peut être prouvée mathématiquement que dans des cas particuliers (Ozisik et Orlande).
- PICC sont très sensibles aux erreurs aléatoires dans les données mesurées ; les techniques expérimentales et les algorithmes de stabilisation deviennent importants.
- Nécessite la formulation d'un problème approximatif bien posé et l'amélioration ultérieure de la solution.
- Introduit par Tikhonov, Alifanov et Beck.

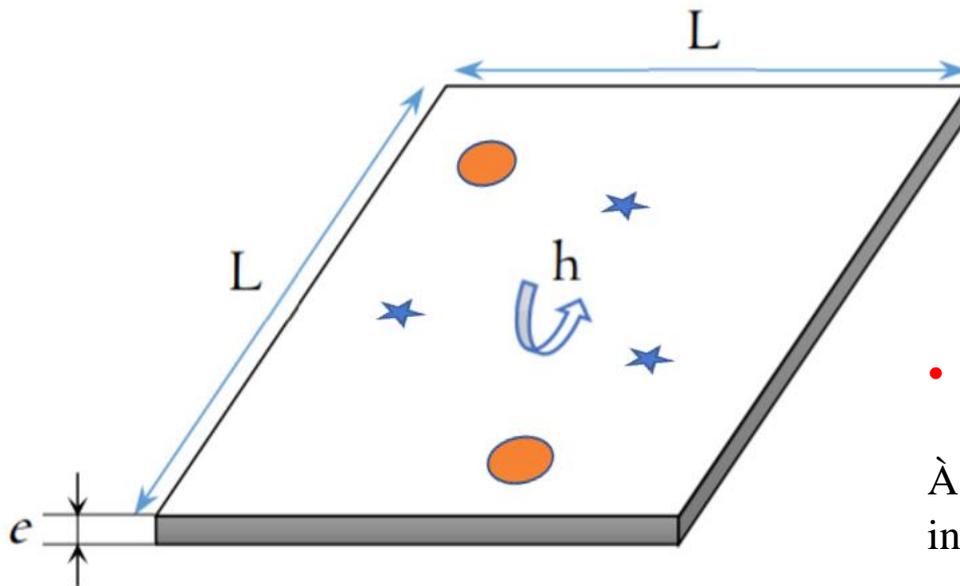
*Description et modélisation de  
l'application*

## Description du problème physique

### ■ Représentation du système expérimental

● Source de chaleur

★ Capteur

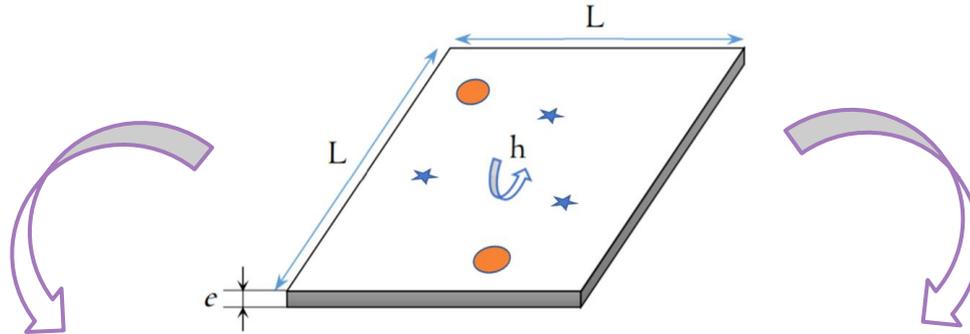


- Plaque d'aluminium de 1m x 1m, épaisseur de 2mm
- 2 sources chauffantes (fixes sur la plaque), à flux variables supposés connus.
- 3 capteurs de températures (fixes sur la plaque)

### • Problématique :

À partir de ces trois capteurs, peut-on détecter les instants de défaillance de chaque source ?

## Modélisation du problème direct



$$\left\{ \begin{array}{l} \forall (x, y; t) \in \Omega \times T \\ \forall (x, y) \in \Omega \\ \forall (x, y; t) \in \Gamma \times T \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \rho C \frac{\partial \theta(\cdot)}{\partial t} - \lambda \Delta \theta(\cdot) = \frac{\Phi(\cdot) - 2h(\theta(\cdot) - \theta_0)}{e} \\ \theta(x, y, 0) = \theta_0 \\ -\lambda \frac{\partial \theta(\cdot)}{\partial \vec{n}} = 0 \quad \text{où } (\cdot) = (x, y; t) \end{array}$$

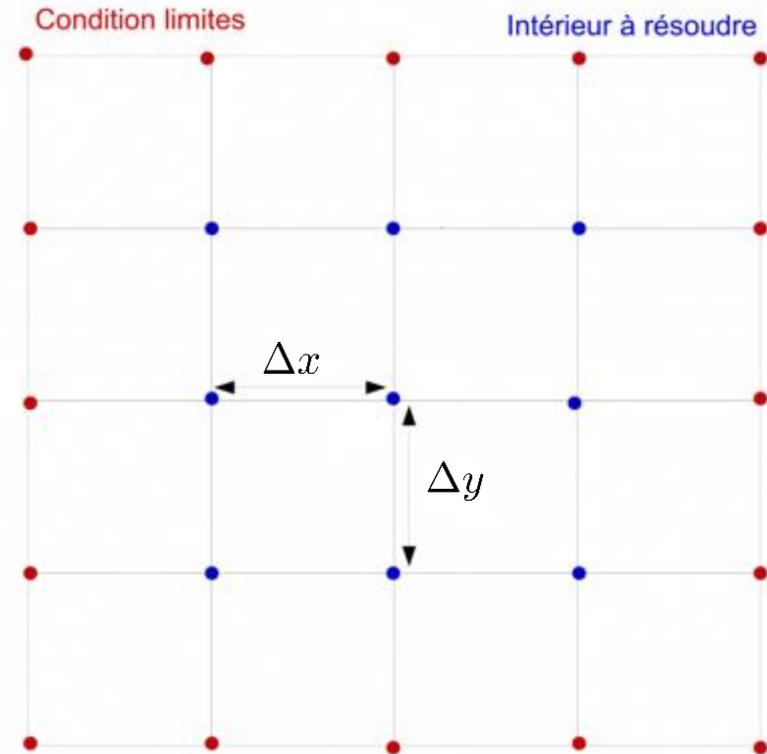
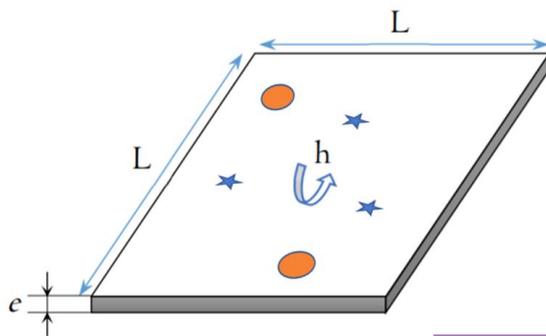
où

$$\Phi(x, y; t) = \sum_{n=1}^{n_{\text{chauff}}} \Phi_n(x, y, t) = \sum_{n=1}^{n_{\text{chauff}}} f_n(x, y) g_n(t) \chi_n(t)$$

# Approche du problème par la méthode des différences finies

Dans une géométrie 2D :

- On discrétise l'espace en introduisant un maillage  $I \times J$  avec un pas d'espace  $\Delta x$  et  $\Delta y$ , tel que  $(x_i, y_j) = (i\Delta x, j\Delta y)$
- De même, le temps sera discrétisé en intervalle  $t_k = k\Delta t$  avec  $\Delta t$  le pas du temps



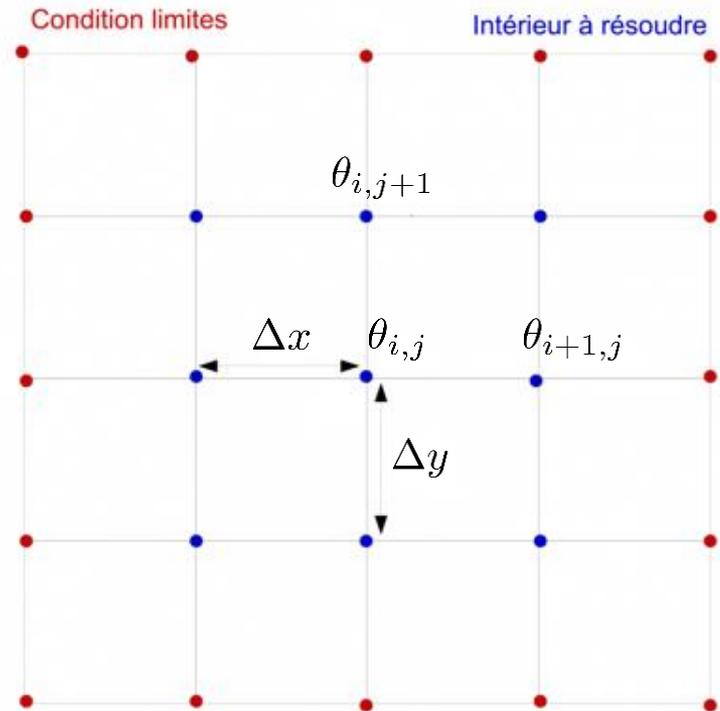
# Approche du problème par la méthode des différences finies

➤  $\theta_{i,j}^k$  la valeur de  $\theta(i\Delta x, j\Delta y; k\Delta t)$  au nœud  $(x_i, y_j)$

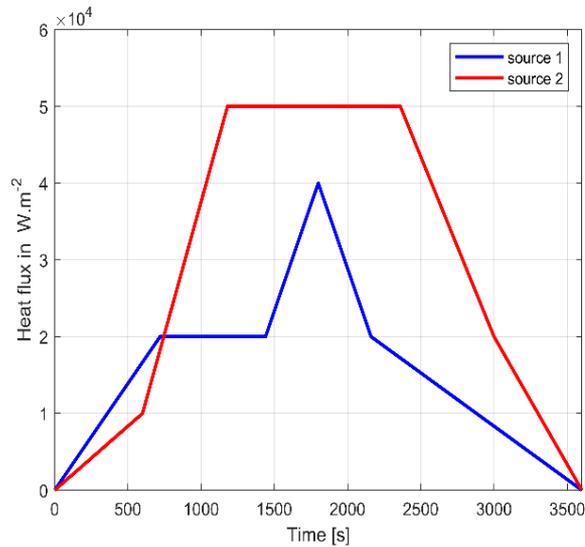
$$\left[ \frac{\partial \theta}{\partial t} \right]_{i,j}^k \simeq \frac{\theta_{i,j}^{k+1} - \theta_{i,j}^k}{\Delta t}, \quad \left[ \frac{\partial^2 \theta}{\partial x^2} \right]_{i,j}^k \simeq \frac{\theta_{i-1,j}^k - 2\theta_{i,j}^k + \theta_{i+1,j}^k}{\Delta x^2}$$

$$\left[ \frac{\partial^2 \theta}{\partial y^2} \right]_{i,j}^k \simeq \frac{\theta_{i,j-1}^k - 2\theta_{i,j}^k + \theta_{i,j+1}^k}{\Delta y^2}$$

➤ De façon similaire, la source chauffante  $\Phi_{i,j}^k$  est la valeur discrète de la grandeur  $\Phi(x, y, t)$ .



# Modèle d'évolution d'état



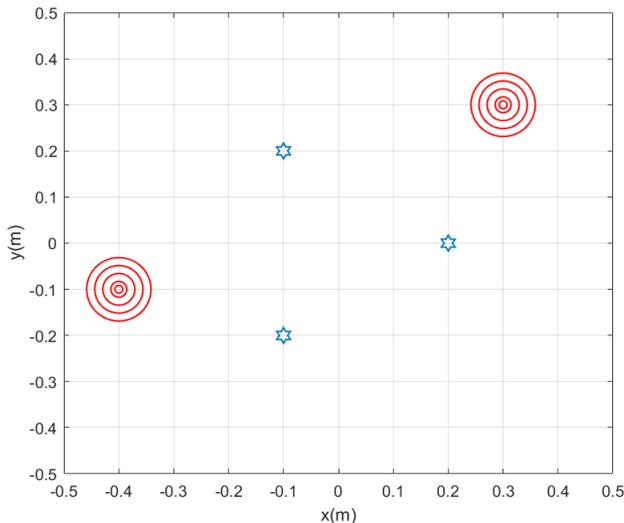
➤ Le modèle d'évolution d'état est donné par :

$$\theta^{k+1} = A \cdot \theta^k + B \cdot G^k + H$$

- $A$  est une matrice carrée codant la combinaison linéaire des termes  $\theta^k$
- Le flux des sources est supposé connu à chaque instant  $k$

$$G^k = \begin{pmatrix} g_1^k \\ g_2^k \end{pmatrix}$$

- $B$  contient le support spatial de la source, codant les positions de la distribution gaussienne
- $H$  vecteur constant dépend des paramètres du modèle - discrétisation



## Les observations

- Les mesures réelles (soumises à une incertitude/ erreur de mesure) seront nommées  $\theta_{obs}^k$

$$\theta_{obs}^k = \begin{cases} \theta_{C_1}^k \\ \theta_{C_2}^k \\ \theta_{C_3}^k \end{cases} \text{ avec } \theta_{C_i}^k \text{ la valeur scalaire donnée par le capteur } C_i \text{ à l'instant } k$$

- L'équation des observations est donnée par :

$$\theta_{obs}^k = C \cdot \theta^k$$

où  $C$  est une matrice codant les positions des capteurs.

- Finalement, l'application est modélisée comme une représentation d'état d'un système linéaire :

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Modèle d'évolution d'état : } \theta^{k+1} = A \cdot \theta^k + B \cdot G^k + H \\ \text{Modèle d'observation : } \theta_{obs}^k = C \cdot \theta^k \end{array} \right.$$

**Définition** : Le problème d'estimation d'état vise à obtenir des informations sur les variables d'états en se basant sur le modèle d'évolution et sur les mesures données par le modèle d'observation.

# Résolution numérique

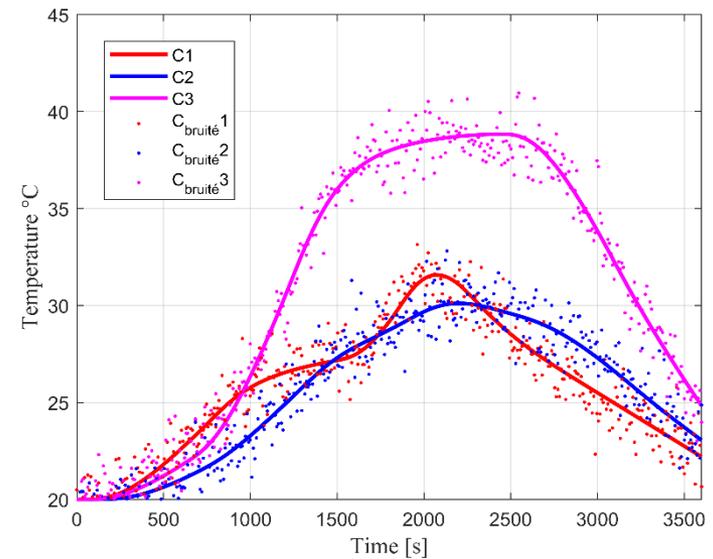
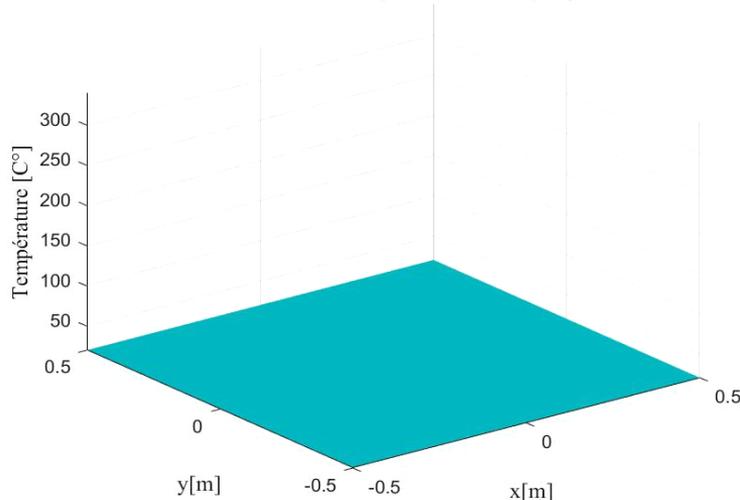
- Résolution du problème direct

$$\theta^{k+1} = A \cdot \theta^k + B \cdot G^k + H$$



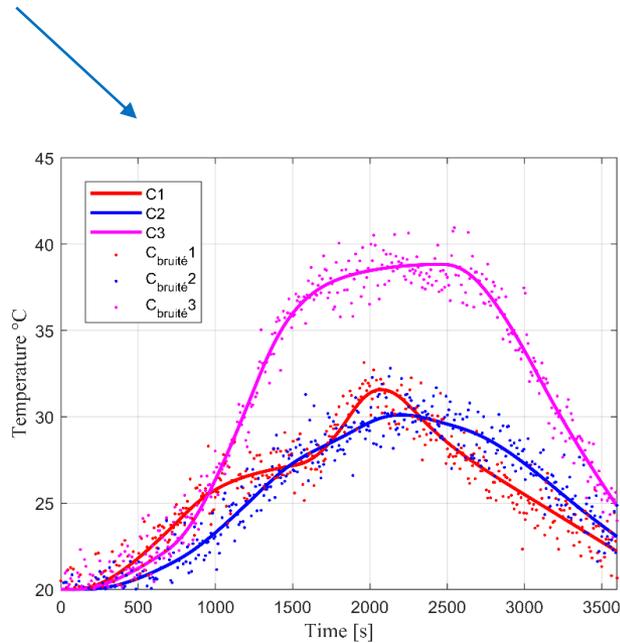
$$\rho c \frac{\partial \theta}{\partial t} - \lambda \Delta \theta = \frac{\Phi - 2h(\theta - \theta_0)}{e}$$

Évolution de la température sur la plaque

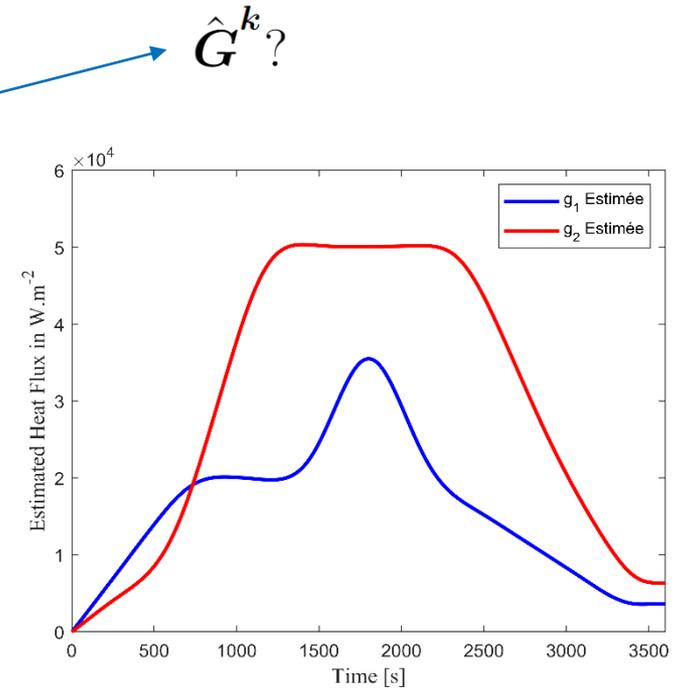


Evolution de la température au trois capteurs  $\theta_{obs}^k = C \cdot \theta^k$

- Problème inverse



$$\theta_{\text{obs}}^k = C \cdot \theta^k$$

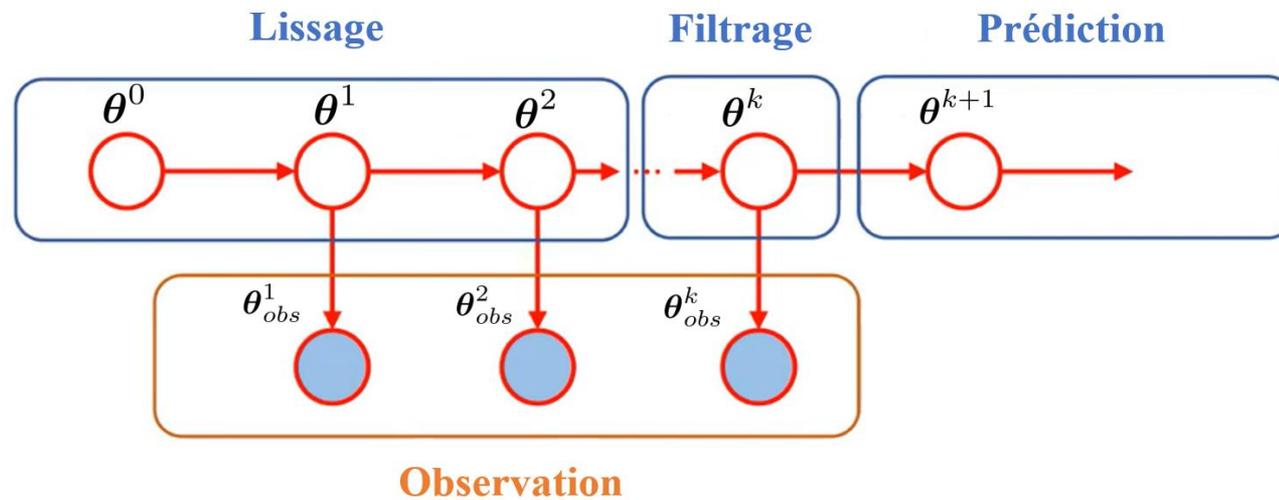


# *Cadre bayésien*

# Prédiction, filtrage et lissage

Supposons que nous ayons une observation jusqu'au temps  $k$  :

- **Prédiction** : estimer les états futurs
- **Filtrage** : estimer l'état actuel
- **Lissage** : estimer les états précédents



# Filtrage bayésien

- Filtre de **Kalman**
  - Hypothèse : modèle linéaire  
bruit gaussien
  
- Filtre de **Kalman étendu**
  - Hypothèse : modèle non-linéaire  
bruit gaussien
  
- Filtre **particulaire** (Monte-Carlo)
  - Hypothèse : modèle non-linéaires  
bruit non-gaussien

## Filtre de Kalman

- Rudolf Kalman et Rulsan Stratonovich ont développé le filtre de Kalman.
- Il a été appliqué pour la première fois dans le cadre du projet Apollo pour suivre les vaisseaux spatiaux habités jusqu'à la lune et en revenir.
  
- Aujourd'hui, il est couramment utilisé dans :
  - le guidage
  - les systèmes de contrôle
  - les systèmes de vision par ordinateur
  - la prévision de séries chronologiques
  - ...

# Filtre de Kalman

➤ Hypothèses :

- Les modèles d'évolution et d'observation sont linéaires.
- Les bruits dans ces modèles sont additifs et gaussiens, avec des moyennes et des covariances connues.

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Modèle d'évolution d'état : } \theta^{k+1} = A \cdot \theta^k + B \cdot G^k + H + w_k \\ \text{Modèle d'observation : } \theta_{obs}^k = C \cdot \theta^k + v_k \end{array} \right.$$

- $w_k$  va permettre de prendre en compte les bruits de modèle
- $v_k$  va permettre de prendre en compte les bruits de capteurs

## Filtre de Kalman : algorithme

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Modèle d'évolution d'état : } \mathbf{X}_k = \mathbf{F}_k \mathbf{X}_{k-1} + \mathbf{S}_k + \mathbf{v}_{k-1} \\ \text{Modèle d'observation : } \mathbf{Z}_k = \mathbf{H}_k \mathbf{X}_k + \mathbf{n}_k \end{array} \right.$$

- Estimer  $\hat{\mathbf{X}}_k$  sachant les modèles d'évolution et d'observation

**Prédiction :**

$$\begin{aligned} \hat{\boldsymbol{\mu}}_{k|k-1} &= \mathbf{F}_k \hat{\boldsymbol{\mu}}_{k-1|k-1} + \mathbf{S}_k \\ \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k|k-1} &= \mathbf{F}_k \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k-1|k-1} \mathbf{F}_k^T + \mathbf{Q}_k \end{aligned}$$

**Mise à jour :**

$$\begin{aligned} \mathbf{K}_k &= \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T \left( \mathbf{H}_k \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k|k-1} \mathbf{H}_k^T + \mathbf{R}_k \right)^{-1} \\ \hat{\boldsymbol{\mu}}_{k|k} &= \hat{\boldsymbol{\mu}}_{k|k-1} + \mathbf{K}_k \left( \mathbf{Z}_k - \mathbf{H}_k \hat{\boldsymbol{\mu}}_{k|k-1} \right) \\ \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k|k} &= (\mathbf{I} - \mathbf{K}_k \mathbf{H}_k) \hat{\boldsymbol{\Sigma}}_{k|k-1} \end{aligned}$$

## Adaptation du filtre de Kalman pour l'identification des défaillances

- Pour estimer le vecteur d'entrée  $\mathbf{G}^k$ , une approche consiste à reformuler le filtre de Kalman de telle sorte que le **vecteur d'entrée soit inclus dans le vecteur d'état** :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\theta}^{k+1} = \mathbf{A} \cdot \boldsymbol{\theta}^k + \mathbf{B} \cdot \mathbf{G}^k + \mathbf{H} + \mathbf{w}_k \\ \boldsymbol{\theta}_{obs}^k = \mathbf{C} \cdot \boldsymbol{\theta}^k + \mathbf{v}_k \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}^{k+1} \\ \mathbf{G}^{k+1} \end{bmatrix} = \mathbf{A}' \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}^k \\ \mathbf{G}^k \end{bmatrix} + \mathbf{H}' + \mathbf{w}'_k \\ \boldsymbol{\theta}_{obs}^k = \mathbf{C}' \cdot \begin{bmatrix} \boldsymbol{\theta}^k \\ \mathbf{G}^k \end{bmatrix} + \mathbf{v}_k \end{cases}$$

Où :

$$\mathbf{A}' = \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{0} & \mathbf{I} \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \mathbf{C}' = \begin{bmatrix} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{bmatrix}$$

## Adaptation du filtre de Kalman pour l'identification des défaillances

$$\begin{cases} \theta^{k+1} = A \cdot \theta^k + B \cdot G^k + H + w_k \\ \theta_{obs}^k = C \cdot \theta^k + v_k \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \theta^{k+1} \\ G^{k+1} \end{bmatrix} = A' \cdot \begin{bmatrix} \theta^k \\ G^k \end{bmatrix} + H' + w'_k \\ \theta_{obs}^k = C' \cdot \begin{bmatrix} \theta^k \\ G^k \end{bmatrix} + v_k \end{cases}$$

$$A' = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C' = [C \quad 0]$$

- Pour  $w_k'$ , on peut le définir comme étant une variable gaussienne multivariée, de moyenne nulle et de matrice de variance-covariance

$$\mu_{w'} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Sigma_{w'} = \begin{bmatrix} \sigma_{\theta_{1,1}}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{\theta_{i,j}}^2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{\theta_{I,J}}^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{g1}^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \sigma_{g2}^2 \end{bmatrix}$$

## Adaptation du filtre de Kalman pour l'identification des défaillances

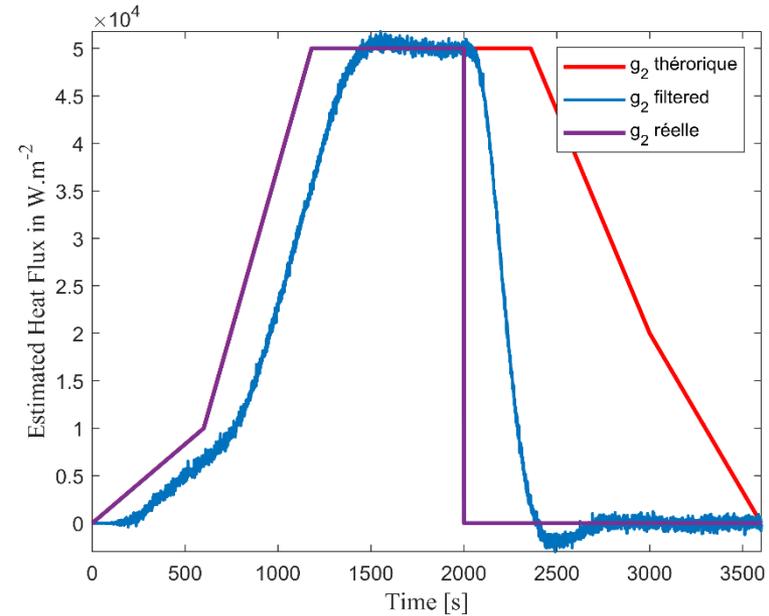
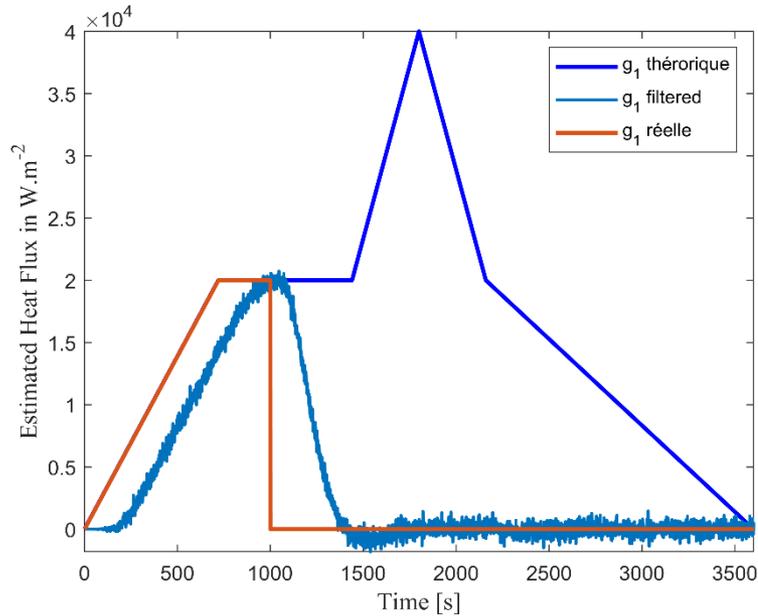
$$\begin{cases} \theta^{k+1} = A \cdot \theta^k + B \cdot G^k + H + w_k \\ \theta_{obs}^k = C \cdot \theta^k + v_k \end{cases} \longrightarrow \begin{cases} \begin{bmatrix} \theta^{k+1} \\ G^{k+1} \end{bmatrix} = A' \cdot \begin{bmatrix} \theta^k \\ G^k \end{bmatrix} + H' + w'_k \\ \theta_{obs}^k = C' \cdot \begin{bmatrix} \theta^k \\ G^k \end{bmatrix} + v_k \end{cases}$$

$$A' = \begin{bmatrix} A & B \\ 0 & I \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad C' = [ C \quad 0 ]$$

- Pour  $v_k$ , on peut le définir comme étant une variable gaussienne multivariée (de dimension 3), de moyenne nulle et de matrice de variance-covariance fonction des capteurs

$$\mu_v = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad \Sigma_v = \begin{bmatrix} \sigma_{C_1}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_{C_2}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_{C_3}^2 \end{bmatrix}$$

## Exemple de résultats obtenus par filtrage de Kalman (en ligne)

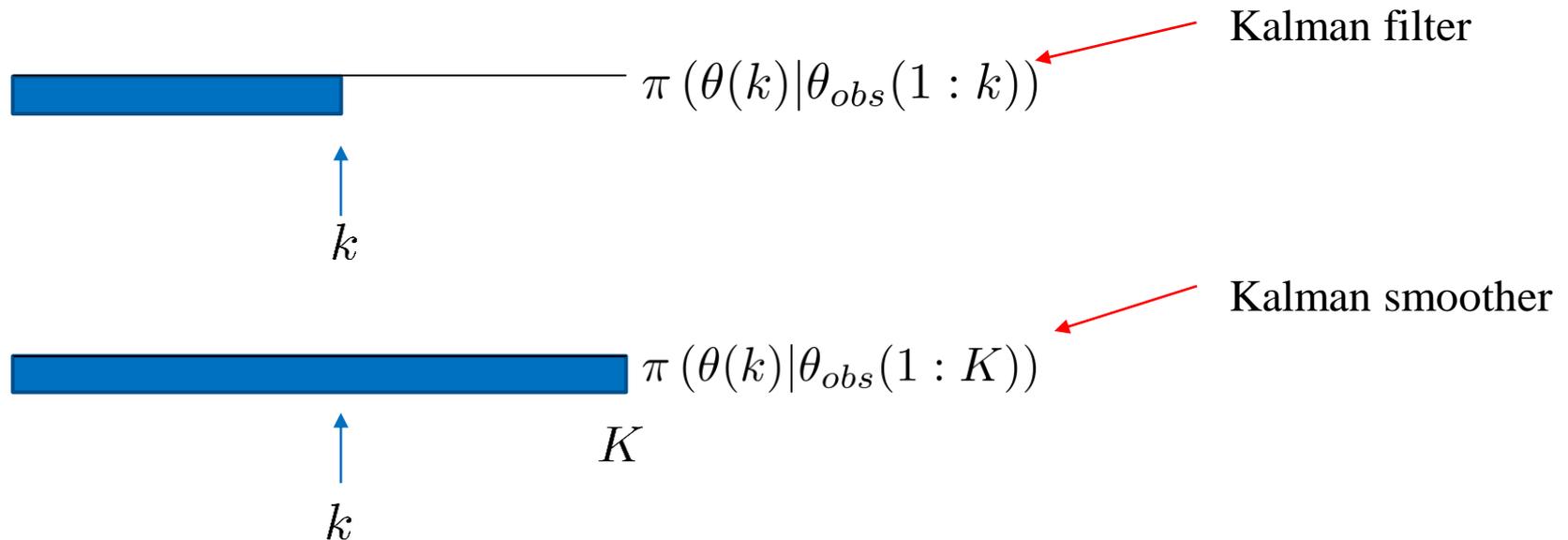


Avec :  $\Delta t = 1\text{ s}$  et  $\Delta t_{cap} = 9\text{ s}$

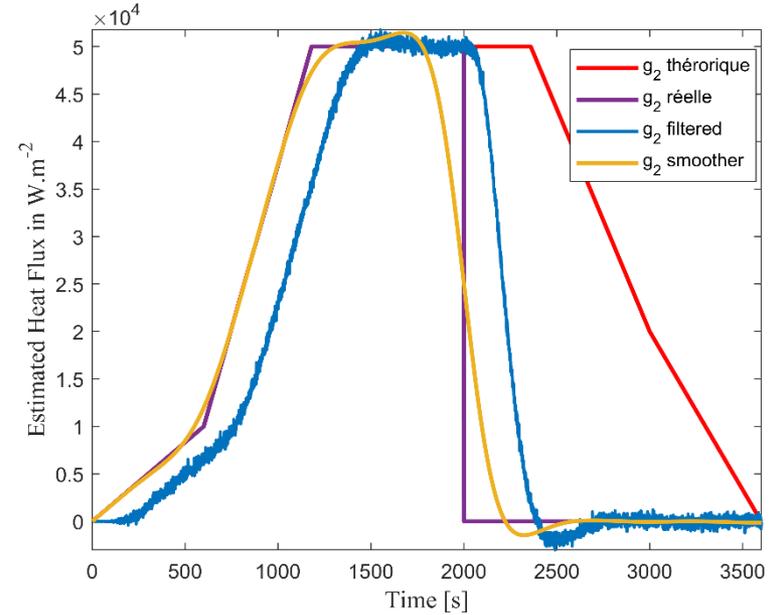
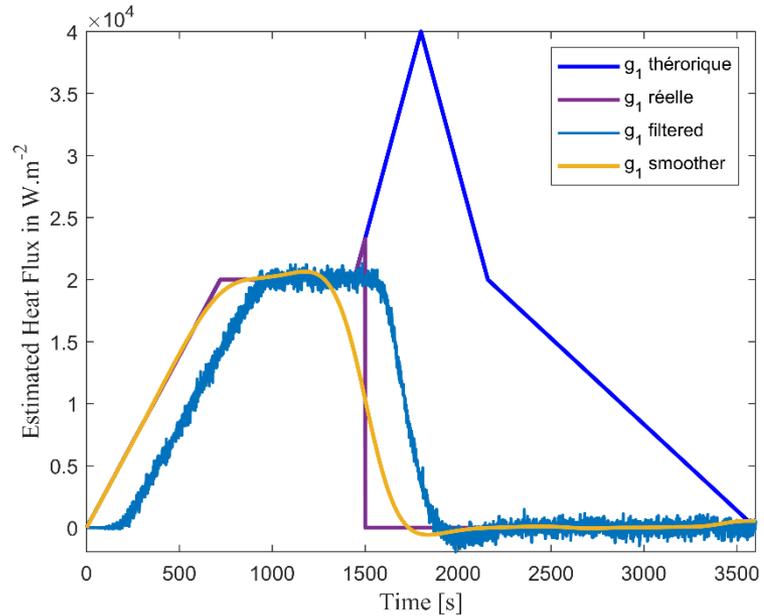
$$\sigma_{C_i} = 0.1^\circ \quad \sigma_{\theta_i} = 2^\circ \quad \sigma_{g_i} = 50000/6$$

## Approche hors ligne : Lissage de Kalman (Kalman smoother)

- Si on travaille en hors ligne, on peut attendre d'avoir toutes les observations et estimer alors  $G$  sur toute la séquence :



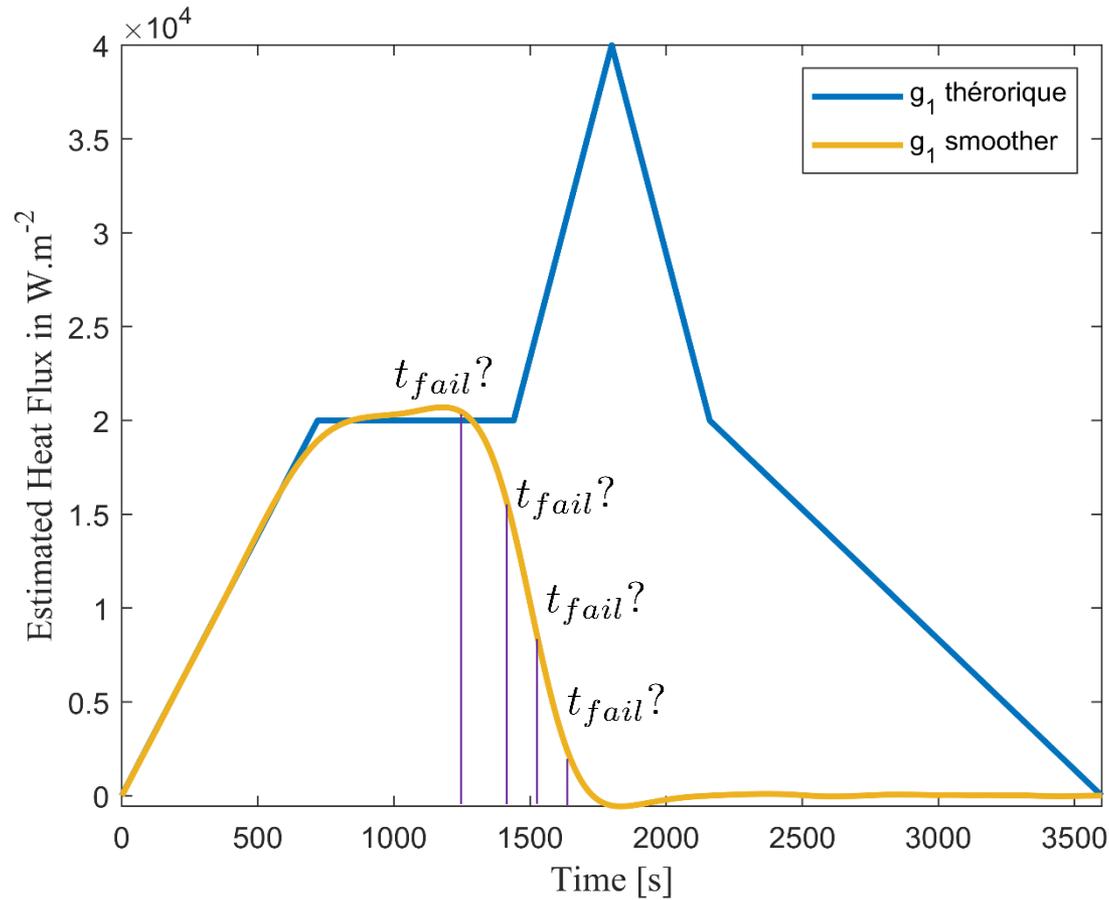
## Exemple de résultats obtenus par Lissage de Kalman (hors ligne)



Avec :  $\Delta t = 1\text{s}$  et  $\Delta t_{cap} = 9\text{s}$

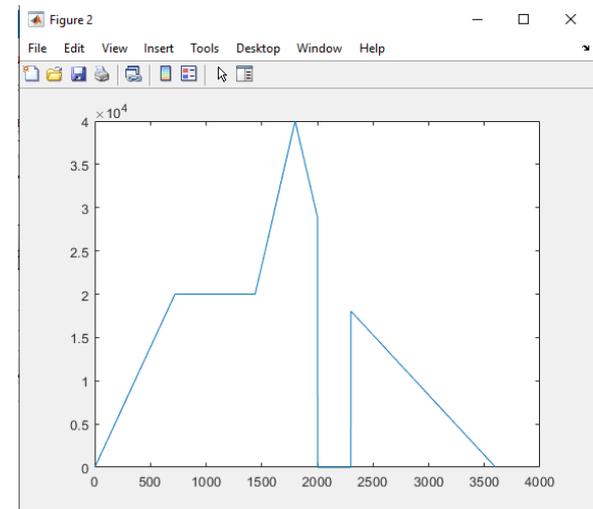
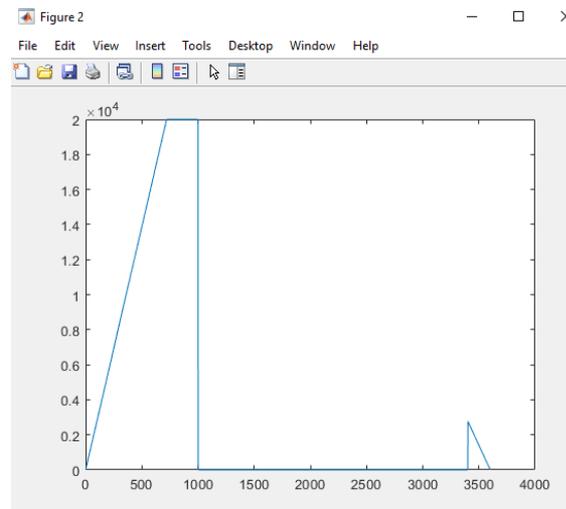
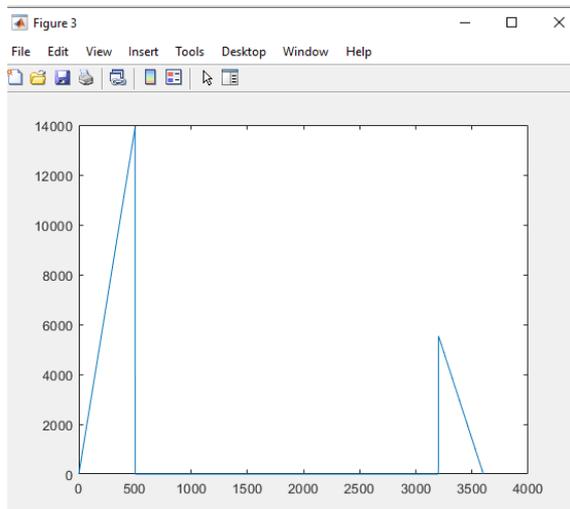
$$\sigma_{C_i} = 0.1^\circ \quad \sigma_{\theta_i} = 2^\circ \quad \sigma_{g_i} = 50000/6$$

➤ Quel instant de défaillance choisir ?

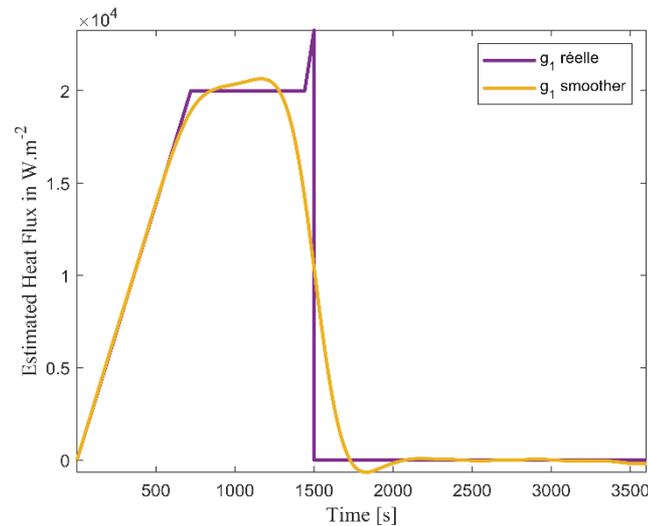


## Stratégie de recherche

- Nous connaissons le signal théorique de chaque source  $g_n(t)$ , l'idée est de construire tous les vecteurs possible  $\chi_{cand}$  ( avec une instant de défaillance  $t_{fail}$  et de redémarrage  $t_{rest}$ ).



- On compare l'erreur carrée entre source estimée  $\hat{g}_n$  par le lissage et  $g_n(t) \times \chi_{cand}$



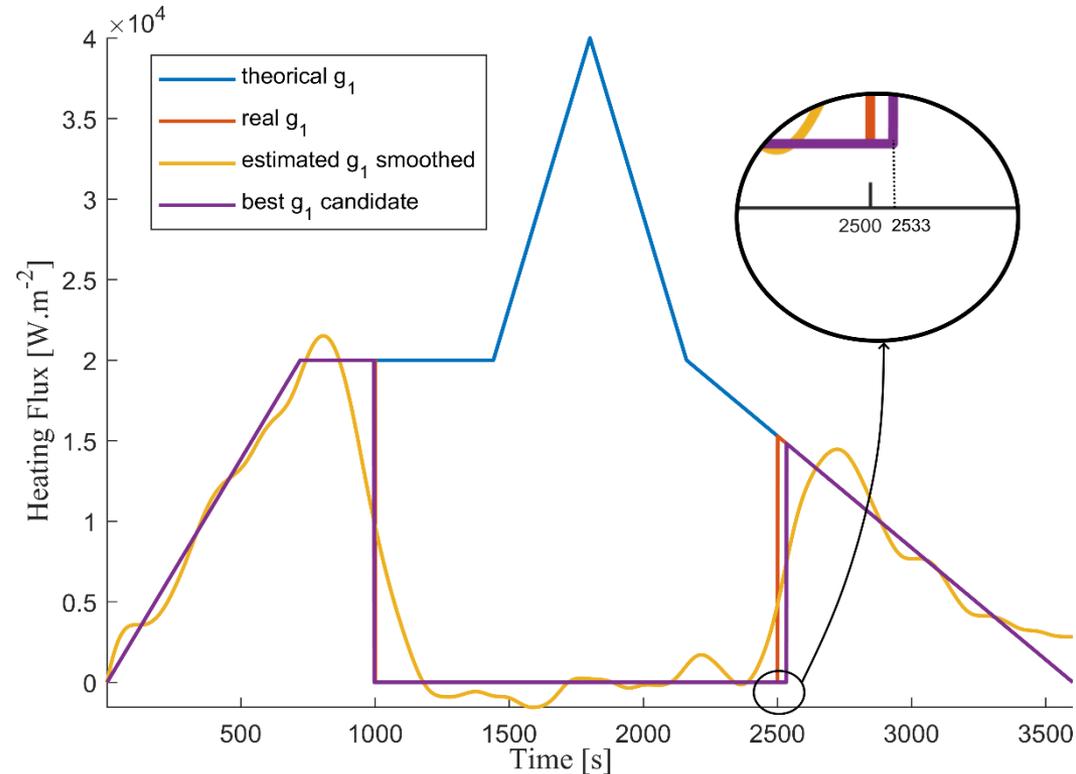
## Exemple de résultat obtenu

- Pour cette configuration, on considère que la première source tombe en panne à  $t=1000s$  puis redémarre à  $t=2500s$

Avec :  $\Delta x = \Delta y = 0.05m$  et  $\Delta t = 1s$

$$\Delta t_{cap} = 9s$$

$$\sigma_{C_i} = 0.1^\circ, \sigma_{\theta_i} = 2^\circ, \sigma_{g_i} = 50000/6$$



$$t_{fail} = 996s \text{ et } t_{rest} = 2533s$$

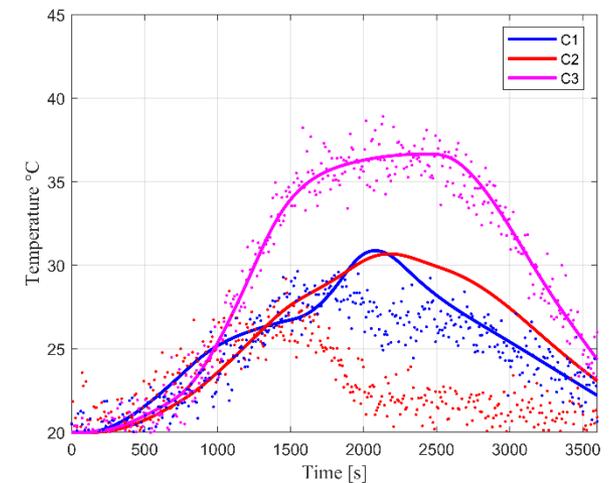
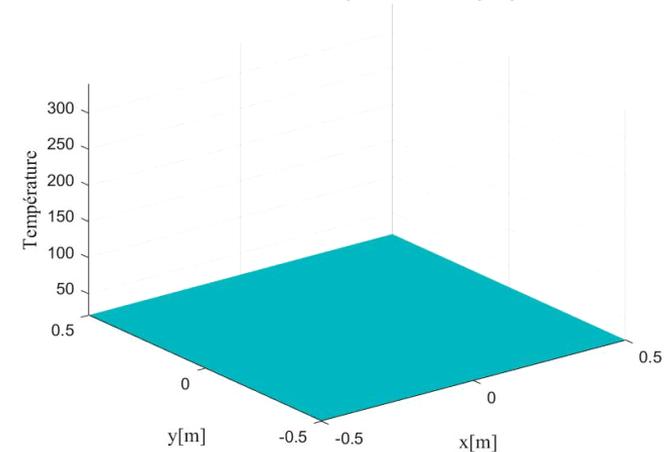
# *Résultats*

## Première configuration : simulation d'une panne de la première source

- Pour cette configuration, on considère que la première source tombe en panne à  $t=1500s$
- Les résultats sont donnés en termes de moyenne et d'écart-type (entre parenthèses) sur 30 simulations.

	Défaillance $t_{fail,1}^1$
$\sigma = 0.1^\circ C$	1500.03(1.426)
$\sigma = 0.5^\circ C$	1499.57(6.961)
$\sigma = 1^\circ C$	1501.30(13.63)

Évolution de la température sur la plaque

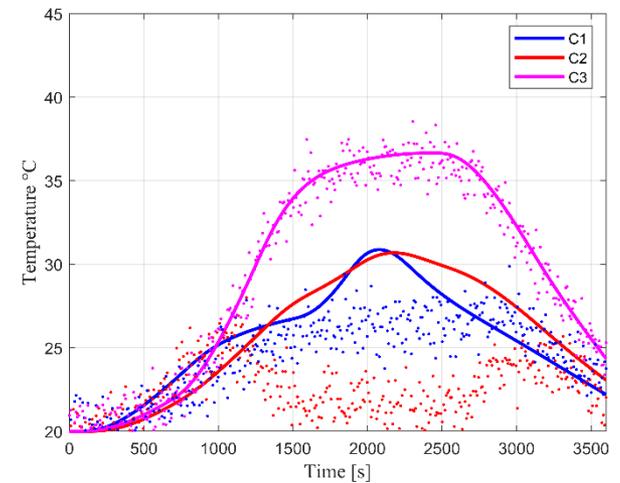
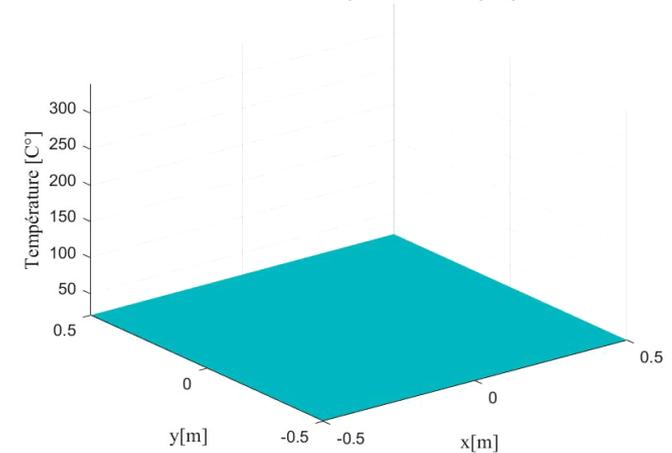


## Seconde configuration : identification de la défaillance et du redémarrage

- Pour cette configuration, on considère que la première source tombe en panne à  $t=1000s$  puis redémarre à  $t=2500s$

	Défaillance $t_{fail,1}^1$	Redémarrage $t_{rest,1}^1$
$\sigma = 0.1^\circ C$	1011.63(1.79)	2514.60(2.27)
$\sigma = 0.5^\circ C$	1013.43(8.29)	2513.27(10.87)
$\sigma = 1^\circ C$	1009.67(16.49)	2518.03(19.74)

Évolution de la température sur la plaque

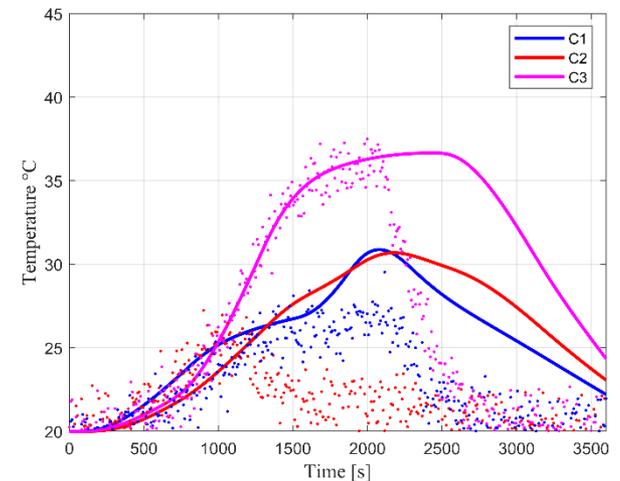
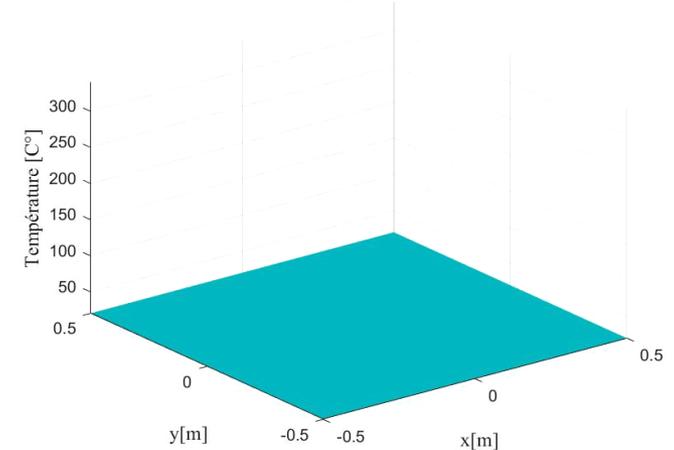


## Troisième configuration : séparation de sources

- Pour cette configuration, on considère que la première source tombe en panne à  $t=1000s$  puis que la seconde source tombe en panne à  $t=2000s$

	Défaillance $t_{fail,1}^1$	Défaillance $t_{fail,2}^1$
$\sigma = 0.1^\circ\text{C}$	1011.87(1.61)	2010.03(0.81)
$\sigma = 0.5^\circ\text{C}$	1009.67(8.78)	2009.63(3.69)
$\sigma = 1^\circ\text{C}$	1021.60(18.51)	2013.67(4.69)

Évolution de la température sur la plaque



## Conclusion et perspectives

Durant ces deux années, les travaux ont porté sur :

- Modélisation des transferts de chaleur (génie thermique)
- Formulation des problèmes inverses de conduction de la chaleur (PICC)
- Résolution de ces PICC par la méthode de régularisation itérative du gradient conjugué (MGC)
- Identification des instants de défaillances pour plusieurs sources fixes avec MGC (hors-ligne)
- Adaptation du filtre de Kalman (FK) pour l'identification des défaillances (hors-ligne + en ligne)

Perspectives :

- Généralisation au cas des sources mobiles (estimation du flux/trajectoire)
- Adaptation de la méthode (MGC) pour une identification quasi en ligne
- Comparaison entre les deux approches déterministes et probabilistes

***Merci pour votre attention!***

**Une application de la technique de lissage de Kalman à  
l'identification des instants de défaillance pour un système décrit  
par une EDP parabolique**

- **Mohamed Salim BIDOU**
- Laurent AUTRIQUE, Laetitia PEREZ, Sylvain VERRON
- LARIS - Laboratoire Angevin de Recherche en Ingénierie des Systèmes,
  - 62 avenue Notre Dame du Lac, 49000 Angers, France.