École doctorale STIM

Modélisation et commande de systèmes à événements discrets dans l'algèbre $(\max, +)$

Mémoire

soutenu le 26 Juin 2015

pour l'obtention d'une

Habilitation à Diriger des Recherches
de l'Université d'Angers

(Sciences de l'Information et de la Communication)

par

Bertrand Cottenceau

Composition du jury

Président :	Jean-Jacques Loiseau
Rapporteurs :	Stéphane GAUBERT (DR INRIA Saclay) Alessandro GIUA (PR LSIS Université de Marseille) Jean-Jacques LESAGE (PR LURPA ENS de Cachan)
Examinateurs :	Laurent HARDOUIN (PR LARIS Université d'Angers) Jean-Jacques LOISEAU (DR CNRS IRCCyN Nantes)

LARIS EA 7315

Mis en page avec la classe thesul.

Sommaire

Résumé

Les systèmes max-plus linéaires constituent une classe de systèmes à événements discrets (SED) pour lesquels il existe des modèles linéaires (représentation d'état ou de type entrée-sortie) analogues dans la forme à ceux utilisés dans la théorie des systèmes linéaires conventionnelle. Cette approche permet de considérer des problèmes de modélisation et de contrôle, adaptés à certaines classes de systèmes (systèmes manufacturiers avec des synchronisations, systèmes de transport avec correspondance, modèles d'échanges de données dans des réseaux informatiques), ceci dans l'esprit de l'automatique linéaire. Les travaux que nous avons menés dans ce thème ont principalement concerné la modélisation, la simulation, l'élaboration d'outils de calcul et la synthèse de lois de commande pour des systèmes décrits par des Graphes d'Evénements Temporisés (GET), ou par des classes de réseaux de Petri englobant les GET. L'accent a été mis notamment sur la possibilité de modéliser différents phénomènes, non nécessairement linéaires dans max-plus, par des approximations à l'aide d'intervalles. Ces intervalles décrivent des bornes sur les comportements possibles du système considéré. Des problématiques de commande originales découlent ensuite de cette approche : comment élaborer une loi de commande qui ait de bonnes propriétés pour tout comportement dans l'intervalle ? Quel effet la loi de commande a-t-elle sur l'incertitude liée à l'approximation intervalle ? Un autre aspect a concerné l'étude des GET valués, c'est-à-dire des modèles aptes à modéliser, outre les phénomènes déjà décrits par les GET, des opérations de groupement/dégroupement. Il a été montré que leur comportement peut être décrit au moyen d'expressions rationnelles utilisant des opérateurs élémentaires. Les modèles entrée-sortie ainsi obtenus permettent d'aborder des structures de commande directement adaptées de celles mises en œuvre pour les systèmes max-plus linéaires stationnaires.

Notations

Ensemble Σ_c : ensemble des fonctions compteurs (fonctions monotones non décroissantes)
Ensemble Σ_d : ensemble des fonctions dateurs (fonctions monotones non décroissantes)
Dioïde $(\overline{\mathbb{Z}}, \max, +)$ **(algèbre (max,+))** : semi-anneau idempotent dont l'opération somme est le max et l'opération produit est la somme classique +
Dioïde $(\overline{\mathbb{Z}}, \min, +)$ **(algèbre (min,+))** : semi-anneau idempotent dont l'opération somme est le min et l'opération produit est la somme classique +
Dioïde $(\Sigma_c, \min, \circledast)$: semi-anneau idempotent dont les éléments sont des fonctions compteurs, la somme est le min de fonctions et le produit est l'inf-convolution.
Dioïde $(\Sigma_d, \max, \circledast)$: semi-anneau idempotent dont les éléments sont des fonctions dateurs, la somme est le max de fonctions et le produit est la sup-convolution.
Opérateurs : δ^t (décalage temporel), γ^n (décalage événementiel), μ_m (multiplication événementielle) et β_b (division événementielle)
Dioïde $\mathcal{O}$: semi-anneau des opérateurs (définis sur Σ_c) additifs muni du min et de la composition $\circ$.
Dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$: dioïde de séries formelles en variables γ et δ, à exposants dans $\mathbb{Z}$ et coefficients booléens. Il y a correspondance entre les séries γ^1 et δ^1 et les opérateurs ci-dessus.
Dioïde $\mathcal{E}$ **(opérateurs événementiels)** : sous-dioïde de $\mathcal{O}$ dont les éléments sont des opérateurs obtenus par un nombre fini de somme (min) et de compositions d'opérateurs dans l'ensemble $\{\gamma^n, \mu_m, \beta_b\}$. Un élément de $\mathcal{E}$ est appelé E-opérateur dans le mansucrit.
Dioïde $\mathcal{E}_{per}$: dioïde des opérateurs événementiels périodiques.
Dioïde $\mathcal{E}_{per}^*[\![\delta]\!]$: dioïde de séries formelles en la variable δ, à exposants dans $\mathbb{Z}$ et à coefficients dans le dioïde $\mathcal{E}_{per}$
Résiduation du produit : les opérations $\backslash\!\circ$ et $\circ\!/$ représentent l'opération résiduée du produit à gauche et à droite dans un dioïde complet. Lorsque l'on considère le dioïde $(\Sigma_c, \min, \circledast)$, on parle aussi de déconvolution (Network Calculus).
GET (Graphes d'Evénéments Temporisés) : Réseaux de Petri avec des temps de séjour entiers sur les places et tels que toute place n'a qu'une transition en amont et en aval.
GET-V (GET Valués) : GET avec des arcs ayant des poids entiers positifs.
GET-VE (GET Valués Equilibrés) : GET valués dont la structure satisfait une propriété d'équilibre : les chemins parallèles ont le même gain.

GET-CV (GET Cyclo-Valués) : GET valués dont les valuations évoluent à chaque tir des transitions. Les valuations changent selon des séquences cycliques.
SDF (Synchronous Dataflow Graphs) ou Graphes Flots de Données : modèle graphique utilisé pour décrire l'exécution parallèle de tâches informatiques produisant et consommant des données. Modèle équivalent aux GET-V.
CSDF (Cyclo Static DataFlow) : SDF tels que les consommations et les productions de données sont variables au fil des activations des tâches, mais en respectant une séquence cyclique.

Remerciements

Je voudrais en premier lieu remercier Stéphane Gaubert, Alessandro Giua, Jean-Jacques Lesage et Jean-Jacques Loiseau pour avoir accepté de participer au jury de cette habilitation et pour l'ensemble de leurs remarques et commentaires, avant et à l'issue de la soutenance.

Je tiens à adresser un remerciement tout particulier à Laurent Hardouin qui a d'abord été mon encadrant de thèse et qui, après mon recrutement comme enseignant-chercheur, a continué à me prodiguer conseils et encouragements. Un grand merci à toi.

Merci à tous les étudiants avec qui j'ai eu la chance de travailler : Sébastien, Nicolas, Aurélien, Abderrezak, Olivier, Euriell, Mohamed, Karim, (sans oublier les Berlinois) Johannes, Thomas, Xavier et Soraia.

Une mention particulière pour tous les automaticiens/informaticiens du troisième étage de l'ISTIA qui se caractérisent par une disponibilité sans faille, notamment à l'heure de la pause café.

Enfin (last but not least), un immense merci à toi, Valérie, qui en plus de m'avoir soutenu et encouragé à présenter ce travail, m'aides encore (très, trop) souvent à palier mes lacunes en anglais.

Introduction

Ce mémoire décrit mon implication en recherche (encadrements et travaux) depuis mon intégration à l'ISTIA en 2000.

Dans le Chapitre 1, mon CV est détaillé. Il décrit de façon générale les thèmes abordés, les étudiants encadrés dans leur formation à la recherche, ainsi que les fonctions administratives que j'ai occupées depuis mon recrutement. Enfin, il contient les références bibliographiques des communications dont je suis co-auteur.

Dans les chapitres suivants, je présente des travaux qui me paraissent représentatifs de mon activité de recherche. Le Chapitre 2 contient des rappels permettant de situer le contexte des travaux présentés par la suite. Sont fournis les principaux éléments de modélisation des systèmes à événements discrets dans des semi-anneaux idempotents (structures algébriques également appelées dioïdes). Le Chapitre 3 regroupe des travaux ayant en commun d'utiliser une modélisation sur un dioïde d'intervalles. La modélisation du comportement des Graphes d'Evénéments Temporisés Valués sur des dioïdes fait l'objet du Chapitre 4. Enfin, des travaux relatifs à la commande de systèmes sont exposés dans le Chapitre 5.

La dernière partie de ce manuscrit est constituée des perspectives de travaux envisagés ainsi que de trois communications.

Chapitre 1

Présentation Synthétique

1.1 Curriculum Vitae

Bertrand Cottenceau
Né le 2 mars 1973 à Cholet (49)
Vie maritale, 1 enfant

ISTIA - LARIS
62, avenue Notre-Dame du Lac
49000 Angers
02 44 68 75 63
`bertrand.cottenceau@univ-angers.fr`

1.1.1 Titres universitaires

1999 Doctorat de l'Université d'Angers (laboratoire LISA), spécialité Automatique et Informatique Appliquée.
Mémoire intitulé *"Contribution à la commande des systèmes à événements discrets : synthèse de correcteurs pour les graphes d'événements temporisés dans les dioïdes."*
Thèse préparée sous la direction de Laurent Hardouin et soutenue le 5 Octobre 1999 devant le jury suivant : Christian Commault (rapporteur), Guy Cohen (rapporteur), Alain Bourjault (président), Edouard Wagneur, Jean-Louis Ferrier, Jean-Jacques Loiseau, Laurent Hardouin.

1996 D.E.A. de l'Ecole Centrale de Nantes/Université de Nantes, spécialité Automatique et Informatique Appliquée. Stage de recherche au laboratoire LISA sous la responsabilité de L. Hardouin.

1.1.2 Fonctions occupées

Depuis 2000 Maître de conférences : enseignant à l'Institut des Sciences et Techniques de l'Ingénieur d'Angers (ISTIA), école d'ingénieurs de l'Université d'Angers ; chercheur au

Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés (LISA) EA 4094 jusqu'en 2014, puis au Laboratoire Angevin de Recherche en Ingénierie des Systèmes (LARIS) EA 7315.

1999 - 2000 Attaché temporaire d'enseignement et de recherche (ATER) : enseignant à l'ISTIA, chercheur au LISA.

1996 - 1999 Doctorant au LISA ; **moniteur** à l'ISTIA.

1.1.3 Activités pédagogiques

Depuis mon recrutement, mes enseignements relèvent du génie informatique et de l'automatique : architecture des ordinateurs, systèmes programmables à base de micro-contrôleurs, programmation en langage C, programmation orientée objet en C++ et en C#, asservissements linéaires, simulation de systèmes à événements discrets. Ces dernières années, ma charge d'enseignement a été en moyenne de 240 heures equivalent TD par an. Je suis intervenu très majoritairement au niveau master/cycle ingénieur, mais également dans le cycle préparatoire de l'ISTIA.

1.1.4 Activités administratives

Depuis 2012 Responsable de la filière et de l'option Automatique et Génie Informatique de l'ISTIA, école d'ingénieurs de l'Université d'Angers
[`http://www.istia.univ-angers.fr`].
L'équipe pédagogique de la filière se compose en 2014-2015 de : 4 Pr, 10 MCF, 1 ATER, 3 doctorants moniteurs et environ 20 vacataires.
L'option, qui correspond aux deux dernières années du cycle ingénieur à l'ISTIA, est suivie en 2014-2015 par 81 élèves ingénieurs.

2008- 20012 Responsable de la deuxième année du cycle ingénieur (Bac+4) de l'option AGI Automatique et Génie Informatique de l'ISTIA

2006- 2008 Responsable de l'année Master 1 (Bac+4) IAIE (Ingénierie Automatique et Informatique d'Entreprise) de l'ISTIA

2001 - 2006 Responsable de l'année IUP3 (Bac+4) conduisant au diplôme de maîtrise en Génie des Systèmes Industriels option Automatisation et Informatisation de l'ISTIA

Depuis 2001 Membre élu de la commission de spécialistes/du comité consultatif 60-63-ièmes sections de l'Université d'Angers et ponctuellement membre extérieur pour la commission de spécialistes de l'université de Nantes.

2014 - Membre élu du conseil de laboratoire du LARIS.

2010 - 2011 Membre nommé au Conseil National des Universités section 61.

1.2 Activités de recherche

1.2.1 Thèmes abordés

Depuis mon recrutement à l'université d'Angers en 2000, mon travail de recherche a principalement porté sur l'étude des Systèmes à Evénements Discrets (SED) Temporisés, en particulier avec les outils algébriques issus de la *Théorie des Systèmes Linéaires sur des Dioïdes*. Parmi ces travaux qui relèvent d'une thématique très spécifique, je pourrais néanmoins distinguer les aspects suivants.

– **Modélisation** : beaucoup des travaux auxquels j'ai participé relèvent de problèmes de modélisation. L'objectif a souvent été de chercher à réutiliser la théorie des systèmes (max,+) linéaires, qui s'applique idéalement à la classe des Graphes d'Evénements Temporisés (GET), pour tenter de modéliser d'autres phénomènes. Ces problèmes de modélisation concernent une part importante des travaux menés par Olivier Boutin [Boutin et al., 2009b] [Boutin et al., 2011] et Euriell Le Corronc [Le Corronc et al., 2014]. Une solution étant d'approcher des phénomènes dynamiques non linéaires dans (min,+) par des encadrements. Ceci reprend l'idée des travaux de Mehdi Lhommeau [Lhommeau et al., 2004]. Dans ce thème de la modélisation, on peut également citer les travaux sur les GET valués qui forment également une classe de SED non linéaires dans (max,+) mais pour lesquels il existe un modèle entrée-sortie sur un dioïde [Cottenceau et al., 2014a].
– **Simulation de SED** : la collaboration avec Anne l'Anton et Jean-Jacques Loiseau de l'IRCCyN, durant la thèse d'Olivier Boutin, nous a permis de nous intéresser aux outils de simulation des SED temporisés. On a notamment développé des outils logiciels capables d'interagir avec des simulateurs de SED. Ces développements ont été réalisés pour démontrer comment les correcteurs (max,+) linéaires, synthétisés de façon théorique, pouvaient être concrètement mis en oeuvre. L'expérience a consisté à réaliser un simulateur de système manufacturier sur l'outil Rockwell Arena © dont certains événements étaient conditionnés par des autorisations venant d'un correcteur (max,+) linéaire (programme C++ dialoguant en temps-réel avec le simulateur). Ces outils ont été présentés dans [Boutin et al., 2006] [Boutin et al., 2007c] [Boutin et al., 2007b] et réutilisés dans [Cottenceau et al., 2008].
– **Commande de SED** : la commande de SED dans des algèbres de type (max,+) était au coeur de mon travail de thèse [Cottenceau et al., 1999] [Cottenceau et al., 2001b]. J'ai continué à m'intéresser à cet aspect après ma thèse [Cottenceau et al., 2006], notamment au cours de travaux avec Rafael Santos Mendes [Santos-Mendes et al., 2005], avec Sébastien Lahaye et Aurélien Correia [Lahaye et al., 2004b], durant la thèse d'Euriell Le Corronc [Le Corronc et al., 2009b] [Le Corronc et al., 2010a] et au cours de travaux avec Laurent Hardouin [David-Henriet et al., 2013] [Hardouin et al., 2007] [Hardouin et al., 2010a].
– **Outils logiciels pour les SED** : nous avons souvent développé des outils logiciels spécifiques, même si c'est un aspect qui est peu valorisé dans les communications. Dans ce registre, on peut citer les outils en lien avec la simulation de SED [Boutin et al., 2007c] [Boutin et al., 2007b], la librairie de calcul approché en C++ pour les systèmes (min,+) [Le Corronc et al., 2014], et une librairie de calcul en C++ pour les GET valués disponible

sous la forme d'un interpréteur.

En dehors de la thématique des SED, j'ai participé au co-encadrement de thèse de Nicolas Delanoue, avec Luc Jaulin (PR ENSTA), dont les travaux ont porté sur les méthodes ensemblistes (calcul par intervalles). Les travaux de Nicolas Delanoue ne seront pas détaillés dans ce manuscrit bien que l'approche ensembliste ait eu une influence évidente sur certains travaux liés aux SED, en particulier s'agissant des conteneurs introduits par Euriell Le Corronc.

1.2.2 Encadrement doctoral et scientifique

Depuis mon recrutement, j'ai pu participer à l'encadrement de 9 étudiants en thèse de doctorat ou en master recherche.

[T1] **M. Nicolas Delanoue** (encadrement à 50%) a obtenu le doctorat de l'Université d'Angers, spécialité Automatique et Informatique, en 2006 (co-encadrant : Luc Jaulin PR ENSTA Bretagne ; rapporteurs : M. Petitot et F.Benhamou)

Un premier aspect du travail de Nicolas Delanoue [Delanoue, 2006] a consisté à utiliser l'analyse par intervalles (analyse numérique) pour obtenir des invariants topologiques sur des ensembles. Un autre aspect a concerné l'analyse de systèmes dynamiques, linéaires ou non, afin de calculer des ensembles (voisinage) contenus dans le bassin d'attraction des points asymptotiquement stables. L'analyse par intervalles est alors appliquée à l'intégration numérique garantie, ceci afin d'évaluer l'évolution de l'état d'un système dynamique .

Ces travaux ont été présentés dans [Delanoue et al., 2004] [Delanoue et al., 2006c] [Delanoue et al., 2006a] [Delanoue et al., 2007] [Delanoue et al., 2006b] [Delanoue et al., 2014]. Nicolas Delanoue est actuellement Maître de Conférences à l'IUT d'Angers, au sein du département GEII, et membre du laboratoire LARIS.

[T2] **M. Olivier Boutin** (encadrement à 50%) a obtenu le doctorat de l'Ecole Centrale de Nantes, spécialité Génie Informatique, Automatique et Traitement du Signal, en 2009 (co-encadrants : J.J. Loiseau et A. L'Anton IRCCyN ; rapporteurs : S. Gaubert et I. Demongodin)

Les travaux d'Olivier Boutin [Boutin, 2009] ont porté sur la modélisation, la simulation et l'analyse de performance des Systèmes à Evénements Discrets. Dans sa thèse, certains phénomènes dynamiques qui ne relevaient pas de la classe des systèmes (max,+) linéaires ont été approchés (englobés) par des intervalles. Les bornes de l'intervalle décrivent deux systèmes (max,+) dont la dynamique est pour l'un plus rapide pour l'autre plus lente que la dynamique du système modélisé. Cette approche a permis d'élargir la classe des systèmes que l'on peut étudier par la théorie des dioïdes, ceci au prix d'une approximation. Par ailleurs, certains développement d'outils de simulation/émulation ont été réalisés, notamment dans le domaine de la mise en oeuvre pratique de contrôleurs (max,+) linéaires. Un système de transport automatisé de l'ISTIA (cf. Annexe) a en particulier été le support à des mises en oeuvre réelles, ceci avec l'aide d'étudiants de l'option Automatique et Génie Informatique de l'ISTIA.

Les travaux d'Olivier Boutin ont fait l'objet des communications suivantes : [Boutin et al., 2006] [Boutin et al., 2007c] [Boutin et al., 2007b] [Boutin et al., 2007a]

[Boutin et al., 2008b] [Boutin et al., 2008a] [Boutin et al., 2009b] [Boutin et al., 2009a] [Boutin et al., 2011] [Boutin and L'Anton, 2011].

[M1] **Mlle. Euriell Le Corronc** a obtenu le Master 2 Recherche de l'Ecole d'Ingénieurs ISTIA Angers - Université d'Angers, spécialité Systèmes Dynamiques et Signaux , en 2008 ;

[T3] **Mlle. Euriell Le Corronc** (encadrement à 60%) a obtenu le doctorat de l'Université d'Angers, spécialité Automatique et Génie Informatique, en 2011 (co-encadrant : L. Hardouin ; rapporteurs : B. Gaujal et J.J. Lesage)

Les travaux menés par Euriell Le Corronc [Le Corronc, 2011] ont eu pour objet tout d'abord l'élaboration d'outils de calcul approché efficaces pour les systèmes (min,+) linéaires. Elle a proposé des opérations sur des *conteneurs*, c'est-à-dire des ensembles contenant la fonction de transfert d'un système dynamique (min,+) linéaire. Elle a développé pour cela une bibliothèque C++ implémentant les fonctions d'inclusion des opérations min, inf-convolution et étoile de Kleene opérant sur des conteneurs. Ensuite, elle a abordé des problèmes de contrôles adaptés aux systèmes (min,+) linéaires avec des incertitudes, c'est-à-dire dont la dynamique est linéaire et stationnaire, mais dont on ne connaît qu'une approximation. Les résultats de commande sont donc complètement adaptés aux conteneurs introduits précédemment.

Ces travaux ont fait l'objet des communications suivantes : [Le Corronc et al., 2009b] [Le Corronc et al., 2009a] [Le Corronc et al., 2009c] [Le Corronc et al., 2010a] [Le Corronc et al., 2010b] [Le Corronc et al., 2011] [Le Corronc et al., 2012] [Le Corronc et al., 2014].

Euriell Le Corronc est actuellement Maître de Conférences à l'université de Toulouse 3 et membre de l'équipe DISCO du Laboratoire d'Analyse et d'Architecture des Systèmes (LAAS).

[T4] **M. Johannes Trunk** (encadrement à 60%) a commencé une thèse en Octobre 2014 (co-encadrement avec Laurent Hardouin). Son travail porte sur l'application des outils (max,+) aux systèmes de transport, notamment à l'aide des modèles de type Graphes d'Evénements Temporisés valués et des systèmes à synchronisation partielle développés durant la thèse de Xavier David-Henriet [David-Henriet et al., 2014].

[M2] **M. Sébastien Lagrange** a obtenu le DEA de l'Ecole Centrale de Nantes - Université de Nantes, spécialité Automatique et Informatique Appliquée, en 2002 (co-encadrant L. Hardouin)

Le sujet de recherche a porté sur l'élaboration de lois de commande pour les Graphes d'Evénements Temporisés permettant la transposition du problème de rejet de perturbation à la classe des systèmes (max,+).
Sébastien Lagrange est actuellement Maître de Conférences à l'ISTIA et membre du LARIS.

[M3] **M. Aurélien Correia** a obtenu le DEA de l'Ecole Centrale de Nantes - Université de Nantes, spécialité Automatique et Informatique Appliquée, en 2004 (co-encadrant S. Lahaye)

Le stage de recherche a eu pour objet principal l'élaboration de lois de commande permettant de satisfaire des contraintes de temps de séjour maximal. Ce type de problème est particulièrement adapté aux systèmes dits à temps critique. Ces travaux ont fait l'objet des communications suivantes [Lahaye et al., 2004b] [Correia et al., 2006].

Aurélien Correia a fait une thèse à l'Université de Technologie de Belfort-Montbéliard (soutenue en 2007) et est actuellement en poste d'ingénieur dans une cellule Recherche et Développement, spécialisée dans les systèmes embarqués.

[M4] **M. Abderrezak Abeka** a obtenu le DEA de l'Ecole Centrale de Nantes - Université de Nantes, spécialité Automatique et Informatique Appliquée, en 2005 (co-encadrant L. Hardouin)

Le stage a été consacré à l'étude de la transformée de Legendre-Fenchel et son application aux systèmes (max,+) linéaires.

[M5] **M. Mohamed Benaïssa** a obtenu le Master 2 Recherche de l'Ecole d'Ingénieurs ISTIA - Université d'Angers, spécialité Systèmes Dynamiques et Signaux , en 2007.

Les travaux du stage ont porté principalement sur la modélisation et la simulation de systèmes de transport.

[M6] **M. Karim Bellir** a obtenu le Master 2 Recherche de l'Ecole d'Ingénieurs ISTIA - Université d'Angers, spécialité Systèmes Dynamiques et Signaux, en 2010.

Les travaux du stage de recherche ont porté principalement sur la simulation de systèmes à événements discrets. Karim travaille actuellement dans la société Orange sur un poste d'ingénieur en Technologies de l'Information.

1.2.3 Animation Scientifique

J'ai fait un séjour de 2 mois (Mai-Juin 2004) au Brésil à l'université de Campinas (UNICAMP) comme chercheur invité. Ce séjour a permis de renforcer les collaborations avec le professeur Rafael S. Mendes (UNICAMP) et avec Carlos A. Maia (Université Fédérale du Minas Gerais, Belo Horizonte). Durant le séjour, nous avons travaillé sur l'utilisation des calculs de résiduation du produit de convolution pour mesurer des écarts entre des trajectoires (théorie du second ordre présentée dans [Cohen et al., 1993]) d'un système (max,+) linéaire. Ce travail a débouché sur une communication [Santos-Mendes et al., 2005]. J'ai également pu faire des exposés à l'université de São Paulo (Institut de Mathématiques et Statistiques), à Curitiba (Univ. Techn. Fédérale du Parana) et à Belo Horizonte (Univ. Féderale du Minas Gerais).

J'ai été membre du comité d'organisation des événements scientifiques suivants :
- Journées Démonstrateurs du Club EAA, Juin 2013, Angers ;
- Journées Démonstrateurs du Club EAA, Novembre 2010, Angers ;
- JD-JN-MACS 2009, journées nationales et doctorales du GDR MACS, Mars 2009, Angers ;
- ICINCO 2007 (4th International Conference on Informatics in Control Automation and Robotics), Mai 2007, Angers ;
- Journées Démonstrateurs du Club EAA, Mars 2006, Angers.

- Cours (en collaboration avec L. Hardouin) sur la commande de systèmes (max,+) dans le cadre de l'école des Journées Doctorales MACS, Mai 2009.

Nous avons participé [1] à l'Action de Recherche Concertée (ARC) INRIA intitulée COINC (COmputational Issues in Network Calculus) en 2006-2007. Cette ARC a débouché sur l'élaboration d'un outil de calcul pour le Network Calculus, réalisé durant le stage Post-Doctoral de S. Lagrange, s'appuyant sur les algorithmes proposés dans [Bouillard and Thierry, 2008]. Les travaux de l'ARC COINC ont également donné lieu à une communication [Bouillard et al., 2009]. Cette ARC été coordonnée par Bruno Gaujal et a réuni (outre les membres du LARIS déjà cités) : A.Bouillard, A.Jean-Marie, L.Jouhet, N. Navet et E. Thierry. Dans la suite de l'ARC COINC, ce domaine d'étude a également été abordé au sein du groupe WEED (Worst End-to-End Delay) de l'AFSEC, groupe animé par Marc Boyer (ONERA Toulouse).

La thèse de J. Trunk, co-encadrée avec Laurent Hardouin et en co-tutelle avec Jörg Raisch de l'Université Technique de Berlin, permet de conforter les liens entre le LARIS et TU Berlin sur le thème des Systèmes à Evénements Discrets. Cette thèse est la quatrième en co-tutelle entre Angers et Berlin.

Evaluation d'articles et de communications : IEEE TAC, Automatica, Int. Jour. of System Science, Control Engineering Practice, Kybernetica, Linear Algebra and its Applications, Conférence CDC, Conférence ACC, Workshop WODES.

1. avec L.Hardouin, M. Lhommeau, E. Le Corronc et S. Lagrange

Articles

[1] Olivier Boutin, Bertrand Cottenceau, Jean Jacques Loiseau, and Anne L'Anton. Shared Resources in Production Systems :(max,plus) Analysis. *International Journal of Mathematics in Operational Research (IJMOR)*, 3(2) :125–147, 2011.

[2] Bertrand Cottenceau, Laurent Hardouin, J-L Boimond, and J-L Ferrier. Synthesis of greatest linear feedback for timed event graphs in dioid. *IEEE Trans. Autom. Control*, 44(6) :1258–1262, 1999.

[3] Bertrand Cottenceau, Laurent Hardouin, and Jean-Louis Boimond. Modeling and control of weight-balanced timed event graphs in dioids. *IEEE Trans. Autom. Control*, 59(5) :1219–1231, 2014.

[4] Bertrand Cottenceau, Laurent Hardouin, Jean-Louis Boimond, and Jean-Louis Ferrier. Model reference control for timed event graphs in dioids. *Automatica*, 37(9) :1451–1458, 2001.

[5] Bertrand Cottenceau, Laurent Hardouin, and I Ouerghi. Kanban policy improvement thanks to a (max,+)-algebra analysis. *International Journal of Systems Science*, 39(7) :689–698, 2008.

[6] Bertrand Cottenceau, Mehdi Lhommeau, Laurent Hardouin, and Jean-Louis Boimond. On timed event graph stabilization by output feedback in dioid. *Kybernetika*, 39(2) :165–176, 2003.

[7] Xavier David-Henriet, Laurent Hardouin, Jörg Raisch, and Bertrand Cottenceau. Holding time maximization preserving output performance for timed event graphs. *IEEE Trans. Autom. Control*, 59(7) :1968–1973, 2014.

[8] Nicolas Delanoue, Luc Jaulin, and Bertrand Cottenceau. Counting the number of connected components of a set and its application to robotics. In *Applied Parallel Computing. State of the Art in Scientific Computing*, pages 93–101. Springer Berlin Heidelberg, 2006.

[9] Nicolas Delanoue, Luc Jaulin, and Bertrand Cottenceau. Using interval arithmetic to prove that a set is path-connected. *Theoretical computer science*, 351(1) :119–128, 2006.

[10] Nicolas Delanoue, Luc Jaulin, and Bertrand Cottenceau. Guaranteeing the homotopy type of a set defined by non-linear inequalities. *Reliable Computing*, 13(5) :381–398, 2007.

[11] Nicolas Delanoue, Luc Jaulin, and Bertrand Cottenceau. An algorithm for computing a neighborhood included in the attraction domain of an asymptotically stable point. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation (à paraître)*, 2014.

[12] Laurent Hardouin, Bertrand Cottenceau, Mehdi Lhommeau, and Euriell Le Corronc. Interval systems over idempotent semiring. *Linear Algebra and its Applications*, 431(5) :855–862, 2009.

[13] Laurent Hardouin, Carlos Andrey Maia, Bertrand Cottenceau, and Mehdi Lhommeau. Observer design for (max, plus) linear systems. *IEEE Trans. on Autom. Control*, 55(2) :538–543, 2010.

[14] Euriell Le Corronc, Bertrand Cottenceau, and Laurent Hardouin. Container of (min,+)-linear systems. *Discrete Event Dynamic Systems*, 24(1) :15–52, 2014.

[15] Mehdi Lhommeau, Laurent Hardouin, Bertrand Cottenceau, and Luc Jaulin. Interval analysis and dioid : application to robust controller design for timed event graphs. *Automatica*, 40(11) :1923–1930, 2004.

[16] Carlos Andrey Maia, Laurent Hardouin, Rafael Santos-Mendes, and Bertrand Cottenceau. Optimal closed-loop control of timed eventgraphs in dioids. *IEEE Trans. on Autom. Control*, 48(12) :2284–2287, 2003.

Conférences internationales

[17] Anne Bouillard, Bertrand Cottenceau, Bruno Gaujal, Laurent Hardouin, Sébastien Lagrange, and Mehdi Lhommeau. Coinc library : a toolbox for the network calculus. In *ValueTools 2009*, page 35, Pise, Italie, 2009.

[18] Olivier Boutin, Bertrand Cottenceau, and Anne L'Anton. Commande de zones de conflits dans une algèbre de dioïde. In *7ème conférence internationale de MOdélisation et de SIMulation (MOSIM'08)*, Paris, France, 2008.

[19] Olivier Boutin, Bertrand Cottenceau, and Anne L'Anton. Dealing with mutual exclusion sections in production systems : from shared resources to parallel TEG's. In *17th IFAC World Congress, IFAC*, volume 8, Séoul, Corée, 2008.

[20] Olivier Boutin, Bertrand Cottenceau, Anne L'Anton, and Jean-Jacques Loiseau. Modelling systems with periodic routing functions in dioid (min,+). In *Information Control Problems in Manufacturing INCOM'09*, Moscou, 2009.

[21] Olivier Boutin, Anne L'Anton, and Bertrand Cottenceau. Emulation as a means of designing an inline-control. In *IMSM07 : International Modeling & Simulation Multiconference 2007*, Buenos Aire, Argentine, 2007.

[22] Olivier Boutin, Anne L'Anton, and Bertrand Cottenceau. Online control of a (max,+) linear emulated production system. In *IESM07 : International Conference on Industrial Engineering and Systems Management*, Pékin, Chine, 2007.

[23] Aurélien Correia, Sébastien Lahaye, and Bertrand Cottenceau. Commande de graphes d'evénements temporisés partiellement commandables avec contraintes temporelles. In *CIFA 2006 (Conférence Internationale Francophone d'Automatique)*, Bordeaux, France, 2006.

[24] Bertrand Cottenceau, Laurent Hardouin, and Jean-Louis Boimond. Dynamic control of a kanban system in dioid algebra. In *IEEE 5th Mediterranean Control Conf.*, Cyprus, July 1997.

[25] Bertrand Cottenceau, Laurent Hardouin, and Jean-Louis Boimond. On Timed Event Graphs Stabilization by Output Feedback in Dioid. In *1st IFAC Symposium on System Structure and Control, Workshop on (max,+) algebras*, Prague, République Tchèque, 2001.

[26] Bertrand Cottenceau, Laurent Hardouin, and Iteb Ouerghi. Evolution of kanban systems thanks to a (max,+)-algebra analysis. In *INCOM'06 (12th IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing*, Saint Etienne, France, 2006.

[27] Bertrand Cottenceau, Sébastien Lahaye, and Laurent Hardouin. Modeling of time-varying (max,+) systems by means of weighted timed event graphs. In *12th IFAC-IEEE Int. Workshop on Discrete Event Systems*, Paris, 2014.

[28] Bertrand Cottenceau, Mehdi Lhommeau, Laurent Hardouin, and Jean-Louis Boimond. Data processing tool for calculation in dioid. In *Proceedings of WODES'2000, Workshop on Discrete Event Systems*, 2000.

[29] Xavier David-Henriet, Laurent Hardouin, Jörg Raisch, and Bertrand Cottenceau. Optimal control for timed event graphs under partial synchronization. *Proceedings of Conf. Decision and Control*, 2013.

[30] Nicolas Delanoue, Luc Jaulin, and Bertrand Cottenceau. Proving that a set is connected via interval analysis. In *Workshop on State-of-the-art in Scientifc Computing Minisymposium, Interval methods, Para'04*, Copenhagen, Denmark, 2004.

[31] Nicolas Delanoue, Luc Jaulin, and Bertrand Cottenceau. Attraction domain of a nonlinear system using interval analysis. *Twelfth International Conference on Principles and Practice of Constraint Programming (IntCP 2006), France, Nantes*, 21, 2006.

[32] Laurent Hardouin, Bertrand Cottenceau, Sébastien Lagrange, and Euriell Le Corronc. Performance analysis of linear systems over semiring with additive inputs. In *Discrete Event Systems, 2008. WODES 2008. 9th International Workshop on*, Goteborg, Sweden, 2008.

[33] Laurent Hardouin, Bertrand Cottenceau, and Euriell Le Corronc. On the dual product and the dual residuation over idempotent semiring of intervals. In *ILAS 2010, International Linear Algebra Society*, Pisa, 2010.

[34] Laurent Hardouin, Euriell Le Corronc, and Bertrand Cottenceau. Minmaxgd a Software Tools to Handle Series in (max,+) Algebra. In *SIAM Conference on Computational Science and Engineering*, Miami, USA, 2009.

[35] Laurent Hardouin, Carlos A Maia, Bertrand Cottenceau, and Mehdi Lhommeau. Observer design for max-plus-linear systems. In *Dependable Control of Discrete Systems*, Cachan, France, 2007.

[36] Laurent Hardouin, Carlos Andrey Maia, Bertrand Cottenceau, and Rafael Santos-Mendes. Max-plus linear observer : application to manufacturing systems. In *10th International Workshop on Discrete Event Systems, WODES*, volume 10, Berlin, Germany, 2010.

[37] Sébastien Lahaye, Bertrand Cottenceau, and A Correïa. Commande de graphes d'événements temporisés avec contrainte de temps critique. In *Proceedings Conf. Internationale Francophone d'Automatique (CIFA'04)*, 2004.

[38] Euriell Le Corronc, Bertrand Cottenceau, and Laurent Hardouin. Control of uncertain (min,+)-linear systems. In *POSTA'09 - 3rd International Symposium on Positive Systems : Theory and Applications*, Valence, Espagne, 2009.

[39] Euriell Le Corronc, Bertrand Cottenceau, and Laurent Hardouin. Control of uncertain (max,+)-linear systems in order to decrease uncertainty. In *WODES'10 - 10th International Worksop On Discrete Event Systems*, Berlin, Allemagne, 2010.

[40] Euriell Le Corronc, Bertrand Cottenceau, and Laurent Hardouin. Flow control with (min,+) algebra. In *ISOLA'10 - Special Session WCTT (Worst Case Traversal Time) - 4th International Symposium On Leveraging Applications of Formal Methods, Verification and Validation*, Heraklion, Crete, 2010.

[41] Euriell Le Corronc, Bertrand Cottenceau, and Laurent Hardouin. Containerminmaxgd : a toolbox for (min,+)-linear systems. In *Workshop on Network Calculus, WoNeCa'12*, Kaiserslautern, Allemagne, 2012.

[42] Mehdi Lhommeau, Laurent Hardouin, and Bertrand Cottenceau. About disturbance decoupling of timed event graphs in dioids. In *Discrete Event Systems, 2002. Proceedings. Sixth International Workshop on*, pages 203–208. IEEE, 2002.

[43] Mehdi Lhommeau, Laurent Hardouin, and Bertrand Cottenceau. Optimal control for (max,+)-linear systems in the presence of disturbances. In *Proceedings of the first International Symposium on Positive Systems : Theory and Applications, POSTA 2003*, Rome, Italie, 2003.

[44] Mehdi Lhommeau, Laurent Hardouin, Bertrand Cottenceau, and Luc Jaulin. Robust controller design for timed event graphs in dioids. In *Emerging Technologies and Factory Automation, 2003. Proceedings. ETFA'03. IEEE Conference*, Lisbonne, Portugal, 2003.

[45] Mehdi Lhommeau, Laurent Hardouin, Bertrand Cottenceau, and Carlos Andrey Maia. Robustness analysis of control laws for (max,+)-linear systems. In *International Workshop on Max,+ Algebra*, Birmingham, Grande-Bretagne, 2003.

[46] Mehdi Lhommeau, Laurent Hardouin, Sébastien Lagrange, and Bertrand Cottenceau. Problème du rejet de perturbations dans les dioïdes. Synthèses de correcteurs préservant l'état. In *CIFA'2002, Conférence Internationale Française d'Automatique*, Nantes, France, 2002.

[47] CA Maia, L Hardouin, R Santos-Mendes, and B Cottenceau. On the model reference control for max-plus linear systems. In *Decision and Control, 2005 and 2005 European Control Conference. CDC-ECC'05. 44th IEEE Conference on*, Séville, Espagne, 2005.

[48] Rafael Santos-Mendes, Bertrand Cottenceau, and Laurent Hardouin. Adaptive feedback control for (max,+)-linear systems. In *Emerging Technologies and Factory Automation, 2005. ETFA 2005. 10th IEEE Conference on*, Catane, Italie, 2005.

Conférences nationales

[49] Jean-Louis Boimond, Sébastien Lahaye, Bertrand Cottenceau, and Laurent Hardouin. On discrete event dynamic systems in dioids : identification, control, extension of timed event graphs. In *Proceedings of IAR'2000, 15th IAR (Institut Franco-Allemand pour les Applications de la Recherche), Annual meeting*, pages 1–7, Nancy, France, 2000.

[50] Olivier Boutin, Bertrand Cottenceau, Anne L'Anton, Jean-Louis Boimond, and Marie-Françoise Gérard. Simulation d'une gestion de production (max,+) linéaire sous SIMAN/ARENA. In *Journées de la Section Automatique du club EEA - Démonstrateurs en Automatique à vocation recherche*, Angers, France, 2006.

[51] Olivier Boutin, Bertrand Cottenceau, Anne L'Anton, and Jean-Jacques Loiseau. Modélisation de systèmes de production à routages périodiques dans le dioïde zmin. In *Journées Doctorales/Journées Nationales MACS (JD-JN-MACS 2009)*, Angers, 2009.

[52] Olivier Boutin, Anne L'Anton, and Bertrand Cottenceau. Contribution au pilotage (max,+) en ligne d'un système de production émulé. In *JD MACS07 : 2èmes Journées Doctorales du GdR MACS*, Reims, France, 2007.

[53] Bertrand Cottenceau, Laurent Hardouin, and Jean-Louis Boimond. Synthèse d'un feedback linéaire dans l'algèbre des dioïdes pour la commande d'un système kanban. In *AGIS'97 - Automatique, Génie Informatique, Image, Signal*, Angers, Dec. 1997.

[54] Bertrand Cottenceau, Laurent Hardouin, and Euriell Le Corronc. Représentation tridimensionnelle de la dynamique des graphes d'événements temporisés généralisés. In *MSR'09 Modélisation des Systèmes Réactifs*, Nantes, 2009.

[55] Diego Figueirêdo e Silva, Rafael Santos-Mendes, Laurent Hardouin, and Bertrand Cottenceau. Filtragem estocástica aplicada a sistemas max-plus lineares. In *Xeme Simposio Brasileiro de Automaçao Inteligente*, Brazil, 2011.

[56] Euriell Le Corronc, Bertrand Cottenceau, and Laurent Hardouin. Approximation convexe de systèmes (max,+)-linéaires. In *JDMACS'09 - 3èmes Journées Doctorales du Gdr MACS*, Angers, France, 2009.

[57] Euriell Le Corronc, Bertrand Cottenceau, and Laurent Hardouin. Encadrement de systèmes (min,+)-linéaires. In *MSR'09 - 7ème colloque francophone sur la Modélisation des Systèmes Réactifs*, Nantes, France, 2009.

[58] Euriell Le Corronc, Bertrand Cottenceau, and Laurent Hardouin. Contrôle de flux en algèbre

(min,+). In *Journées Nationales du GDR GPL (Génie de la Programmation et du Logiciel)*, Lille, France, 2011.

[59] Mehdi Lhommeau, Laurent Hardouin, and Bertrand Cottenceau. A propos de la commande optimale de systèmes à événements discrets décrits dans les dioïdes. In *JDA'2001, Journées Doctorales d'Automatique*, Toulouse, France, 2001.

[60] Mehdi Lhommeau, Laurent Hardouin, and Bertrand Cottenceau. Sur l'analyse de la robustesse de correcteurs linéaires dans les dioïdes. In *MSR'2001, Modélisation des Systèmes Réactifs*, Toulouse, France, 2001.

[61] Mehdi Lhommeau, CA Maia, Laurent Hardouin, and Bertrand Cottenceau. Commandes de graphes d'événements temporisés : synthèse et robustesse de correcteurs. In *Journées Nationales d'Automatique, JNA*, Valenciennes, France, 2003.

Chapitre 2

Systèmes (max,+) linéaires

Ce chapitre rappelle des éléments de modélisation de systèmes à événements discrets. Les systèmes que nous avons étudiés relèvent de la classe des systèmes pour lesquels il existe des modèles linéaires sur des dioïdes. Ce chapitre nous permet de définir le contexte des travaux exposés par la suite. Les références importantes pour ces rappels sont [Baccelli et al., 1992] [Heidergott et al., 2006] pour les systèmes (max,+) linéaires, et [Le Boudec and Thiran, 2001] [Chang, 2000] pour le Network Calculus.

2.1 Les Systèmes à Evénements Discrets

On qualifie de Système à Evénements Discrets (SED) [Cassandras and Lafortune, 2008] un système dynamique dont l'état est constant par morceaux, et dont les changements ont lieu à des instants discrets. Les changements d'état d'un SED sont des phénomènes ponctuels que l'on appelle *événements*. Pour les systèmes considérés par la suite, les instants où les événements se produisent sont repérés dans le temps. On parle alors de SED temporisé.

Afin d'illustrer ces notions, nous considérons l'exemple du fonctionnement d'un guichet dans une administration. Ce système est constitué de deux agents pouvant répondre aux demandes des usagers, la durée du service pour chaque usager étant considérée ici comme constante et égale à 3 unités de temps. Les variables d'état considérées sont le nombre d'agents disponibles (0, 1 ou 2) et le nombre d'usagers en attente. Pour simplifier, on considère qu'un usager en attente est pris

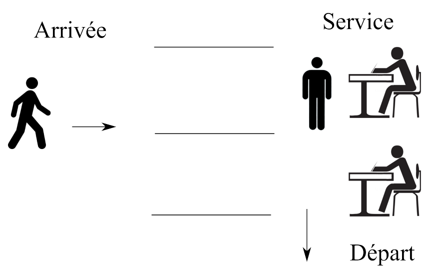


FIGURE 2.1 – Usagers se présentant à un guichet avec deux agents

en charge dès qu'un agent devient disponible. L'évolution de l'état correspond aux événements suivants :

- Les arrivées des usagers sont des événements notés a.
- Les débuts de service sont des événements notés s. Un délai peut survenir entre a et s si aucun agent n'est disponible au moment de l'arrivée d'un usager.
- Les départs des usagers sont des événements notés d. Un événement d a lieu exactement 3 unités de temps après un événement s et matérialise également la libération d'un agent.

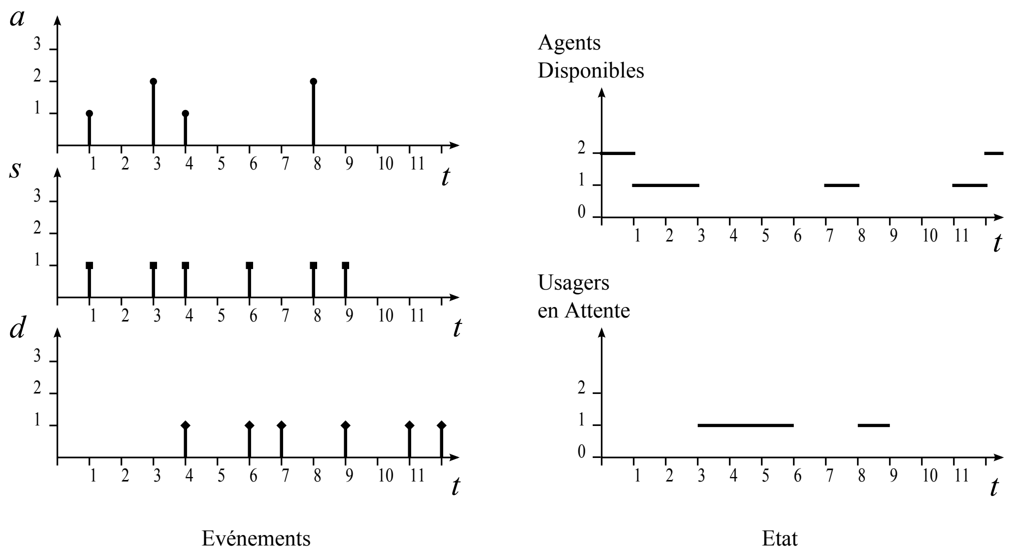


FIGURE 2.2 – Fonctionnement du guichet d'une administration

Une première représentation possible du fonctionnement de ce système consiste à décrire toutes les occurrences des événements a, s et d dans le temps. A titre d'exemple, la Figure 2.2 décrit un comportement possible du système. Un usager arrive à la date 1, deux usagers arrivent simultanément à la date 3 etc. Le temps est ici décrit comme multiple d'une unité de temps (UT) arbitraire. Dans cette exécution du système, certains usagers sont contraints d'attendre la disponibilité d'un agent. Tous les usagers ne résident donc pas la même durée dans le système (entre a et d). Ce temps de traversée, ainsi que le nombre d'usagers en attente, augmente lorsque la fréquence des arrivées augmente (phénomène de saturation). La Figure 2.2 décrit également l'évolution de l'état. À la date 0, deux agents sont disponibles et aucun usager n'est en attente. Cet état est le même jusqu'à la première occurrence de l'événement a (date 1). Entre les dates 1 et 3, il n'y a pas d'événement et l'état est donc constant.

La Figure 2.2 fournit, dans des chronogrammes différents, l'ensemble des événements survenus pour ce système. Quand il s'agit de réaliser un simulateur de systèmes à événements discrets, l'ensemble des événements générés est regroupé dans une même structure de données, par exemple une liste (appelée échéancier) de paires $<$événement,date$>$, où les événements sont classés par ordre chronologique. L'exécution du système est alors décrite par la liste :

$$<a,1>,<s,1>,<a,3>,<a,3>,<s,3>,<a,4>,<s,4>,<d,4>,<s,6>,<d,6> \ldots$$

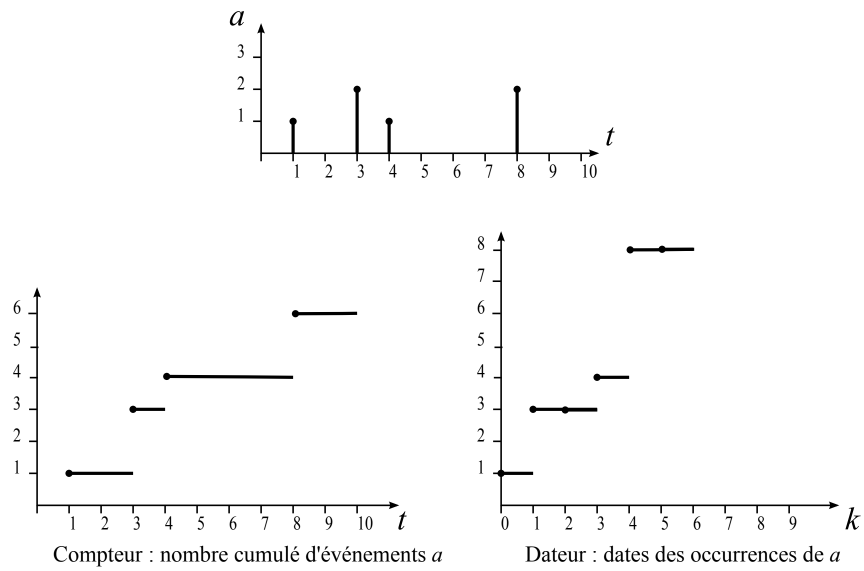


Figure 2.3 – Représentation des événements par des fonctions compteurs et dateurs

Dans les modèles étudiés par la suite, d'autres représentations sont utilisées. Les listes d'événements sont converties en fonctions monotones non décroissantes appelées *fonction compteur* ou *fonction dateur*. Si l'on considère le nombre cumulé d'occurrences d'un événement, cette fonction du temps est appelée *compteur*. Pour un événement a, la fonction compteur associée est $a(t) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ où t est une variable de temps.

De façon symétrique, si l'on considère les dates des événements [2], alors la fonction obtenue est appelée *dateur* d'événement. Pour un événement b, la fonction dateur associée est $b(k) : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$ où k est un numéro d'occurrence : $b(0)$ est la date du premier événement b, $b(1)$ la date du deuxième etc.

Les fonctions compteurs et dateurs ont la propriété d'être monotones non décroissantes par construction : $\forall t, a(t) \leq a(t+1)$, $\forall k, b(k) \leq b(k+1)$. Ces fonctions jouent un rôle équivalent aux signaux pour les systèmes continus. La Figure 2.3 décrit comment la liste des occurrences de l'événement a se représente sous forme de fonction compteur et de fonction dateur. L'ensemble des fonctions compteurs est noté Σ_c par la suite, et l'ensemble des fonctions dateurs Σ_d.

2.2 Les Réseaux de Petri

La littérature fournit différents formalismes pour modéliser la structure et le comportement dynamique des SED. Ces formalismes se déclinent en classes de modèles mathématiques et graphiques parmi lesquels on peut citer par exemple les automates à états finis, les réseaux de files d'attente et les Réseaux de Petri (RdP) [Ramadge and Wonham, 1989] [Murata, 1989].

Concernant la modélisation par RdP, les contraintes entre les événements s'expriment graphiquement. Un RdP est un graphe avec deux types de noeuds : des transitions et des places.

2. la première occurrence ayant par convention le numéro 0

Des jetons (associés aux places) circulent dans le graphe, et leur répartition dans le graphe, à un instant d'observation, décrit l'état du système. Le franchissement d'une transition est un événement conditionné par la présence suffisante de jetons dans les places en amont de la transition. La structure du graphe et le nombre initial de jetons dans les places (appelé marquage initial) permettent d'exprimer diverses contraintes comme la précédence, la synchronisation, la concurrence, le choix etc. Dans les cas qui nous intéressent, un temps de séjour minimum des jetons dans les places peut également être imposé, ce qui permet la description de contraintes temporelles.

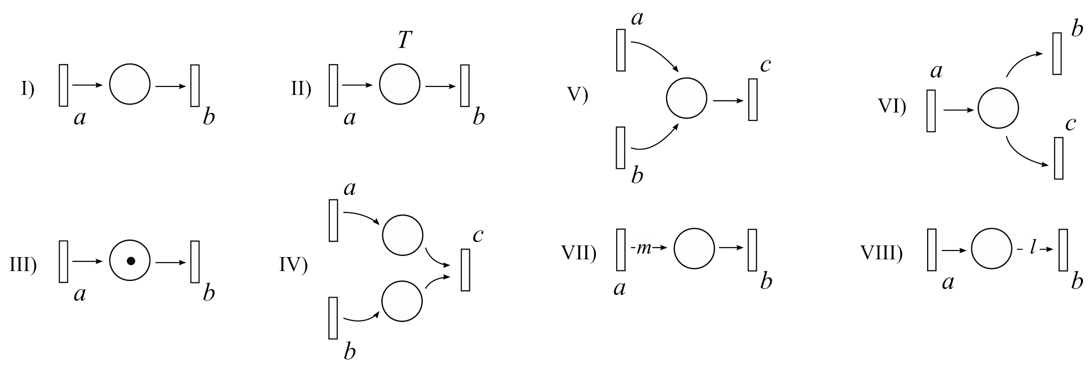


FIGURE 2.4 – Réseaux de Petri élémentaires

La Figure 2.4 représente différentes contraintes que les modèles RdP à places temporisées peuvent décrire. Les événements sont ici décrits via leurs fonctions compteur $a(t) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $b(t) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ et $c(t) : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

Précédence Le modèle I) décrit la relation de précédence, c'est-à-dire $\forall t, b(t) \leq a(t)$. A tout instant t, il ne peut pas y avoir plus d'événements b que d'événements a, ou exprimé différemment, tout événement b est nécessairement précédé d'un événement a.

Délai Le modèle II) décrit une contrainte de temps de séjour $\forall t, b(t) \leq a(t-T)$. L'événement b a lieu au plus tôt T unités de temps après a. Un jeton produit par la transition a va séjourner au minimum T unités de temps dans la place.

Décalage événementiel Le modèle III) décrit la contrainte $\forall t, b(t) \leq a(t) + 1$. Le premier événement b n'est pas contraint. Le n-ième événement b est après le $(n-1)$-ième événement a. C'est une contrainte de précédence sur des événements de numéros différents.

Synchronisation Le modèle IV) décrit la synchronisation $\forall t, c(t) \leq \min(a(t), b(t))$. Un événement c ne peut se produire que s'il est précédé d'un événement a et d'un événement b.

Somme d'événements Le modèle V) décrit la contrainte $\forall t, c(t) \leq a(t) + b(t)$. D'un autre point de vue, un événement c peut se produire après chaque événement a ou b.

Choix Le modèle VI) décrit un choix $\forall t, b(t) + c(t) \leq a(t)$. Après un événement a, il peut se produire un événement b ou un événement c, mais pas les deux.

Multiplication d'événements Le modèle VII) décrit une multiplication $\forall t, b(t) \leq m \times a(t)$. Un événement a précède m événements b. Cette structure élémentaire permet de modéliser les phénomènes de dégroupement.

Division d'événements Le modèle VIII) décrit une division entière $\forall t, b(t) \leq \lfloor a(t)/l \rfloor$. Un événement b ne peut se produire qu'après que l événements a se soient produits. Cette structure élémentaire permet de modéliser le phénomène de groupement/constitution de lot (batch).

Définition 1 (Fonctionnement au plus tôt) *En fonctionnement au plus tôt, les transitions sont franchies dès que cela est possible, c'est-à-dire aussitôt que les places en amont d'une transition contiennent le nombre de jetons permettant de satisfaire les conditions de franchissement.*

Pour un RdP en général, le fonctionnement au plus tôt n'est défini qu'à la condition que les choix aient été arbitrés par une politique au préalable. Pour le modèle VI) de la Figure 2.4, on doit en effet définir une politique indiquant, de b ou c, quel est l'événement déclenché instantanément lors du n-ième événement a. En revanche, en absence de choix, ce fonctionnement est bien défini.

Il faut aussi remarquer qu'avec le fonctionnement au plus tôt, les inégalités exprimées sur les compteurs deviennent des égalités. En effet, pour les RdP élémentaires de la Figure 2.4, les fonctions compteurs sont alors reliées par les relations suivantes.

Le fonctionnement au plus tôt conduit à :

$$\begin{array}{lll}
\text{modèle II)} & \text{[décalage temporel]} & \iff b(t) = a(t-T) \\
\text{modèle III)} & \text{[décalage événementiel]} & \iff b(t) = a(t) + 1 \\
\text{modèle IV)} & \text{[synchronisation]} & \iff c(t) = \min(a(t), b(t)) \\
\text{modèle VII)} & \text{[dégroupement]} & \iff b(t) = m \times a(t) \\
\text{modèle VIII)} & \text{[groupement]} & \iff b(t) = \lfloor a(t)/l \rfloor
\end{array}$$

C'est avec le fonctionnement au plus tôt que la synchronisation s'exprime par un minimum sur des valeurs de compteurs.

Définition 2 (GET,GET-V) *La sous-classe des RdP dont les places sont temporisées et ont exactement une transition en amont et en aval est appelée classe des Graphes d'Evénements Temporisés (GET). Si les arcs sont pondérés par des poids entiers, on parle alors de GET Valués (GET-V).*

Pour les GET, seules les contraintes représentées par les modèles élémentaires I), II), III) et IV) dans la Figure 2.4 peuvent être modélisées. Pour les GET-V, des poids $m, l \in \mathbb{N}$ non unitaires peuvent être ajoutés. On peut alors décrire les phénomènes de groupement/dégroupement (modèles VII) et VIII)).

2.3 Représentations d'état sur les algèbres de type (max,+)

La description des occurrences d'événements par des fonctions compteurs ou dateurs permet d'aboutir à une représentation d'état pour certains SED temporisés. Notamment, pour tout GET ordinaire ayant des places temporisées avec des temps de séjour entiers [3], la description

3. et soumis au fonctionnement au plus tôt

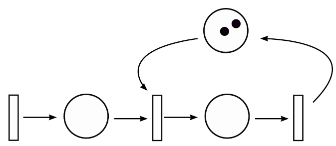


FIGURE 2.5 – Modèle GET du guichet

du comportement peut s'exprimer par des equations d'état linéaires sur des dioïdes[4]. Cette approche, développée depuis le début des années 1980 [Cohen et al., 1984], [Cohen et al., 1986], a montré qu'il est possible d'obtenir une représentation d'état des GET si l'on associe des fonctions compteurs ou dateurs aux tirs des transitions. La représentation par des fonctions dateurs conduit à un modèle linéaire sur le semi-anneau (max,+). On obtient également un modèle linéaire sur le semi-anneau (min,+) lorsque l'on décrit les tirs des transitions par des fonctions compteurs. Cette approche est souvent appelée *"Théorie des systèmes (max,+) linéaires"* dans la littérature bien que d'autres dioïdes (dioïde d'opérateurs, dioïde de séries formelles) peuvent également contribuer à la modélisation et à l'analyse de SED.

Pour résumer très brièvement, en notant u (resp. y) le vecteur représentant la description des événements associés aux transitions d'entrée (resp. de sortie) d'un GET, et en notant A, B et C les matrices décrivant la structure du système, on obtient les modèles suivants

Modèle (min,+) linéaire : u, x et y sont des vecteurs de fonctions compteurs de Σ_c, l'opération min est notée $\oplus$ et la somme usuelle $+$ est l'opération produit. Le modèle d'état s'écrit

$$\begin{cases} x(t) & = & A_c x(t-1) \oplus B_c u(t) \\ y(t) & = & C_c x(t) \end{cases} \tag{2.1}$$

Modèle (max,+) linéaire : u, x et y sont des vecteurs de fonctions dateurs de Σ_d, l'opération max est notée $\oplus$ et la somme usuelle $+$ est l'opération produit. Le modèle d'état s'écrit

$$\begin{cases} x(k) & = & A_d x(k-1) \oplus B_d u(k) \\ y(k) & = & C_d x(k) \end{cases} \tag{2.2}$$

Exemple 1 (Guichet) *L'exemple du guichet traité en introduction peut être décrit au moyen du GET donné par la Figure 2.5. Les événements décrivant les arrivées, les débuts de services et les départs sont notés respectivement a, s et d. Pour le fonctionnement au plus tôt, on obtient les modèles (min,+) et (max,+) suivants*

$$\begin{array}{lll} \textit{[Compteurs]} & s(t) = & \min(a(t), d(t)+2), \quad d(t) = s(t-3) \\ \textit{[Dateurs]} & s(k) = & \max(a(k), d(k-2)), \quad d(k) = s(k)+3 \end{array}$$

Notons néanmoins que nous n'obtenons pas directement des modèles sous la forme (2.1) ou (2.2). Il faudrait pour cela étendre le nombre de variables d'état de sorte que les décalages événementiels ou temporels soient au plus de 1 unité.

4. les structures algébriques sous-jacentes sont définies plus précisément en annexe

2.4 Représentations entrée-sortie

2.4.1 Représentation par convolution

De façon générale, les équations récurrentes (2.1) et (2.2) peuvent être développées de façon à exprimer les sorties y directement à partir des entrées u. Dans le cas d'un système à une entrée et une sortie [5] modélisé sur le semi-anneau (min,+), la relation qui relie les fonctions compteurs entrée/sortie est une opération d'inf-convolution définie comme suit : $u, y, h \in \Sigma_c$

$$y(t) = (h \circledast u)(t) \triangleq \bigoplus_{\tau \in \mathbb{Z}} h(\tau) \otimes u(t - \tau). \tag{2.3}$$

La fonction compteur $h(t)$, qui s'exprime à partir des valeurs de CA^tB évaluées dans l'algèbre (min,+), permet de caractériser complètement le GET modélisé. En outre, $h(t)$ est aussi l'expression de la fonction compteur associée à la sortie du système en réponse à une stimulation particulière définie par $u(t) = \mathcal{I}(t)$ où

$$\mathcal{I}(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t < 0, \\ +\infty & \text{sinon.} \end{cases} \tag{2.4}$$

Cette entrée particulière $\mathcal{I}$ est aux systèmes (min,+) linéaires ce que l'impulsion de Dirac est aux systèmes linéaires conventionnels. La fonction $h(t)$, qui caractérise le transfert entrée-sortie d'un système ($min+$) linéaire stationnaire, est donc également parfois appelée *réponse impulsionnelle.*

Remarque 1 *Il faut noter que l'ensemble des fonctions compteurs Σ_c muni des opérations* min *et $\circledast$ est également un dioïde noté* $(\Sigma_c, \min, \circledast)$.

2.4.2 Représentation par combinaison d'opérateurs

Les fonctions compteurs/dateurs pour les SED jouent un rôle analogue aux signaux pour les systèmes linéaires continus. De façon conventionnelle, un opérateur est une application définie sur l'ensemble des signaux. Par analogie, les opérateurs sont ici définis comme des applications définies sur l'ensemble des compteurs Σ_c ou sur l'ensemble des dateurs Σ_d. Les opérateurs décrits ci-dessous constituent un ensemble de systèmes élémentaires sur la base desquels les GET et GET-V pourront être décrits.

Définition 3 (Opérateurs élémentaires) *Soit $x \in \Sigma_c$ une fonction compteur. Les opérateurs δ, γ, μ et β sont définis sur Σ_c comme suit :*

$$\begin{array}{rcll} \tau \in \mathbb{Z}, \delta^\tau & : & \forall x,\ (\delta^\tau x)(t) = x(t - \tau), & \textit{[décalage temporel]} \\ \nu \in \mathbb{Z}, \gamma^\nu & : & \forall x,\ (\gamma^\nu x)(t) = x(t) + \nu, & \textit{[décalage événementiel]} \\ b \in \mathbb{N}^*, \beta_b & : & \forall x,\ (\beta_b x)(t) = \lfloor x(t)/b \rfloor, & \textit{[division événementielle]} \\ m \in \mathbb{N}^*, \mu_m & : & \forall x,\ (\mu_m x)(t) = x(t) \times m, & \textit{[multiplication événementielle]} \end{array}$$

où l'on note par $\lfloor a \rfloor$ le plus grand entier inférieur à $a \in \mathbb{Q}$.

5. la généralisation au cas multivariable nécessite d'étendre la convolution au cas matriciel

On peut définir un dioïde pour les opérateurs dits *additifs*, c'est-à-dire les opérateurs w vérifiant $\forall x, y \in \Sigma_c \Rightarrow w(\min(x, y)) = \min(w(x), w(y))$. Notons que les opérateurs définis précédemment sont tous additifs. Pour obtenir un dioïde d'opérateurs, il convient de considérer l'ensemble noté $\mathcal{O}$ des opérateurs additifs muni des opérations définies par :$v, w \in \mathcal{O}$,

$$\begin{aligned} v \oplus w &\triangleq \forall x \in \Sigma_c, (v \oplus w)(x) = \min(v(x), w(x)), \\ v \otimes y &\triangleq \forall x \in \Sigma_c, (v \otimes w)(x) = v \circ w(x). \end{aligned}$$

Pour les opérateurs additifs, le produit (la composition) distribue sur la somme (le minimum), mais il faut toutefois garder à l'esprit que ce produit n'est pas commutatif. Le semi-anneau $(\mathcal{O}, \oplus, \otimes)$ défini ainsi n'est pas un dioïde commutatif.

Exemple 2 (Guichet) *Sur la base de ces opérateurs, le GET de la figure 2.5 peut être modélisé par les relations suivantes*

$$s = a \oplus \gamma^2 d, \ \ d = \delta^3 s.$$

L'intérêt de cette description est de pouvoir aboutir à une représentation entrée-sortie sous la forme d'un opérateur rationnel (cf. section 2.5)

$$d = \delta^3(\gamma^2\delta^3)^* a.$$

Dans cette approche, les GET sont assimilés à des opérateurs obtenus par combinaisons (somme et produit) d'opérateurs élémentaires. L'opérateur $\delta^3(\gamma^2\delta^3)^*$, qui décrit la relation entrée-sortie du GET, est une autre expression de la réponse impulsionnelle du système (min,+) linéaire.

Les opérateurs introduits dans la Définition 3 permettent de décrire également des phénomènes de groupement/dégroupement modélisés par des GET valués.

Exemple 3 (Modèle de GET-V) *Dans l'exemple de la figure 2.6, deux arcs sont valués par des poids non unitaires. Il faut 3 événements u (et la disponibilité d'un jeton entre x_2 et x_1) pour qu'un évènement x_1 se produise. Chaque événement x_2 produit instantanément 2 événements y. A l'aide des opérateurs définis précédemment, on obtient les relations suivantes*

$$x_1 = \beta_3 u \oplus \gamma^2 x_2, \ \ x_2 = \delta^3 x_1, \ \ y = \delta^4 \mu_2 x_2.$$

La relation entrée-sortie de ce système s'exprime par un opérateur rationnel (cf. Chap.4 Prop.9)

$$y = \mu_2 \delta^3(\gamma^2\delta^3)^* \beta_3 u.$$

Notons que le fait de considérer l'ensemble Σ_c comme ensemble de "signaux" est toutefois arbitraire. Les opérateurs introduits dans la Définition 3 peuvent également être exprimés sur l'ensemble Σ_d des dateurs comme suit : $x \in \Sigma_d$,

$$\begin{array}{rcll} \tau \in \mathbb{Z}, \delta^\tau & : & \forall x, \ (\delta^\tau x)(k) = \tau + x(k)), & \text{[décalage temporel]} \\ \nu \in \mathbb{Z}, \gamma^\nu & : & \forall x, \ (\gamma^\nu x)(k) = x(k - \nu), & \text{[décalage événementiel]} \\ b \in \mathbb{N}^*, \beta_b & : & \forall x, \ (\beta_b x)(k) = x(k \times b + (b-1)), & \text{[division événementielle]} \\ m \in \mathbb{N}^*, \mu_m & : & \forall x, \ (\mu_m x)(k) = x(\lfloor k/m \rfloor). & \text{[multiplication événementielle]} \end{array}$$

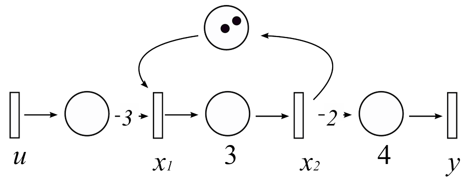


FIGURE 2.6 – Exemple de GET valué

Ce changement de point de vue a finalement peu d'incidence. En revanche, ce qui est intéressant c'est de chercher à interpréter les phénomènes modélisés par des opérateurs de multiplication ou de division entière opérant sur un dateur plutôt que sur un compteur. C'est l'objet de la remarque suivante.

Remarque 2 (Multiplication/division temporelle) *Considérons les opérateurs sur Σ_d suivants : $x \in \Sigma_d$,*

$$\begin{array}{rcll} p \in \mathbb{N}^*, \varpi_p & : & \forall x,\ (\varpi_p x)(k) = \lfloor x(k)/p \rfloor, & \textit{[division temporelle]} \\ r \in \mathbb{N}^*, \rho_r & : & \forall x,\ (\rho_r x)(k) = x(k) \times r. & \textit{[multiplication temporelle]} \end{array}$$

La multiplication temporelle décrit un phénomène de délai qui s'allonge au cours du temps. A l'inverse, la division temporelle décrit un phénomène non causal : si $x(k) > 0$ alors $\varpi_2 x(k) = \lfloor x(k)/2 \rfloor < x(k)$, et donc $(\varpi_2 x)(k)$ est une date antérieure à $x(k)$.

L'intérêt des opérateurs ρ_r et ϖ_p n'apparaît pas immédiatement. Pourtant, en les composant, on peut décrire des phénomènes de décalages temporels variables. *Par exemple, l'opérateur $\delta^4\rho_3\varpi_3$ conduit à $(\delta^4\rho_3\varpi_3 x)(k) = 4 + 3\lfloor x(k)/3 \rfloor$. Par conséquent, si $x(k)$ vaut $0, 1$ ou 2, alors $(\delta^4\rho_3\varpi_3 x)(k) = 4$, si $x(k)$ vaut $3, 4$ ou 5, alors $(\delta^4\rho_3\varpi_3 x)(k) = 7$ etc. L'opérateur $\delta^4\rho_3\varpi_3$ décrit donc un décalage temporel qui varie entre 2 et 4 unités de temps. Ce décalage étant dépendant de la date $x(k)$ et non du numéro d'événement k.*

2.5 Séries ultimement périodiques de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$

Comme rappelé précédemment, les GET peuvent être décrits au moyen d'opérateurs de décalage (cf 2.4.2). Les temps de séjour associés aux places temporisées conduisent à des décalages temporels décrits par l'opérateur δ^t, et les jetons initiaux induisent des décalages événementiels décrits par l'opérateur γ^n. On peut donc décrire la dynamique d'un GET au moyen d'une représentation

$$\left\{ \begin{array}{rcl} x & = & Ax \oplus Bu, \\ y & = & Cx \end{array} \right. \tag{2.5}$$

où A,B et C sont des matrices dont les éléments sont des opérateurs de $\mathcal{O}$ et u, x, y sont des vecteurs de compteurs de Σ_c.

Dans le cas des GET, seules interviennent des sommes et compositions d'opérateur γ^n et δ^t. Même si le dioïde $\mathcal{O}$ n'est pas commutatif, en se limitant aux sommes et compositions d'opérateurs γ^n ou δ^t, le produit devient commutatif : en effet, $\gamma^2\delta^3\gamma^1\delta^4 = \gamma^{2+1}\delta^{3+4} = \delta^{3+4}\gamma^{2+1}$.

La structure algébrique sous-jacente est un sous-dioïde commutatif de $\mathcal{O}$ noté $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ [Cohen et al., 1989b], dont les éléments peuvent être vus comme des séries formelles en deux variables commutatives γ et δ, à exposants entiers et coefficients booléens, auxquelles on ajoute les règles de simplification suivantes

$$\gamma^n \oplus \gamma^{n'} = \gamma^{\min(n,n')} \;\; \delta^t \oplus \delta^{t'} = \delta^{\max(t,t')}.$$

En utilisant le résultat sur la solution minimale d'une équation implicite (cf. Annexe B Th.9) de la forme $x = ax \oplus b$, on obtient à partir de (2.5) tout d'abord[6] $x = A^*Bu = Bu \oplus ABu \oplus A^2Bu \oplus ...$ et enfin

$$y = CA^*Bu = Hu. \tag{2.6}$$

La matrice $H = CA^*B$ décrit le transfert entrée-sortie du GET.

Théorème 1 ([Cohen et al., 1989b][Gaubert, 1992]) *Soit H une matrice de taille $n \times m$ à valeurs dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$. Sont équivalents*

- *H est rationnelle ($\forall i,j$, H_{ij} s'écrit avec un nombre fini de compositions $\oplus$, $\otimes$ et $*$ d'opérateurs γ^1 et δ^1).*
- *H est réalisable (il existe un GET avec m entrées et n sorties dont la matrice de transfert est H)*
- *$\forall i,j$, H_{ij} est ultimement périodique et causale.*

Ce théorème souligne l'importance des phénomènes périodiques dans le fonctionnement au plus tôt des GET. En outre, il montre que l'on peut ramener les calculs sur les GET à des manipulations de *séries ultimement périodiques* de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$, c'est-à-dire des séries que l'on peut écrire sous la forme

$$s = \bigoplus_i \gamma^{n_i}\delta^{t_i} \oplus (\bigoplus_j \gamma^{N_j}\delta^{T_j})(\gamma^\nu\delta^\tau)^* = p \oplus qr^*,$$

où p et q sont deux polynômes de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$, et la périodicité ultime est traduite par le terme $(\gamma^\nu\delta^\tau)^*$. Ce théorème montre également qu'il est toujours possible d'exprimer les séries rationnelles de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ avec une écriture n'utilisant qu'une seule étoile de Kleene (série de hauteur d'étoile 1).

Dans cette représentation, le ratio $\sigma(s) = \tau/\nu$ est un indicateur de performance qui traduit le temps de cycle du GET, c'est-à-dire le temps moyen entre deux événements quand le système est en régime asymptotique.

Exemple 4 *Pour le GET décrit figure 2.5, on a $s = a \oplus \gamma^2 d$ et $d = \delta^3 s$, soit $s = a \oplus \gamma^2\delta^3 s$. La résolution de cette équation implicite conduit tout d'abord à $s = (\gamma^2\delta^3)^* a$ puis finalement à $d = \delta^3(\gamma^2\delta^3)^* a$. Cette série ultimement périodique décrit le comportement dynamique du guichet entre l'arrivée des usagers et leur départ. Ce système traite au mieux 1 usager tous les* 1.5 *UT, ce qui est exprimé par le temps de cycle $\sigma(\delta^3(\gamma^2\delta^3)^*) = 3/2$.*

6. où $a^* = \bigoplus_{n\geq 0} a^n$ est l'étoile de Kleene (cf. Annexe B)

L'étude des opérations rationnelles sur les séries ultimement périodiques de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ a été menée tout d'abord dans la thèse de S. Gaubert [Gaubert, 1992] [Gaubert and Klimann, 1991] qui a fourni les principaux algorithmes. Cette étude a ensuite été complétée par L. Hardouin pour les calculs de résiduation du produit, tout ceci étant désormais disponible sous la forme d'une librairie de classes C++ appelée MinMaxGD développée et maintenue par L. Hardouin [Cottenceau et al., 2000] [Hardouin et al., 2009b].

2.6 Calcul réseau

Pour conclure ce survol des modèles de systèmes (max,+), il est important de rappeler que les outils algébriques décrits précédemment peuvent également s'appliquer à l'étude des réseaux informatiques. En effet, on peut décrire certains phénomènes de transfert de données à l'aide de calculs sur le dioïde $(\Sigma_c, \min, \circledast)$. Ce domaine d'étude est connu sous le nom de Network Calculus [Chang, 2000] [Le Boudec and Thiran, 2001]. Dans cette approche, les flux de données

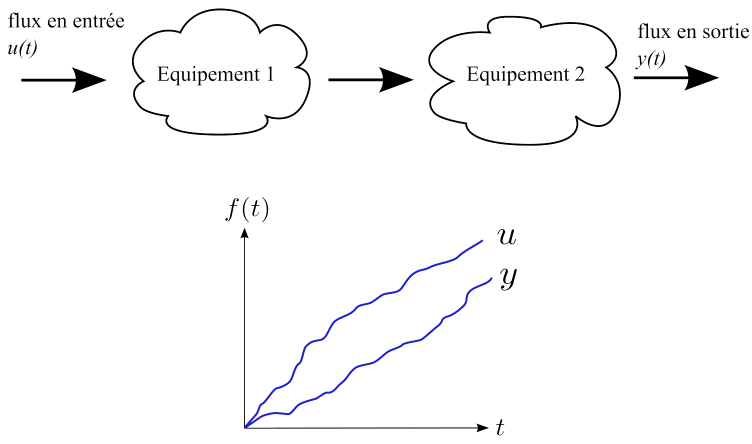


FIGURE 2.7 – Calcul réseau (Network Calculus)

parcourant le réseau sont décrits au moyen de fonctions compteurs : le compteur associé à un flux décrit la quantité cumulée de données ayant transité en un point du réseau à un instant t. Les équipements du réseau (serveurs, routeurs, commutateurs etc.) sont ensuite décrits au moyen de courbes caractérisant leur capacité à traiter et à transférer les données qui leur parviennent. Ces courbes, appelées *courbe de service*, correspondent au transfert entrée-sortie des équipements. La dynamique des équipements est modélisée de la même manière que pour les systèmes (min,+) linéaires, c'est-à-dire par un produit d'inf-convolution (cf. (2.3)). Les courbes de services $\mathcal{S}$ sont des fonctions, généralement affines par morceaux, qui décrivent un comportement minimal pour un équipement : les flux entrée (u) et sortie (y) sont reliés par la contrainte : $u, y, \mathcal{S} \in \Sigma_c$,

$$y \preceq \mathcal{S} \circledast u,$$

où $\circledast$ est le produit d'inf-convolution.

Le Network Calculus a pour objectif de fournir des moyens d'évaluation de performance d'un réseau. Par exemple, la mise en série de deux équipements (voir figure 2.7) dont les courbes de service sont notées respectivement $\mathcal{S}_1$ et $\mathcal{S}_2$ peut s'apparenter à un équipement dont la courbe de service est $\mathcal{S} = \mathcal{S}_2 \circledast \mathcal{S}_1$. Les critères de performance visés par cette approche sont notamment

– le temps d'acheminement des données de bout en bout dans le pire cas,
– la quantité maximale de données stockées dans les buffers du réseau.

L'étude des réseaux repose donc, d'une part, sur la modélisation des équipements au moyen de courbes de service adaptées, et d'autre part, sur l'hypothèse que les arrivées des données en entrée du réseau sont également contraintes par des *courbes d'arrivée*. Pour un flux d'entrée du réseau noté u, on dit que u satisfait la courbe d'arrivée α si l'égalité suivante est vérifiée

$$u = \alpha^* \circledast u.$$

Par conséquent, une courbe d'arrivée exprime l'impossibilité, pour les données d'entrée, d'arriver par rafales de tailles trop importantes. En considérant uniquement des flux d'arrivées qui ne soient pas trop contraignants [7], on s'assure que les effets de saturation restent limités. Autrement dit, les temps d'acheminement des données restent bornés.

Sous ces hypothèses, le Network Calculus exploite les outils de la théorie des systèmes (min,+) linéaires (convolution, déconvolution) de façon à évaluer les performances. En particulier, étant connues $\mathcal{S}$ (la courbe de service) et α (la courbe d'arrivée), les temps de parcours (entrée-sortie) d'un équipement et le nombre maximum de paquets dans le buffer d'entrée se déduisent du calcul $\alpha^* \oslash \mathcal{S}$, où l'opérateur $\oslash$ représente la déconvolution, c'est-à-dire l'application résiduée de l'inf-convolution (cf. Annexe B). Le Network Calculus utilise en quelque sorte la théorie du second ordre présentée dans [Cohen et al., 1993] au contexte de l'étude des réseaux. L'opération de déconvolution $\oslash$ permet d'évaluer des temps de parcours ou des niveaux de remplissage des buffers. Les outils de calcul sur les séries ultimement périodiques de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$, ou même sur des fonctions ultimement affines, présentent donc un intérêt pratique pour cette approche [Bouillard and Thierry, 2008] [Bouillard et al., 2009].

7. relativement à la dynamique des équipements du réseau

Chapitre 3

Modèles intervalles

Dans ce chapitre sont regroupés différents travaux menés par O. Boutin et E. Le Corronc durant leurs thèses et ayant pour point commun de s'appuyer sur une approche ensembliste (intervalles) plutôt que sur une description exacte de la dynamique d'un système. Tous ces travaux prennent comme point de départ les résultats obtenus par M. Lhommeau sur la modélisation de systèmes sur un dioïde d'intervalles [Lhommeau, 2003] [Lhommeau et al., 2004].

3.1 Modélisation de l'incertitude ou de la variation

Dans un premier temps, les travaux initiés dans les années 80 sur l'étude de systèmes à événements discrets à travers des modèles (max,+) a concerné les systèmes linéaires stationnaires. Un système d'entrée u et de sortie y est décrit par la relation $y = Hu$. La linéarité et la stationarité conduisent au fait que si l'on retarde l'entrée de τ unités de temps, la sortie est également retardée de τ unités de temps, soit $H\delta^\tau u = \delta^\tau Hu$. L'opérateur δ^1 commute avec le système H. Il en va de même pour les décalages événementiels : $H\gamma^\nu u = \gamma^\nu Hu$, l'opérateur γ^1 commute avec le système.

La situation est très différente dès lors, par exemple, que certaines temporisations subissent des variations. Le comportement entrée-sortie n'est alors plus linéaire, même dans (max,+) puisque les retards temporels ne commutent plus avec le système. C'est le cas des GET dont certains temps de séjours sont sujets à des variations.

Néanmoins, si les variations de temporisations restent bornées, on peut continuer de décrire non pas le comportement exact du système, mais un encadrement garanti de sa dynamique. Par exemple, pour deux fonctions compteur $x_1, x_2 \in \Sigma_c$ données, s'il est possible de relier ces fonctions par la relation

$$\forall t, x_2(t) \in [x_1(t-3), x_1(t-2)],$$

alors on peut en déduire également, $\forall x_1 \in \Sigma_c$

$$x_2 \succeq \delta^2 x_1 \text{ et } x_2 \preceq \delta^3 x_1.$$

Pour n'importe quel $x_1 \in \Sigma_c$, x_2 est contenu dans l'intervalle $[\delta^2 x_1, \delta^3 x_1]$. Le décalage temporel variable qui relie x_1 à x_2 est vu comme un intervalle de comportements possibles. Plutôt que de manipuler des opérateurs, comme dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$, on manipule cette fois-ci des intervalles d'opérateurs au sens où ces intervalles décrivent des ensembles bornés de comportements possibles.

En généralisant à l'ensemble des places d'un GET, et en produisant les calculs sur un dioïde d'intervalles $I(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!])$ où les opérations de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ s'étendent aux intervalles fermés (cf. Annexe B), on obtient un intervalle de comportement pour tout GET. Pour tout GET où chaque place peut être décrite par un intervalle, la dynamique générale du système s'écrit : $u, x, y \in \Sigma_c$, $\mathbf{A} = [\underline{A}, \overline{A}], \mathbf{B} = [\underline{B}, \overline{B}], \mathbf{C} = [\underline{C}, \overline{C}] \in I(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!])$

$$\begin{array}{rcl} x & \in & \mathbf{A}x \oplus \mathbf{B}u, \\ y & \in & \mathbf{C}x, \end{array}$$

et donc $y \in \mathbf{CA}^*\mathbf{B}u$. L'intervalle $\mathbf{H} = [\underline{H}, \overline{H}] = [\underline{CA}^*\underline{B}, \overline{CA}^*\overline{B}]$ encadre la dynamique du système. Tous ces résultats sont détaillés dans [Lhommeau, 2003] et [Lhommeau et al., 2004].

Cette approche a été le point de départ d'études menées par O. Boutin et E. Le Corronc pour lesquelles une représentation intervalle a été utilisée. Il convient néanmoins de distinguer deux situations différentes dans ce qui suit.

Tout d'abord, dans les travaux d'Olivier Boutin, l'encadrement intervalle a été utilisé pour deux phénomènes dynamiques qu'il ne semblait pas possible de décrire par des systèmes (max,+) linéaires. Le premier phénomène étudié est le partage de ressources entre deux consommateurs. Le modèle RdP associé présente un conflit qui exclut d'emblée ce système de la classe des systèmes (max,+) linéaires. Mais pour une politique d'affectation particulière de la ressource, qui attribue celle-ci de façon équitable entre les utilisateurs, l'attente de la ressource peut être vue comme un phénomène de délai variable. Le second phénomène étudié par Olivier Boutin est le routage dans des systèmes (max,+) fonctionnant en parallèle. Là encore, un choix apparaît dans le modèle RdP associé. Le comportement entrée-sortie n'est alors pas linéaire. Encore une fois, moyennant une politique de routage adaptée, le comportement global peut être encadré de manière garantie par deux systèmes (max,+) linéaires. *In fine*, le comportement du système peut être vu comme évoluant dans un intervalle dont les bornes représentent les dynamiques de deux systèmes (max,+) linéaires.

Dans les travaux d'Olivier Boutin, l'approche intervalle permet de s'affranchir du caractère non linéaire des phénomènes étudiés pour les traiter par des approximations. Au cours de la thèse d'Euriell Le Corronc, la modélisation par intervalles a été utilisée à d'autres fins. L'objectif a été d'exploiter l'avantage algorithmique provenant d'une représentation approchée plutôt que d'une représentation exacte lorsque l'on calcule la fonction de transfert (2.6) à partir de la représentation d'état (2.5). Le problème a consisté à trouver une façon d'arrondir les résultats des calculs (par valeur supérieure et inférieure) de sorte que le temps de calcul soit inférieur à celui du calcul exact. L'intervalle obtenu dans ce cas doit donc être vu comme l'approximation d'un système (max,+) linéaire dont le comportement exact n'est pas connu. Les intervalles obtenus décrivent alors une connaissance incertaine de la dynamique du système, alors que le système est pourtant bel et bien (max,+) linéaire.

3.2 Ressource partagée

Dans [Boutin et al., 2008b] et [Boutin et al., 2008a], le problème suivant a été considéré. Une ressource r est partagée par deux types d'utilisateurs 1 et 2. Un utilisateur 1 conserve la ressource T_1 unités de temps à chaque utilisation, un utilisateur 2 la conserve T_2 unités de temps. Sans politique permettant de lever les conflits d'accès à la ressource, le comportement du système n'est pas déterministe. Ce système est décrit dans le la Figure 3.1 (RdP de gauche). La place avec un jeton décrit la disponibilité initiale de la ressource r.

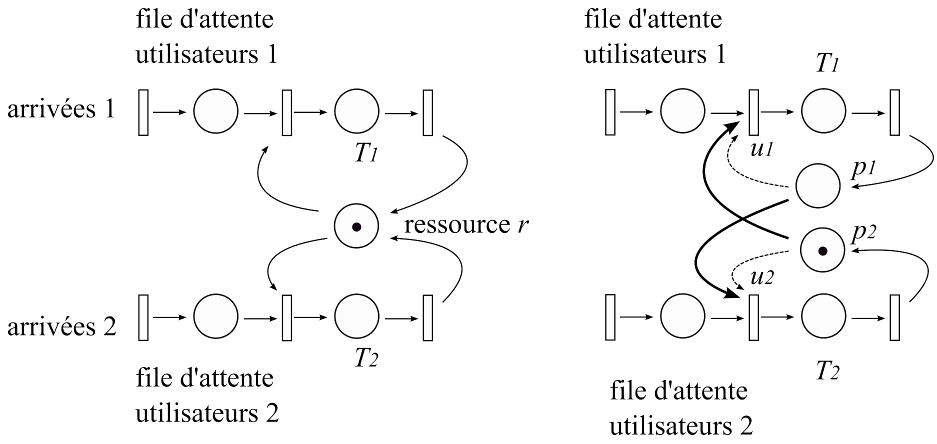


FIGURE 3.1 – Ressource partagée, politique d'affectation

Pour rendre le système déterministe, on arbitre les conflits par la politique d'affectation suivante : à la libération de la ressource, un utilisateur (1 ou 2) obtient la ressource immédiatement soit parce qu'il est le seul demandeur, soit parce que la ressource est relâchée par l'autre utilisateur. Dans la Figure 3.1 (RdP de droite), la politique est représentée par un modèle RdP tel que la place p_1 (resp. p_2) a une marque si le dernier utilisateur est l'utilisateur 1 (resp. utilisateur 2). La politique de partage de ressource considérée s'exprime comme suit : si p_1 (resp. p_2) est marquée, la transition u_2 (resp. u_1) est prioritaire dans la consommation de cette ressource. Graphiquement, en cas de conflit, c'est l'arc en trait épais qui "consomme" le jeton. Rappelons que ceci sert uniquement à arbitrer les conflits, c'est-à-dire quand les places correspondant aux files d'attente en amont de u_1 et de u_2 ont toutes deux un marquage non nul au moment où la ressource est relâchée. Dans les autres cas, n'importe lequel des utilisateurs obtient immédiatement la ressource libérée (les arcs en pointillés peuvent également consommer la ressource). Cette politique d'affectation assure une forme d'alternance et d'équité quand plusieurs consommateurs sont en attente de la ressource, puisque dans ce cas les utilisateurs obtiennent celle-ci un coup sur deux.

Pour cette politique d'affectation de la ressource, il est alors simple d'évaluer les comportements extrêmes, c'est-à-dire d'une part quand il n'y a aucun conflit et d'autre part quand il n'y a que des conflits. Dans le cas le plus favorable pour l'utilisateur, il n'y a pas de demande concurrente. La situation se ramène à un GET ordinaire. Le cas le plus défavorable (le cas où un utilisateur attend le plus la ressource) correspond à la situation où des utilisateurs sont en compétition permanente pour l'accès à la ressource. Dans ce cas, la politique conduit à une affectation alternative de la ressource. Vu par un utilisateur, cela correspond au fait qu'après une utilisation, la ressource est indisponible, dans le pire des cas, le temps où l'autre utilisateur monopolise cette ressource.

La Figure 3.2 illustre ce découplage au moyen de l'ajout de temporisations variables et bornées. Cette politique de partage de ressource peut être approchée par un comportement sans couplage mais dont certaines durées sont incertaines ou variables. Pour un utilisateur en attente de la ressource, le temps d'indisponibilité de la ressource est une durée variable. De même qu'après une utilisation, la ressource est soit immédiatement disponible soit disponible après au plus une utilisation du consommateur concurrent. Ceci est représenté par un intervalle de temps entre deux utilisations de la ressource.

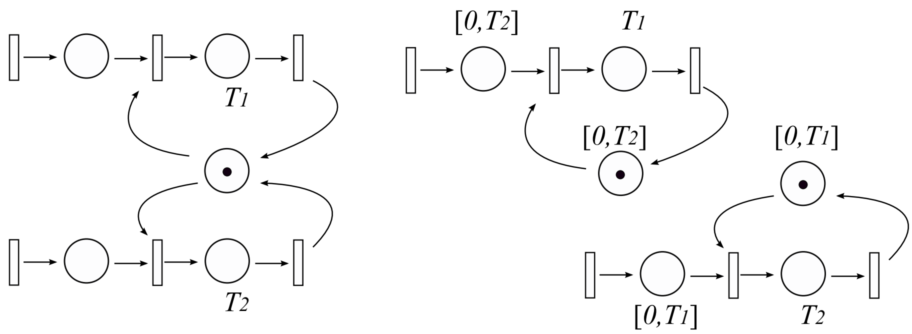


FIGURE 3.2 – Transformation en GET à temporisations bornées

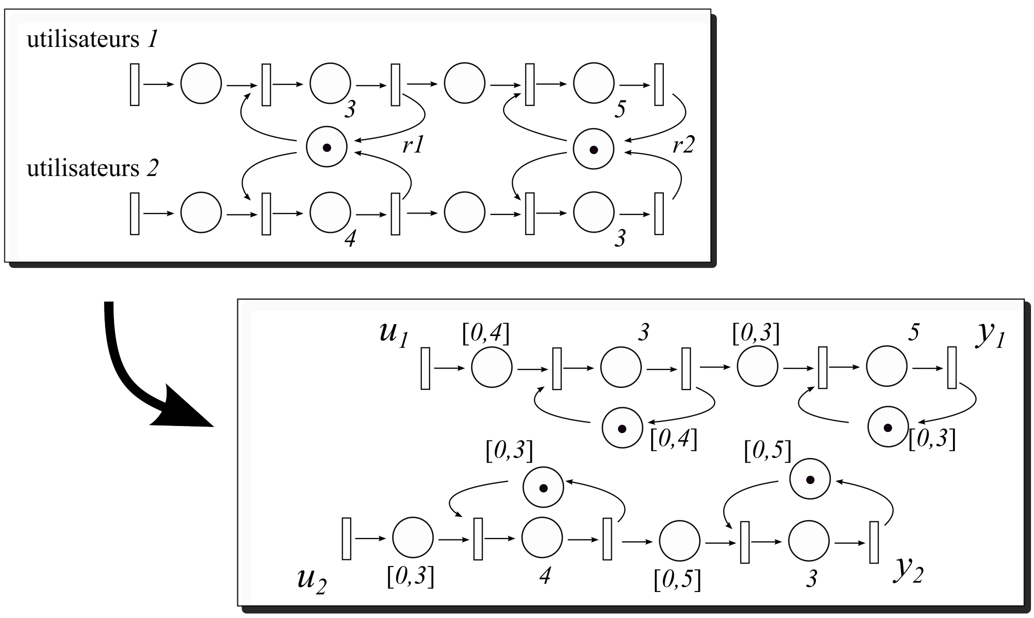


FIGURE 3.3 – Exemple avec deux ressources partagées

Exemple 5 *La Figure 3.3 décrit un exemple de partage de ressources. Deux ressources notées r_1 et r_2 sont partagées entre deux types d'utilisateurs. Pour la politique d'affectation décrite précédemment, le RdP peut être converti en GET avec des temporisations bornées.*

On peut calculer, dans le dioïde d'intervalles de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$, l'intervalle de comportement de ce GET. Le comportement global est décrit par la relation entrée-sortie

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \mathbf{H} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix}$$

où la matrice de transfert est diagonale

$$\mathbf{H} = \begin{pmatrix} \mathbf{H}_{11} & \varepsilon \\ \varepsilon & \mathbf{H}_{22} \end{pmatrix}$$

Les éléments $\mathbf{H}_{11}$ et $\mathbf{H}_{22}$ décrivent l'intervalle des comportements entrée-sortie des utilisateurs, soit $y_1 = \mathbf{H}_{11}u_1$ et $y_2 = \mathbf{H}_{22}u_2$. L'expression de ces intervalles est donnée ci-dessous

$$\begin{array}{rcl} \mathbf{H}_{11} & = & [\delta^5(\gamma^1\delta^5)^*\delta^3(\gamma^1\delta^3)^*, \delta^8(\gamma^1\delta^8)^*\delta^7(\gamma^1\delta^7)^*] \\ & = & [\delta^8(\gamma^1\delta^5)^*, \delta^{15}(\gamma^1\delta^8)^*] \\ \mathbf{H}_{22} & = & [\delta^3(\gamma^1\delta^3)^*\delta^4(\gamma^1\delta^4)^*, \delta^8(\gamma^1\delta^8)^*\delta^7(\gamma^1\delta^7)^*] \\ & = & [\delta^7(\gamma^1\delta^4)^*, \delta^{15}(\gamma^1\delta^8)^*] \end{array}$$

En l'absence de conflit, les utilisateurs 1 peuvent traverser le système avec un débit de 1 utilisateur tous les 5 unités de temps, pour les utilisateurs 2 c'est 1 tous les 4 unités de temps. En cas de conflits permanents, les utilisateurs 1 et 2 ont le même débit de 1 utilisateur tous les 8 unités de temps.

3.3 Routages périodiques dans des systèmes (max,+) linéaires fonctionnant en parallèle

Les systèmes considérés dans [Boutin et al., 2009b] [Boutin and L'Anton, 2011] sont constitués de sous-systèmes (max,+)-linéaires (voir Figure 3.4). Les systèmes H_1 et H_2 peuvent être décrits de façon exacte par leur série de transfert dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$. On peut imaginer par exemple qu'il s'agit de deux GET. Les événements d'entrée u_1 et u_2 de ces deux sous-systèmes sont déclenchés à partir d'une sélection des événements u. Les événements u sont routés soit dans H_1 soit dans H_2. En terme de fonction compteur, on a simplement

$$\forall t, u(t) = u_1(t) + u_2(t),$$

c'est-à-dire que tout événement u conduit instantanément à un événement u_1 ou à un événement u_2. On se place encore une fois dans le contexte d'un fonctionnement au plus tôt.

Pour fixer les idées on peut imaginer un atelier de production où les pièces arrivant en u peuvent être indifféremment produites dans deux ilots différents qui n'ont pas le même comportement dynamique. Ensuite les flux de sortis issus des deux sous-systèmes sont additionnés (au sens compteur),

$$\forall t, y(t) = y_1(t) + y_2(t).$$

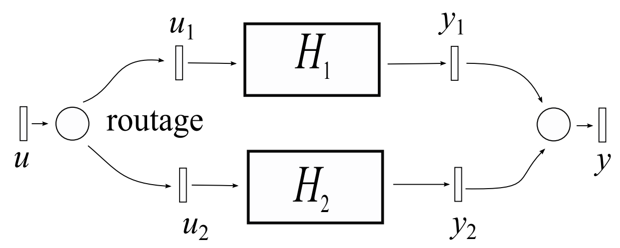


FIGURE 3.4 – Routage dans deux systèmes (max,+)-linéaires (GET).

Même si H_1 et H_2 peuvent être décrits par des GET, le système global n'est plus un GET (du fait de la place de routage) et n'est donc pas en général un système (max,+) linéaire. L'approche retenue pour analyser ce système est de définir un encadrement tel que la dynamique du système avec routage soit encadrée par la dynamique de deux systèmes, l'un plus rapide, l'autre plus lent. Bien que ce système ne soit pas (max,+) linéaire, il pourra être décrit par un intervalle de comportements dont les bornes correspondent à des systèmes (max,+) linéaires.

Pour que le fonctionnement au plus tôt du système de la Figure 3.4 soit bien défini, il convient d'établir une politique de routage. Par la suite, pour un routage donné, nous noterons par

$$y = H(u),$$

le comportement entrée-sortie du système (non linéaire) de la Figure 3.4.

Comme décrit précédemment, les phénomènes de routage étudiés impliquent des opérations de somme usuelle sur des fonctions compteurs. On introduit ci-dessous une nouvelle opération sur des séries de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$.

Définition 4 (Produit $\odot$) *Soient $h = \bigoplus_i \gamma^{N_i}\delta^i$ et $h' = \bigoplus_i \gamma^{N'_i}\delta^i$ deux séries de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$. L'opération $\odot$ est définie comme suit*

$$h \odot h' = \bigoplus_i \gamma^{N_i + N'_i}\delta^i.$$

Remarque 3 (Compteurs représentés par des séries) *Jusqu'à présent, on a distingué d'une part les opérateurs obtenus par compositions rationnelles des opérateurs élémentaires γ^1 et δ^1, d'autre part les variables et valeurs de ces opérateurs qui sont des fonctions compteurs de Σ_c. Notons qu'il est possible de représenter les fonctions compteurs (les trajectoires) par des séries de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$. De cette façon, tous les objets manipulés restent dans le même dioïde $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$. Il suffit ensuite, selon le contexte, d'interpréter une série soit comme la description de la dynamique d'un système (un opérateur), soit comme la représentation d'une trajectoire (une fonction compteur). C'est sous cet angle que les prochains développements sont abordés.*

Pour le système décrit Figure 3.4, et pour un routage donné, on a d'une part

$$u = u_1 \odot u_2,$$

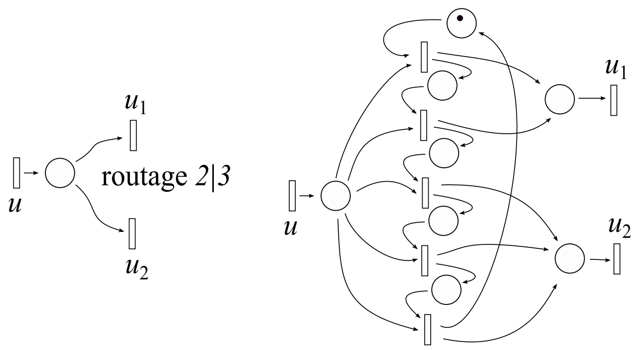


FIGURE 3.5 – Routage périodique 2|3

et, d'autre part,

$$y = y_1 \odot y_2 = (H_1 \otimes u_1) \odot (H_2 \otimes u_2),$$

puisque H_1 et H_2 sont des systèmes (max,+) linéaires.

Proposition 1 ([Boutin et al., 2009b]) *Quelle que soit la politique de routage appliquée au système de la Figure 3.4, on a*

$$y = H(u) \succeq (H_1 \odot H_2) \otimes u,$$

avec $H_1, H_2 \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$ les séries de transfert des sous-systèmes et $u, y \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$ les séries décrivant les entrées et sorties.

La série $H_1 \odot H_2 \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$ décrit donc le transfert d'un système (max,+) qui est plus rapide que le système de la Figure 3.4, et ce pour n'importe quel routage $u = u_1 \odot u_2$. On obtient ainsi une première borne de l'intervalle recherché.

Pour obtenir l'autre borne, on s'intéresse tout d'abord au fonctionnement en parallèle de plusieurs systèmes (max,+) linéaires de même transfert. En outre, on se restreint à des politiques de routage périodiques définies ci-dessous.

Notation 1 (Routage Périodique) *On notera $(H_1|H_2)_{m|n}$ le comportement du système décrit par la Figure 3.4 soumis à un routage $(m+n)$-périodique noté $m|n$ et défini comme suit*

$$\begin{aligned} u_1(k) &= u(\lfloor k/m \rfloor \times (m+n) + k \mod m) \\ u_2(k) &= u(\lfloor k/n \rfloor \times (m+n) + (k \mod n) + m) \end{aligned}$$

les m premiers événements u sont affectés au système 1, les n suivants au système 2, puis on recommence pour les $(m+n)$ prochains événements.

Exemple 6 *Le routage 2|3 est illustré par le RdP de la Figure 3.5. Les deux premiers tirs de u produisent chacun un tir de u_1, les trois tirs suivants produisent chacun un tir de u_2 et ainsi de suite avec une périodicité de 5.*

Définition 5 (Ech_n) *On définit l'application* $\mathsf{Ech}_n : \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!] \to \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!], h \mapsto \underbrace{h \odot h ... \odot h}_{n\ fois}$.
Par conséquent, $\mathsf{Ech}_n(\bigoplus_i \gamma^{N_i}\delta^i) = \bigoplus_i \gamma^{n\times N_i}\delta^i$.

Proposition 2 ([Boutin et al., 2009b]) *L'application* Ech_n *est dualement résiduable, c'est-à-dire* $\forall b \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$, $\mathsf{Ech}_n(x) \succeq b = \bigoplus_i \gamma^{N_i}\delta^i \iff x \succeq \bigoplus_i \gamma^{\lfloor N_i/n \rfloor}\delta^i = \mathsf{Ech}_n^\flat(b)$.

Proposition 3 ([Boutin et al., 2009b]) *Il y a équivalence de comportement entre* $(H|H)_{1|1}$ *et* $\mathsf{Ech}_2(H)$*, c-à-d*

$$\forall u, (H|H)_{1|1}(u) = \mathsf{Ech}_2(H) \otimes u.$$

Dans le cas particulier où les deux sous-systèmes sont identiques et décrits par la série de transfert $H \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$, le routage alternatif 1|1 conduit à un système global qui est encore (max,+) linéaire et dont la série de transfert est $H \odot H$.

Proposition 4 ([Boutin et al., 2009b]) *Le système* $H = (H_1|H_2)_{m|n}$ *est tel que* $\forall u$,

$$(H_1 \odot H_2) \otimes u \preceq H(u) \preceq \mathsf{Ech}_{m+n}(\mathsf{Ech}_m^\flat(H_1) \oplus \mathsf{Ech}_n^\flat(H_2)) \otimes u$$

Pour le système décrit Figure 3.4, la proposition précédente fournit un intervalle de comportements pour un routage périodique $m|n$ quelconque. Le comportement entrée-sortie du système $H = (H_1|H_2)_{m|n}$ est toujours encadré par la dynamique de deux systèmes (max,+) linéaires, l'un $H_1 \odot H_2$ plus rapide, l'autre $\mathsf{Ech}_{m+n}(\mathsf{Ech}_m^\flat(H_1) \oplus \mathsf{Ech}_n^\flat(H_2))$ plus lent.

On peut donc considérer que l'intervalle $[H_1 \odot H_2, \mathsf{Ech}_{m+n}(\mathsf{Ech}_m^\flat(H_1) \oplus \mathsf{Ech}_n^\flat(H_2))]$ englobe de façon garantie le comportement du système non linéaire décrit Figure 3.4.

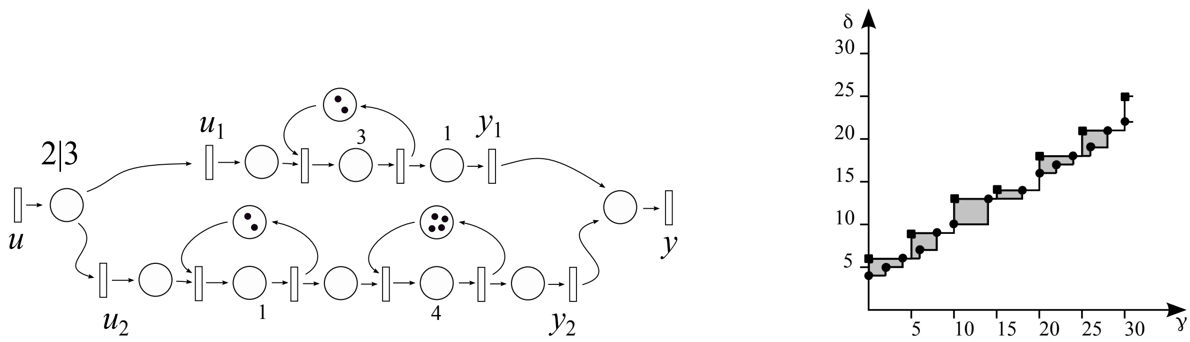


FIGURE 3.6 – Système avec routage 2|3 et son encadrement

Exemple 7 *La Figure 3.6 décrit un système avec deux sous-systèmes décrits par leurs GET respectifs. Les séries de transfert des deux GET sont respectivement*

$$H_1 = \delta^4(\gamma^2\delta^3)^* \text{ et } H_2 = (\delta^5 \oplus \gamma^2\delta^6)(\gamma^4\delta^4)^*.$$

Les temps de cycle de ces deux systèmes sont $\sigma(H_1) = 3/2$ *et* $\sigma(H_2) = 4/4$*. On choisit le routage* $r = 2|3$ *de façon à équilibrer les charges dans les deux sous-systèmes.*

Pour ce routage, le comportement du système global est encadré par l'intervalle

$$\boldsymbol{H} = [\underline{H}, \overline{H}] = [H_1 \odot H_2, \mathsf{Ech}_5(\mathsf{Ech}_2^\flat(H_1) \oplus \mathsf{Ech}_3^\flat(H_2))],$$

avec

$$\begin{array}{rcl} \underline{H} & = & H_1 \odot H_2 = (\delta^4 \oplus \gamma^2\delta^5 \oplus \gamma^4\delta^6 \oplus \gamma^6\delta^7 \oplus \gamma^8\delta^9 \oplus \gamma^{10}\delta^{10} \oplus \gamma^{14}\delta^{13} \oplus \gamma^{18}\delta^{14})(\gamma^{20}\delta^{12})^*, \\ \overline{H} & = & (\delta^6 \oplus \gamma^5\delta^9 \oplus \gamma^{10}\delta^{13} \oplus \gamma^{15}\delta^{14})(\gamma^{20}\delta^{12})^*. \end{array}$$

Les bornes de l'encadrement sont décrites sur la partie droite de la Figure 3.6.

Remarque 4 (Système de convoyage) *Les deux phénomènes de partage de ressource et de routage étudiés dans [Boutin et al., 2009b] [Boutin et al., 2011] se produisent sur un système de convoyage automatisé présent à l'ISTIA. Toute l'étude sur la modélisation intervalle a donc permis d'obtenir un modèle intervalle du comportement entrée-sortie de ce système de convoyage qui présente des phénomènes de conflits (tronçons en exclusion mutuelle et routage). Cette étude a été mise en Annexe A.*

3.4 Conteneurs pour les systèmes (min,+) linéaires

Dans l'étude des systèmes (max,+) ou (min,+) linéaires, le calcul du transfert (approche entrée-sortie) se ramène principalement au calcul de la somme, de la convolution et de l'étoile de Kleene de fonctions constantes par morceaux et ultimement périodiques. Notons que les mêmes opérations sont nécessaires dans le contexte du Network Calculus, exception faite que les fonctions manipulées sont dans ce cas plutôt dans la classe des fonctions non-décroissantes et affines par morceaux [8].

Les travaux menés sur les séries formelles rationnelles [Gaubert, 1992] montrent que la complexité algorithmique des opérations sur des fonctions ultimement périodiques ne dépend pas uniquement de la taille des fonctions, mais également de la valeur de la pente [9] asymptotique de ces fonctions. La somme de deux fonctions de pentes asymptotiques très proches peut créer un résultat dont la taille du transitoire peut être arbitrairement très grand. C'est là un des inconvénients majeurs de cette représentation.

L'objectif du travail d'Euriell Le Corronc a consisté à étudier des méthodes de calcul approché fournissant de meilleures complexités. En outre, les méthodes proposées fournissent un encadrement garanti du résultat. Les algorithmes proposés manipulent des encadrements appelés *conteneurs* qui contiennent de façon certaine ce que le calcul exact aurait fourni.

Dans le cadre des travaux d'Euriell Le Corronc, les systèmes considérés sont des systèmes (min,+) linéaires décrits par leur réponse impulsionnelle, c'est-à-dire une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$ non décroissante. Le calcul du comportement entrée-sortie s'appuie sur les opérations min (noté $\oplus$), inf-convolution (noté $\circledast$) et étoile de Kleene sur de telles fonctions.

Les classes de fonctions considérées sont définies ci-dessous.

8. Dans le Network Calculus, les parties affines des courbes utilisées proviennent d'une forme de fluidification des flux de données. Il est plus pertinent d'approcher des fonctions escaliers par des segments de droite.

9. ou de façon équivalente, du temps de cycle

Définition 6 (Fonctions non décroissantes et constantes par morceaux $\mathcal{F}_c$) *Une fonction $f : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}_{\min}$ appartient à l'ensemble noté $\mathcal{F}_c$ si elle est non décroissante ($t_1 > t_2 \Rightarrow f(t_1) \geq f(t_2)$), et constante par morceaux.*

La réponse impulsionnelle d'un GET exprimée sous forme de fonction compteur $h : \mathbb{R} \to \overline{\mathbb{R}}_{\min}, t \mapsto h(t)$ est donc une fonction de $\mathcal{F}_c$, qui en outre est ultimement périodique :

$$\exists T | \forall t \geq T \Rightarrow h(t+\tau) = \nu + h(t).$$

Les fonctions ultimement périodiques de $\mathcal{F}_c$ constituent l'ensemble noté $\mathcal{F}_{cp}$. Le dioïde adapté à l'étude des systèmes (min,+) linéaires est donc l'ensemble $\mathcal{F}_{cp}$ muni de l'opération min comme $\oplus$ et de l'inf-convolution $\circledast$ comme produit. Il est important de garder à l'esprit pour tout ce qui suit que l'ordre canonique du dioïde $(\mathcal{F}_{cp}, \oplus, \circledast)$ est l'inverse de l'ordre naturel, c'est-à-dire

$$f \preceq g \iff \forall t, f(t) \geq g(t).$$

Définition 7 (Fonctions convexes) *Une fonction $f : \mathbb{R} \mapsto \overline{\mathbb{R}}_{\min}$ est dite convexe si son épigraphe noté $epi(f)$ est un ensemble convexe*

$$epi(f) \quad \triangleq \quad \{(x,y) \mid x \in \mathbb{R}, y \in \overline{\mathbb{R}}_{\min},\ y \geq f(x)\}$$

L'ensemble des fonctions convexes est noté $\mathcal{F}_{convex}$.

Notons que graphiquement les fonctions de $\mathcal{F}_{convex}$ ont une représentation graphique avec une concavité tournée vers le haut.

Définition 8 (Dioïde des fonctions convexes) *L'ensemble $\mathcal{F}_{convex}$, muni du maximum comme opération somme et de la somme $+$ comme operation produit, est un dioïde noté $(\mathcal{F}_{convex}, \max, +)$.*

Définition 9 (Transformée de Legendre-Fenchel $\mathcal{L}$) *La transformée de Legendre-Fenchel appliquée à une fonction $f \in \mathcal{F}_c$ est l'application $\mathcal{L}$ définie de $\mathcal{F}_c$ dans $(\mathcal{F}_{convex}, \max, +)$ par :*

$$\mathcal{L}(f)(s) \triangleq \sup_t \{s.t - f(t)\}.$$

Cette transformée étudiée dans [Cohen et al., 1989a] et [Fidler and Recker, 2006] est illustrée Figure 3.7.

L'application $\mathcal{L}$ est un homomorphisme non injectif du dioïde $(\mathcal{F}_c, \min, \circledast)$ dans le dioïde $(\mathcal{F}_{convex}, \max, +)$, c'est-à-dire : $\forall f, g \in \mathcal{F}_c$,

$$\begin{array}{rcccl} \mathcal{L}(f \oplus g) & = & \mathcal{L}(f) \oplus \mathcal{L}(g) & = & \max(\mathcal{L}(f), \mathcal{L}(g)), \\ \mathcal{L}(f \circledast g) & = & \mathcal{L}(f) \otimes \mathcal{L}(g) & = & \mathcal{L}(f) + \mathcal{L}(g). \end{array}$$

En outre, il existe une caractérisation plus géométrique de l'équivalence modulo $\mathcal{L}$. Deux fonctions sont équivalentes modulo $\mathcal{L}$ si elles ont même enveloppe convexe

$$\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g) \quad \Leftrightarrow \quad \mathcal{C}_{vx}(f) = \mathcal{C}_{vx}(g),$$

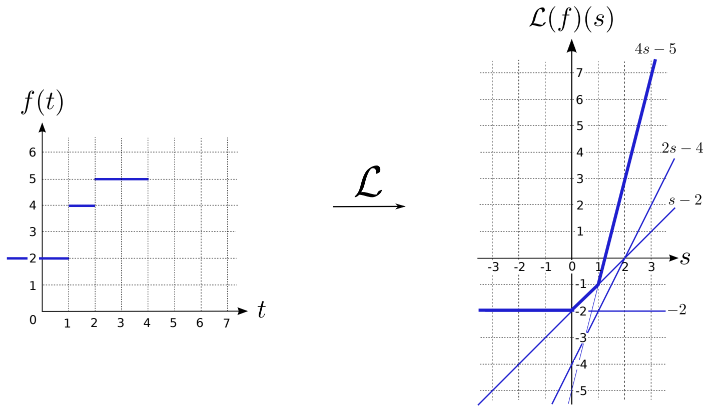


FIGURE 3.7 – Transformée de Legendre-Fenchel d'une fonction.

où l'enveloppe convexe notée $\mathcal{C}_{vx}(f)$ est la plus petite [10] fonction convexe plus grande que f. Notons que pour $f \in \mathcal{F}_{cp}$, alors $\mathcal{C}_{vx}(f)$ est affine par morceaux et ultimement affines. C'est-à-dire que $\mathcal{C}_{vx}(f)$ est décrit par un ensemble fini de segments et par une demi-droite.

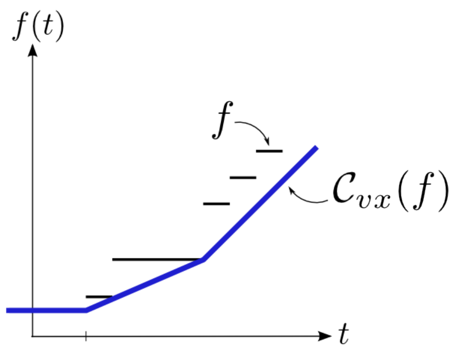


FIGURE 3.8 – Enveloppe convexe.

Définition 10 *(Dioïde $\mathcal{F}_{c/\mathcal{L}}$). Soit la relation d'équivalence suivante*

$$\mathcal{L}(f) = \mathcal{L}(g) \quad \Leftrightarrow \quad f \overset{\mathcal{L}}{\equiv} g.$$

La relation $\overset{\mathcal{L}}{\equiv}$ est une congruence. Ainsi, le quotient de $\mathcal{F}_c$ par $\overset{\mathcal{L}}{\equiv}$ forme le dioïde noté $\mathcal{F}_{c/\mathcal{L}}$. Un élément de $\mathcal{F}_{c/\mathcal{L}}$ est une classe d'équivalence modulo $\mathcal{L}$ notée $[f]_\mathcal{L}$ qui contient toutes les fonctions de $\mathcal{F}_c$ ayant la même transformée de Legendre-Fenchel. Les opérations $\oplus$ et $\circledast$ du dioïde quotient sont alors définies comme suit :

$$\begin{aligned} [f]_\mathcal{L} \oplus [g]_\mathcal{L} &\triangleq [f \oplus g]_\mathcal{L}, \\ [f]_\mathcal{L} \circledast [g]_\mathcal{L} &\triangleq [f \circledast g]_\mathcal{L}. \end{aligned}$$

10. au sens de l'ordre du dioïde $(\mathcal{F}_c, \min, \circledast)$, et donc la plus grande selon l'ordre naturel

Les calculs réalisés sur le dioïde quotient $\mathcal{F}_{c/\mathcal{L}}$ correspondent à une classification des fonctions de $\mathcal{F}_c$ modulo la transformée de Legendre-Fenchel. D'un point de vue géométrique, une classe de $\mathcal{F}_{c/\mathcal{L}}$ regroupe toutes les fonctions ayant la même enveloppe convexe.

La classification des fonctions ultimement périodiques de $\mathcal{F}_{cp}$ modulo $\mathcal{L}$ revient à ne manipuler que des fonctions convexes ultimement affines. En d'autres termes, on peut décrire complètement une classe du quotient $\mathcal{F}_{cp/\mathcal{L}}$ par l'ensemble des points d'inflexion de l'enveloppe convexe et par sa pente ultime. D'un point de vue informatique, remplacer une fonction ultimement-périodique, qui potentiellement nécessite beaucoup de données, par son enveloppe convexe conduit à réduire significativement les données manipulées. En outre, l'inf-convolution de fonctions convexes est décrite par un algorithme de complexité intéressante. Toutes ces considérations nous ont conduits à utiliser l'enveloppe convexe comme outil d'approximation des fonctions ultimement périodiques. Rappelons que, au sens de l'ordre du dioïde, l'enveloppe convexe est une sur-approximation d'une fonction puisque $\mathcal{C}_{vx}(f) \succeq f$.

Les complexités algorithmiques des calculs sur $\mathcal{F}_{cp/\mathcal{L}}$ sont rappelées ci-dessous. Notons que pour toute classe du quotient, l'enveloppe convexe des éléments de la classe est un représentant canonique de la classe.

Proposition 5 ([Le Corronc et al., 2014]) *Soient f, g deux fonctions convexes représentant les classes $[f]_\mathcal{L}$ et $[g]_\mathcal{L}$. Notons N_f (resp. N_g) le nombre de points extrémaux de f (resp. g). Les complexités algorithmiques des opérations sur $\mathcal{F}_{c/\mathcal{L}}$ sont rappelées ci-dessous :*
$[f]_\mathcal{L} \oplus [g]_\mathcal{L}$ est en complexité $\mathcal{O}(N_f + N_g)$
$[f]_\mathcal{L} \circledast [g]_\mathcal{L}$ est en complexité $\mathcal{O}(N_f + N_g)$
$[f]^*_\mathcal{L}$ est en complexité $\mathcal{O}(N_f)$

Au vu de cette proposition, réaliser les calculs sur $\mathcal{F}_{cp/\mathcal{L}}$, plutôt que sur $\mathcal{F}_{cp}$, fournit une complexité très intéressante. En outre, les calculs nous donnent à la fois un majorant du calcul exact mais également l'enveloppe convexe du résultat. Autrement dit, cette méthode de calcul conserve tout de même la pente ultime du calcul exact, ce qui est un indicateur de performance important du système étudié.

Conteneurs et fonctions d'inclusion

Le dioïde quotient $\mathcal{F}_{c/\mathcal{L}}$ et les opérations associées conduisent à une sur-approximation intéressante des calculs exacts. Par symétrie, Euriell Le Corronc a proposé une méthode de sous-approximation par des fonctions pseudo-concaves. Il s'agit de fonctions qui sont ultimement concaves, c'est-à-dire seulement pour t assez grand.

Calculer l'enveloppe concave, a bien évidemment, le même coût algorithmique que le calcul de l'enveloppe convexe (linéaire par rapport au nombre de points extrémaux). En outre, la convolution de fonctions pseudo-concaves a également une complexité linéaire. La sous-approximation d'une fonction de $\mathcal{F}_{cp}$ par une fonction pseudo-concave a par conséquent été la piste explorée pour produire un encadrement de complexité intéressante. En combinant le quotient $\mathcal{F}_{c/\mathcal{L}}$ avec la gestion de sous-approximations pseudo-concaves, on aboutit à la définition d'encadrements spécifiques définis ci-dessous.

Définition 11 (Ensemble de conteneurs) *On appelle conteneur un ensemble défini par*

$$\mathbf{F} \triangleq \{[\underline{f}, \overline{f}]_{\mathcal{L}} | \sigma(\underline{f}) = \sigma(\overline{f}),\ \underline{f} \text{ est pseudo-concave},\ \overline{f} \text{ est convexe}\},$$

où la notation $[\underline{f}, \overline{f}]_{\mathcal{L}}$ *décrit un ensemble défini par*

$$[\underline{f}, \overline{f}]_{\mathcal{L}} = [\underline{f}, \overline{f}] \cap [\overline{f}]_{\mathcal{L}}$$

En résumé, un conteneur est un sous-ensemble d'un intervalle dont les bornes sont respectivement pseudo-concave (borne inf) et convexe (borne sup), et dont les éléments sont équivalents modulo $\mathcal{L}$. Dans la Figure 3.9, le conteneur $[\underline{f}, \overline{f}]_{\mathcal{L}}$ correspond à la partie grisée.

Les calculs exacts sont remplacés par des opérations sur des conteneurs. En s'inspirant de la terminologie du calcul par intervalles [Jaulin et al., 2001], les opérations étendues aux conteneurs sont appelées fonctions d'inclusion. Ce sont des opérations qui incluent de façon garantie le résultat du calcul exact.

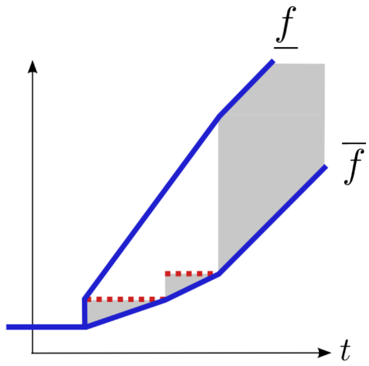


Figure 3.9 – Conteneur.

Définition 12 (Fonctions d'inclusion) *On appelle fonctions d'inclusion, notées* $[\oplus]$, $[\circledast]$ *et* $^{[*]}$ *(pour l'étoile de Kleene), des opérations définies sur l'ensemble des conteneurs* $\mathbf{F}$ *telles que :*

$\mathbf{f} = [\underline{f}, \overline{f}]_{\mathcal{L}},\ \mathbf{g} = [\underline{g}, \overline{g}]_{\mathcal{L}} \in \mathbf{F}$,

$$\begin{aligned} \forall f \in \mathbf{f}, \forall g \in \mathbf{g} &\quad\Rightarrow\quad f \oplus g \subset \mathbf{f}[\oplus]\mathbf{g}, \\ \forall f \in \mathbf{f}, \forall g \in \mathbf{g} &\quad\Rightarrow\quad f \circledast g \subset \mathbf{f}[\circledast]\mathbf{g}, \\ \forall f \in \mathbf{f} &\quad\Rightarrow\quad f^* \subset \mathbf{f}^{[*]}. \end{aligned}$$

En s'appuyant sur des conteneurs dont les bornes ont des propriétés de convexité, il est possible de proposer des fonctions d'inclusion qui soient avec des complexités algorithmiques intéressantes.

Proposition 6 ([Le Corronc et al., 2014]) *Soient* $\mathbf{f} = [\underline{f}, \overline{f}]_{\mathcal{L}}$, $\mathbf{g} = [\underline{g}, \overline{g}]_{\mathcal{L}} \in \mathbf{F}$ *deux conteneurs. Les opérations définies ci-dessous sont des fonctions d'inclusion pour la somme et le produit*

$$\begin{aligned} \mathbf{f}[\oplus]\mathbf{g} &\triangleq [\mathcal{C}_{cv}(\underline{f} \oplus \underline{g}),\ \mathcal{C}_{vx}(\overline{f} \oplus \overline{g})]_{\mathcal{L}} \\ \mathbf{f}[\circledast]\mathbf{g} &\triangleq [\underline{f} \circledast \underline{g},\ \overline{f} \circledast \overline{g}]_{\mathcal{L}} \end{aligned}$$

Ces opérations ont une complexité $\mathcal{O}(n)$ où n est le nombre total de points extrémaux des conteneurs.

Il faut remarquer que la convolution de fonctions convexes reste convexe, de même que la convolution de fonctions pseudo-concaves reste pseudo-concave. L'opération de convolution reste interne à l'ensemble des conteneurs.

Remarque 5 *Dans la thèse d'Euriell Le Corronc, une fonction d'inclusion est également proposée pour l'étoile de Kleene (cf. [Le Corronc et al., 2014]), mais cette fonction d'inclusion n'a pas d'expression simple. Une formulation partielle (seule la borne sup est fournie) est la suivante*

$$\mathbf{f}^{[*]} \triangleq [\underline{\mathbf{f}}^{[*]}, \mathcal{C}_{vx}(\overline{f}^*)]_{\mathcal{L}}$$

La borne supérieure de l'intervalle est une fonction affine que l'on peut calculer en temps linéaire (cf. Prop. 5). En revanche, il est plus difficile d'obtenir un minorant de $\mathbf{f}^*$ qui ait la même pente asymptotique que celle du résultat exact. La complexité de la fonction d'inclusion proposée par Euriell Le Corronc est $\mathcal{O}(n\log(n))$, où n est le nombre total de points extrémaux des deux enveloppes du conteneur.

Chapitre 4

Graphes d'Evénements Temporisés Valués

Dans ce chapitre, sont regroupés les travaux que nous avons menés sur la modélisation des GET Valués à l'aide d'opérateurs additifs. Les communications relatives à ces travaux sont [Cottenceau et al., 2009],[Cottenceau et al., 2014a] et [Cottenceau et al., 2014b].

4.1 Introduction

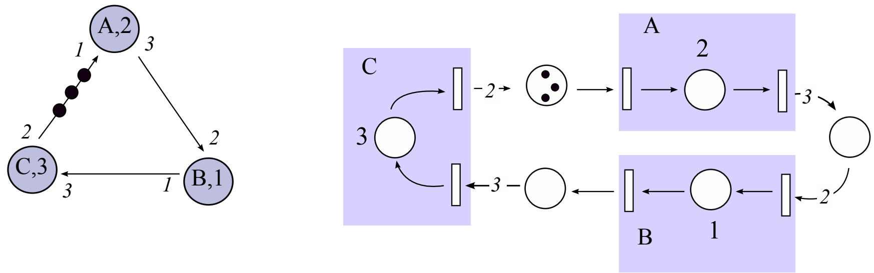
Les GET valués permettent de décrire des phénomènes de synchronisation, de délai, mais aussi des phénomènes de groupement ou de dégroupement. Ces éléments de modélisation sont utiles à la description des systèmes manufacturiers (assemblage, constitution de lots, découpage) mais aussi à celle des systèmes informatiques (consommation et production de données par des processus de calcul parallèle).

La classe des GET valués a fait l'objet de nombreux travaux dans la littérature, par exemple [Munier, 1993] [Teruel et al., 1992] [Marchetti and Munier-Kordon, 2010]. Leur étude via la théorie des systèmes (max,+) linéaires a également fait l'objet de différentes publications. On peut citer notamment [Cohen et al., 1998b] où les GET-V continus sont décrits par des séries formelles. Cette approche a été reprise dans [Hamaci et al., 2006] [Hamaci et al., 2007] pour aborder la modélisation des GET Valués hybrides (composantes continues et discrètes).

La littérature est probablement plus riche encore sous la forme d'un modèle équivalent appelé [11] Synchronous Dataflow Graphs (SDF) [Lee and Messerschmitt, 1987]. Les SDF, destinés à la description de systèmes informatiques, décrivent des processus (appelés acteurs) s'exécutant en parallèle. Les acteurs échangent, consomment et produisent des données. A titre d'exemple, on donne Figure 4.1 le modèle SDF d'un système avec 3 acteurs A, B et C. L'exécution de A dure 2 unités de temps, ne se produit que suite à la disponibilité d'une donnée (provenant de l'acteur C) et génère 3 données fournies à l'acteur B. L'acteur B consomme 2 données, son exécution dure 1 unité de temps et fournit 1 donnée à l'acteur C. Ce modèle peut être décrit sous la forme d'un GET Valué temporisé équivalent donné Figure 4.1. De façon générale, les

11. ou Graphe Flot de Données

modèles GET Valués et SDF sont équivalents. En raison de cette équivalence, des travaux sur la modélisation de SDF s'appuyant sur l'algèbre (max,+) sont également disponibles [Geilen, 2010] [de Groote et al., 2012].



Synchronous Dataflow (SDF)   GET-V équivalent

FIGURE 4.1 – Synchronous Dataflow Graph et le GET Valué équivalent

.

Une part importante des travaux menés sur ces modèles (GET-V ou SDF) consiste en l'établissement de méthodes de vérification de propriétés (la vivacité, la bornitude), de méthodes permettant d'établir le débit en fonctionnement au plus tôt, ou encore la recherche d'ordonnancements [12] compatibles avec les contraintes de précédence et de synchronisation exprimées par le modèle. Le plus souvent, les ordonnancements recherchés sont alors dans la classe des ordonnancements répétitifs cycliques [Benabid-Najjar et al., 2012] [Bodin et al., 2012].

Le modèle que nous avons proposé, et qui est décrit dans ce chapitre, reprend la démarche suivie dans [Cohen et al., 1998b] en s'appuyant sur des opérateurs élémentaires. Ce modèle entrée-sortie a l'avantage de permettre la transposition de certains problèmes de contrôle résolus pour les GET (synthèse de correcteurs) à la classe des GET Valués.

4.2 Modélisation par des opérateurs

Notre étude des GET-V repose sur une description au moyen d'opérateurs élémentaires. C'est-à-dire de la même manière que l'on décrit les GET sur $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$. Nous avons introduit au Chapitre 2 des opérateurs additifs pour décrire tous les phénomènes élémentaires modélisés par les GET-V. Les opérateurs nécessaires sont notés δ^t (décalage temporel), γ^n (décalage événementiel), μ_m (multiplication événementielle) et β_b (division événementielle).

Pour pouvoir aboutir à un modèle intéressant sur le plan pratique, nous devons néanmoins restreindre la classe des GET Valués considérés. Nous ne traitons ici que les GET valués dont la structure satisfait une propriété d'équilibre sur les poids/gains des chemins.

Définition 13 (Gain d'un chemin) *Soit p_k une place ayant t_i comme transition d'entrée et t_o comme transition de sortie. L'arc $t_i \to p_k$ (resp. $p_k \to t_o$) a un poids noté $w_i(p_k)$ (resp. $w_o(p_k)$). Le gain du chemin $t_i \to p_k \to t_o$ est défini par $\Gamma(p_k) = w_i(p_k)/w_o(p_k) \in \mathbb{Q}$. Par extension, pour un chemin Π défini par $p_a \to p_b \to \ldots \to p_k$, le gain est $\Gamma(\Pi) = \Gamma(p_a) \times \Gamma(p_b) \times \ldots \times \Gamma(p_k)$.*

12. c'est-à-dire les séquences de tir de toutes les transitions (GET-V) ou d'exécution des acteurs (SDF)

Définition 14 (Equilibre) *Un GET-V est dit équilibré si pour toute paire de transitions (t_a, t_b), tous les chemins de t_a à t_b ont le même gain.*

Par conséquent, pour tout GET-VE (GET Valué Equilibré), tous les circuits ont nécessairement un gain de 1.

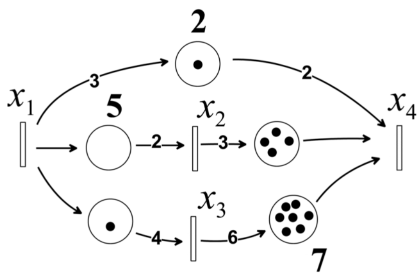


FIGURE 4.2 – GET-V Equilibré.

Exemple 8 *Pour le GET-VE de la Figure 4.2, les relations entre les transitions sont traduites par :* $x_i \in \Sigma_c$, $x_2 = \beta_2\delta^5 x_1$, $x_3 = \beta_4\gamma^1 x_1$ *et* $x_4 = \beta_2\gamma^1\delta^2\mu_3 x_1 \oplus \gamma^4\mu_3 x_2 \oplus \gamma^7\mu_6\delta^7 x_3$. *Selon une représentation compteur :*$\forall t$, $x_2(t) = \lfloor x_1(t-5)/2 \rfloor$, $x_3(t) = \lfloor (x_1(t)+1)/4 \rfloor$ *et* $x_4(t) = \min(\lfloor (3x_1(t-2)+1)/2 \rfloor, 3x_2(t)+4, 6x_3(t-7)+7)$.

Proposition 7 ([Cottenceau et al., 2014a]) *Pour les GET-VE, les opérateurs élémentaires satisfont les propriétés suivantes*

$$\gamma^1\delta^1 = \delta^1\gamma^1, \ \ \mu_m\delta^1 = \delta^1\mu_m, \ \ \beta_b\delta^1 = \delta^1\beta_b, \tag{4.1}$$

$$\mu_m\gamma^n = \gamma^{m\times n}\mu_m, \ \ \gamma^n\beta_b = \beta_b\gamma^{n\times b}. \tag{4.2}$$

En outre, tous les opérateurs $\mathcal{H} \in \mathcal{O}$ vérifient

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}(\delta^{-1})^* = (\delta^{-1})^*\mathcal{H} = (\gamma^1)^*\mathcal{H} = \mathcal{H}(\gamma^1)^*. \tag{4.3}$$

Opérateurs événementiels périodiques

D'après (4.1), l'opérateur δ^t commute avec n'importe quel opérateur dit *événementiel*, c'est-à-dire dans l'ensemble $\{\gamma^n, \mu_m, \beta_b\}$. Par conséquent, on peut facilement factoriser les opérateurs δ^t. De façon équivalente, tous les opérateurs issus de la modélisation des GET-VE peuvent s'écrire sous la forme $\bigoplus_i w_i\delta^{t_i}$ où les termes w_i sont des opérateurs obtenus par un nombre fini de sommes et compositions d'opérateurs événementiels.

Définition 15 (Dioide $\mathcal{E}$) *Notons $(\mathcal{E}, \oplus, \circ) \subset \mathcal{O}$ le sous-dioïde des opérateurs obtenus par combinaisons finies de sommes et de produits d'opérateurs dans $\{\gamma^n, \mu_m, \beta_b\}$. Ces opérateurs seront appelés E-opérateurs (E pour événementiel). Par exemple, $w = \gamma^1\mu_2 \oplus \beta_2\gamma^1 \in \mathcal{E}$.*

Le gain des E-opérateurs se définit récursivement par $w_a, w_b \in \mathcal{E}$, $\Gamma(w_a \circ w_b) = \Gamma(w_a) \times \Gamma(w_b)$ et $\Gamma(w_a \oplus w_b) = \min(\Gamma(w_a), \Gamma(w_b))$, avec $\Gamma(\gamma^n) = 1$, $\Gamma(\mu_m) = m$ et $\Gamma(\beta_b) = 1/b$. Par exemple, $\Gamma(\gamma^1\mu_2\beta_3) = 2/3$. Une somme d'opérateurs $w_a \oplus w_b$ sera dite *équilibrée* si $\Gamma(w_a) = \Gamma(w_b)$.

Un E-operateur peut être vu comme la représentation d'un système *instantané*[13] qu'il est également possible de décrire par une fonction Compteur/Compteur (C/C)[14] définie par $\mathcal{F}_w : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, k_i \mapsto k_o$, où k_i est un compteur d'entrée et k_o un compteur de sortie. Pour $w \in \mathcal{E}$ un E-opérateur et $x \in \Sigma_c$ un compteur, la fonction $\mathcal{F}_w$ est obtenue en remplaçant $x(t)$ par k_i dans l'expression de $(wx)(t)$. Par exemple, pour $w = \beta_2\gamma^1\mu_3$ on obtient $(wx)(t) = \lfloor (3 \times x(t) + 1)/2 \rfloor$ et donc $\mathcal{F}_{\beta_2\gamma^1\mu_3} : k_i \mapsto \lfloor (3 \times k_i + 1)/2 \rfloor$. Cette fonction est décrite Figure 4.4 où les deux axes sont labelisés I-count (input count) et O-count (output count). Cette fonction C/C donne une description du comportement du GET-VE (non temporisé) donné Figure 4.3. Il faut interpréter la courbe décrite par $\mathcal{F}_{\beta_2\gamma^1\mu_3}$ de la façon suivante : si l'on opère 0 tir de x_1, on observe 0 tir de x_2, puisque $\mathcal{F}_{\beta_2\gamma^1\mu_3}(0) = 0$. Si l'on déclenche 1 tir de x_1, on obtient 2 tirs de x_2 (puisque $\mathcal{F}_{\beta_2\gamma^1\mu_3}(1) = 2$). Ceci décrit effectivement le comportement du GET-VE non temporisé de la Figure 4.3.

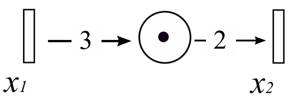


FIGURE 4.3 – GET-VE décrit par $x_2 = \beta_2\gamma^1\mu_3 x_1$.

Remarque 6 $\forall w_1, w_2 \in \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{F}_{w_1 \oplus w_2} = \min(\mathcal{F}_{w_1}, \mathcal{F}_{w_2})$ *et* $\mathcal{F}_{w_1 \circ w_2} = \mathcal{F}_{w_1}(\mathcal{F}_{w_2})$.

Définition 16 (E-operateurs périodiques) *Un E-operateur $w \in \mathcal{E}$ est dit (n, n')-periodique si $\forall k \in \mathbb{Z}, \mathcal{F}_w(k+n) = \mathcal{F}_w(k) + n'$. Les opérateurs élémentaires sont périodiques : γ^n est $(1,1)$-periodique, μ_m est $(1,m)$-periodique et β_b est $(b,1)$-périodique. L'ensemble des opérateurs périodiques est noté $\mathcal{E}_{per}$.*

Pour un E-operateur (n, n')-periodique w, le ratio $n'/n \in \mathbb{Q}$ est à la fois le gain $\Gamma(w)$ et la pente de la fonction $\mathcal{F}_w$ associée.

Proposition 8 ([Cottenceau et al., 2014a]) *Pour les E-operateurs périodiques on a*

$$\begin{aligned} w_a, w_b \in \mathcal{E}_{per} &\Rightarrow w_a \circ w_b \in \mathcal{E}_{per} \\ w_a, w_b \in \mathcal{E}_{per} \text{ and } \Gamma(w_a) = \Gamma(w_b) &\Rightarrow w_a \oplus w_b \in \mathcal{E}_{per}. \end{aligned}$$

La propriété d'équilibre des gains implique que tous les opérateurs issus de la modélisation des GET-VE sont périodiques. Par exemple, la Figure 4.4 donne la représentation de $\mathcal{F}_{\beta_2\gamma^1\mu_3}$ (points gris) et de $\mathcal{F}_{\gamma_4\mu_3\beta_2}$ (points noirs) qui sont $(2,3)$ périodiques. Il faut aussi remarquer que la relation d'ordre sur les E-opérateurs s'interprète graphiquement. Ici, nous avons $\gamma_4\mu_3\beta_2 \preceq \beta_2\gamma^1\mu_3$ (cf. remarque 6) ce qui est équivalent à $\mathcal{F}_{\gamma_4\mu_3\beta_2} \geq \mathcal{F}_{\beta_2\gamma^1\mu_3}$.

13. sans mémoire
14. c'est-à-dire dont la variable et la valeur sont des compteurs

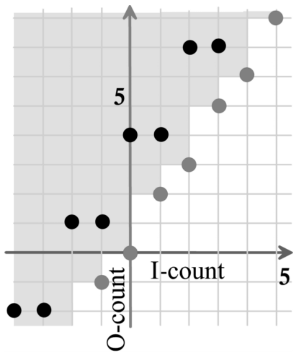


FIGURE 4.4 – Représentation C/C des fonctions $\mathcal{F}_{\beta_2\gamma_1\mu_3}$ et $\mathcal{F}_{\gamma_4\mu_3\beta_2}$

Il découle de ces propriétés que le transfert des GET-VE s'exprime par des séries $\bigoplus_i w_i\delta^{t_i}$ dont les coefficients sont des E-operateurs $w_i \in \mathcal{E}_{per}$ périodiques. La structure algébrique adaptée est un dioïde $\mathcal{E}_{per}[\![\delta]\!]$ de séries formelles (cf. Annexe B) en la variable δ, à exposants dans $\mathbb{Z}$ et à coefficients dans $\mathcal{E}_{per}$. Les opérations de ce dioïde sont définies par : $s_1 = \bigoplus_i w_{1i}\delta^{t_i}$, $s_2 = \bigoplus_j w_{2j}\delta^{t_j}$ dans $\mathcal{E}_{per}[\![\delta]\!]$,

$$\begin{array}{rcl} s_1 \oplus s_2 & \triangleq & \bigoplus_k (w_{1k} \oplus w_{2k})\,\delta^{t_k} \\ s_1 \otimes s_2 & \triangleq & \bigoplus_{\tau\in\mathbb{Z}} \left(\bigoplus_{t_k+t_{k'}=\tau} w_{1k} \circ w_{2k'}\right)\delta^{\tau}. \end{array}$$

En raison du caractère monotone des fonctions compteurs, les opérateurs satisfont (4.3). Par conséquent, les résultats des opérations de $\mathcal{E}_{per}[\![\delta]\!]$ peuvent être simplifiés modulo la relation d'équivalence (4.4).

Définition 17 *Le dioïde $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$ est le quotient de $\mathcal{E}_{per}[\![\delta]\!]$ par la relation suivante*

$$s_a \equiv^* s_b \iff (\gamma^1)^* s_a (\gamma^1)^* (\delta^{-1})^* = (\gamma^1)^* s_b (\gamma^1)^* (\delta^{-1})^* \tag{4.4}$$

Une série est dite *équilibrée* si tous ses coefficients ont le même gain. Dès lors, le gain de la série est noté $\Gamma(s)$. Les séries de transfert des GET-VE sont nécessairement des series équilibrées de $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$.

Représentation graphique des séries de $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$

Les séries de $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$ disposent d'une représentation graphique qui est une extension de celle utilisée pour les séries de $\mathcal{M}^{ax}_{in}[\![\gamma,\delta]\!]$. Dans $\mathcal{M}^{ax}_{in}[\![\gamma,\delta]\!]$ [Cohen et al., 1989b], les séries s'écrivent $s = \bigoplus \gamma^{n_i}\delta^{t_i}$ où chaque monôme $\gamma^{n_i}\delta^{t_i}$ peut être représenté graphiquement par un point (n_i, t_i) du plan $\mathbb{Z}^2$. De plus, en raison de l'équivalence (4.4), chaque monôme est décrit par un cône sud-est de sommet (n_i, t_i). A titre d'exemple, la Figure 4.5 représente la série $\gamma^2\delta^5 \oplus \gamma^4\delta^3 \oplus \gamma^6\delta^7 \oplus \gamma^9\delta^6 \oplus \gamma^{13}\delta^{11}$ dans $\mathbb{Z}^2$. La surface de $\mathbb{Z}^2$ formée par l'union des cônes décrit toutes les séries de $\mathcal{M}^{ax}_{in}[\![\gamma,\delta]\!]$ qui seraient dominées [15] par cette série. Sur la Figure 4.5, on voit par exemple que les opérateurs $\gamma^4\delta^3$ et $\gamma^9\delta^6$ sont dominés puisque situés dans l'aire engendrée par les autres

15. c-à-d inférieures au sens de l'ordre de $\mathcal{M}^{ax}_{in}[\![\gamma,\delta]\!]$

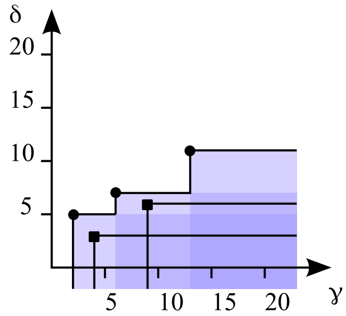


FIGURE 4.5 – Representation graphique de $\gamma^2\delta^5 \oplus \gamma^4\delta^3 \oplus \gamma^6\delta^7 \oplus \gamma^9\delta^6 \oplus \gamma^{13}\delta^{11} \in \mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$.

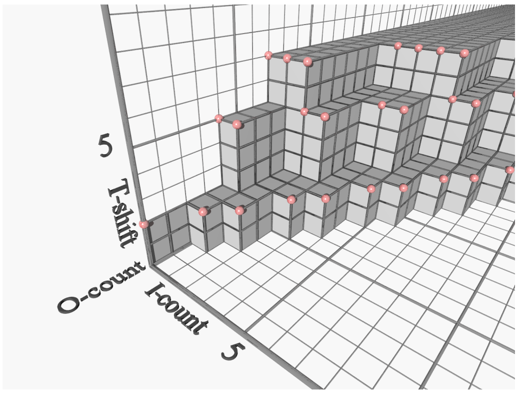


FIGURE 4.6 – Representation de $\beta_2\gamma^1\mu_3\delta^2 \oplus \gamma^4\mu_3\beta_2\delta^5 \oplus \gamma^7\mu_6\beta_4\gamma^1\delta^7$.

monômes. On a donc la simplification $\gamma^2\delta^5\oplus\gamma^4\delta^3\oplus\gamma^6\delta^7\oplus\gamma^9\delta^6\oplus\gamma^{13}\delta^{11} = \gamma^2\delta^5\oplus\gamma^6\delta^7\oplus\gamma^{13}\delta^{11}$. La représentation graphique fournit alors une interprétation géométrique à la relation d'équivalence (4.4). Deux séries sont équivalentes si elles ont même représentation graphique.

Par rapport à $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$, l'introduction des opérateurs événementiels μ_m et β_b conduit à une représentation tridimensionnelle. Une série $s = \bigoplus_i w_i\delta^{t_i} \in \mathcal{E}^*[\![\delta]\!]$ est représentée dans $\mathbb{Z}^3$ où les axes ont les labels I-count/O-count/T-shift : T-shift représente l'axe des exposants t_i et chaque coefficient $w_i \in \mathcal{E}_{per}$ est représenté par $\mathcal{F}_{w_i}$ dans le plan T-shift= t_i.

Dans la Figure 4.6, la série $s = \beta_2\gamma^1\mu_3\delta^2 \oplus \gamma^4\mu_3\beta_2\delta^5 \oplus \gamma^7\mu_6\beta_4\gamma^1\delta^7$ est dessinée selon cette représentation. Notons que c'est aussi la série de transfert du GET-VE donné dans la Figure 4.2.

Dans ce contexte, les produits par les opérateurs δ^t et γ^n ont une interprétation graphique simple.

- produit par δ^t $\iff$ décalage de t unités selon l'axe T-shift.
- produit à droite par γ^n $\iff$ décalage de n unités vers les valeurs décroissantes de I-count.
- produit à gauche par $\gamma^{n'}$ $\iff$ décalage de n' unités vers les valeurs croissantes de O-count.

Rappelons que l'équivalence des séries modulo (4.4) conduit dans $\mathcal{E}_{per}^*[\![\delta]\!]$ à

$$w\delta^t \equiv^* (\gamma^1)^* w(\gamma^1)^*(\delta^{-1})^*\delta^t.$$

L'équivalence (4.4) conduit donc à dessiner le monôme $w\delta^t$ par sa fonction $\mathcal{F}_w$ dans le plan

T-shift=t, et ensuite à étirer cette courbe vers les valeurs décroissantes de T-shift, vers les valeurs décroissantes de I-count, et vers les valeurs croissantes de O-count. Chaque monôme $w_i\delta^{t_i}$ engendre alors un *volume* de $\mathbb{Z}^3$ (grisé opaque sur les figures). Cette zone grisée décrit la zone de domination de l'opérateur $w_i\delta^{t_i}$, c'est-à-dire, tout opérateur $w_j\delta^{t_j}$ tel que $w_j\delta^{t_j} \preceq w_i\delta^{t_i}$ sera contenu dans ce volume, et ne sera donc pas visible dans la représentation tridimensionnelle. Cette représentation graphique définit le moyen de simplifier les séries de $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$: si un élément n'est pas visible, il peut être enlevé de l'expression de la série.

De même que pour les GET ordinaires, les matrices de transfert des GET-VE sont obtenues par des expressions rationnelles sur des opérateurs équilibrés de $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$. Le résultat suivant étend le Théorème 1 aux GET-VE.

Définition 18 *Une série équilibrée $s \in \mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$ est dite ultimement périodique*[16] *si elle peut s'écrire soit $s = p \oplus q(\gamma^\nu\delta^\tau)^*$, soit $s = p \oplus (\gamma^{\nu'}\delta^{\tau'})^*q'$, où $\nu, \tau, \nu'\tau' \in \mathbb{N}$, p, q et q' sont des polynômes équilibrés.*

Remarque 7 (Périodicité à droite/à gauche) *Pour les séries de $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$, la périodicité ultime s'exprime soit comme un facteur $(\gamma^\nu\delta^\tau)^*$ à droite de l'expression, soit comme un facteur $(\gamma^{\nu'}\delta^{\tau'})^*$ à gauche. L'extension de la notion de temps de cycle (temps moyen entre deux événements) pour une série doit donc être précisée. On a soit un temps de cycle à droite, soit à gauche. On distingue donc $\sigma_l(s) = \tau'/\nu'$ et $\sigma_r(s) = \tau/\nu$. Comme on le verra par la suite, le ratio $\sigma_l(s) = \tau'/\nu'$ correspond au temps moyen entre deux événements en sortie du système quand on applique une impulsion $\mathcal{I}$ en entrée.*

Proposition 9 ([Cottenceau et al., 2014a]) *Soient s_1 et s_2 deux séries ultimement périodiques de $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$.*
- *$\Gamma(s_1) = \Gamma(s_2) \Rightarrow s_1 \oplus s_2$ est ultimement périodique*
- *$s_1 \otimes s_2$ et $s_2 \otimes s_1$ sont ultimement périodiques*
- *$\Gamma(s_1) = 1 \Rightarrow s_1^*$ est ultimement périodique*

Preuve : La preuve de ce résultat (détaillée dans [Cottenceau et al., 2014a]) reprend les mêmes techniques que celles utilisées pour prouver que la somme, le produit et l'étoile de Kleene de séries périodiques de $\mathcal{M}^{ax}_{in}[\![\gamma, \delta]\!]$ sont périodiques [Gaubert, 1992]. Le point le plus délicat étant de montrer que l'étoile de Kleene d'un polynôme $p \in \mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$ de gain 1 ($\Gamma(p) = 1$) est une série ultimement périodique de $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$. Ce calcul s'appuie en pratique sur le calcul de l'étoile de Kleene d'une matrice de $\mathcal{M}^{ax}_{in}[\![\gamma, \delta]\!]$, ce qui peut être vu comme l'évaluation de performance d'un GET ordinaire, mais de taille plus grande que le GET-VE initial. Sur le plan de la complexité algorithmique, le calcul de l'étoile de Kleene, tel que proposé dans [Cottenceau et al., 2014a], ne permet pas de calculer des exemples pratiques de grande taille. Notre approche subit les mêmes problèmes d'explosion combinatoire que ceux décrits dans [Marchetti and Munier-Kordon, 2010], qui s'appuient aussi sur une transformation GET-V vers GET ordinaire. $\square$

Pour un GET-VE à m-entrées et p-sorties, il découle de la proposition précédente que les éléments de sa matrice de transfert $H = CA^*B$ sont des séries ultimement périodiques de $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$.

16. Remarquons qu'un polynôme équilibré $p = \bigoplus_{i=1}^n w_i\delta^{t_i} \in \mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$ peut être considéré comme un cas particulier de série ultimement périodique telle que $\tau = \tau' = 0$.

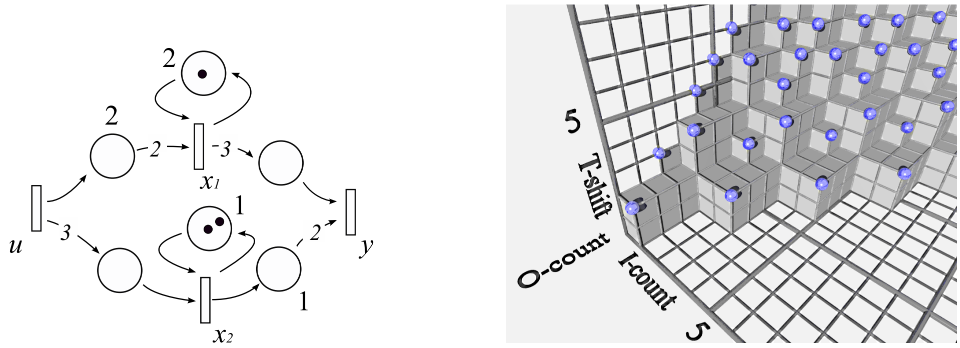


FIGURE 4.7 – GET à Valuations Equilibées et sa série de transfert

Exemple 9 *Le GET-VE de la Figure 4.7 permet d'illustrer ceci. La relation entrée-sortie s'exprime*

$$y = \left(\mu_3(\gamma^1\delta^2)^*\beta_2\delta^2 \oplus \beta_2\gamma^1\delta^1(\gamma^2\delta^1)^*\mu_3\right) u = Hu$$

La série $H \in \mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$ s'obtient par la somme de deux séries ultimement périodiques. La série H possède un gain $\Gamma(H) = 3/2$, qui est le gain de tous les chemins allant de u à y. Deux expressions équivalentes (avec la périodicité ultime à droite ou à gauche) de H sont fournies ci-dessous :

$$H = p \oplus q(\gamma^2\delta^3)^* = p \oplus (\gamma^1\delta^1)^* q',$$

avec

$$\begin{array}{rcl} p & = & \mu_3\beta_2\delta^2 \oplus (\gamma^2\mu_3\beta_2\gamma^1 \oplus \gamma^3\mu_3\beta_2)\delta^3 \oplus \gamma^3\mu_3\beta_2\delta^4 \oplus (\gamma^4\mu_3\beta_2\gamma^1 \oplus \gamma^6\mu_3\beta_2)\delta^5 \oplus (\gamma^5\mu_3\beta_2\gamma^1 \oplus \gamma^6\mu_3\beta_2)\delta^6, \\ q & = & [(\gamma^6\mu_3\beta_2\gamma^1 \oplus \gamma^8\mu_3\beta_2)\delta^7 \oplus (\gamma^7\mu_3\beta_2\gamma^1 \oplus \gamma^9\mu_3\beta_2)\delta^8 \oplus (\gamma^8\mu_3\beta_2\gamma^1 \oplus \gamma^{10}\mu_3\beta_2)\delta^9], \\ q' & = & [(\gamma^6\mu_3\beta_2\gamma^1 \oplus \gamma^8\mu_3\beta_2)\delta^7]. \end{array}$$

4.3 Réponse impulsionnelle des GET-VE

En accord avec ce qui précède, un GET-VE présente une périodicité événementielle (n, n') globale. Celà signifie que n activations de l'entrée produisent en moyenne n' activations de la sortie, avec n'/n le gain du système. En notant $H \in \mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$ le transfert du système, cette périodicité s'écrit

$$H\gamma^n = \gamma^{n'}H \;\Rightarrow\; \Gamma(H) = n'/n.$$

On a rappelé Chap.2 qu'un système (max,+) linéaire stationnaire était complètement caractérisé par sa réponse à un signal $\mathcal{I}$ qui s'apparente à l'impulsion de Dirac (cf. (2.4)). Pour les GET ordinaires, la réponse impulsionnelle $H\mathcal{I}$ est ultimement périodique (cf. Th. 1). Dans [Cottenceau et al., 2014b], on a montré que pour les GET-VE, la réponse à l'impulsion $\mathcal{I}$ est également ultimement périodique. En revanche, cette réponse ne fournit qu'une connaissance partielle de la dynamique du système.

Pour un GET-VE décrit par une série ultimement périodique $H = \bigoplus_i w_i\delta^{t_i} \in \mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$, la réponse impulsionnelle s'écrit

$$y = H\mathcal{I} = \bigoplus_i w_i\delta^{t_i}\mathcal{I} = \bigoplus_i \gamma^{\mathcal{F}_{w_i}(0)}\delta^{t_i}\mathcal{I}.$$

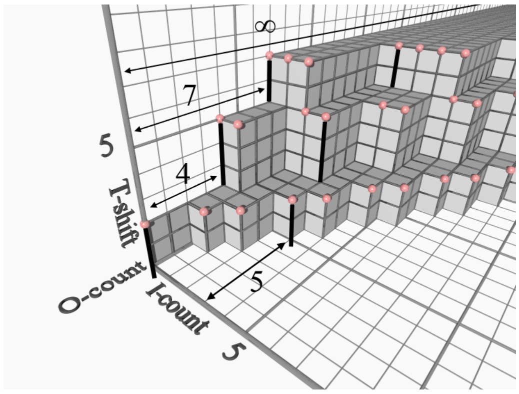


FIGURE 4.8 – Representation de $\beta_2\gamma^1\mu_3\delta^2 \oplus \gamma^4\mu_3\beta_2\delta^5 \oplus \gamma^7\mu_6\beta_4\gamma^1\delta^7$ et sa réponse à $\mathcal{I}$ et à $\gamma^3\mathcal{I}$.

Autrement dit, il existe un GET ordinaire qui a la même réponse[17] à l'impulsion $\mathcal{I}$. Pour l'exemple décrit Figure 4.2 dont le transfert dans $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$ est $h_1 = \beta_2\gamma^1\mu_3\delta^2 \oplus \gamma^4\mu_3\beta_2\delta^5 \oplus \gamma^7\mu_6\beta_4\gamma^1\delta^7$, on a $h_1\mathcal{I} = (\gamma^0\delta^2 \oplus \gamma^4\delta^5 \oplus \gamma^7\delta^7)\mathcal{I}$. Cette réponse est dessinée Figure 4.8 dans le plan I-count=0 (en trait épais). Pour ce même système, si l'on applique l'impulsion décalée $\gamma^3\mathcal{I}$, on a $h\gamma^3\mathcal{I} = (\gamma^5\delta^2 \oplus \gamma^7\delta^5 \oplus \gamma^{13}\delta^7)\mathcal{I}$. Cette réponse est dessinée dans le plan I-count=3. En raison de la périodicité événementielle $(2,3)$ de cette série, alors $h_1\gamma^2 = \gamma^3 h_1$ et donc $h_1\gamma^3\mathcal{I} = \gamma^3 h_1\gamma^1\mathcal{I}$. Par conséquent, pour ce système, la réponse à $\gamma^n\mathcal{I}$ se déduit soit de la réponse à $\mathcal{I}$, soit de la réponse à $\gamma^1\mathcal{I}$.

Pour le cas général d'un GET-VE avec une périodicité événementielle (ν, ν'), la série de transfert est ultimement périodique (cf Prop.9). La réponse à $\gamma^n\mathcal{I}$ est donc nécessairement ultimement périodique aussi. En outre, l'ensemble des réponses à $\mathcal{I}, \gamma^1\mathcal{I}, ..., \gamma^{\nu-1}\mathcal{I}$ permet de reconstituer la dynamique complète du GET-VE.

Exemple 10 *Dans la Figure 4.9, on représente la série h_2 suivante*

$$h_2 \quad = \quad \mu_3\beta_2\delta^3 \oplus (\gamma^3\delta^4)^* \left(\mu_3\beta_2\gamma^1\delta^4 \oplus \gamma^3\mu_3\beta_2\delta^6\right).$$

Le temps de cycle (à gauche) de $h_2 \in \mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$ est donné par le facteur $(\gamma^3\delta^4)^*$, soit $\sigma_l(h_2) = 4/3$. C'est aussi le temps de cycle de la réponse à n'importe quelle impulsion[18] décalée $\gamma^n\mathcal{I}$. Par ailleurs, ce système a une périodicité événementielle $(2,3)$, soit $h_2\gamma^2 = \gamma^3 h_2$. Ce système est donc entièrement caractérisé par la réponse à $\mathcal{I}$ et à $\gamma^1\mathcal{I}$. Toutes les autres réponses à $\gamma^n\mathcal{I}$ pour $n \geq 2$ se déduisent de ces deux réponses. Notons que $h_2\mathcal{I} = (\delta^4(\gamma^3\delta^4)^*)\mathcal{I}$ est décrit en trait plein dans le plan I-count$=0$ et $h_2\gamma^1\mathcal{I} = (\delta^3 \oplus \gamma^3\delta^6(\gamma^3\delta^4)^*)\mathcal{I}$ en tirets dans le plan I-count$=1$.

4.4 GET à valuations cycliques

Les modèles SDF et GET valués sont équivalents. Par conséquent, les travaux publiés sur les modèles SDF nous permettent d'alimenter de nouveaux développements. Nous nous sommes

17. Il va de soi que ce GET ordinaire n'a pas le même comportement en général.
18. qu'on peut donc observer dans tous les plans I-count$= n$

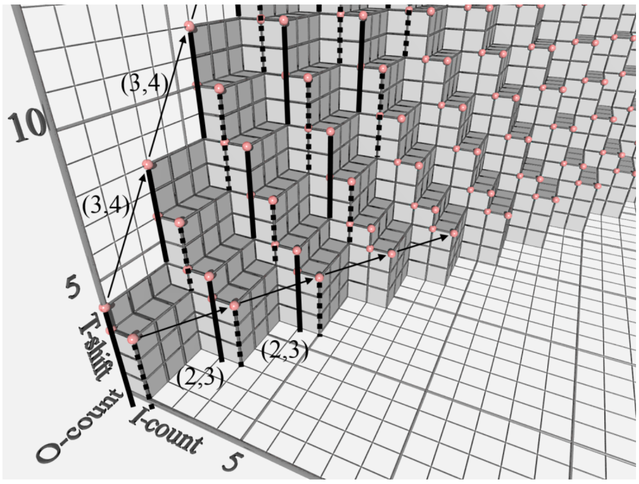


FIGURE 4.9 – Réponses de h_2 aux impulsions décalées $\mathcal{I}$, $\gamma^1\mathcal{I}$,...,$\gamma^5\mathcal{I}$

.

intéressés en particulier à la classe des SDF dont les phénomènes de production et de consommation de données sont variables, mais selon une séquence cyclique. Le modèle est alors appelé Cyclo-Static Dataflow (CSDF) [Bilsen et al., 1996] dans la littérature. Nous proposons ici la transposition des CSDF au cas des GET Valués. Nous définissons la classe des GET Cyclo-Valués (GET-CV) comme la classe des GET pour lesquels les poids attachés aux arcs sont des séquences cycliques.

4.4.1 Arcs cyclo-valués

Définition 19 (Valuations cycliques) *Considérons une place p dont les arcs d'entrée et de sortie sont valués respectivement par $w_i(p)$ et et $w_o(p)$. Les arcs sont dits cyclo-valués si les poids attachés aux arcs dépendent du numéro d'activation et suivent des séquences cycliques notées respectivement $w_i(p,k)$ et $w_o(p,k)$. Dans ce cas, le tir numéro k de la transition en amont de p ajoute $w_i(p,k)$ jetons à la place p et le tir numéro k de la transition en aval de p consomme $w_o(p,k)$ jetons de la place p.*

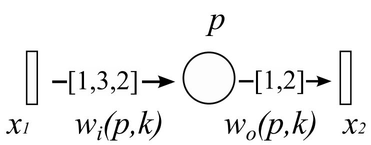


FIGURE 4.10 – Arcs cyclo-valués

Pour l'exemple de la Figure 4.10, la séquence de poids $w_i(p,k)$ est cyclique de période 3, $w_i(p,k+3) = w_1(p,k)$ avec $w_i(p,0) = 1$, $w_i(p,1) = 3$, $w_i(p,2) = 2$. Le premier tir de x_1 ajoute 1 jeton à la place p, le deuxième ajoute 3 jetons, etc. La séquence de poids $w_o(p,k)$ est cyclique de période 2. Graphiquement, une seule période de ces séquences est décrite sur chaque arc.

Notation 2 *On peut également décrire les arcs cyclo-valués par des opérateurs. On note par* $\mu_{w_i(p)}$ *l'opérateur associé à l'arc en entrée de la place p et* $\beta_{w_o(p)}$ *l'opérateur associé à l'arc en sortie de la place p. Par exemple, le GET Cyclo-Valué de la figure* 4.10 *est décrit par l'opérateur composé suivant* $\beta_{[1,2]}\mu_{[1,3,2]}$.

Proposition 10 *En fonctionnement au plus tôt, tout GET Cyclo-Valué peut-être décrit par un GET-Valué équivalent.*

Preuve : Il suffit de considérer les opérateurs associés aux arcs cyclo-valués comme des systèmes instantanés périodiques pour lesquels on peut obtenir la fonction C/C associée. Puisqu'il s'agit de systèmes périodiques, ils s'écrivent par une combinaison finie de E-opérateurs périodiques, c'est-à-dire d'opérateurs γ^n, μ_m et β_b, et donc de GET-V équivalents. □

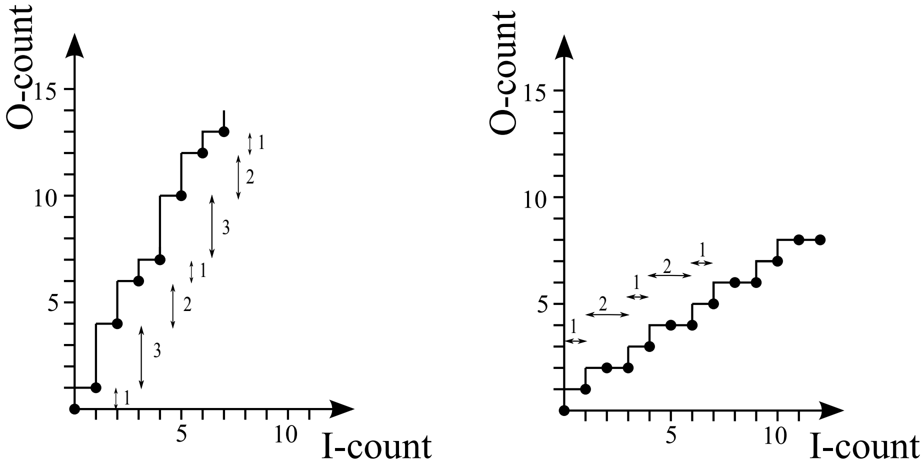


FIGURE 4.11 – Fonction C/C de $\mu_{[1,3,2]}$ et de $\beta_{[1,2]}$

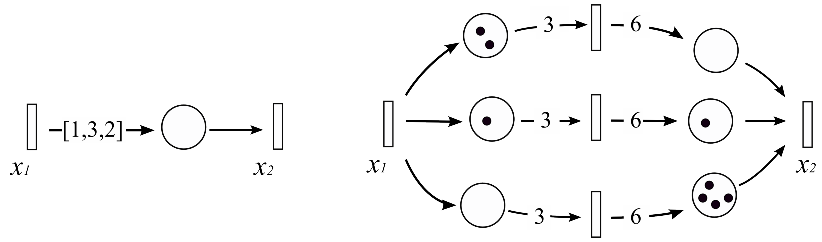


FIGURE 4.12 – Arc cyclo-valué $\mu_{[1,3,2]}$ et GET-V équivalent

Exemple 11 *La partie gauche de la Figure 4.11 fournit la fonction C/C associée à l'opérateur* $\mu_{[1,3,2]}$. *Il s'agit d'un opérateur périodique de périodicité événementielle* $(3,6)$. *On peut décrire cet opérateur comme la somme de 3 opérateurs* $(3,6)$ *périodiques de la façon suivante :*

$$\mu_{[1,3,2]} = \mu_6\beta_3\gamma^2 \oplus \gamma^1\mu_6\beta_3\gamma^1 \oplus \gamma^4\mu_6\beta_3.$$

On en déduit l'équivalence entre le GET Cyclo-Valué et le GET Valué décrit Figure 4.12. Après 3 tirs de x_1, le GET valué retrouve son état initial.

De la même manière, on obtient (cf. Figure 4.11, partie droite) que $\beta_{[1,2]}$ est $(3,2)$ périodique et s'écrit

$$\beta_{[1,2]} = \mu_2\beta_3\gamma^2 \oplus \gamma^1\mu_2\beta_3$$

Finalement, on a donc l'équivalence de modèles donnée Figure 4.13 et qui reflète l'égalité $\beta_{[1,2]}\mu_{[1,3,2]} = \mu_4\beta_3\gamma^2 \oplus \gamma^1\mu_4\beta_3\gamma^1 \oplus \gamma^3\mu_4\beta_3$ dans $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$.

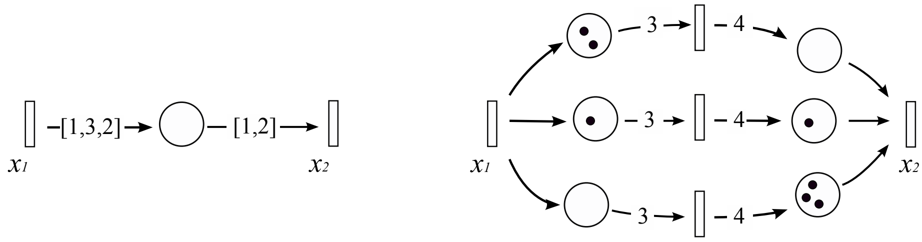


FIGURE 4.13 – Opérateur $\beta_{[1,2]}\mu_{[1,3,2]}$ et GET-V équivalent

4.4.2 Routages périodiques

En raison de l'égalité de classes {GET-V} = {GET-CV}, le modèle GET-CV peut sembler superflu. Les arcs cyclo-valués conservent néanmoins un intérêt dans le cadre de la modélisation, puisqu'ils permettent une description plus concise de phénomènes périodiques. En particulier, les routages périodiques étudiés en section 3.3 page 45 s'écrivent de façon très simple à l'aide des valuations cycliques.

A titre d'exemple, la Figure 4.14 décrit le routage périodique 1|1. Le premier tir de u déclenche u_1, le deuxième déclenche u_2 et ainsi de suite. Cette alternance se décrit simplement par les relations formelles suivantes :

$$u_1 = \mu_{[1,0]}u, \qquad u_2 = \mu_{[0,1]}u.$$

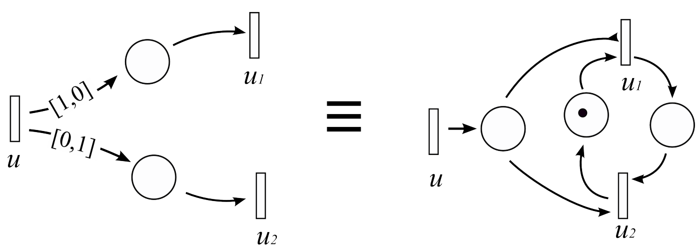


FIGURE 4.14 – Routage périodique 1|1

Dans la Figure 4.15, on décrit le phénomène inverse. Deux types d'événements y_1 et y_2 sont additionnés pour produire un seul type d'événement y. Ce phénomène décrit une fusion des événements y_1 et y_2. Néanmoins, cette fusion des événements se fait sous une contrainte d'entrelacement des événements y_1 et y_2 : la première sortie y est due au premier tir de y_1, la deuxième sortie y est due au premier tir de y_2, la troisième sortie y est due au deuxième tir de y_1, et ainsi de suite de façon périodique. On appellera *fusion périodique* ce phénomène qui est également décrit sous la forme d'un RdP équivalent Figure 4.15. A l'aide d'opérateurs, ce fonctionnement est décrit par la relation

$$y = \beta_{[1,0]} y_1 \oplus \beta_{[0,1]} y_2.$$

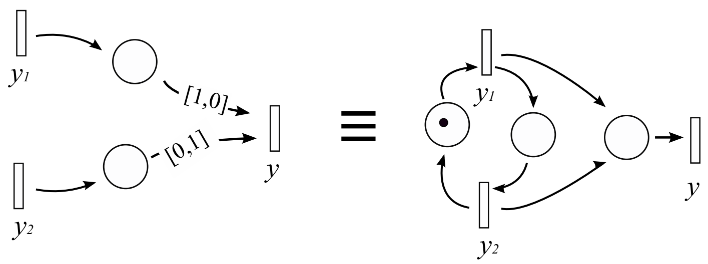


FIGURE 4.15 – Fusion périodique 1|1 des événements y_1 et y_2.

En combinant le routage périodique et la fusion périodique, et en ajoutant des temporisations, on obtient la modélisation d'un phénomène de temporisation variable. La Figure 4.16 décrit un temps de séjour qui change périodiquement. La première sortie y est due à la première entrée u avec un retard de T_1 unités de temps, la deuxième sortie y a lieu après la première sortie y et au plus tôt T_2 unités de temps après la deuxième entrée u. Ce système décrit donc à la fois une temporisation variant cycliquement et un phénomène First-In First-Out : l'effet de l'entrée numéro $k+1$ ne peut précéder l'effet de l'entrée numéro k. Cette temporisation variable se décrit par les opérateurs suivants

$$\begin{aligned} y &= (\beta_{[1,0]}\delta^{T_1}\mu_{[1,0]} \oplus \beta_{[0,1]}\delta^{T_2}\mu_{[0,1]})u \\ &= (\mu_2\beta_2\gamma^1\delta^{T_1} \oplus \gamma^1\mu_2\beta_2\delta^{T_2})u \end{aligned}$$

Ce phénomène de temporisation cyclique avait été étudié par S. Lahaye dans [Lahaye et al., 1999] [Lahaye et al., 2004a] et revisité à l'aide des GET valués dans [Cottenceau et al., 2014b].

4.5 Conclusion

La modélisation de SED par le biais de GET Valués, ou de GET Cyclo-Valués, fournit le moyen d'étudier ou de revisiter des phénomènes dynamiques qui semblaient échapper à la portée des systèmes (max,+). Notamment, ce qui précède montre qu'il est possible de reconsidérer les problèmes de routage étudiés par O. Boutin (section 3.3 page 45) à l'aide des opérateurs de $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$.

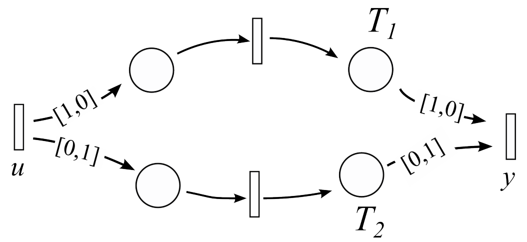


FIGURE 4.16 – Temps de séjour périodique $(T_1, T_2, T_1 ...)$ avec contrainte FIFO

Si l'on reprend l'Exemple 7 page 48, le routage périodique $2|3$ est immédiatement représentable par un GET Cyclo-Valué. En revanche, la place qui somme les événements (au sens compteur) doit être remplacée par une fusion périodique. Le système ainsi structuré peut s'écrire formellement

$$H = \beta_{[1,1,0,0,0]}\delta^4(\gamma^2\delta^3)^*\mu_{[1,1,0,0,0]} \oplus \beta_{[0,0,1,1,1]}(\delta^5 \oplus \gamma^2\delta^6)(\gamma^4\delta^4)^*\mu_{[0,0,1,1,1]}.$$

Les deux premiers événements u sont traités par le sous-système H_1, les trois événements suivants par H_2, soit de façon informelle $H_1, H_1, H_2, H_2, H_2, H_1, H_1, H_2, ...$ Notons que la contrainte imposée par la fusion périodique induit que ce système est nécessairement plus lent que le système décrit dans l'Exemple 7. Le résutat du calcul de ce système dans $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$ fournit donc un majorant du comportement du système de l'Exemple 7.

Par ailleurs, à l'aide des arcs cyclo-valués et des opérateurs associés, on peut distinguer d'autres routages assurant une répartition $2/5$ pour H_1 et $3/5$ pour H_2. Par exemple (cf. Figure 4.17), le routage ci-dessous assure plus d'alternance entre les deux sous-systèmes que ne le faisait le routage $2|3$ précédent, puisque la répartition correspond à $H_1, H_2, H_1, H_2, H_2, H_1, H_2, H_1, ...$

$$H' = \beta_{[1,0,1,0,0]}\delta^4(\gamma^2\delta^3)^*\mu_{[1,0,1,0,0]} \oplus \beta_{[0,1,0,1,1]}(\delta^5 \oplus \gamma^2\delta^6)(\gamma^4\delta^4)^*\mu_{[0,1,0,1,1]}.$$

Exprimée dans $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$, la fonction de transfert de H' est donnée par l'expression

$$\begin{aligned} H' \;=\; & (\gamma^{20}\delta^{12})^*(\gamma^0\delta^4 \oplus (\gamma^1\mu_5\beta_5\gamma^3 \oplus \gamma^3\mu_5\beta_5\gamma^1 \oplus \gamma^4\mu_5\beta_5)\delta^5 \oplus (\gamma^4\mu_5\beta_5\gamma^3 \oplus \gamma^6\mu_5\beta_5\gamma^1 \oplus \gamma^8\mu_5\beta_5)\delta^6 \\ & \oplus(\gamma^5\mu_5\beta_5\gamma^4 \oplus \gamma^7\mu_5\beta_5\gamma^2 \oplus \gamma^9\mu_5\beta_5\gamma^1)\delta^7 \oplus (\gamma^8\mu_5\beta_5\gamma^3 \oplus \gamma^9\mu_5\beta_5\gamma^1 \oplus \gamma^{11}\mu_5\beta_5)\delta^9 \oplus \gamma^{10}\delta^{10} \\ & \oplus(\gamma^{14}\mu_5\beta_5\gamma^3 \oplus \gamma^{16}\mu_5\beta_5\gamma^1 \oplus \gamma^{18}\mu_5\beta_5)\delta^{13} \oplus (\gamma^{18}\mu_5\beta_5\gamma^3 \oplus \gamma^{19}\mu_5\beta_5\gamma^1 \oplus \gamma^{21}\mu_5\beta_5)\delta^{14}) \end{aligned}$$

La représentation graphique tridimensionnelle de $H' \in \mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$ est donnée Figure 4.18 (partie gauche). Puisque $\Gamma(H') = 1$, on peut aussi obtenir une sur-approximation de H' par une série de $\mathcal{M}^{ax}_{in}[\![\gamma, \delta]\!]$. La plus petite sur-approximation de H' par une série de $\mathcal{M}^{ax}_{in}[\![\gamma, \delta]\!]$ est donnée[19] Figure 4.18 (partie droite).

On obtient donc, en appliquant un routage $H_1, H_2, H_1, H_2, H_2, H_1, ...$ au système de l'Exemple 7, que ce système est décrit par l'encadrement des deux systèmes (max,+) linéaires ci-dessous

$$\begin{aligned} \underline{H} &= \delta^4(\gamma^2\delta^3)^* \odot (\delta^5 \oplus \gamma^2\delta^6)(\gamma^4\delta^4)^* \text{ (minorant obtenu section 3.3)} \\ &= (\delta^4 \oplus \gamma^2\delta^5 \oplus \gamma^4\delta^6 \oplus \gamma^6\delta^7 \oplus \gamma^8\delta^9 \oplus \gamma^{10}\delta^{10} \oplus \gamma^{14}\delta^{13} \oplus \gamma^{18}\delta^{14})(\gamma^{20}\delta^{12})^* \\ \overline{H} &= (\gamma^0\delta^5 \oplus \gamma^3\delta^6 \oplus \gamma^5\delta^7 \oplus \gamma^6\delta^9 \oplus \gamma^{10}\delta^{10} \oplus \gamma^{13}\delta^{13} \oplus \gamma^{16}\delta^{14})(\gamma^{20}\delta^{12})^* \end{aligned}$$

19. On peut remarquer que la représentation tridimensionnelle d'une série de $\mathcal{M}^{ax}_{in}[\![\gamma, \delta]\!]$ est telle que tous les coefficients sont des opérateurs $(1, 1)$ périodiques.

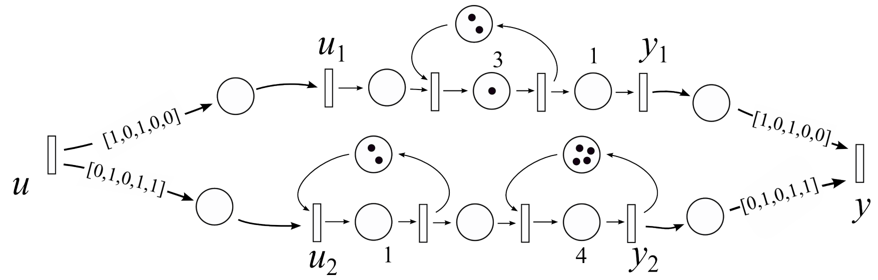


FIGURE 4.17 – Routage et fusion périodique dans des systèmes (max,+) fonctionnant en parallèle.

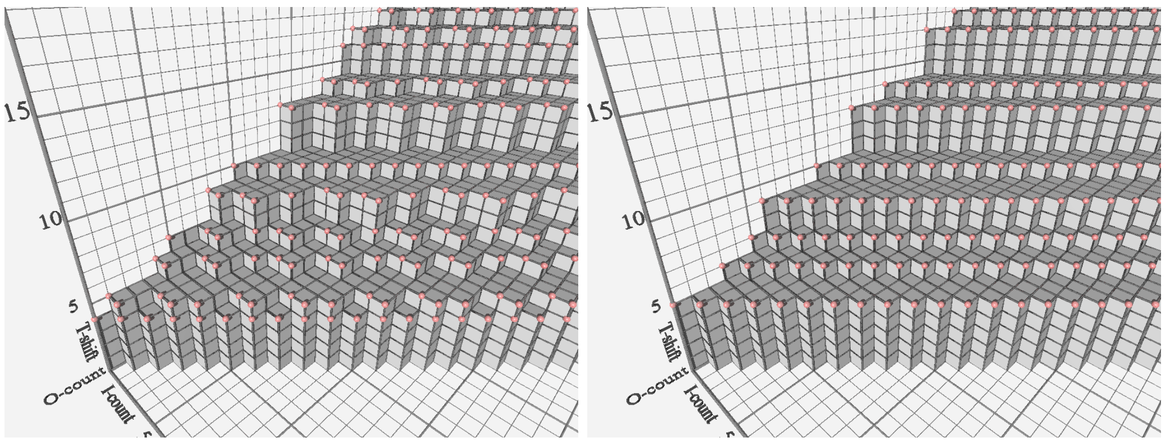


FIGURE 4.18 – Représentation de H' et de la plus petite sur-approximation de H' dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$

L'intervalle obtenu est alors meilleur que celui obtenu par l'approche d'Olivier Boutin, pour la raison que dans le dioïde $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$, on est capable de décrire un routage périodique de façon plus précise.

Chapitre 5

Commande de systèmes (min,+)

Ce chapitre aborde l'utilisation de la théorie des systèmes (min,+) pour l'élaboration de lois de commande [Le Corronc et al., 2009b] [Le Corronc et al., 2010a] [Le Corronc et al., 2010b] [Le Corronc et al., 2011]. Ces travaux s'appuient principalement sur la théorie de la résiduation dont certains aspects sont rappelés en annexe.

5.1 Introduction

Pour des SED dont le comportement entrée-sortie s'écrit formellement $y = H(v)$ - l'entrée v produit la sortie y - les questions relatives à la commande se classent principalement dans deux catégories.

Soit pour une trajectoire de sortie $\hat{y}$ souhaitée, on cherche à exprimer une trajectoire d'entrée $\hat{u}$ (la commande) telle que $H(\hat{u}) \sim \hat{y}$, c'est-à-dire telle que la sortie s'approche au mieux de l'objectif $\hat{y}$. Ce problème s'apparente au problème de poursuite de trajectoire dans la théorie conventionnelle.

Soit pour un modèle G donné, décrit par la relation $y' = G(v')$, on cherche à exprimer un système C dit correcteur tel que le système muni de ce contrôle s'approche au mieux du modèle de référence G. Ceci revient à chercher la dynamique d'un correcteur $u = C(v, H(u))$ capable de

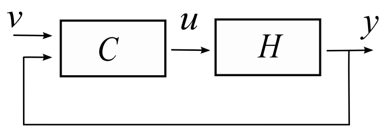


FIGURE 5.1 – Système avec correcteur

.

produire la commande u à partir de v et de la mesure de la sortie du système $H(u)$. Du point de vue des trajectoires du système, ce problème de commande vise à satisfaire

$$\forall v \in \Sigma_c,\ y = H(C(v, y)) \sim y' = G(v),$$

c'est-à-dire, pour toute entrée v donnée, faire en sorte que la sortie du système H soit proche de ce que serait la sortie du modèle G pour la même entrée. La structure du système contrôlé est donnée par la Figure 5.1. Ce problème s'apparente au problème de poursuite de modèle en théorie conventionnelle (model matching).

Dans le cas des systèmes (min,+) linéaires, la relation entrée-sortie s'écrit simplement comme un produit $y = H(v) = H \otimes v$, où $\otimes$ est un produit de séries formelles (dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$) ou une convolution (dans $(\Sigma_c, \min, \circledast)$). Le problème de poursuite de trajectoire trouve une solution optimale via la théorie de la résiduation ([Cohen et al., 1989b]) puisque l'équation $H \otimes v \preceq \hat{y}$ admet toujours une solution optimale dans un dioïde complet

$$\hat{v} = \bigoplus\{v | H \otimes v \preceq \hat{y}\} = H \diagdown \hat{y}.$$

D'un point de vue pratique, la trajectoire d'entrée optimale $\hat{v}$ est celle qui déclenche le plus tardivement possible les événements d'entrée. Cette entrée est optimale pour le critère de juste-à-temps.

Pour le problème de poursuite de modèle, en s'appuyant également sur la théorie de la résiduation, on peut trouver l'expression de correcteurs optimaux à partir du modèle de référence G et du système H. Par exemple, lorsque le correcteur s'exprime par $u = C(v, y) = Pv$, c'est-à-dire un correcteur qui n'utilise pas l'information de sortie y pour élaborer la commande, on peut trouver un correcteur optimal. Un tel correcteur est appelé précompensateur. Le précompensateur optimal est donné par $\hat{P} = H \diagdown G$. Il s'agit du plus grand précompensateur tel que $\forall v, HPv \preceq Gv$.

Dans la littérature, d'autres structures de contrôle ont été étudiées. Par exemple, des correcteurs de type retour de sortie $u = v \oplus Fy$ ont également été étudiés dans [Cottenceau et al., 1999], [Cottenceau et al., 2001b], [Cottenceau et al., 2001a], [Cottenceau et al., 2003]. La dynamique du système sous contrôle s'exprime alors $y = H(FH)^* v$. Pour certaines valeurs de G, le retour de sortie F optimal s'exprime par $\hat{F} = H \diagdown G \diagup H$. En particulier pour l'objectif $G = H$, le correcteur $\hat{F} = H \diagdown H \diagup H$ est optimal. Dans [Maia et al., 2003],[Hardouin et al., 2010b], des structures plus complexes sont étudiées.

Ce chapitre présente des travaux relatifs à la commande de systèmes incertains, c'est-à-dire dont la dynamique est décrite par un intervalle de comportements.

5.2 Problème de type Window Flow Control pour les réseaux

Durant sa thèse, Euriell Le Corronc a considéré un problème de contrôle adapté aux réseaux informatiques. Le Window Flow Control (WFC) est un mécanisme de régulation du flux d'entrée d'un réseau. Ce mécanisme est comparable à la gestion de flux avec la méthode Kanban dans les systèmes manufacturiers. Le WFC n'autorise l'émission de paquets dans le réseau qu'à la condition qu'il n'y ait pas plus de w paquets en cours d'acheminement, c'est-à-dire des paquets émis mais qui ne sont pas encore parvenus au destinataire. Ce système de régulation s'appuie sur un acquittement de la réception par le destinataire, c'est-à-dire une information qui transite également par le réseau, mais en sens inverse, du destinataire vers l'émetteur. Le WFC est un système de contrôle en boucle fermée, comme le montre la Figure 5.2, où v représente les données émises et y les données reçues.

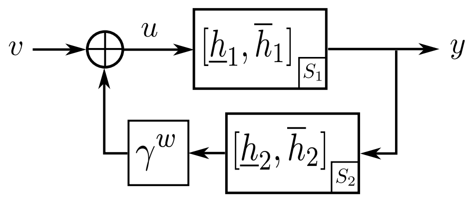


FIGURE 5.2 – Window Flow Control

.

Dans le problème considéré par Euriell Le Corronc, la dynamique d'acheminement des données est décrite par un intervalle de comportements $y = [\underline{h}_1, \overline{h}_1]u$, c'est-à-dire $\forall u \in \Sigma_c, \underline{h}_1 \circledast u \preceq y \preceq \overline{h}_1 \circledast u$. L'acheminement de l'acquittement de réception (vers l'émetteur) se fait suivant une dynamique différente décrite par un intervalle noté $[\underline{h}_2, \overline{h}_2]$. Le WFC contraint le réseau à ne pas avoir plus de w paquets en cours d'acheminement, ce qui est représenté par l'opérateur de décalage γ^w. Les relations qui lient les différents signaux sont : $u, v, y \in \Sigma_c$,

$$\begin{array}{rcl} y & = & [\underline{h}_1, \overline{h}_1]u \\ u & = & v \oplus \gamma^w [\underline{h}_2, \overline{h}_2]y \end{array}$$

Le comportement [20] entre v et y est finalement décrit par l'intervalle

$$y = [\underline{h}_1(\gamma^w \underline{h}_2 \underline{h}_1)^*, \overline{h}_1(\gamma^w \overline{h}_2 \overline{h}_1)^*]v.$$

Proposition 11 ([Le Corronc et al., 2010b]) *Soit* $\underline{h_1} \circ\!\!\!\backslash \underline{h_1} \circ\!\!\!/ (\underline{h_2 h_1}) \wedge \overline{h_1} \circ\!\!\!\backslash \overline{h_1} \circ\!\!\!/ (\overline{h_2 h_1}) \in \Sigma_c$. *La valeur de ce compteur en* $t = 0$, *soit* $\hat{w} = \left(\underline{h_1} \circ\!\!\!\backslash \underline{h_1} \circ\!\!\!/ (\underline{h_2 h_1}) \wedge \overline{h_1} \circ\!\!\!\backslash \overline{h_1} \circ\!\!\!/ (\overline{h_2 h_1})\right)(0)$, *est la valeur optimale du problème suivant*

$$\hat{w} = \min\{w \in \mathbb{N} | [\underline{h}_1(\gamma^w \underline{h}_2 \underline{h}_1)^*, \overline{h}_1(\gamma^w \overline{h}_2 \overline{h}_1)^*] = [\underline{h}_1, \overline{h}_1]\}.$$

Preuve : La valeur w doit être telle que

$$\underline{h}_1(\gamma^w \underline{h}_2 \underline{h}_1)^* \preceq \underline{h}_1 \text{ et } \overline{h}_1(\gamma^w \overline{h}_2 \overline{h}_1)^* \preceq \overline{h}_1.$$

Tout d'abord, on a les équivalences suivantes : $\underline{h}_1(\gamma^w \underline{h}_2 \underline{h}_1)^* \preceq \underline{h}_1 \iff (\gamma^w \underline{h}_2 \underline{h}_1)^* \preceq \underline{h}_1 \circ\!\!\!\backslash \underline{h}_1 \iff \gamma^w \underline{h}_2 \underline{h}_1 \preceq \underline{h}_1 \circ\!\!\!\backslash \underline{h}_1$, puisque dans un dioïde on a $a \circ\!\!\!\backslash a = (a \circ\!\!\!\backslash a)^*$ [Max Plus, 1991] et, par ailleurs, on a l'équivalence $x^* \preceq b^* \iff x \preceq b^*$ [Cottenceau et al., 2001b]. Finalement, la valeur w doit satisfaire $\gamma^w \preceq \underline{h}_1 \circ\!\!\!\backslash \underline{h}_1 \circ\!\!\!/ (\underline{h}_2 \underline{h}_1)$. De même, l'autre inégalité conduit à $\gamma^w \preceq \overline{h}_1 \circ\!\!\!\backslash \overline{h}_1 \circ\!\!\!/ (\overline{h}_2 \overline{h}_1)$. □

La valeur de $\hat{w}$ établie par la proposition précédente est la plus petite valeur qui ne dégrade pas l'intervalle de transfert des données de l'émetteur vers le destinataire.

---

20. à noter que pour alléger l'écriture, les produits de convolution $\circledast$ ne sont pas explicitement notés, par exemple $\gamma^w \underline{h}_2 \underline{h}_1 = \gamma^w \circledast \underline{h}_2 \circledast \underline{h}_1$.

5.3 Correcteur pour réduire l'incertitude

Nous représentons l'incertitude relative à un système mono-entrée mono-sortie par un intervalle de comportements $[\underline{h}, \overline{h}]$, ce qui correspond à $\forall u \in \Sigma_c \Rightarrow \underline{h}u \preceq y \preceq \overline{h}u$.

Pour mesurer le degré d'incertitude sur la trajectoire y, on peut utiliser la théorie du second ordre développée dans [Max Plus, 1991]. Les calculs de résiduation du produit (cf. Annexe B) permettent de mesurer des écarts entre des trajectoires. Dans le contexte des systèmes incertains, ces mesures permettent de quantifier l'incertitude. Pour un intervalle de signaux $[\underline{x}, \overline{x}] \in I(\Sigma_c)$, définissons les deux mesures d'écarts ci-dessous

$$\begin{aligned} \Phi_t(\underline{x}, \overline{x}) &= \min\{\tau | \delta^\tau \underline{x} \succeq \overline{x}\} \quad \text{(écart temporel)} \\ \Phi_e(\underline{x}, \overline{x}) &= \min\{\nu | \underline{x} \succeq \gamma^\nu \overline{x}\} \quad \text{(écart événementiel)} \end{aligned}$$

Les écarts Φ_t et Φ_e caractérisent des écarts maximaux entre $\underline{x}$ et $\overline{x}$, selon les deux axes (compteur/dateurs). Nous illustrons ces écarts exprimés sur des séries de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$ par la Figure 5.3. Notons que ces écarts s'expriment également par des calculs de résiduation de la façon suivante :

$$\begin{aligned} \Phi_t(\underline{x}, \overline{x}) &= \inf_{\tau \geq 0}\{\tau | (\overline{x} \mathbin{\circ\!\!\!\backslash} \underline{x})(-\tau) \leq 0\} \\ \Phi_e(\underline{x}, \overline{x}) &= (\overline{x} \mathbin{\circ\!\!\!\backslash} \underline{x})(0). \end{aligned}$$

Autrement dit, ces écarts sont des informations contenues dans le compteur $\overline{x} \mathbin{\circ\!\!\!\backslash} \underline{x} \in \Sigma_c$.

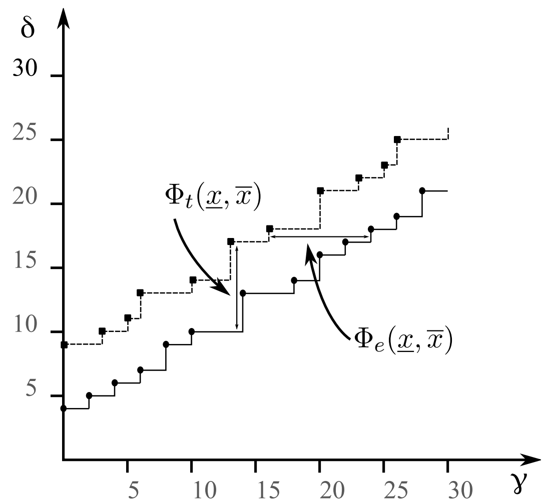


FIGURE 5.3 – Ecarts entre deux signaux décrits par des séries de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$

.

Tout d'abord, il faut remarquer que pour n'importe quelle entrée (cf. Annexe B), on a

$$\forall u \in \Sigma_c, (\overline{h}u) \mathbin{\circ\!\!\!\backslash} (\underline{h}u) = \overline{h} \mathbin{\circ\!\!\!\backslash} (u \mathbin{\circ\!\!\!\backslash} \underline{h}u) \succeq \overline{h} \mathbin{\circ\!\!\!\backslash} \underline{h}.$$

En terme d'écarts, on obtient donc que pour n'importe quelle entrée u, l'incertitude sur la trajectoire de la sortie y n'est pas plus importante que l'écart sur les bornes de l'intervalle de comportement $[\underline{h}, \overline{h}]$, c'est-à-dire $\forall u \in \Sigma_c$,

$$\begin{array}{rcl}\Phi_t(\underline{h}u, \overline{h}u) & \leq & \Phi_t(\underline{h}, \overline{h}), \\ \Phi_e(\underline{h}u, \overline{h}u) & \leq & \Phi_e(\underline{h}, \overline{h}).\end{array}$$

La question qui découle de cette analyse est : quel est l'impact d'un correcteur sur l'incertitude ? En particulier, dans le cas des systèmes avec précompensateur P, on peut comparer l'incertitude sans et avec le correcteur. Pour la même raison que précédemment, on obtient

$$\begin{array}{rcl}\forall P, \Phi_t(P\underline{h}, P\overline{h}) & \leq & \Phi_c(\underline{h}, \overline{h}), \\ \forall P, \Phi_e(P\underline{h}, P\overline{h}) & \leq & \Phi_e(\underline{h}, \overline{h}).\end{array}$$

L'ajout d'un précompensateur conduit nécessairement à diminuer l'incertitude. Le système avec correcteur devient moins incertain que le système seul. L'idée a donc été de chercher l'expression de P en vue de limiter les écarts sur la sortie.

Étant données deux contraintes d'écart notées τ_0 (dans le domaine temporel) et ν_0 (dans le domaine événementiel), le précompensateur P recherché est défini par

$$\hat{P} = \bigoplus \{P | \Phi_e(P\underline{h}, P\overline{h}) \leq \nu_0 \text{ et } \Phi_t(P\underline{h}, P\overline{h}) \leq \tau_0\}. \tag{5.1}$$

Proposition 12 ([Le Corronc et al., 2010a]) *La solution du problème de contrôle (5.1) est la plus grande solution de l'équation implicite*

$$x = x \wedge \overline{h} \backslash\!\!\!\circ (\gamma^{-\nu_0} \underline{h} x) \wedge \overline{h} \backslash\!\!\!\circ (\delta^{\tau_0} \underline{h} x).$$

Remarque 8 *Ce problème de commande revient à chercher une solution à une équation implicite pour laquelle il existe une solution optimale et un algorithme (la solution optimale est un point fixe de l'algorithme). Il est important de rappeler que la solution optimale peut toutefois être $x = \varepsilon$. L'algorithme ne converge donc pas nécessairement vers la solution en temps fini.*

Exemple 12 *Considérons un système (décrit par son transfert dans $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$) appartenant à l'intervalle $\mathbf{h} = [\underline{h}, \overline{h}]$ avec*

$$\begin{array}{rcl}\underline{h} & = & \delta^2 \oplus \gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^5\delta^4(\gamma^2\delta^2)^*, \\ \overline{h} & = & \delta^4 \oplus \gamma^4\delta^5(\gamma^1\delta^1)^*.\end{array}$$

Sans contrôleur, nous avons (cf. Figure 5.4) $\Phi_t(\underline{h}, \overline{h}) = 3$ et $\Phi_e(\underline{h}, \overline{h}) = 5$.

Si l'on cherche à obtenir le plus grand P tel que

$$P \preceq \overline{h} \text{ et } \Phi_e(P\underline{h}, P\overline{h}) \leq 2,$$

on obtient $P = \delta^1(\gamma^1\delta^1)^*$ ce qui conduit à $P\underline{h} = \delta^3(\gamma^1\delta^1)^*$ et $P\overline{h} = \delta^5(\gamma^1\delta^1)^*$, c'est-à-dire $\Phi_e(P\underline{h}, P\overline{h}) = \Phi_t(P\underline{h}, P\overline{h}) = 2$.

Remarque 9 *L'extension de cette approche au cas multi-entrées multi-sorties est traitée dans la thèse d'Euriell Le Corronc.*

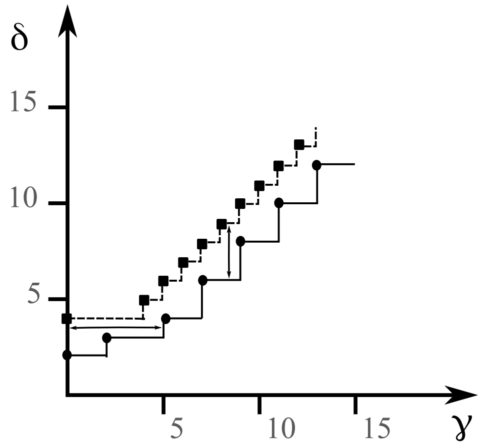


FIGURE 5.4 – Ecarts entre $\underline{h} = \delta^2 \oplus \gamma^2\delta^3 \oplus \gamma^5\delta^4(\gamma^2\delta^2)^*$ et $\overline{h} = \delta^4 \oplus \gamma^4\delta^5(\gamma^1\delta^1)^*$. $\Phi_t(\underline{h}, \overline{h}) = 3$ et $\Phi_e(\underline{h}, \overline{h}) = 5$

.

5.4 Correcteur neutre pour un intervalle de systèmes

Dans le contexte des systèmes (min,+), on qualifie de *neutre* un correcteur qui ne modifie pas la dynamique entrée-sortie du système, c'est-à-dire un correcteur qui assure $\forall v, H(C(v,y)) = H(v)$. Le correcteur neutre conserve néanmoins un intérêt s'il déclenche les entrées plus tardivement que pour le système hors correction, c'est-à-dire si $\forall v \in \Sigma_c, C(v,y) \succeq v$. C'est toujours au sens du critère du juste-à-temps que l'amélioration est mesurée.

Pour les systèmes (min,+) linéaires, le précompensateur neutre optimal s'écrit simplement

$$\hat{P}_n = H \backslash\!\!\circ H.$$

C'est la plus grande solution x de l'équation $Hx = H$ sur un dioïde.

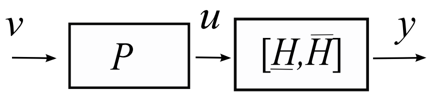


FIGURE 5.5 – Précompensateur neutre pour un intervalle de comportements

.

Lorsque le système (min,+) est incertain, et donc que son transfert est contenu dans un intervalle $\mathbf{H} = [\underline{H}, \overline{H}]$, le problème revient à chercher un correcteur P qui soit neutre pour toute valeur dans l'intervalle : $\forall H \in \mathbf{H}, HP = H$. Autrement dit, malgré l'incertitude sur la connaissance du transfert du système, il s'agit de garantir que le contrôleur mis en place ne dégrade pas la dynamique du système.

Exprimé différemment, on cherche un correcteur P qui vérifie

$$\forall H \in [\underline{H}, \overline{H}], P \preceq H \circ\!\!\!\!\backslash H.$$

Ce problème est particulièrement pertinent dans la continuité des travaux d'Euriell sur la réalisation de calculs approchés via des ensembles conteneurs. Les calculs approchés, même appliqués à des systèmes (min,+) dont on connaît une représentation d'état exacte, produisent des résultats sous la forme d'intervalles. Il est alors pertinent de chercher des correcteurs qui aient de bonnes propriétés pour n'importe quel transfert contenu dans l'intervalle.

Proposition 13 ([Le Corronc et al., 2009b]) *Pour un intervalle* $\mathbf{H} = [\underline{H}, \overline{H}]$*, alors*

$$e \oplus \overline{H} \circ\!\!\!\!\backslash \underline{H} = \bigwedge_{H \in \mathbf{H}} H \circ\!\!\!\!\backslash H.$$

L'application directe de ce résultat indique que pour n'importe quel système (min,+) linéaire dont le transfert appartient à l'intervalle $\mathbf{H}$, alors le précompensateur $P = e \oplus \overline{H} \circ\!\!\!\!\backslash \underline{H}$ est nécessairement neutre. C'est le plus grand correcteur qui soit neutre pour tout système dans l'intervalle. Rappelons néanmoins que ceci n'est valable que sous l'hypothèse que le système soit effectivement (min,+) linéaire, c'est-à-dire que l'on puisse le représenter par une relation $y = Hu$ avec $H \in \mathbf{H}$. Ceci n'est plus vrai pour un système qui serait non linéaire [21] mais dont le comportement serait encadré par l'intervalle $\mathbf{H}$.

Exemple 13 *Considérons un système H (décrit par sa série de transfert de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$) appartenant à l'intervalle $\mathbf{H} = [\underline{H}, \overline{H}]$ avec $\underline{H} = \delta^3 \oplus \gamma^3\delta^4(\gamma^2\delta^2)^*$ et $\overline{H} = \delta^4 \oplus \gamma^1\delta^6(\gamma^1\delta^1)^*$.*

Le plus grand précompensateur neutre pour n'importe quel système $H \in \mathbf{H}$ est $P = e \oplus \overline{H} \circ\!\!\!\!\backslash \underline{H} = \gamma^0 \oplus \gamma^6\delta^1(\gamma^1\delta^1)^*$. A titre d'exemple, en prenant $H' = \delta^4 \oplus \gamma^1\delta^6 \oplus \gamma^7\delta^8(\gamma^1\delta^1)^*$ dans cet intervalle, le correcteur neutre optimal pour H' est $H' \circ\!\!\!\!\backslash H' = \gamma^0 \oplus \gamma^6\delta^2(\gamma^1\delta^1)^* \succeq P$.

5.5 Conclusion

Nous avons principalement rappelé ici les travaux en lien avec des systèmes décrits par des intervalles, ceci afin de souligner la cohérence avec les travaux présentés au Chapitre 3.

Rappelons que nous avons également abordé d'autres problèmes de commande. Nous avons utilisé la résiduation dans [Santos-Mendes et al., 2005] pour obtenir un contrôle de type feedback de sortie adaptatif. Dans [Lahaye et al., 2004b], nous avons abordé les problèmes de synthèse de correcteur afin que des contraintes de temps de séjour maximum soient respectées. La solution s'appuie alors sur la résolution d'équations implicites. Dans [Cottenceau et al., 2006] [Cottenceau et al., 2008], nous avons abordé l'étude et le dimensionnement de systèmes de gestion de flux de type Kanban. La régulation du flux par le Kanban s'apparente à un contrôle par bouclage (comparable au problème WFC pour les réseaux). Dans ce travail, les outils de simulation développés avec O. Boutin durant sa thèse ont permis de confronter les résultats théoriques à des simulations sur des systèmes dont certains temps opératoires étaient décrits par des variables

21. par exemple, un système avec routage périodique tel que traité section 3.3 page 45.

aléatoires. Enfin, les problèmes de synthèse de correcteurs (problème de poursuite de modèle) ont été adaptés à la classe des GET Valués Equilibrés dans [Cottenceau et al., 2014a]. Puisque la relation de transfert d'un GET-VE peut être décrite par une série formelle de $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$, le contexte est globalement le même que pour les GET ordinaires. On peut donc utiliser la théorie de la résiduation pour synthétiser des correcteurs optimaux de type précompensateur ou feedback de sortie.

Perspectives

Concernant les travaux rappelés dans ce mémoire, certains développements apparaissent envisageables à court terme, notamment s'agissant de l'étude des Graphes d'Evénénements Temporisés Valués Equilibrés (GET-VE).

De façon assez générale, la modélisation des GET sur $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$ et celle des GET-VE sur $\mathcal{E}_{per}^{*}[\![\delta]\!]$ sont analogues. La majorité des travaux concernant les GET ordinaires doit donc trouver une transposition, plus ou moins immédiate, aux GET-VE.

Pour l'instant, concernant la commande des GET-VE, ont été abordées uniquement les questions relatives à la synthèse de correcteurs. En revanche, le problème de poursuite de trajectoire [22] n'a pas encore été formulé dans le contexte de la modélisation sur $\mathcal{E}_{per}^{*}[\![\delta]\!]$. De même, le problème de stabilité [23] mériterait d'être reconsidéré à l'aide de ces outils, ceci en lien avec l'interprétation des calculs de résiduation comme outils de mesure des écarts sur des trajectoires.

Les questions algorithmiques relatives au calcul du transfert des GET-VE restent également un problème important. En particulier, le calcul de l'étoile de Kleene d'une série ultimement périodique de $\mathcal{E}_{per}^{*}[\![\delta]\!]$ n'est pas, pour l'instant, satisfaisant. Il reste donc à imaginer des techniques plus performantes pour pouvoir calculer les séries de transfert des GET-VE. Toutes ces questions permettraient d'aboutir [24] à un outil de calcul comparable à la librairie MinMaxGD pour les séries rationnelles de $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$.

Enfin, une caractéristique importante des systèmes (max,+) linéaires, est qu'il existe une symétrie entre la représentation (max,+) linéaire, à l'aide de dateurs, et la représentation (min,+) linéaire, utilisant des compteurs. Dans cette idée, à la classe des GET-VE doit correspondre une autre classe de SED, symétrique, où interviennent des phénomènes de décalages temporels plus riches. En effet, les GET-VE décrivent des SED où n'intervient qu'un seul type de décalage temporel (décrit par l'opérateur δ^t) mais où interviennent différents opérateurs événementiels résultant de la combinaison des opérateurs γ^n, μ_m et β_b. De façon symétrique, on pourrait donc envisager une classe de SED où n'interviendrait qu'un seul type de décalage événementiel γ^n mais où les opérateurs temporels seraient exprimés sur la base des opérateurs δ^t, ϖ_p et ρ_r introduits dans la Remarque 2 page 37. Cette classe de systèmes serait en quelque sorte celle qu'a considérée Xavier David-Henriet dans sa thèse. Ce qui serait différent néanmoins, c'est la description de SED à l'aide des opérateurs élémentaires γ^n, δ^t, ϖ_p et ρ_r.

22. consistant à calculer l'entrée optimale pour atteindre une trajectoire de sortie
23. qui équivaut à la bornitude pour les RdP
24. une version, certes peu efficace, est déja disponible pour manipuler des expressions rationnelles équilibrées de $\mathcal{E}_{per}^{*}[\![\delta]\!]$

Pour aller même plus loin, la question qui suit concerne la possibilité de manipuler des séries rationnelles décrites sur la base des opérateurs γ^n, δ^t, μ_m, β_b, ϖ_p et ρ_r. Peut-on aboutir à des outils de calcul ? Peut-on exprimer des représentations canoniques sur des expressions avec tous ces opérateurs ?

Annexe A

Modélisation d'un système de convoyage

A.1 Introduction

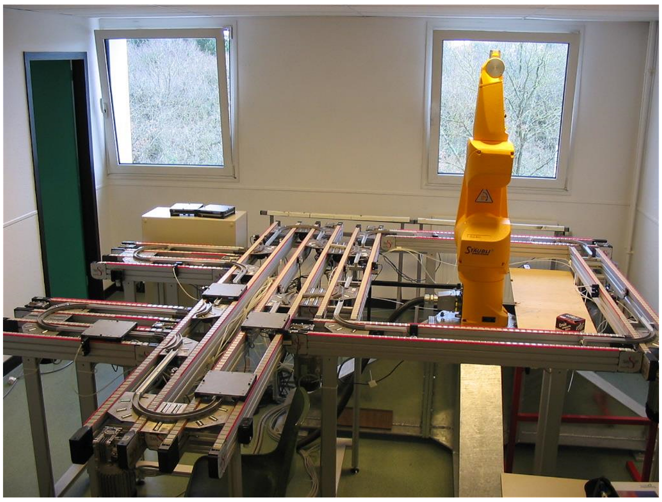


FIGURE A.1 – Système de convoyage automatisé

L'ISTIA (école d'ingénieurs de l'université d'Angers) dispose d'un système de convoyage automatisé. Cet équipement est utilisé par les étudiants pour leur formation à la programmation d'automatismes industriels et à l'utilisation de réseaux industriels. Cet équipement automatise le convoyage de pièces au sein d'une unité de fabrication. Des produits sont chargés par un robot sur des palettes puis acheminés vers des postes de travail (deux épis) où une opération est réalisée. Ensuite les produits sont transportés depuis les postes de travail vers un point de déchargement. Une photo du système est donnée dans la figure A.1 et un schéma du système (vu du dessus) est également donné par la figure A.2.

L'étude de ce système a servi de fil conducteur pour les travaux de thèse d'Olivier Boutin [Boutin, 2009]. L'objectif était initialement de pouvoir modéliser, simuler et commander ce système à l'aide de la théorie (max,+). En raison des routages et des partages de ressources (croisements), nous avons cherché une approximation de la dynamique entrée-sortie de ce système par un intervalle de comportements. Les résultats de modélisation donnés au Chap.3 peuvent être appliqués sur cet exemple.

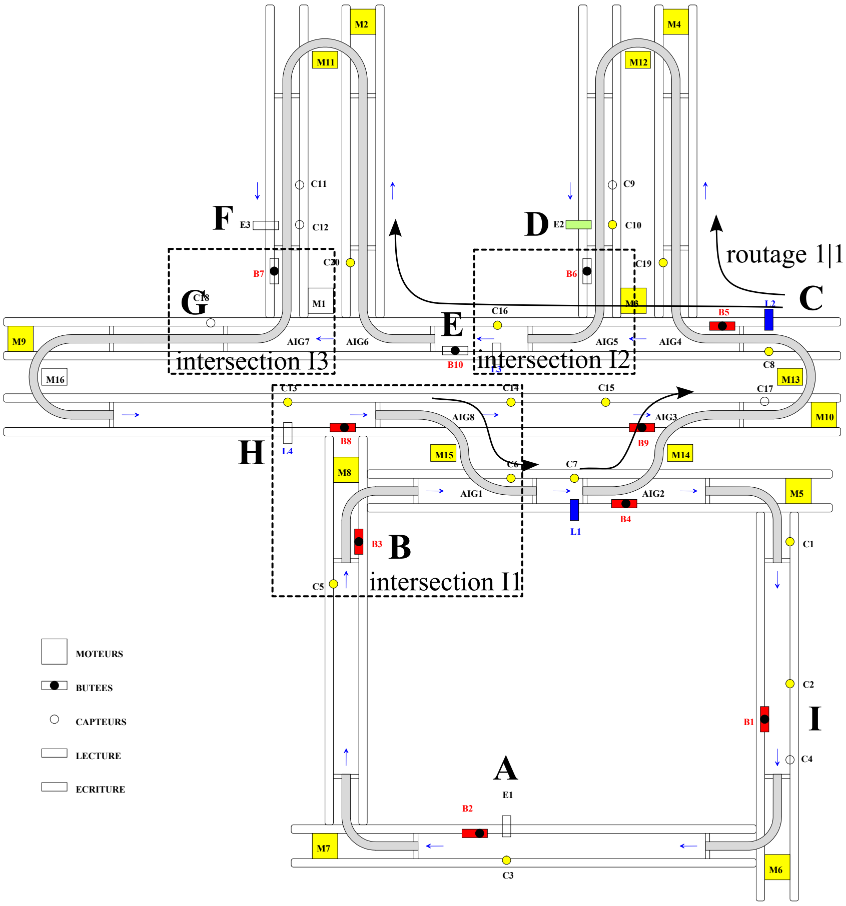


FIGURE A.2 – Description du système de convoyage

A.2 Description

Donnons tout d'abord une description complète du comportement de ce système automatisé. En se référant aux notations du schéma donné figure A.2, le système permet d'acheminer des produits du point A (chargement sur une palette), vers le point I (déchargement). Les opérations de chargement/déchargement sont robotisées mais ne sont pas prises en compte dans le modèle. Les durées mentionnées (exprimées en secondes) ci-après sont le résultat de mesures sur le système réel. Les produits sont acheminés depuis l'entrée vers la sortie avec le cheminement suivant.

– $A \to B$: convoyage des palettes. Ce convoyeur met 8 secondes pour acheminer les palettes.

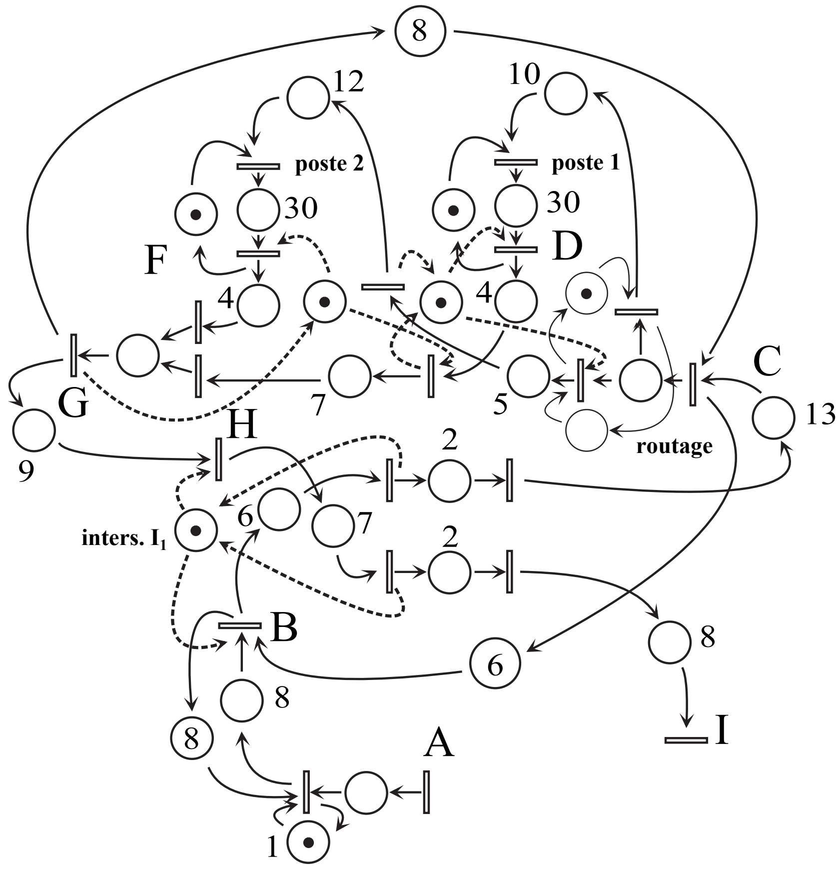


Figure A.3 – RdP du système de convoyage

Au plus 8 palettes peuvent être stockées sur ce convoyeur.

– $B \to C$: les palettes sont acheminées de B vers C. Pour cette section, les palettes empruntent d'abord une intersection (gérée en exclusion mutuelle) notée I_1 et sont ensuite aiguillées vers le point C. L'intersection I_1 est une zone où les palettes allant de B vers C croisent le chemin des palettes allant de H vers I. Cette intersection est modélisée ici comme une ressource partagée. Les palettes mettent 6 secondes pour traverser l'intersection dans le sens $B \to C$ et 7 secondes dans le sens $H \to I$. Ensuite, les palettes mettent $2 + 13$ secondes pour atteindre le point C.

– $C \to D \to G$ ou $C \to F \to G$: depuis le point C, les palettes sont envoyées alternativement vers le premier ou le second poste de travail (les épis). Dans chaque poste de travail, la palette est immobilisée 30 secondes afin de pouvoir réaliser l'opération. Il s'agit des points D et F sur le schéma. En C, il y a un routage périodique 1|1 vers les postes de travail de façon à alimenter les deux postes de façon équilibrée. Les palettes suivent soit le chemin $C \to D \to E \to G$, soit le chemin $C \to E \to F \to G$, ceci alternativement. Deux intersections notées I_2 et I_3 sont contrôlées. En I_2, les palettes sortant du poste de travail D croisent le chemin des palettes allant vers le poste de travail F. De même, les palettes sortant du poste de travail F croisent le chemin des palettes sortant du poste de travail

D en I_3. Les intersections I_2 et I_3 seront décrites par des ressources partagées. Les temps de transport des différentes sous-sections seront reportés sur le modèle réseau de Petri du système global. Par programmation, le nombre de palettes entre C et G est limité à 8.

- $G \rightarrow H$: toutes les palettes empruntent cette section, le transport dure 9 secondes.
- $H \rightarrow I$: les palettes croisent l'intersection I_1 pour être envoyées vers I. Le temps de transport entre H et I est de $7 + 2 + 8$.

L'ensemble de ce comportement est décrit par un réseau de Petri décrit figure A.3. Les intersections sont des ressources partagées (utilisation exclusive) entre deux chemins. Les places de conflit et les arcs associés sont en pointillés sur la figure. Par ailleurs, au point C, les palettes peuvent être affectées à l'un des deux épis. Le comportement modélisé comporte donc un routage alternatif 1|1.

A.3 Approximation du comportement

En s'appuyant sur les résultats rappelés au Chap.3, les intersections peuvent être approchées par des modèles intervalles où certaines temporisations sont décrites par des intervalles. A titre d'exemple, en appliquant la politique d'affectation de la ressource décrite au Chap.3, le modèle de l'intersection I_1 est approché par un GET décrit par la figure A.4. Après cette transformation, il n'y a plus de couplage entre les chemins $B \rightarrow C$ et $H \rightarrow I$, en revanche certaines durées sont variables. Le modèle approché est donc un GET avec des temporisations dans un intervalle.

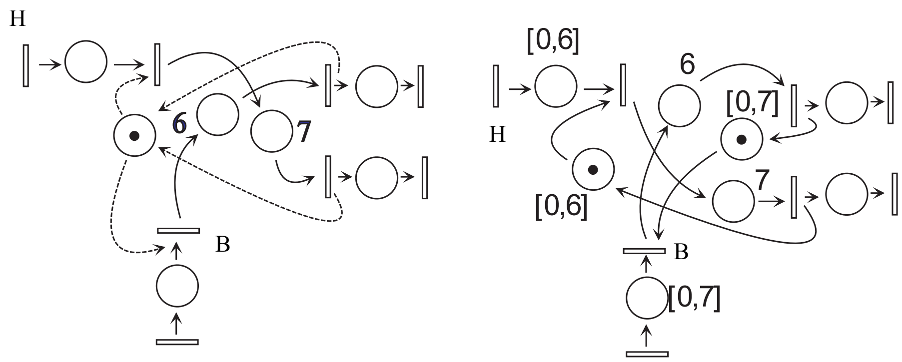


FIGURE A.4 – Approximation de l'intersection I_1 du système de convoyage.

Pour les intersections I_2 et I_3, on peut également approcher le RdP initial par des GET avec des temporisations dans un intervalle. La figure A.5 illustre cette transformation de modèle.

A ce stade, les composantes du RdP obtenu sont principalement des GET (cf. figure A.6). Entre A et C, le comportement du système est décrit par un GET (avec des intervalles de temps), de même qu'entre G et I. Enfin, le comportement entre C et G est décrit par le fonctionnement en parallèle (avec un routage 1|1) de deux GET avec des temporisations dans un intervalle.

Cette approximation du système initial peut dès lors être décrite par des transferts dans des intervalles de $I(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!])$, soit $C = \mathbf{H}_1 A$, $G = (\mathbf{H}_2|\mathbf{H}_3)_{1|1}(C)$ and $I = \mathbf{H}_4 G$ avec $\mathbf{H}_1, \mathbf{H}_2, \mathbf{H}_3, \mathbf{H}_4 \in I(\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!])$.

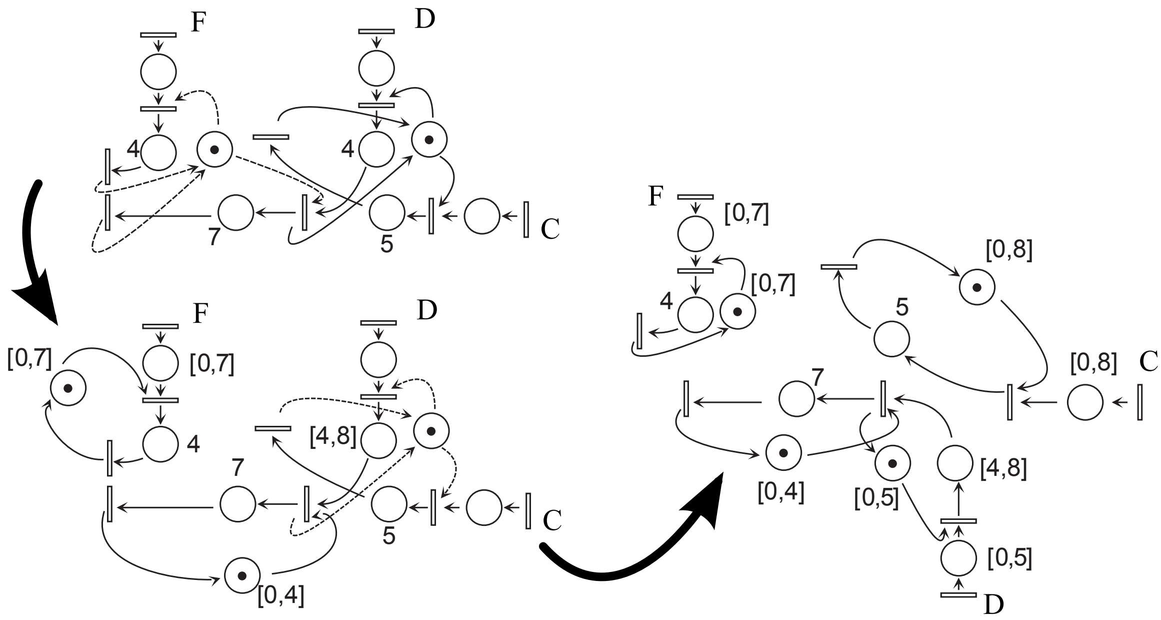


FIGURE A.5 – Les intersections 2 et 3 du système de convoyage

A.4 Conclusion

L'approximation du comportement du système de convoyage automatisé par des intervalles permet d'appliquer les résultats de commande obtenus par M. Lhommeau [Lhommeau et al., 2004].

Une mise en oeuvre réelle d'un correcteur (max,+) linéaire a même été réalisée dans le cadre d'un projet étudiant de Master. La dynamique d'un précompensateur permettait de limiter le nombre de palettes dans le système sans dégrader le débit du système.

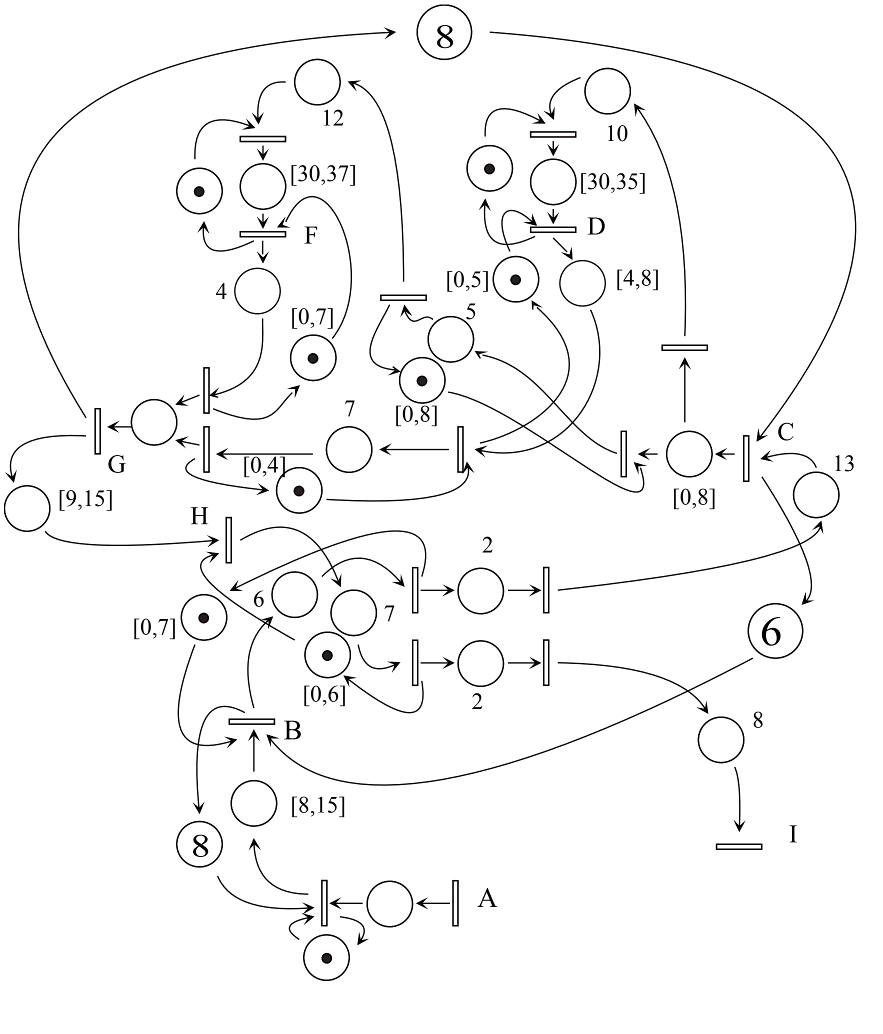


FIGURE A.6 – Système de convoyage approché par des GET à temporisations dans des intervalles

Annexe B

Algèbre des dioïdes

Toutes les structures algébriques utilisées pour les différentes représentations (équations récurrentes, convolutions, opérateurs) du comportement des Graphes d'Evénement Temporisés ont en commun d'être des semi-anneaux idempotents, aussi appelés dioïdes dans la littérature. Nous rappelons ici quelques résultats clés concernant ces structures algébriques. Un élément important est qu'il s'agit également d'ensembles ordonnés avec des structures de treillis ou de treillis complet. Les références principales pour tous ces résultats sont [Cohen et al., 1989b] [Baccelli et al., 1992] [Gaubert, 1992] [Cohen et al., 1998a] [Heidergott et al., 2006] [Blyth and Janowitz, 1972].

B.0.1 Semi-anneaux idempotents

Définition 20 (Dioïde [Baccelli et al., 1992]) *Un dioïde (ou semi-anneau idempotent) est un ensemble $\mathcal{D}$ muni de deux opérations notées $\oplus$ et $\otimes$ telles que la somme est commutative, associative et possède un élément neutre noté ε, le produit est associatif, distributif sur la somme et possède un élément neutre noté e, l'élément ε est absorbant pour le produit et enfin, la somme est idempotente : $\forall a \in \mathcal{D}, a \oplus a = a$.*

Sur un dioïde $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$, la loi $\oplus$ permet de définir une relation d'ordre canonique

$$a \preceq b \iff a \oplus b = b$$

qui confère à un dioïde une structure ordonnée. Un dioïde $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ est dit complet si pour tout sous-ensemble de $\mathcal{A} \in \mathcal{D}$, la somme $\bigoplus_{x \in \mathcal{A}} x$ est définie et appartient à $\mathcal{D}$ et si le produit distribue sur les sommes infinies.

Théorème 2 ([Baccelli et al., 1992]) *Un dioïde complet $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ est également un treillis complet $(\mathcal{D}, \oplus, \wedge)$. L'opération $\wedge$ est alors définie par $a \wedge b = \bigoplus \{x | x \preceq a \text{ et } x \preceq b\}$.*

Exemple 14 (Dioïdes complets $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$, $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$) *L'ensemble $\overline{\mathbb{Z}} = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$ muni du* min *et du $+$ est un dioïde complet noté $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$. L'ensemble $\overline{\mathbb{Z}}$ muni du* max *et du $+$ est un dioïde complet noté $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$. Ces deux dioïdes sont aussi désignés sous le nom d'algèbres (min,+) et (max,+) dans la littérature.*

Partant d'un dioïde scalaire $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$, on peut définir les opérations sur des matrices

$$(A \oplus B)_{ij} = A_{ij} \oplus B_{ij} \quad (C \otimes D)_{ij} = \bigoplus_k C_{ik} \otimes D_{kj}$$

de sorte que l'ensemble des matrices muni de ces opérations a une structure de dioïde.

Définition 21 (Intervalle) *Un intervalle fermé dans un dioïde $\mathcal{D}$, noté $\mathbf{x} = [\underline{x}, \overline{x}]$ avec $\underline{x} \preceq \overline{x}$, est l'ensemble défini par*

$$\mathbf{x} = \{x \in \mathcal{D} | x \succeq \underline{x} \text{ et } x \preceq \overline{x}\}$$

Théorème 3 (Dioïde d'intervalles $I(\mathcal{D})$ [Lhommeau et al., 2004] [Hardouin et al., 2009a]) *Soit $\mathcal{D}$ un dioïde. L'ensemble des intervalles fermés de $\mathcal{D}$ muni des opérations suivantes*

$$\mathbf{x} \overline{\oplus} \mathbf{y} = [\underline{x} \oplus \underline{y}, \overline{x} \oplus \overline{y}] \text{ et } \mathbf{x} \overline{\otimes} \mathbf{y} = [\underline{x} \otimes \underline{y}, \overline{x} \otimes \overline{y}]$$

est un dioïde noté $I(\mathcal{D})$.

Théorème 4 (Dioïde quotient [Baccelli et al., 1992]) *Considérant un dioïde $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ et une relation d'équivalence $\mathcal{R}$ compatible avec l'ordre de $\mathcal{D}$, alors l'ensemble des classes d'équivalence de $\mathcal{D}$ a une structure de dioïde pour les opérations suivantes*

$$[a]_{\mathcal{R}} \oplus [b]_{\mathcal{R}} \triangleq [a \oplus b]_{\mathcal{R}} \quad [a]_{\mathcal{R}} \otimes [b]_{\mathcal{R}} \triangleq [a \otimes b]_{\mathcal{R}}$$

Théorème 5 (Dioïde de séries formelles [Baccelli et al., 1992]) *L'ensemble des séries formelles d'une variable z à exposants dans $\mathbb{Z}$ et coefficients dans un dioïde complet $\mathcal{D}$ est un dioïde complet noté $\mathcal{D}[\![z]\!]$ pour les opérations définies ci-après : $s_1 = \bigoplus s_1(n)z^n, s_2 = \bigoplus s_2(n)z^n \in \mathcal{D}[\![z]\!]$,*

$$\begin{aligned} s_1 \oplus s_2 &\triangleq \textstyle\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} (s_1(n) \oplus s_2(n))\, z^n \\ s_1 \otimes s_2 &\triangleq \textstyle\bigoplus_{n\in\mathbb{Z}} \left(\bigoplus_{\nu_1+\nu_2=n} s_1(\nu_1) \otimes s_2(\nu_2)\right) z^n. \end{aligned}$$

Exemple 15 ($\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$ [Cohen et al., 1989b]) *La modélisation des GET par des opérateurs de décalages γ^n et δ^t s'appuie sur un dioïde de séries formelles. On peut définir tout d'abord un dioïde de séries formelles en deux variables γ et δ à coefficients booléens. Cette structure est notée $\mathbb{B}[\![\gamma, \delta]\!]$. Ensuite, le caractère monotone des fonctions compteurs et dateurs induit l'équivalence suivante*

$$s_a \equiv s_b \iff (\gamma^1 \oplus \delta^{-1})^* s_a = (\gamma^1 \oplus \delta^{-1})^* s_b$$

Le dioïde $\mathbb{B}[\![\gamma, \delta]\!]$ quotienté par cette équivalence est noté $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma, \delta]\!]$.

B.0.2 Résolution d'équations

Dans un dioïde, l'équation $ax = b$ n'admet pas nécessairement de solution. En revanche, sous l'hypothèse que le dioïde est complet, l'équation $ax \preceq b$ admet toujours une plus grande solution. La théorie qui traite les conditions sous lesquelles $f(x) \preceq b$ admet une solution optimale est appelée théorie de la résiduation [Blyth and Janowitz, 1972]. Les références [Baccelli et al., 1992], [Cohen, 1998] et [Gaubert, 1992] fournissent une présentation détaillée.

Définition 22 (Résiduation) *Une application $f : \mathcal{D} \to \mathcal{D}$ définie sur un dioïde complet est dite résiduable si pour tout $x \in \mathcal{D}$, $f(x) \preceq b$ admet une plus grande solution notée $f^\sharp(b) = \bigoplus_x \{x \in \mathcal{D} | f(x) \preceq b\}$.*

Théorème 6 ([Cohen et al., 1989b]) *Les applications $L_a : \mathcal{D} \to \mathcal{D}, x \mapsto a \otimes x$ et $R_a : \mathcal{D} \to \mathcal{D}, x \mapsto x \otimes a$ sont résiduables. On utilise usuellement les notation suivantes $L_a^\sharp(x) = a \backslash\!\!\!\circ\, x$ et $R_a^\sharp(x) = x \not{\circ}\, a$.*

Un formulaire issu de [Baccelli et al., 1992] contenant des identités impliquant la résiduation du produit (à gauche et à droite) est rappelé à la fin de cette annexe.

La résolution d'équations implicites du type $x = f(x)$ bénéficie également de résultats applicables au cadre des semi-anneaux idempotents.

Définition 23 (Points fixes d'applications isotones) *Soit f une application isotone ($x \preceq y \Rightarrow f(x) \preceq f(y)$) définie sur un dioïde complet $\mathcal{D}$. L'ensemble des points fixes est défini comme suit :*

$$\mathcal{F}_f \quad = \quad \{x \in \mathcal{D} \mid f(x) = x\}.$$

Théorème 7 *([Tarski, 1955]). Soit f une application isotone définie sur un dioïde complet $\mathcal{D}$. L'ensemble $\mathcal{F}_f$ est un treillis complet non-vide. Ainsi, f admet un plus petit et un plus grand point fixe.*

Théorème 8 *([Baccelli et al., 1992, Th. 4.70]). Soit f une application vérifiant $f(\bigoplus_i x_i) = \bigoplus_i f(x_i)$ et définie sur un dioïde complet $\mathcal{D}$. Le plus petit point fixe de f noté $\check{y}$ est donné par :*

$$\check{y} = f^\star(\varepsilon) = \bigoplus_{i \geq 0} f^i(\varepsilon),$$

avec $f^{i+1} = f \circ f^i$ et $f^0 = \mathsf{Id}_\mathcal{D}$.

Soit g une application vérifiant $g(\bigwedge_i x_i) = \bigwedge_i g(x_i)$ et définie sur un dioïde complet $\mathcal{D}$. Le plus grand point fixe de g noté $\hat{y}$ est donné par :

$$\hat{y} = f_\star(\top) = \bigwedge_{i \geq 0} f^i(\top).$$

Définition 24 *(Etoile de Kleene) Sur un dioïde complet $\mathcal{D}$, l'étoile de Kleene est définie par : $\forall a \in \mathcal{D}$,*

$$a^\star \triangleq \bigoplus_{i=0}^{+\infty} a^i \quad \text{avec} \quad a^{i+1} = a \otimes a^i \quad \text{et} \quad a^0 = e.$$

Théorème 9 *L'équation implicite $x = ax \oplus b$ définie sur un dioïde complet admet $x = a^* b$ comme plus petite solution*

Preuve : On applique le théorème 8 avec $f(x) = ax \oplus b$. $\square$

B.1 Formulaire sur la résiduation

Le formulaire ci-dessous donne un ensemble d'identités impliquant les applications résiduées $L_a^\sharp$ et $R_a^\sharp$. Toutes ces identités proviennent de [Baccelli et al., 1992].

Soit un dioïde complet $\mathcal{D}$ et $a, b, x, y \in \mathcal{D}$:

$$
\begin{array}{rclrcll}
a(a \backslash x) & \preceq & x & (x / a)a & \preceq & x & \text{(B.1)} \\
a \backslash (ax) & \succeq & x & (xa) / a & \succeq & x & \text{(B.2)} \\
a\,(a \backslash (ax)) & = & ax & ((xa) / a)\,a & = & xa & \text{(B.3)} \\
a \backslash\,(a(a \backslash x)) & = & a \backslash x & ((x / a)a) / a & = & x / a & \text{(B.4)} \\
a \backslash\,(x \wedge y) & = & a \backslash x \wedge a \backslash y & (x \wedge y) / a & = & x / a \wedge y / a & \text{(B.5)} \\
(a \oplus b) \backslash x & = & a \backslash x \wedge b \backslash b & x / (a \oplus b) & = & x / a \wedge x / b & \text{(B.6)} \\
(ab) \backslash x & = & b \backslash\,(a \backslash x) & x / (ba) & = & (x / a) / b & \text{(B.7)}
\end{array}
$$

Si b est inversible (c.-à-d. il existe $b^{-1} \in \mathcal{D}$ tel que $bb^{-1} = b^{-1}b = e$) alors

$$b \backslash a = b^{-1}a \qquad \text{(B.8)}$$

Annexe C

Communications

Le Corronc, E., Cottenceau, B., and Hardouin, L. (2014). Container of (min,+)-linear systems. *Discrete Event Dynamic Systems*, 24(1) :15–52.

Boutin, O., Cottenceau, B., L'Anton, A., and Loiseau, J.-J. (2009). Modelling systems with periodic routing functions in dioid (min,+). In *Information Control Problems in Manufacturing INCOM'09*,

Cottenceau, B., Hardouin, L., and Boimond, J.-L. (2014). Modeling and control of weight-balanced timed event graphs in dioids. *IEEE Trans. Autom. Control*, 59(5) :1219–1231.

Discrete Event Dyn Syst (2014) 24:15–52
DOI 10.1007/s10626-012-0148-9

Container of (min,+)-linear systems

Euriell Le Corronc · Bertrand Cottenceau · Laurent Hardouin

Received: 20 April 2011 / Accepted: 31 August 2012 / Published online: 27 September 2012

Abstract Based on the (min,+)-linear system theory, the work developed here takes the set membership approach as a starting point in order to obtain a container for ultimately pseudo-periodic functions representative of Discrete Event Dynamic Systems. Such a container, by approximating the exact system, ensures to entirely include it in a guaranteed way. To reach that point, the container introduced in this paper is given as an interval, the bounds of which are a convex function for the upper approximation and a concave function for the lower approximation. Thanks to the characteristics of the bounds, the aim is both to reduce data storage (that can be very high when exact functions are handled) and to reduce the algorithm complexity of the operations of sum, inf-convolution and subadditive closure. These operations are integrated into inclusion functions, the algorithms of which are of linear or quasi-linear complexity.

Keywords (Max,+) algebra · Discrete Event Dynamic Systems · Set membership approach · Algorithms · Computational complexity

1 Introduction

The theory of (max,+) algebra deals with the study of Discrete Event Dynamic Systems (DEDS) characterized by delay and synchronization phenomena, through the particular algebraic structure called *idempotent semiring* or *dioid* (Baccelli et al.

E. Le Corronc (✉) · B. Cottenceau · L. Hardouin
Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés, Université d'Angers,
62, Avenue Notre Dame du Lac, 49000 Angers, France
e-mail: euriell.lecorronc@univ-angers.fr

B. Cottenceau
e-mail: bertrand.cottenceau@univ-angers.fr

L. Hardouin
e-mail: laurent.hardouin@univ-angers.fr

1992). The areas of application of this theory are various. We can cite the production systems (Cottenceau et al. 2001), communication networks (Le Boudec and Thiran 2001; Chang 2000) and the transportation systems (Heidergott et al. 2006). More precisely, some control problems have already been solved in the context of production systems (Maia et al. 2003) and in the context of communication networks (Le Corronc et al. 2010). We can also recall that the theory of Network Calculus aims at analyzing and measuring the worst-case performance of a network.

These works on control and performance analysis share the feature that the underlying model relies on ultimately pseudo-periodic functions (denoted $\mathscr{F}_{cp}$ in this paper). Nowadays, some tools enable these kinds of functions to be handled (an overview for the Network Calculus is given in Boyer (2010)). A non-exhaustive list includes: the MinMaxGD toolbox (created by the LISA laboratory, see Cottenceau et al. (2000)), COINC software[1] and the DISCO toolbox for Network Calculus (see respectively Bouillard et al. (2009) and Schmitt and Zdarsky (2006)), and the RTC toolbox for an extension of the Network Calculus called Real-Time Calculus (see Wandeler and Thiele (2006)). The main operations of the (min,+) algebra such as the sum and the inf-convolution[2] are available in MinMaxGD, COINC, DISCO and RTC, whereas the operation of subadditive closure[3] is only available with MinMaxGD and COINC. Moreover, for MinMaxGD and COINC, the algorithms of these operations are described in Gaubert (1992) and Cottenceau (1999) for the former, and in Bouillard and Thierry (2008) for the latter. In these toolboxes, the complexity of sum and inf-convolution operations is linear or quasi-linear, whereas the one for subadditive closure tends to be polynomial. However, because of the characteristics of ultimately pseudo-periodic functions, the transient phenomena of handled functions can be significantly long. In this case, the amount of storage data overloads and the exact computations are not always possible within a reasonable time.

It can therefore be helpful to use alternative models with less complex algorithms and reduced data size. This paper follows this point of view by defining an original container for ultimately pseudo-periodic functions (see also the thesis of Le Corronc (2011)). The idea proposed here considers:

- a particular algebraic structure denoted $\mathscr{F}_{cp_{/\mathscr{L}}}$, built from the Legendre–Fenchel transform[4] $\mathscr{L}$ (specially well-suited for convex functions, see Rockafellar 1997; Baccelli et al. 1992; Fidler and Recker 2006),
- associated to the set membership approach (see Jaulin et al. (2001) and Moore (1979) for a general introduction, Litvinov and Sobolevskiī 2001; Lhommeau et al. 2005; Hardouin et al. 2009 in the semiring context).

More precisely, the upper bound of the container is the greatest element of the equivalence class modulo $\mathscr{L}$ of the approximated function: it is a convex function. Similarly, the lower bound of the container is a concave function that will contract this equivalence class since the approximated function necessarily belongs to the

[1] Name of a research project dealing with COmputational Issues in Network Calculus.

[2] Operation used for the concatenation of systems.

[3] Also called Kleene star operation and used for systems with closed-loop architecture.

[4] Also called the convex conjugate function.

container. In other words, the container is treated as the intersection between an interval of functions that contains the exact system, and the equivalence class of the approximated system modulo the Legendre–Fenchel transform. Thanks to the convex characteristics of the bounds of the container, their data representations only need small storage capacity.

Obviously, the downside is that such approximations provide results that are not exact. But the computations made for the proposed container guarantee to include the exact result as it is proposed in the set membership approach. Indeed, the operations of sum, inf-convolution and subadditive closure are integrated into inclusion functions that can be obtained by efficient algorithms thanks again to their convex characteristics. For instance, some existing results given in Le Boudec and Thiran (2001) and Schmitt and Zdarsky (2006), and leading to algorithms of linear complexity will be applied to the inclusion function of the inf-convolution. For the sum, since this operation is a minimum in (min,+) algebra, we will see that the complexity of its inclusion function is linear too. Finally, this paper develops new results by choosing a specific shape for the container, allowing us to deal with subadditive closure in an efficient way. Indeed, by applying factorization and simplification, the complexity of the inclusion function of the subadditive closure becomes quasi-linear.

The presentation of our approach is organized as follows: Firstly, Section 2 reminds us of the useful basis of (min,+)-linear systems. More precisely, some elements required for the study such as the idempotent semiring theory and the problem of transfer matrix computation will be introduced. Then, in Section 3, all the elements used to build the containers for these systems are presented with a canonical representation. Section 4 provides inclusion functions for sum, inf-convolution and subadditive closure operations, and outlines the underlying algorithms that handle them. Finally, in Section 5, some tests are provided in order to evaluate the toolbox called *ContainerMinMaxGD*[5], and to compare approximated computations to exact ones.

2 (Min,+)-linear systems

2.1 Reminder

We denote by $\mathbb{Z}_{\min}$ the set of integers with a min as $\oplus$ operator and the classical sum as $\otimes$ operator. On $\mathbb{Z}_{\min}$, the linear modeling of (min,+)-linear systems can be done through *counter functions*. More precisely, for an event labeled x, the function $x(t)$ defined from $\mathbb{Z}$ to $\mathbb{Z}_{\min}$ gives the cumulative number of events x that have occurred until time t. Therefore, this work considers systems described by the following state representation where $u(t)$, $x(t)$ and $y(t)$ are vectors of counter functions that respectively represent input events (events for which it is possible to control the occurrence), internal and output events:

$$\begin{cases} x(t) = A \otimes x(t-1) \oplus B \otimes u(t), \\ y(t) = C \otimes x(t). \end{cases} \tag{1}$$

[5]Created with the container and the algorithms described in this paper.

Moreover, as in the classical linear system theory, an input-output description of a (min,+)-linear system also exists. Indeed, by considering counter functions as event trajectories[6], the output y of a Single-Input Single-Output (SISO) system can be expressed as a convolution of the input u by a particular trajectory h called a *transfer function*. As in the classical theory, the transfer function of a system corresponds to the output due to a specific input that plays the role of "impulse". The transfer function can therefore be seen as the impulse response of a (min,+) system.

This kind of input-output behavior can also be handled through formal series where two operators of time-shift, denoted δ, and event-shift, denoted γ, are involved, and so the convolution is transformed into a formal series product. An example of this structure is idempotent semiring called $\mathcal{M}_{\mathrm{in}}^{\mathrm{ax}}[\![\gamma,\delta]\!]$ (see Cohen et al. (1989b) and Baccelli et al. (1992, Section 5.4.2)). In this framework, one of the most important features is that the behavior of (min,+)-linear systems can be handled thanks to finite and canonical representations that have periodic properties. Hence, the transfer series of such a system is an ultimately pseudo-periodic series that has a canonical representation.

In the literature, the state representation as well as the input-output model are well suited to describe the behavior of Timed Event Graphs[7] (TEG) with the "as soon as possible" firing rule as can be seen in Cottenceau et al. (2001). These models are also interesting to describe the behavior of some datagrams through a network as shown in Chang (2000) and Le Boudec and Thiran (2001).

Some useful software tools are available to handle such representations. The MinMaxGD toolbox computes the classical operations on periodic series of $\mathcal{M}_{\mathrm{in}}^{\mathrm{ax}}[\![\gamma,\delta]\!]$. Also, the COINC software handles some piecewise affine pseudo-periodic functions with operations of min, max, (min,+)-convolution and subadditive closure.

2.2 Idempotent semiring theory

All the models introduced previously share some common algebraic features. In each case, the underlying algebraic structure is an idempotent semiring for which some reminders are given here (for more details, see Baccelli et al. 1992, Chapter 4; Gaubert 1992; Heidergott et al. 2006).

Definition 1 (Idempotent semiring) An idempotent semiring $\mathcal{D}$, also called dioid, is a set endowed with two inner operations denoted $\oplus$ and $\otimes$. The sum $\oplus$ is associative, commutative, idempotent (i.e. $\forall a \in \mathcal{D}, a \oplus a = a$) and admits a neutral element denoted ε. The product[8] $\otimes$ is associative, distributes over the sum and allows e to be a neutral element.

When $\otimes$ is commutative (i.e. $\forall a, b \in \mathcal{D}, a \otimes b = b \otimes a$), the idempotent semiring $\mathcal{D}$ is said to be commutative. In this case, an idempotent semiring is said to be

[6]Which can be seen as "signals" for DEDS.

[7]Subclass of Timed Petri Nets in which each place has exactly one upstream and one downstream transition.

[8]As in the usual algebra, operator $\otimes$ can be omitted: $ab = a \otimes b$.

complete if it is closed for infinite sums and if the product distributes over infinite sums too. In this case, the greatest element of $\mathcal{D}$ is denoted $\top$ (for *Top*) and represents the sum of all its elements ($\top = \bigoplus_{x \in \mathcal{D}} x$).

Furthermore, due to the idempotency of addition, a canonical order relation can be associated with $\mathcal{D}$ by the following equivalences: $\forall a, b \in \mathcal{D}$, $a \succcurlyeq b \Leftrightarrow a = a \oplus b$ and $b = a \wedge b$. Because of the lattice properties of a complete idempotent semiring, $a \oplus b$ is the least upper bound of $\mathcal{D}$ whereas $a \wedge b$ is its greatest lower bound.

Example 1 (Idempotent semirings $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$ and $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$) The set $\overline{\mathbb{Z}}_{\max} = (\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\})$ endowed with the max operator as sum $\oplus$ and the addition as product $\otimes$ is a complete idempotent semiring where $\varepsilon = -\infty$, $e = 0$ and $\top = +\infty$. On $\overline{\mathbb{Z}}_{\max}$, the greatest lower bound $\wedge$ becomes the min operator. By similarity, the set $\overline{\mathbb{R}}_{\max} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})$ is a complete idempotent semiring with the same characteristics.

Example 2 (Idempotent semirings $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ and $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$) The set $\overline{\mathbb{Z}}_{\min} = (\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\})$ endowed with the min operator as sum $\oplus$ and the addition as product $\otimes$ is a complete idempotent semiring where $\varepsilon = +\infty$, $e = 0$ and $\top = -\infty$. On $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$, the greatest lower bound $\wedge$ becomes the max operator. By similarity, the set $\overline{\mathbb{R}}_{\min} = (\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\})$ is a complete idempotent semiring with the same characteristics.

Remark 1 It is important to note that because of operator $\oplus$, the canonical order relation $\succcurlyeq$ on $\overline{\mathbb{Z}}_{\min}$ and $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$ corresponds to the reverse of the natural order $\leq$:

$$3 \succcurlyeq 5 \quad \Leftrightarrow \quad 3 = 3 \oplus 5 = \min(3, 5) \quad \Leftrightarrow \quad 3 \leq 5.$$

Theorem 1 (Baccelli et al. 1992, Theorem 4.75) *The implicit equation $x = ax \oplus b$ defined on a complete idempotent semiring $\mathcal{D}$ admits $x = a^\star b$ as the lowest solution:*

$$\forall a \in \mathcal{D}, \quad a^\star = \bigoplus_{i \geq 0} a^i \quad \textit{where} \quad a^{i+1} = a^i a \quad \textit{and} \quad a^0 = e.$$

This operator is called subadditive closure or Kleene star operator[9].

Numerous properties are associated with operator $\star$. For instance, they are proposed in Gaubert (1992) and Cottenceau (1999) for the (max,+) algebra and more generally in Conway (1971) and Krob (1990) for the theory of rational identities. Those used in this paper are given below.

Property 1 If $\mathcal{D}$ is a commutative, complete idempotent semiring, then $\forall a, b \in \mathcal{D}$:

$$(ab^\star)^\star = e \oplus a(a \oplus b)^\star, \tag{2}$$

$$(a \oplus b)^\star = a^\star b^\star. \tag{3}$$

[9]This designation is different according to the context of use: Network Calculus or TEG.

Definition 2 (Homomorphism) A mapping Π from an idempotent semiring $\mathcal{D}$ into another one $\mathcal{C}$ is a homomorphism if $\forall a, b \in \mathcal{D}$:

$$\Pi(a \oplus b) = \Pi(a) \oplus \Pi(b) \text{ and } \Pi(\varepsilon) = \varepsilon,$$

$$\Pi(a \otimes b) = \Pi(a) \otimes \Pi(b) \text{ and } \Pi(e) = e.$$

Definition 3 (Congruence) In an idempotent semiring $\mathcal{D}$, a congruence is an equivalence relation denoted $\equiv$ that is compatible with operations $\oplus$ and $\otimes$, that is $\forall a, b, c \in \mathcal{D}$:

$$a \equiv b \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} (a \oplus c) \equiv (b \oplus c), \\ (a \otimes c) \equiv (b \otimes c). \end{cases}$$

Definition 4 (Equivalence class) Let us consider an idempotent semiring $\mathcal{D}$ endowed with a congruence $\equiv$. The equivalence class of an element $a \in \mathcal{D}$ is denoted $[a]_\equiv$ and defined by:

$$[a]_\equiv \triangleq \{x \in \mathcal{D} \mid x \equiv a\}.$$

Lemma 1 (Baccelli et al. 1992, Lemma 4.24) *The quotient of an idempotent semiring $\mathcal{D}$ by a congruence $\equiv$ is an idempotent semiring denoted $\mathcal{D}_{/\equiv}$ and endowed with operations $\oplus$ and $\otimes$ defined as follows:*

$$[a]_\equiv \oplus [b]_\equiv \triangleq [a \oplus b]_\equiv,$$

$$[a]_\equiv \otimes [b]_\equiv \triangleq [a \otimes b]_\equiv.$$

Lemma 2 (Baccelli et al. 1992, Corollary 4.26) *If a mapping $\Pi : \mathcal{D} \mapsto \mathcal{C}$ is a homomorphism, then the relation $\overset{\Pi}{\equiv}$ defined below $\forall a, b \in \mathcal{D}$ is a congruence:*

$$\Pi(a) = \Pi(b) \quad \Leftrightarrow \quad a \overset{\Pi}{\equiv} b,$$

and the quotient of $\mathcal{D}$ by $\overset{\Pi}{\equiv}$ is simply denoted $\mathcal{D}_{/\Pi}$.

Definition 5 (Projector) A projector p is defined as a mapping from $\mathcal{D}$ to $\mathcal{D}$ such that:

$$p = p \circ p.$$

2.3 Modeling of (min,+)-linear systems

In the rest of this paper, the (min,+) modeling over the set of real numbers is chosen. Therefore, some counter functions from $\mathbb{R}$ to $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$ (see Example 2) must be classified for the need of our study. Since these functions describe the cumulative number of events, they are without exception nondecreasing (*i.e.*, $\forall t_1 > t_2,\ f(t_1) \geq f(t_2)$).

Definition 6 (Elementary function Δ_T^K) The elementary function denoted Δ_T^K and illustrated in Fig. 1, is the counter function defined by:

$$\Delta_T^K(t) = \begin{cases} K & \text{if } t \leq T, \\ +\infty & \text{otherwise.} \end{cases}$$

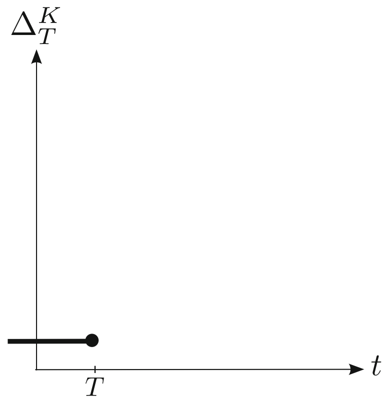


Fig. 1 An elementary function Δ_T^K

Definition 7 (Set $\mathscr{F}_c$) A function $f \in \mathscr{F}_c$ (see Fig. 2a) is a function that can be defined by an infinite sum (min) of elementary functions Δ_T^K, i.e.:

$$f = \bigoplus_{i=0}^{+\infty} \Delta_{t_i}^{k_i}.$$

Therefore, f is a piecewise constant function.

Definition 8 (Causality) Let f be a function of $\mathscr{F}_c$. Function f is said to be causal if:

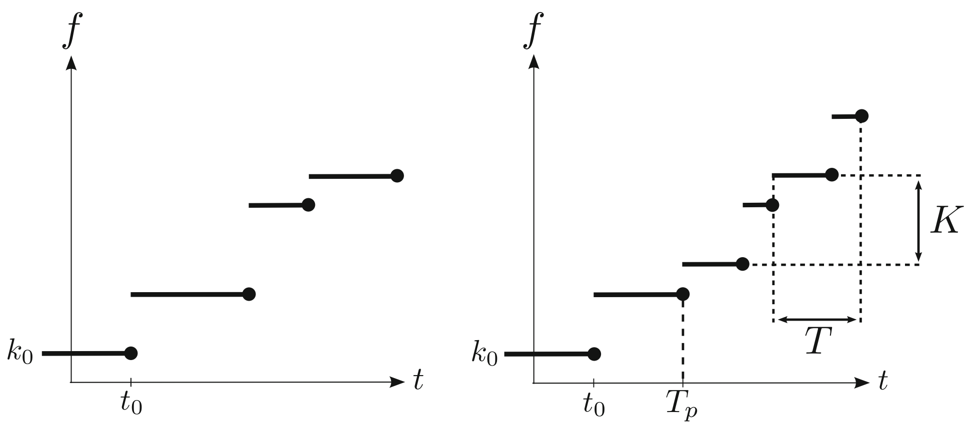
$$\begin{cases} f(t) = f(0) & \text{for } t < 0, \\ f(t) \geq 0 & \text{for } t \geq 0. \end{cases}$$

Remark 2 An elementary function Δ_T^K is causal if $K, T \geq 0$.

Definition 9 (Set $\mathscr{F}_{cp}$) A function $f \in \mathscr{F}_{cp}$ (see Fig. 2b) is a function of $\mathscr{F}_c$ that is in addition ultimately pseudo-periodic, i.e.:

$$\exists T_p \geq t_0, \exists K \in \mathbb{R}^+_{\min}, \exists T \in \mathbb{R}^+ \text{ such that } \forall t \geq T_p,\ \ f(t+T) = K \otimes f(t) = K + f(t),$$

where t_0 is the time of the first elementary function $\Delta_{t_0}^{k_0}$ of f. Hence $\mathscr{F}_{cp} \subset \mathscr{F}_c$.



(a) A function $f \in \mathscr{F}_c$

(b) An ultimately pseudo-periodic function $f \in \mathscr{F}_{cp} \subset \mathscr{F}_c$

Fig. 2 Examples of piecewise constant functions

Property 2 (Canonical representation) Each function of $\mathscr{F}_{cp}$ has a canonical form where T_p and T are minimums.

Property 3 (Asymptotic slope σ) Let f be a function of $\mathscr{F}_{cp}$, its asymptotic slope is defined by the ratio $\sigma(f) = K/T$.

According to this classification, trajectories of a (min,+)-linear system are naturally described by counter functions of $\mathscr{F}_c$ (i.e. nondecreasing piecewise constant functions). In this set, considered systems are described by the state Eq. 1 and recalled here by adding that $A \in \overline{\mathbb{Z}}_{\min}^{n\times n}$, $B \in \overline{\mathbb{Z}}_{\min}^{n\times p}$ and $C \in \overline{\mathbb{Z}}_{\min}^{q\times n}$ where n, p and q refer respectively to the state vector size, the input vector size and the output vector size:

$$\begin{cases} x(t) = A \otimes x(t-1) \oplus B \otimes u(t), \\ y(t) = C \otimes x(t). \end{cases}$$

For SISO systems (i.e. where $p = 1$ and $q = 1$), the development of the recurrent equations given by Eq. 1 leads to express output y as follows:

$$\begin{aligned} y(t) &= CBu(t) \oplus CABu(t-1) \oplus CA^2Bu(t-2) \oplus \ldots, \\ &= \bigoplus_{\tau \geq 0} CA^\tau Bu(t-\tau). \end{aligned} \tag{4}$$

In other words, the output is linked to the input by a convolution as defined below.

Definition 10 (Inf-convolution) Let $f(t)$ and $g(t)$ be two counter functions from $\mathbb{R}$ to $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$. The (min,+)-convolution also called *inf-convolution* of f by g is the counter function defined below:

$$(f * g)(t) \triangleq \bigoplus_{\tau \geq 0} \{f(\tau) \otimes g(t-\tau)\} = \min_{\tau \geq 0}\{f(\tau) + g(t-\tau)\}.$$

Remark 3 The inf-convolution is a commutative operation that distributes over the sum $\oplus$. Its neutral element is denoted e and is defined by $e = \Delta_0^0$.

Thanks to this convolution product and according to Eq. 4, the input-output behavior of a (min,+)-linear system can be expressed as follows, where function h is called the transfer function:

$$y(t) = (h * u)(t) \quad \text{and} \quad h(\tau) = CA^\tau B.$$

By extension to the Multiple-Input Multiple-Output (MIMO) case, this input-output relation is described by:

$$Y(t) = (H * U)(t),$$

where matrix H is called the transfer matrix. The inf-convolution of two matrices $D^{d\times l}$ and $F^{l\times f}$ is defined as follows:

$$(D * F)_{ij} = \bigoplus_{k=1}^{l} \{D_{ik} * F_{kj}\}.$$

2.4 Transfer matrix computation

The transfer matrix of a MIMO system can be obtained from the state representation given by Eq. 1 as explained now. The time shifting between $x(t)$ and $x(t-1)$ and the event shifting contained in matrices A, B and C can also be expressed by inf-convolutions with elementary functions:

$$x(t-1) = \left(\Delta_1^0 * x\right)(t),$$
$$1 \otimes x(t) = \left(\Delta_0^1 * x\right)(t).$$

In other words, if $x \in \mathscr{F}_c$ describes a trajectory, then:

$$\Delta_1^0 * x = \text{trajectory } x \text{ shifted by 1 time unit,}$$
$$\Delta_0^1 * x = \text{trajectory } x \text{ shifted by 1 event unit.}$$

So, by considering the idempotent semiring denoted $(\mathscr{F}_c, \oplus, *)$ of nondecreasing functions endowed with the min as sum and the inf-convolution as product, a different expression of Eq. 1 is obtained:

$$\begin{cases} x = A' * \Delta_1^0 * x \oplus B' * u, \\ y = C' * x, \end{cases} \tag{5}$$

where $A'_{ij} = \Delta_0^{A_{ij}}$, $B'_{ij} = \Delta_0^{B_{ij}}$, $C'_{ij} = \Delta_0^{C_{ij}}$, and x, u and y are vectors of functions in $\mathscr{F}_c$. Thanks to Theorem 1, on the semiring $(\mathscr{F}_c, \oplus, *)$, these equations are solved in order to lead to:

$$y = C' * \left(A' * \Delta_1^0\right)^\star * B' * u,$$

and so $y = H * u$ with:

$$H = C' * \left(A' * \Delta_1^0\right)^\star * B'. \tag{6}$$

Remark 4 (Subadditive closure $\Delta_T^{K\star}$) Let Δ_T^K, with $K, T > 0$, be an elementary function of the semiring $(\mathscr{F}_c, \oplus, *)$. Its subadditive closure $\Delta_T^{K\star}$ illustrated Fig. 3, is a function of $\mathscr{F}_{cp}$ such that:

$$\Delta_T^{K\star} = \bigoplus_{i\geq 0} \left(\Delta_T^K\right)^i \quad \text{where} \quad \left(\Delta_T^K\right)^{i+1} = \left(\Delta_T^K\right)^i * \left(\Delta_T^K\right) \quad \text{and} \quad \left(\Delta_T^K\right)^0 = e.$$

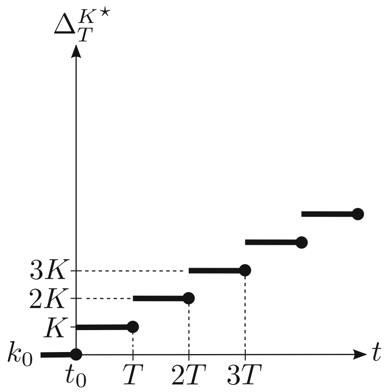


Fig. 3 Subadditive closure of an elementary function: $\Delta_T^{K\star} \in \mathscr{F}_{cp}$

Moreover $(\Delta_T^K)^i = \Delta_{iT}^{iK}$ so $\Delta_T^{K\star} = e \oplus \Delta_T^K \oplus \Delta_{2T}^{2K} \oplus \ldots$. The asymptotic slope of this subadditive closure is defined by $\sigma(\Delta_T^{K\star}) = K/T$. If $K, T \in \mathbb{N}$, then $\sigma(\Delta_T^{K\star}) \in \mathbb{Q}^+$.

The next result showing that a (min,+)-linear system has a transfer matrix that belongs to the sub-semiring $(\mathscr{F}_{cp}, \oplus, *)^{q\times p}$, is a key result for (min,+)-linear systems.

Theorem 2 (Baccelli et al. 1992, Theorem 5.39) *If matrices $A \in \overline{\mathbb{Z}}_{\min}^{n\times n}$, $B \in \overline{\mathbb{Z}}_{\min}^{n\times p}$ and $C \in \overline{\mathbb{Z}}_{\min}^{q\times n}$ of the state representation (Eq. 1) are positive, then $H = C' * (A' * \Delta_1^0)^\star * B'$ given by Eq. 6 is such that $\forall i, j$, H_{ij} is a causal ultimately pseudo-periodic function of $\mathscr{F}_{cp}$.*

Sketch of proof Firstly, according to the definition of system given in Eq. 5, transfer matrix H is obtained by doing a finite number of operations $\{\oplus, *, {}^\star\}$ on elementary functions Δ_T^K. Moreover, since elementary functions A'_{ij}, B'_{ij}, C'_{ij} and Δ_1^0 can be seen as functions of $\mathscr{F}_{cp}$, technical proof consists in verifying that the set $\mathscr{F}_{cp}$ is rationally closed (see for instance Gaubert 1992; Baccelli et al. 1992; Bouillard and Thierry 2008, Propositions 4 and 5). □

Remark 5 It is important to note that the elementary function denoted Δ_0^1 in the semiring $(\mathscr{F}_{cp}, \oplus, *)$ is nothing else but the γ shift operator of idempotent semiring $\mathscr{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[\![\gamma, \delta]\!]$, and Δ_1^0 corresponds to the δ shift operator. In the context of $\mathscr{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[\![\gamma, \delta]\!]$ modeling, the result of Theorem 2 is expressed by a more detailed result: the transfer matrix of a (min,+)-linear system that is rational (i.e. it can be expressed with a finite combination of $\{\gamma, \delta\}$ and $\{\oplus, \otimes, {}^\star\}$) is necessarily periodic and causal.

In conclusion of this section, due to Eq. 6, the computation of the behavior of a (min,+)-linear system relies on an efficient computation of operations such as sum $\oplus$, inf-convolution $*$ and subadditive-closure * of ultimately pseudo-periodic and causal functions.

3 Container of (min,+)-linear systems

3.1 Objectives

The exact computation of sum, inf-convolution and subadditive closure for ultimately pseudo-periodic and nondecreasing functions of $\mathscr{F}_{cp}$ can be really time and memory consuming (see for instance Cottenceau et al. 1998–2006; Gaubert 1992; Bouillard and Thierry 2008). The main objective of this work is to get some efficient algorithms to handle these functions. To achieve this objective, function $f \in \mathscr{F}_{cp}$ is not represented in an exact way[10], but is approximated by a set, more precisely by an interval of functions: $\mathbf{f} = [\,\underline{f}\,,\ \overline{f}\,] = \{f \in \mathscr{F}_{cp} \mid \underline{f} \preccurlyeq f \preccurlyeq \overline{f}\}$.

The operations between these sets have to be defined in order to contain the result in a guaranteed way. These operations are inspired from the set membership approach (Jaulin et al. 2001; Moore 1979) that proposes, for $\mathbf{f}$ and $\mathbf{g}$ two intervals of

[10]Which is made in the MinMaxGD toolbox.

functions, to carry out the computation on all the f and g that respectively belong to $[\underline{f}, \overline{f}]$ and $[\underline{g}, \overline{g}]$. Formally, the interval operations denoted $\diamond \in \{\oplus, *, \star\}$ are defined by:

$$\mathbf{f} \diamond \mathbf{g} = \{ f \diamond g \mid f \in \mathbf{f} = [\underline{f}, \overline{f}] \text{ and } g \in \mathbf{g} = [\underline{g}, \overline{g}] \}.$$

In order to obtain efficient algorithms, a simple idea consists in doing the computation to get $\mathbf{f} \diamond \mathbf{g}$ by handling the bounds of the intervals. But this introduces pessimism concerning the computations and does not improve the complexity of the algorithms (we still handle ultimately pseudo-periodic functions). This is why we headed towards inclusion functions denoted $[\diamond] \in \{[\oplus], [*], ^{[\star]}\}$ that are such that:

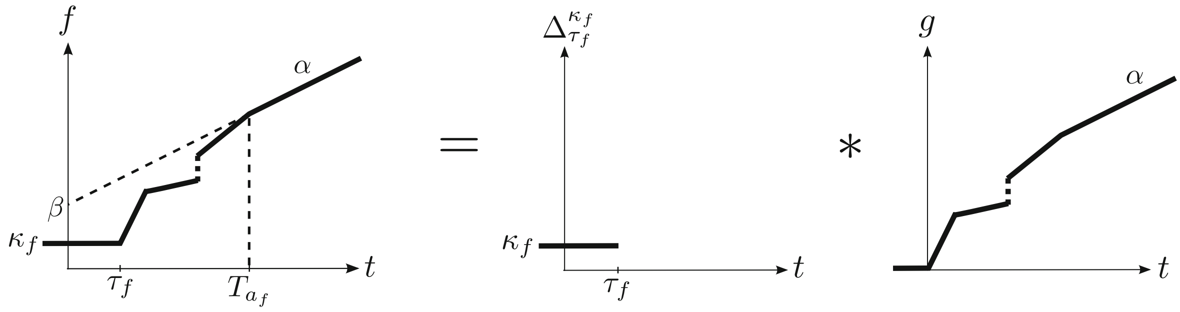
$$\mathbf{f}[\diamond]\mathbf{g} \supset \mathbf{f} \diamond \mathbf{g}.$$

In other words, the inclusion function $[\diamond]$ contains in a guaranteed way the result of $f \diamond g$, by intrinsically adding pessimism. Hence, the aim is to find inclusion functions with interesting algorithm complexity and allowing us to obtain intervals that are as small as possible.

The idea is to introduce containers denoted $[\underline{f}, \overline{f}]_{\mathscr{L}}$ as intervals, the bounds of which are less memory consuming than functions of $\mathscr{F}_{cp}$ and that lead to algorithms with lower complexity than the ones used in MinMaxGD or in COINC. In this proposed container, the bound $\overline{f}$ corresponds to the greatest element of the equivalence class of f modulo the Legendre–Fenchel transform $\mathscr{L}$. Similarly, the bound $\underline{f}$ plays the role of the lower bound of this equivalence class. Finally, the functions $\underline{f}$ and $\overline{f}$ are piecewise affine, ultimately affine, and respectively concave and convex.

It is important to note that in Network Calculus literature, convex and concave functions are often used in order to efficiently compute performance bounds during the analysis of a data network. For instance in Fidler and Recker (2006), the authors use the fact that in the convex analysis (Rockafellar 1997) the inf-convolution of convex functions corresponds to addition in the Legendre domain (a useful result for the concatenation of systems). However, they only propose to deal with an upper bound of the input/output behavior whereas here we offer to deal with a container enclosing the transfer relation in a guaranteed way. Another difference is that they make their computations in the Legendre domain while we always stay in the (min,+) domain and only use the properties of convex functions. Finally, one can find in Schmitt and Zdarsky (2006) the use of a lower bound for the system in addition to the classical upper bound. Indeed, this reference considers almost concave functions that allow them to introduce concave lower bounds of transfer relations and to propose an efficient computation for the inf-convolution. The definition of the lower bound for the container proposed here is inspired from this result. Nevertheless, they do not propose the computation of the subadditive closure as we offer to do here. Moreover, in the definition of our container, a canonical representation is provided in order to minimize the pessimism of its lower bound.

This section will be organized as follows. In Section 3.2, the classification of functions is completed by affine functions, since they will be used to frame functions of $\mathscr{F}_{cp}$. The Legendre–Fenchel transform $\mathscr{L}$ is defined in Section 3.3 and in Section 3.4, two operators of approximation are defined to approximate an exact function from above and from below. Finally, Section 3.4 will introduce the container we developed as an intersection between the interval of functions $[\underline{f}, \overline{f}]$ and the equivalence class of $\overline{f}$ modulo the Legendre–Fenchel transform $\mathscr{L}$.



(a) A function $f \in \mathscr{F}_{aa}$ (b) Which can be factorized by the inf-convolution $\Delta_{\tau_f}^{\kappa_f} * g$

Fig. 4 An ultimately affine function $f \in \mathscr{F}_{aa}$ and its factorization: $f = \Delta_{\tau_f}^{\kappa_f} * g$

3.2 Affine and ultimately affine functions

First of all, in order to build the container of functions of $\mathscr{F}_{cp}$, the classification of functions needs to be completed. Until now, only piecewise constant functions have been considered. Piecewise affine functions are now necessary. They are still defined from $\mathbb{R}$ to $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$.

Definition 11 (Set $\mathscr{F}_{aa}$) A function $f \in \mathscr{F}_{aa}$ (see Fig. 4a) is a function that is constant on the interval $]-\infty, \tau_f]$, and:

- piecewise affine, i.e. composed of a finite number of intervals on which the function is affine[11],
- nondecreasing,
- ultimately affine from a time denoted T_{a_f}: $\exists T_{a_f} \geq \tau_f$ and $\exists \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ such that $\forall t \geq T_{a_f},\ f(t) = \alpha t + \beta$,

on $]\tau_f, +\infty[$.

Property 4 (Asymptotic slope σ) Let f be a function of $\mathscr{F}_{aa}$, its asymptotic slope is defined by the one of its ultimately affine parts: $\sigma(f) = \alpha$.

Property 5 (Factorization of a function $f \in \mathscr{F}_{aa}$) A function $f \in \mathscr{F}_{aa}$ can be seen as the following inf-convolution illustrated by Fig. 4b:

$$f = \Delta_{\tau_f}^{\kappa_f} * g,$$

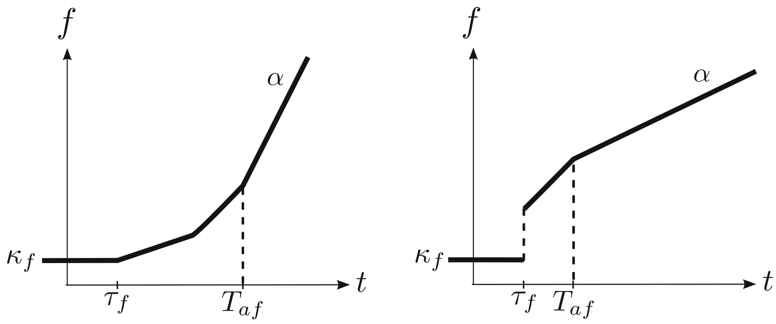
where κ_f, τ_f and $g \in \mathscr{F}_{aa}$ are given such that:

$$\begin{cases} \kappa_f = \lim\limits_{t \to -\infty} f(t), \\ \tau_f = \max\{\, t \mid f(t) = \kappa_f\}, \end{cases} \quad \text{and} \quad g(t) = f(t - \tau_f) - \kappa_f,$$

so $g(0) = 0$ and $\sigma(g) = \sigma(f)$. It means that a function $f \in \mathscr{F}_{aa}$ can always be seen as a function g (with $g(0) = 0$) shifted by an elementary function $\Delta_{\tau_f}^{\kappa_f}$: κ_f is the event shift and τ_f is the time shift.

[11]The affine parts are linked by *non-differentiable points*.

Fig. 5 Examples of ultimately affine functions



(a) A convex function $f \in \mathscr{F}_{\text{acx}} \subset \mathscr{F}_{\text{aa}}$

(b) A function $f \in \mathscr{F}_{\text{acv}} \subset \mathscr{F}_{\text{aa}}$ that is concave on $]\tau_f, +\infty[$

Definition 12 (Set $\mathscr{F}_{\text{acx}}$) A function $f \in \mathscr{F}_{\text{acx}}$ (see Fig. 5a) is a function of $\mathscr{F}_{\text{aa}}$ that is in addition convex[12].

Definition 13 (Set $\mathscr{F}_{\text{acv}}$) A function $f \in \mathscr{F}_{\text{acv}}$ (see Fig. 5b) is a function of $\mathscr{F}_{\text{aa}}$ that is in addition concave[13] on $]\tau_f, +\infty[$.

Remark 6 These kinds of concave functions can also be found in Schmitt and Zdarsky (2006) under the name *almost concave functions* or in Lenzini et al. (2006) where they are called *pseudoaffine* curves.

Definition 14 (Extremal point) In convex and concave functions, a non-differentiable point is called an *extremal point*.

Proposition 1 (Factorization of $f \in \mathscr{F}_{\text{acv}}$) *A function $f \in \mathscr{F}_{\text{acv}}$ can be factorized as follows (see Fig. 6):*

$$f = \Delta_{\tau_f}^{\kappa_f} * \Gamma_f, \tag{7}$$

where $\Gamma_f \in \mathscr{F}_{\text{acv}}$, $\Gamma_f(0) = 0$ and $\sigma(\Gamma_f) = \sigma(f)$.

Proof According to Property 5, $f = \Delta_{\tau_f}^{\kappa_f} * g$ with $g \in \mathscr{F}_{\text{acv}}$ and $g(0) = 0$. So $g = \Gamma_f$. □

The function Γ_f is the concave part of f shifted in the plane by the elementary function $\Delta_{\tau_f}^{\kappa_f}$. The following theorem about functions denoted Γ provides some useful equalities to deal with operations $*$ and $\star$ in the next section.

Theorem 3 (Le Boudec and Thiran 2001, Theorems 3.1.3, 3.1.6 and 3.1.9) *Let Γ_1 and Γ_2 be two functions of $\mathscr{F}_{\text{acv}}$ for which $\Gamma_1(0) = \Gamma_2(0) = 0$ (see Proposition 1), then:*

$$\Gamma_1 * \Gamma_2 = \Gamma_1 \oplus \Gamma_2, \tag{8}$$

[12]The epigraph of a convex function is a convex set.

[13]The hypograph of a concave function is a convex set.

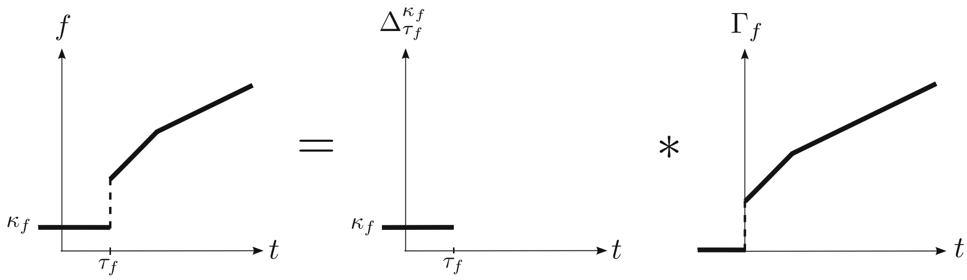


Fig. 6 Factorization of a concave function $f \in \mathscr{F}_{\text{acv}}$: $f = \Delta_{\tau_f}^{\kappa_f} * \Gamma_f$

with $\Gamma_1 \oplus \Gamma_2 \in \mathscr{F}_{\text{acv}}$ *and* $(\Gamma_1 \oplus \Gamma_2)(0) = 0$. *Moreover:*

$$\Gamma_1 = \Gamma_1^\star, \tag{9}$$

that is Γ_1 *is closed for the subadditive closure operation.*

3.3 Legendre–Fenchel transform

The construction of the container principally relies on the Legendre–Fenchel transform. This transform is well known in convex analysis (Rockafellar 1997), and already used in Network Calculus literature to efficiently compute performance bounds (Fidler and Recker 2006) or in the context of formal series of the idempotent semiring $\mathscr{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[\![\gamma, \delta]\!]$ (Cohen et al. 1989a; Burkard and Butkovič 2003). In this paper, this transform is applied to the set $\mathscr{F}_{cp}$ in order to reduce the computation complexity of operations involving these functions.

Definition 15 (Legendre–Fenchel transform $\mathscr{L}$) The Legendre–Fenchel transform applied to $f \in \mathscr{F}_{cp}$ is the mapping $\mathscr{L}$ defined from $(\mathscr{F}_{cp}, \oplus, *)$ to the idempotent semiring of convex functions[14] denoted $(\mathscr{D}_{convex}, \max, +)$ by:

$$\mathscr{L}(f)(s) \triangleq \sup_t \{s.t - f(t)\}.$$

Mapping $\mathscr{L}$ is a non injective homomorphism from $(\mathscr{F}_{cp}, \oplus, *)$ to $(\mathscr{D}_{convex}, \max, +)$, that is $\forall f, g \in (\mathscr{F}_{cp}, \oplus, *)$:

$$\mathscr{L}(f \oplus g) = \max(\mathscr{L}(f), \mathscr{L}(g)),$$
$$\mathscr{L}(f * g) = \mathscr{L}(f) + \mathscr{L}(g).$$

Definition 16 (Idempotent semiring $\mathscr{F}_{cp_{/\mathscr{L}}}$) Let us consider the following equivalence relation $\forall f, g \in \mathscr{F}_{cp}$:

$$\mathscr{L}(f) = \mathscr{L}(g) \quad \Leftrightarrow \quad f \overset{\mathscr{L}}{\equiv} g,$$

where $\overset{\mathscr{L}}{\equiv}$ is a congruence (see Lemma 2). The quotient of $\mathscr{F}_{cp}$ by $\overset{\mathscr{L}}{\equiv}$ provides an idempotent semiring denoted $\mathscr{F}_{cp_{/\mathscr{L}}}$ (see Lemma 1). An element of $\mathscr{F}_{cp_{/\mathscr{L}}}$ is an

[14] $\mathscr{D}_{convex}$ is the set of convex functions endowed with the pointwise maximum as sum and the pointwise addition as product.

equivalence class modulo $\mathscr{L}$ denoted $[f]_{\mathscr{L}}$ containing all the functions of $\mathscr{F}_{cp}$ that have the same Legendre–Fenchel transform. Operations $\oplus$ and $\otimes$ of $\mathscr{F}_{cp_{/\mathscr{L}}}$ are defined below:

$$[f]_{\mathscr{L}} \oplus [g]_{\mathscr{L}} \triangleq [f \oplus g]_{\mathscr{L}},$$
$$[f]_{\mathscr{L}} \otimes [g]_{\mathscr{L}} \triangleq [f * g]_{\mathscr{L}}.$$

This idempotent semiring $\mathscr{F}_{cp_{/\mathscr{L}}}$ will play a central role for the definition of the convex upper bound of our container. Indeed, the following subsection goes back to the link between the Legendre–Fenchel transform of a function and its convex hull.

3.4 Operators of approximation

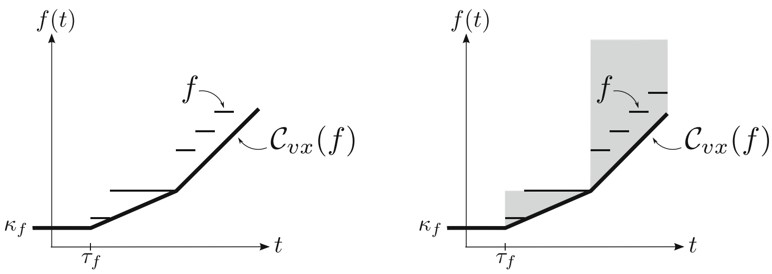
In order to build the container of a function $f \in \mathscr{F}_{cp}$, two operators of approximation are defined and will be used during the computation of the inclusion functions. The former is convex and approximates f from above (according to the $\preccurlyeq$ order), and the latter is concave and approximates f from below. We recall that the order $\preccurlyeq$ is not the natural order of functions but the canonical order on $(\mathscr{F}_{cp}, \oplus, *)$ (see Section 2.2 and Remark 1), that is in accordance with the literature.

Remark 7 In regard with the notation of Property 5 and in order to help facilitate the understanding of this and the next section, the first elementary function $\Delta_{t_0}^{k_0}$ of a function $f = \bigoplus_{i=0}^{+\infty} \Delta_{t_i}^{k_i} \in \mathcal{F}_{cp}$ (see Definition 9), will be denoted $\Delta_{\tau_f}^{\kappa_f}$ in the sequel.

3.4.1 Convex approximation

Definition 17 (Convex hull $\mathscr{C}_{vx}$) Let f be a function of $\mathscr{F}_{cp}$. The convex hull of f is denoted $\mathscr{C}_{vx}(f)$ (also called the convex approximation in this paper) and is the smallest convex function greater than f so $\mathscr{C}_{vx}(f) \succcurlyeq f$ and $\mathscr{C}_{vx}(f) \in \mathscr{F}_{acx}$ (see Fig. 7a).

Property 6 Mapping $\mathscr{C}_{vx}$ is a projector, i.e. $\mathscr{C}_{vx}(f) = \mathscr{C}_{vx}(\mathscr{C}_{vx}(f))$ (see Definition 5). Moreover, the asymptotic slopes of $\mathscr{C}_{vx}(f)$ and f are equal: $\sigma(\mathscr{C}_{vx}(f)) = \sigma(f)$, and the extremal points of $\mathscr{C}_{vx}(f)$ belong to the function f. In particular $\Delta_{\tau_{\mathscr{C}_{vx}(f)}}^{\kappa_{\mathscr{C}_{vx}(f)}} = \Delta_{\tau_f}^{\kappa_f}$.



(a) Convex approximation $\mathscr{C}_{vx}(f) \in \mathscr{F}_{acx}$

(b) Equivalence class $[f]_{\mathscr{L}}$

Fig. 7 Convex approximation of $f \in \mathscr{F}_{cp}$ and its equivalence class modulo the Legendre–Fenchel transform $\mathscr{L}$

Lemma 3 (Baccelli et al. 1992, Theorem 3.38) *Let $\mathscr{C}_{vx}(f)$ and $\mathscr{C}_{vx}(g)$ be the convex hulls of f and $g \in \mathscr{F}_{\mathrm{cp}}$. Functions f and g have the same Legendre–Fenchel transform if, and only if, they have the same convex hull:*

$$\mathscr{L}(f) = \mathscr{L}(g) \quad \Leftrightarrow \quad \mathscr{C}_{vx}(f) = \mathscr{C}_{vx}(g) \quad \Leftrightarrow \quad [f]_{\mathscr{L}} = [g]_{\mathscr{L}}.$$

Property 7 Functions that have the same extremal points and the same asymptotic slope as f belong to the equivalent class $[\ f\ ]_{\mathscr{L}}$ as illustrated in Fig. 7b by the gray zone.

According to Lemma 3, it is then possible to determine the equivalence modulo the Legendre–Fenchel transform $\mathscr{L}$ by using the convex hull. As a consequence, the computations modulo the transform $\mathscr{L}$ are equivalent to the computations modulo the convex hull. Formally, we have $\forall f, g \in \mathscr{F}_{\mathrm{cp}}$:

$$[f]_{\mathscr{L}} \oplus [g]_{\mathscr{L}} = [f \oplus g]_{\mathscr{L}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathscr{C}_{vx}(\mathscr{C}_{vx}(f) \oplus \mathscr{C}_{vx}(g)) = \mathscr{C}_{vx}(f \oplus g), \tag{10}$$

$$[f]_{\mathscr{L}} \otimes [g]_{\mathscr{L}} = [f * g]_{\mathscr{L}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathscr{C}_{vx}(\mathscr{C}_{vx}(f) * \mathscr{C}_{vx}(g)) = \mathscr{C}_{vx}(f * g), \tag{11}$$

$$[f]^{\star}_{\mathscr{L}} = [f^{\star}]_{\mathscr{L}} \quad \Leftrightarrow \quad \mathscr{C}_{vx}(\mathscr{C}_{vx}(f)^{\star}) = \mathscr{C}_{vx}(f^{\star}). \tag{12}$$

Theorem 4 (Baccelli et al. 1992, Theorem 6.19) *Let f be a function of $\mathscr{F}_{\mathrm{cp}}$ and $[f]_{\mathscr{L}}$ be its equivalence class in the idempotent semiring $\mathscr{F}_{\mathrm{cp}/\mathscr{L}}$ (see Definition 16). Function $\mathscr{C}_{vx}(f) \in \mathscr{F}_{\mathrm{acx}}$ is the greatest representative of $[f]_{\mathscr{L}}$, i.e.:*

$$[\,\mathscr{C}_{vx}(f)\,]_{\mathscr{L}} = [f]_{\mathscr{L}} \quad \text{and} \quad \forall g \in [f]_{\mathscr{L}}, \quad g \preccurlyeq \mathscr{C}_{vx}(f).$$

Hence, thanks to Theorem 4, we obtain a method to perform computations on the idempotent semiring $\mathscr{F}_{\mathrm{cp}/\mathscr{L}}$, even if in practice the Legendre–Fenchel transform $\mathscr{L}$ of a function $f \in \mathscr{F}_{\mathrm{cp}}$ will never be explicitly computed. Indeed, each equivalence class of $\mathscr{F}_{\mathrm{cp}/\mathscr{L}}$ has a canonical representative that is the convex hull of the functions of the class. Therefore, if we make the computations modulo the convex hull, we carry out the computations in the quotient dioid $\mathscr{F}_{\mathrm{cp}/\mathscr{L}}$, we simplify the results and we still conserve their equivalence class modulo $\mathscr{L}$.

3.4.2 Concave approximation

First of all, let us recall that a function $f \in \mathscr{F}_{\mathrm{cp}}$ is constant on $]-\infty, \tau_f]$ (see Remark 7) and then nondecreasing piecewise constant on $]\tau_f, +\infty[$. Its concave hull denoted *conc*(f), i.e. the greatest concave function lower than f (according to the order $\preccurlyeq$), is necessarily the function $\varepsilon : t \mapsto +\infty$. Hence, this concave hull is not useful to provide a lower approximation of f.

However, a lower bound of f can be defined as a function of $\mathscr{F}_{\mathrm{acv}}$ that is constant on $]-\infty, \tau_f]$ and concave on $]\tau_f, +\infty[$. This projection in $\mathscr{F}_{\mathrm{acv}}$ is called a concave approximation and corresponds to that defined as an almost concave function in Schmitt and Zdarsky (2006).

Definition 18 (Concave approximation $\mathscr{C}_{cv}$) Let f be a function of $\mathscr{F}_{cp}$. The concave approximation of f illustrated Fig. 8 is denoted $\mathscr{C}_{cv}(f)$ and defined by:

$$\mathscr{C}_{cv}(f)(t) \triangleq \begin{cases} f(t) & \text{for } t \leq \tau_f, \\ conc(f)(t) & \text{for } t > \tau_f, \end{cases}$$

where $\tau_f = \max\{t \mid f(t) = f(-\infty)\}$. So $\mathscr{C}_{cv}(f) \preccurlyeq f$ and $\mathscr{C}_{cv}(f) \in \mathscr{F}_{\text{acv}}$.

Property 8 Mapping $\mathscr{C}_{cv}$ is a projector, *i.e.* $\mathscr{C}_{cv}(f) = \mathscr{C}_{cv}(\mathscr{C}_{cv}(f))$. Moreover, $\sigma(\mathscr{C}_{cv}(f)) = \sigma(f)$ and $\Delta_{\tau_{\mathscr{C}_{cv}(f)}}^{\kappa_{\mathscr{C}_{cv}(f)}} = \Delta_{\tau_f}^{\kappa_f}$.

Remark 8 It must be noted that this concave approximation $\mathscr{C}_{cv}$ is not symmetrical with the convex one $\mathscr{C}_{vx}$. More precisely, the equivalences of Eqs. 10–12 are not verified. However, $\mathscr{C}_{cv}$ is an isotone mapping so the following properties are satisfied. Let f and g be two functions of $\mathscr{F}_{cp}$:

$$\begin{cases} \mathscr{C}_{cv}(f) \preccurlyeq f \\ \mathscr{C}_{cv}(g) \preccurlyeq g \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} \mathscr{C}_{cv}(f) \oplus \mathscr{C}_{cv}(g) \preccurlyeq f \oplus g, \\ \mathscr{C}_{cv}(f) * \mathscr{C}_{cv}(g) \preccurlyeq f * g, \\ \mathscr{C}_{cv}(f)^{\star} \preccurlyeq f^{\star}, \end{cases}$$

and

$$\mathscr{C}_{cv}(\mathscr{C}_{cv}(f) \oplus \mathscr{C}_{cv}(g)) \preccurlyeq \mathscr{C}_{cv}(f \oplus g),$$
$$\mathscr{C}_{cv}(\mathscr{C}_{cv}(f) * \mathscr{C}_{cv}(g)) \preccurlyeq \mathscr{C}_{cv}(f * g),$$
$$\mathscr{C}_{cv}(\mathscr{C}_{cv}(f)^{\star}) \preccurlyeq \mathscr{C}_{cv}(f^{\star}).$$

3.5 Definition of the container

The objective of this section is to build an approximation of ultimately pseudo-periodic functions of $\mathscr{F}_{cp}$, such that the computations on the approximated function are more efficient than on the original ones. In order to do this, the container defined below is an interval of functions associated with an equivalence class modulo $\mathscr{L}$.

Definition 19 (Set **F** of containers) The set of containers considered in the sequel is the set denoted **F** and defined by:

$$\mathbf{F} \triangleq \{ [\, \underline{f}\, ,\ \overline{f}\,]_{\mathscr{L}} \mid \underline{f} \in \mathscr{F}_{\text{acv}}\, ,\ \overline{f} \in \mathscr{F}_{\text{acx}}\, ,\ \sigma(\underline{f}) = \sigma(\overline{f}) \},$$

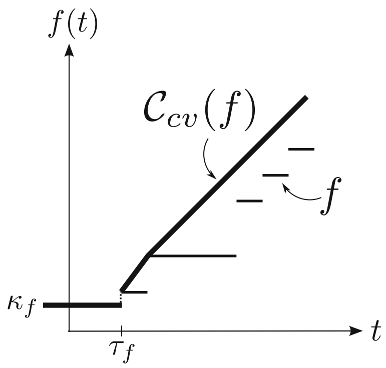
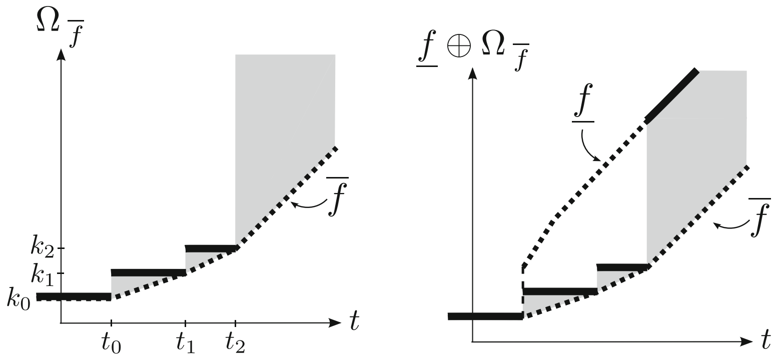


Fig. 8 Concave approximation of $f \in \mathscr{F}_{\text{cp}}$: $\mathscr{C}_{cv}(f) \in \mathscr{F}_{\text{acv}}$

Fig. 9 Role of the lower bound $\Omega_{\overline{f}}$ during the construction of a container $\mathbf{f} = [\, \underline{f}\,,\ \overline{f}\,]_{\mathscr{L}} \in \mathbf{F}$.



(a) Lower bound $\Omega_{\overline{f}}$ of the equivalent class $[\,\overline{f}\,]_{\mathscr{L}}$

(b) Smallest element $\underline{f} \oplus \Omega_{\overline{f}}$ of the container

with $[\, \underline{f}\,,\ \overline{f}\,]_{\mathscr{L}}$ the subset defined as follows:

$$
\begin{aligned}
[\, \underline{f}\,,\ \overline{f}\,]_{\mathscr{L}} &\triangleq [\, \underline{f}\,,\ \overline{f}\,] \cap [\,\overline{f}\,]_{\mathscr{L}}, \\
&= \{\, f \mid \underline{f} \preccurlyeq f \preccurlyeq \overline{f}\,,\ [f]_{\mathscr{L}} = [\,\overline{f}\,]_{\mathscr{L}} \}.
\end{aligned}
$$

So, a container of $\mathbf{F}$ is a subset of an interval $[\, \underline{f}\,,\ \overline{f}\,]$, the bounds $\underline{f}$ and $\overline{f}$ of which are respectively concave[15] and convex. The elements of $[\, \underline{f}, \overline{f}\,]_{\mathscr{L}}$ are equivalent to $\overline{f}$ modulo the Legendre–Fenchel transform $\mathscr{L}$. This means that $\forall f \in [\, \underline{f}, \overline{f}\,]_{\mathscr{L}}$, $\overline{f} = \mathscr{C}_{vx}(f)$ (with $\mathscr{C}_{vx}$ the convex approximation given in Definition 17).

3.5.1 Canonical representation of a container of F

Among the containers of set $\mathbf{F}$, we propose to define a canonical one. Its definition is based on a lower bound of the equivalence class $[\,\overline{f}\,]_{\mathscr{L}}$. Hence we first introduce this lower bound.

Definition 20 (Lower bound $\Omega_{\overline{f}}$) Let $[\,\overline{f}\,]_{\mathscr{L}}$ be an equivalence class of the semiring $\mathscr{F}_{\mathrm{cp}\,/\,\mathscr{L}}$ and $\overline{f} \in \mathscr{F}_{\mathrm{acx}}$ be its greatest element, that is $\overline{f} = \mathscr{C}_{vx}(\overline{f})$ (see Theorem 4). Function $\Omega_{\overline{f}} \in \mathscr{F}_{\mathrm{c}}$ defined below is a lower bound of $[\,\overline{f}\,]_{\mathscr{L}}$:

$$
\Omega_{\overline{f}} \triangleq \bigoplus_{i=0}^{n} \Delta_{t_i}^{k_i} \quad \text{and} \quad \forall t > t_n,\ \Omega_{\overline{f}}(t) = +\infty, \tag{13}
$$

where pairs (t_i, k_i) are the coordinates of the n extremal points of $\overline{f}$. Therefore:

$$
\forall f \in [\, \underline{f}\,,\ \overline{f}\,]_{\mathscr{L}},\ f \succcurlyeq \Omega_{\overline{f}} \quad \text{and} \quad \Delta_{t_0}^{k_0} = \Delta_{\tau_{\overline{f}}}^{\kappa_{\overline{f}}}.
$$

This lower bound is illustrated in Fig. 9a in which the gray zone represents the equivalent class $[\,\overline{f}\,]_{\mathscr{L}}$.

[15] On $]\tau_f, +\infty[$.

Remark 9 Even if function $\Omega_{\overline{f}}$ is a lower bound of $[\ \overline{f}\ ]_{\mathscr{L}}$, it must be noted that it does not have the same asymptotic slope than $\overline{f}$, indeed according to Eq. 13 the asymptotic slope of $\Omega_{\overline{f}}$ is infinite. Therefore $\Omega_{\overline{f}}$ does not belong to equivalence class $[\ \overline{f}\ ]_{\mathscr{L}}$ (see Property 7 and Theorem 4).

This lower bound $\Omega_{\overline{f}}$ leads to the following implication: if $f \in [\ \underline{f}\ ,\ \overline{f}\ ]_{\mathscr{L}}$, then $f \succcurlyeq \underline{f} \oplus \Omega_{\overline{f}}$. Therefore, as it is illustrated in Fig. 9b, $\underline{f} \oplus \Omega_{\overline{f}}$ is the smallest element of the container $[\ \underline{f}\ ,\ \overline{f}\ ]_{\mathscr{L}}$, and interval $[\ \underline{f} \oplus \Omega_{\overline{f}}\ ,\ \overline{f}\ ]$ (the gray zone in Fig. 9b) contains the function f. Consequently, according to Definition 19, a same container of $\mathbf{F}$ can be represented by different intervals, as long as $\underline{f}_1 \oplus \Omega_{\overline{f}} = \underline{f}_2 \oplus \Omega_{\overline{f}}$. In other words, one can have (see Fig. 10):

$$[\ \underline{f}_1\ ,\ \overline{f}\ ] \neq [\ \underline{f}_2\ ,\ \overline{f}\ ] \quad \text{while} \quad [\ \underline{f}_1\ ,\ \overline{f}\ ]_{\mathscr{L}} = [\ \underline{f}_2\ ,\ \overline{f}\ ]_{\mathscr{L}}.$$

In order to avoid such ambiguities, a canonical representation for these containers is defined by doing the concave approximation of $\underline{f} \oplus \Omega_{\overline{f}}$.

Definition 21 (Canonical representation of a container) The canonical representation of a container $\mathbf{f} = [\ \underline{f}\ ,\ \overline{f}\ ]_{\mathscr{L}} \in \mathbf{F}$ is written as follows:

$$[\ \mathscr{C}_{cv}\big(\underline{f} \oplus \Omega_{\overline{f}}\big)\ ,\ \overline{f}\ ]_{\mathscr{L}} = [\ \underline{f}'\ ,\ \overline{f}\ ]_{\mathscr{L}},$$

with $\Delta_{\tau_{\underline{f}'}}^{\kappa_{\underline{f}'}} = \Delta_{\tau_{\overline{f}}}^{\kappa_{\overline{f}}}$, and $\mathscr{C}_{cv}$ the concave approximation given in Definition 18. In Fig. 10, this canonical representation is given by the container $[\ \underline{f}_3\ ,\ \overline{f}\ ]_{\mathscr{L}}$ since $\underline{f}_3 = \mathscr{C}_{cv}\big(\underline{f}_1 \oplus \Omega_{\overline{f}}\big) = \mathscr{C}_{cv}\big(\underline{f}_2 \oplus \Omega_{\overline{f}}\big)$.

Remark 10 This canonical representation will also be the one chosen for the software representation. Indeed, in addition to offering the advantage of representing unambiguously a container of $\mathbf{F}$, it also allows useless points of $\underline{f}$ to be removed. In the example of Fig. 10, the points of $\underline{f}_1$ and $\underline{f}_2$ located below $\underline{f}_3$ can so be removed in order to keep only the canonical representation $[\ \underline{f}_3\ ,\ \overline{f}\ ]_{\mathscr{L}}$.

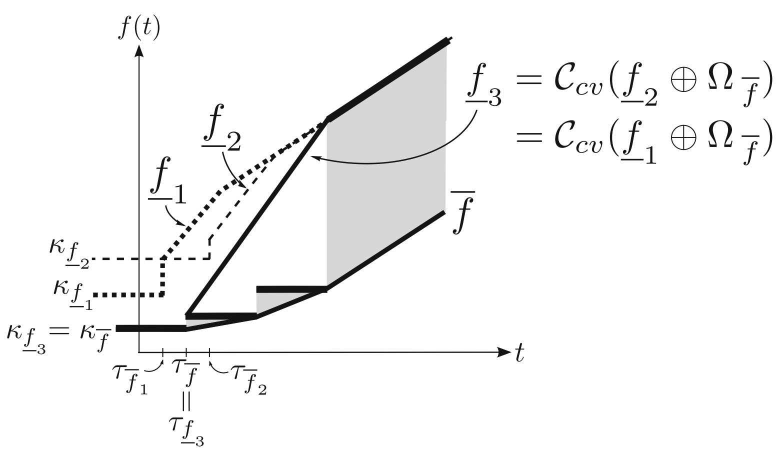
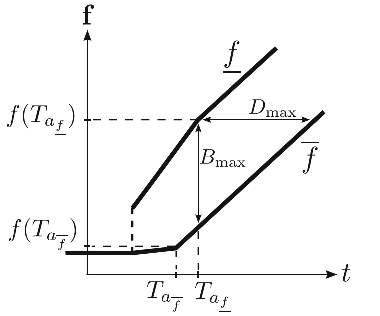
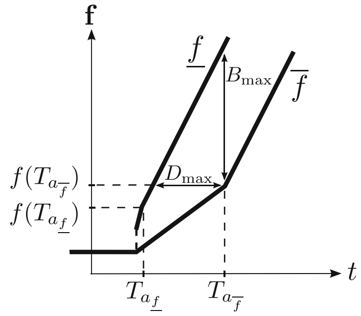


Fig. 10 Canonical representation $[\ \underline{f}_3\ ,\ \overline{f}\ ]_{\mathscr{L}}$ of the identical containers $[\ \underline{f}_1\ ,\ \overline{f}\ ]_{\mathscr{L}}$ and $[\ \underline{f}_2\ ,\ \overline{f}\ ]_{\mathscr{L}}$



(a) Case $\underline{f}(T_{a_{\underline{f}}}) > \overline{f}(T_{a_{\overline{f}}})$ and $\max\{T_{a_{\underline{f}}}, T_{a_{\overline{f}}}\} = T_{a_{\underline{f}}}$



(b) Case $\underline{f}(T_{a_{\underline{f}}}) \leq \overline{f}(T_{a_{\overline{f}}})$ and $\max\{T_{a_{\underline{f}}}, T_{a_{\overline{f}}}\} = T_{a_{\overline{f}}}$

Fig. 11 Maximal uncertainty $\Sigma_{\mathbf{f}} = \{\ D_{\max}\ ,\ B_{\max}\ \}$ of a container $\mathbf{f} \in \mathbf{F}$

3.5.2 *Maximal uncertainty of a container of* $\mathbf{F}$

Thanks to the canonical form of a container, $\mathbf{f} = [\ \underline{f}\ ,\ \overline{f}\ ]_{\mathscr{L}} \in \mathbf{F}$ for which $\Delta_{\tau_{\underline{f}}}^{\kappa_{\underline{f}}} = \Delta_{\tau_{\overline{f}}}^{\kappa_{\overline{f}}}$ and $\sigma(\underline{f}) = \sigma(\overline{f})$ (see Definitions 21 and 19), the maximal distances in time and event domains between $\underline{f}$ and $\overline{f}$ are finite and the loss of precision due to approximations is bounded. This uncertainty is defined below.

Definition 22 (Maximal uncertainty $\Sigma_{\mathbf{f}}$ of a container $\mathbf{f}$) Let $\mathbf{f} = [\ \underline{f}\ ,\ \overline{f}\ ]_{\mathscr{L}}$ be a container of $\mathbf{F}$. Its maximal uncertainty denoted $\Sigma_{\mathbf{f}}$ is defined as follows:

$$\Sigma_{\mathbf{f}} = \{\ D_{\max}\ ,\ B_{\max}\ \},$$

where $D_{\max}$ and $B_{\max}$ (see Fig. 11) are respectively called the *delay* and the *backlog* of the container[16]. The former element of $\Sigma_{\mathbf{f}}$ corresponds to the maximal distance between $\underline{f}$ and $\overline{f}$ in the time domain:

$$D_{\max} \triangleq \inf_{\tau \geq 0}\{\tau \mid \underline{f}(t_0) \leq \overline{f}(t_0 + \tau)\} \quad \text{where} \quad t_0 = \begin{cases} T_{a_{\underline{f}}} & \text{if } \underline{f}(T_{a_{\underline{f}}}) > \overline{f}(T_{a_{\overline{f}}}), \\ T_{a_{\overline{f}}} & \text{otherwise.} \end{cases}$$

The latter element corresponds to the maximal distance between $\underline{f}$ and $\overline{f}$ in the event domain:

$$B_{\max} \triangleq \underline{f}(t_0) - \overline{f}(t_0) \quad \text{where} \quad t_0 = \max\{T_{a_{\underline{f}}}, T_{a_{\overline{f}}}\}.$$

These computations, according to Bouillard et al. (2007, Lemmas 3 et 4), are quite simple because of the convex characteristics of functions $\underline{f}$ and $\overline{f}$. Indeed, since the bounds $\underline{f}$ and $\overline{f}$ are ultimately affine from $T_{a_{\underline{f}}}$ and $T_{a_{\overline{f}}}$ (see Definition 11), and with identical asymptotic slope, it is enough to know where are their last points before their ultimately affine parts i.e. $(T_{a_{\underline{f}}}, \underline{f}(T_{a_{\underline{f}}}))$ and $(T_{a_{\overline{f}}}, \overline{f}(T_{a_{\overline{f}}}))$, and to compare the obtained coordinates. So, the maximal uncertainty $\Sigma_{\mathbf{f}}$ can be computed from these points as illustrated in Fig. 11.

[16]These designations come from the Network Calculus.

4 Operations between containers: inclusion functions

In this section, we consider operations between the containers of **F** (see Definition 19). These operations between two elements **f** and **g** $\in$ **F** are monotonic, nondecreasing operations $\diamond \in \{\oplus, *, ^\star\}$, and are defined in Section 3.1 by:

$$[\, \underline{f} \diamond \underline{g}\, ,\ \overline{f} \diamond \overline{g}\,].$$

Unfortunately, **F** is not closed for these operations. Hence, we will use inclusion functions that are internals to **F**, as in the set membership approach (Moore 1979; Jaulin et al. 2001).

Definition 23 (Inclusion functions of operators $\{\oplus, *, ^\star\}$) Let $\mathbf{f} = [\, \underline{f}\, ,\ \overline{f}\,]_{\mathscr{L}}$ and $\mathbf{g} = [\, \underline{g}\, ,\ \overline{g}\,]_{\mathscr{L}}$ be two containers belonging to **F** and $\diamond \in \{\oplus, *, ^\star\}$ be a set of operations. Inclusion functions of these operators for containers of **F** denoted:

$$[\diamond] \in \{[\oplus], [*], ^{[\star]}\} \quad \text{are such that} \quad \begin{cases} \mathbf{f}[\diamond]\mathbf{g} \supset \mathbf{f} \diamond \mathbf{g}, \\ \mathbf{f}[\diamond]\mathbf{g} \in \mathbf{F}. \end{cases} \tag{14}$$

In order to ensure condition $\mathbf{f}[\diamond]\mathbf{g} \in \mathbf{F}$ and in particular for functions $[\oplus]$ and $^{[\star]}$, the set $\mathbf{f} \diamond \mathbf{g}$ will be upper and lower rounded by the convex and concave approximations $\mathscr{C}_{vx}$ and $\mathscr{C}_{cv}$. These approximations are interesting since they lead to operations having a linear or quasi-linear complexity as it will be shown in the sequel.

Moreover, depending on the needs of operations, the canonical form of container $[\mathscr{C}_{cv}\big(\underline{f} \oplus \Omega_{\overline{f}}\big)\ ,\ \overline{f}]_{\mathscr{L}}$ (see Definition 21) will be used for functions $[\oplus]$ and $[*]$, whereas for function $^{[\star]}$, the interval without the concave approximation $[\, \underline{f} \oplus \Omega_{\overline{f}}\, ,\ \overline{f}]$ will be picked. This choice is relevant in order to obtain in all cases a weak level of complexity.

4.1 Convex and concave approximations $\mathscr{C}_{vx}$ and $\mathscr{C}_{cv}$

Firstly, the complexity of the algorithm giving the convex and concave approximations of a function $f \in \mathscr{F}_{\text{aa}}$ is proposed below.

Proposition 2 (Algorithmic complexity of $\mathscr{C}_{vx}$ and $\mathscr{C}_{cv}$) *Let N_f (respectively N_g) be the number of non-differentiable points of f (respectively g) in $\mathscr{F}_{\text{aa}}$. The computation of $\mathscr{C}_{vx}(f)$ (respectively $\mathscr{C}_{cv}(g)$) is of linear complexity, namely $\mathscr{O}(N_f)$ (respectively $\mathscr{O}(N_g)$).*

Proof Convex and concave approximations rely on known algorithms of convex hull computation in the computational geometry (Graham 1972). In the worst case, only two scans of the list of non-differentiable points are required. □

Remark 11 According to Definitions 18 and 17, let us recall that:

- $\mathscr{C}_{cv}(f) \in \mathscr{F}_{\text{acv}}$, $\mathscr{C}_{cv}(f) \preccurlyeq f$, $\sigma(\mathscr{C}_{cv}(f)) = \sigma(f)$ and $\Delta_{\tau_{\mathscr{C}_{cv}(f)}}^{\kappa_{\mathscr{C}_{cv}(f)}} = \Delta_{\tau_f}^{\kappa_f}$,
- $\mathscr{C}_{vx}(f) \in \mathscr{F}_{\text{acx}}$, $\mathscr{C}_{vx}(f) \succcurlyeq f$, $\sigma(\mathscr{C}_{vx}(f)) = \sigma(f)$ and $\Delta_{\tau_{\mathscr{C}_{vx}(f)}}^{\kappa_{\mathscr{C}_{vx}(f)}} = \Delta_{\tau_f}^{\kappa_f}$,
- $\mathscr{C}_{cv}$ and $\mathscr{C}_{vx}$ are projectors.

By the way, these projections can be applied to either functions of $\mathscr{F}_{cp}$ or functions of $\mathscr{F}_{aa}$.

4.2 Inclusion function of the sum: $[\oplus]$

Prior to studying inclusion function $[\oplus]$, it must be remembered that operator $\oplus$ is order-preserving, i.e. $f \preccurlyeq g \Rightarrow a \oplus f \preccurlyeq a \oplus g$ and as a consequence $\underline{f} \oplus \underline{g} \preccurlyeq \overline{f} \oplus \overline{g}$.

Proposition 3 (Inclusion function $[\oplus]$) *Let* $\mathbf{f} = [\ \underline{f}\ ,\ \overline{f}\ ]_{\mathscr{L}}$ *and* $\mathbf{g} = [\ \underline{g}\ ,\ \overline{g}\ ]_{\mathscr{L}}$ *be two containers of* $\mathbf{F}$ *given in their canonical forms. The operation denoted* $[\oplus]$ *and defined by:*

$$\mathbf{f}[\oplus]\mathbf{g} = [\ \underline{\mathbf{f}[\oplus]\mathbf{g}}\ ,\ \overline{\mathbf{f}[\oplus]\mathbf{g}}\ ] \triangleq [\ \mathscr{C}_{cv}(\underline{f} \oplus \underline{g})\ ,\ \mathscr{C}_{vx}(\overline{f} \oplus \overline{g})\ ]_{\mathscr{L}},$$

is an inclusion function for the sum $\oplus$*, i.e.:*

$$\forall f \in [\ \underline{f}\ ,\ \overline{f}\ ]_{\mathscr{L}} \text{ and } \forall g \in [\ \underline{g}\ ,\ \overline{g}\ ]_{\mathscr{L}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f \oplus g \ \in \ \mathbf{f}[\oplus]\mathbf{g}, \\ \mathbf{f}[\oplus]\mathbf{g} \ \in \ \mathbf{F}. \end{cases}$$

Proof According to Remark 11 and since $\oplus$ is order-preserving, $\forall f \in [\ \underline{f}\ ,\ \overline{f}\ ]_{\mathscr{L}}$ and $\forall g \in [\ \underline{g}\ ,\ \overline{g}\ ]_{\mathscr{L}}$, $\mathscr{C}_{cv}(\underline{f} \oplus \underline{g}) \preccurlyeq f \oplus g \preccurlyeq \mathscr{C}_{vx}(\overline{f} \oplus \overline{g})$, and projections $\mathscr{C}_{cv}(\underline{f} \oplus \underline{g})$ and $\mathscr{C}_{vx}(\overline{f} \oplus \overline{g})$ respectively belong to the sets $\mathscr{F}_{\mathrm{acv}}$ and $\mathscr{F}_{\mathrm{acx}}$. Then, since $\sigma(\underline{f}) = \sigma(\overline{f})$ and $\sigma(\underline{g}) = \sigma(\overline{g})$, that the sum $\oplus$ is the minimum operation, and that $\sigma(\mathscr{C}_{cv}(\underline{f} \oplus \underline{g})) = \sigma(\underline{f} \oplus \underline{g})$ (*ibid* for $\overline{f}$, $\overline{g}$ and $\mathscr{C}_{vx}$), then $\sigma(\mathscr{C}_{cv}(\underline{f} \oplus \underline{g})) = \min(\sigma(\underline{f}), \sigma(\underline{g})) = \min(\sigma(\overline{f}), \sigma(\overline{g})) = \sigma(\mathscr{C}_{vx}(\overline{f} \oplus \overline{g}))$. □

This inclusion function $[\oplus]$ does not necessarily provide a canonical result. This requires the concave approximation of $(\underline{\mathbf{f}[\oplus]\mathbf{g}} \oplus \Omega_{\overline{\mathbf{f}[\oplus]\mathbf{g}}})$ and we thus obtain the following container:

$$[\ \mathscr{C}_{cv}(\underline{\mathbf{f}[\oplus]\mathbf{g}} \oplus \Omega_{\overline{\mathbf{f}[\oplus]\mathbf{g}}})\ ,\ \overline{\mathbf{f}[\oplus]\mathbf{g}}\ ]_{\mathscr{L}} = [\ \mathscr{C}_{cv}(\mathscr{C}_{cv}(\underline{f} \oplus \underline{g}) \oplus \Omega_{\mathscr{C}_{vx}(\overline{f} \oplus \overline{g})})\ ,\ \mathscr{C}_{vx}(\overline{f} \oplus \overline{g})\ ]_{\mathscr{L}}.$$

Proposition 4 (Algorithmic complexity of $[\oplus]$) *Let* $N_{\underline{f}}$, $N_{\overline{f}}$, $N_{\underline{g}}$ *and* $N_{\overline{g}}$ *be the number of extremal points of respectively* $\underline{f}$, $\overline{f}$, $\underline{g}$ *and* $\overline{g}$*. The computation of* $\mathbf{f}[\oplus]\mathbf{g}$ *is of linear complexity, namely* $\mathscr{O}(N_{\underline{f}} + N_{\overline{f}} + N_{\underline{g}} + N_{\overline{g}})$.

Proof The minimum of two ultimately affine functions is of linear complexity since it requires in the worst case only one scan of extremal points for each function. Moreover, according to Proposition 2 the complexity of convex and concave approximations is linear. □

4.3 Inclusion function of the inf-convolution: $[*]$

The inf-convolution $*$ is order-preserving, hence $\underline{f} * \underline{g} \preccurlyeq \overline{f} * \overline{g}$.

Proposition 5 *If* $\underline{f}$ *and* $\underline{g} \in \mathscr{F}_{\mathrm{acv}}$*, then* $\underline{f} * \underline{g} \in \mathscr{F}_{\mathrm{acv}}$.

Proof Thanks to the factorization of functions of $\mathscr{F}_{\text{acv}}$:

$$\begin{aligned}
\underline{f} * \underline{g} &= \left(\Delta_{\tau_{\underline{f}}}^{\kappa_{\underline{f}}} * \Gamma_{\underline{f}}\right) * \left(\Delta_{\tau_{\underline{g}}}^{\kappa_{\underline{g}}} * \Gamma_{\underline{g}}\right) && \text{see Eq. 7,}\\
&= \left(\Delta_{\tau_{\underline{f}}}^{\kappa_{\underline{f}}} * \Delta_{\tau_{\underline{g}}}^{\kappa_{\underline{g}}}\right) * \left(\Gamma_{\underline{f}} * \Gamma_{\underline{g}}\right) && \text{see Remark 3,}\\
&= \left(\Delta_{\tau_{\underline{f}}+\tau_{\underline{g}}}^{\kappa_{\underline{f}}+\kappa_{\underline{g}}}\right) * \left(\Gamma_{\underline{f}} \oplus \Gamma_{\underline{g}}\right) && \text{see Eq. 8,} \qquad (15)\\
&= \Delta_{\tau_{\underline{f*g}}}^{\kappa_{\underline{f*g}}} * \Gamma_{\underline{f*g}}.
\end{aligned}$$

According to Theorem 3, the sum of concave functions $\Gamma_{\underline{f}}$ and $\Gamma_{\underline{g}}$ belongs to $\mathscr{F}_{\text{acv}}$. Hence, $\underline{f} * \underline{g}$ is also a function of $\mathscr{F}_{\text{acv}}$ with $\Gamma_{\underline{f*g}} = \Gamma_{\underline{f}} \oplus \Gamma_{\underline{g}}$ and $\Delta_{\tau_{\underline{f*g}}}^{\kappa_{\underline{f*g}}} = \Delta_{\tau_{\underline{f}}+\tau_{\underline{g}}}^{\kappa_{\underline{f}}+\kappa_{\underline{g}}}$. Let us note that a similar result can be found in Schmitt and Zdarsky (2006, Lemma 2) and in Pandit et al. (2006, Theorem 3.2). □

Proposition 6 *If $\overline{f}$ and $\overline{g} \in \mathscr{F}_{\text{acx}}$, then $\overline{f} * \overline{g} \in \mathscr{F}_{\text{acx}}$.*

Proof According to Le Boudec and Thiran (2001, Theorem 3.1.6) and Bouillard et al. (2008, Theorem 5), if a and b are convex functions of $\mathscr{F}_{\text{acx}}$, so is $a * b$. Moreover, the computation of $a * b$ is obtained by putting end-to-end the different linear pieces of a and b, sorted by nondecreasing slopes. □

Proposition 7 (Inclusion function $[*]$) *Let $\mathbf{f} = [\ \underline{f}\ ,\ \overline{f}\ ]_{\mathscr{L}}$ and $\mathbf{g} = [\ \underline{g}\ ,\ \overline{g}\ ]_{\mathscr{L}}$ be two containers of $\mathbf{F}$ given in their canonical forms. The operation denoted $[*]$ and defined by:*

$$\mathbf{f}[*]\mathbf{g} = [\ \underline{\mathbf{f}[*]\mathbf{g}}\ ,\ \overline{\mathbf{f}[*]\mathbf{g}}\ ] \triangleq [\ \underline{f} * \underline{g}\ ,\ \overline{f} * \overline{g}\ ]_{\mathscr{L}},$$

is an inclusion function for the inf-convolution $*$, i.e.:

$$\forall f \in [\ \underline{f}\ ,\ \overline{f}\ ]_{\mathscr{L}} \text{ and } \forall g \in [\ \underline{g}\ ,\ \overline{g}\ ]_{\mathscr{L}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f * g \ \in \ \mathbf{f}[*]\mathbf{g}, \\ \mathbf{f}[*]\mathbf{g} \ \in \ \mathbf{F}. \end{cases}$$

Proof Proof is found firstly thanks to the order-preserving of operator $*$ where $\forall f \in [\ \underline{f}\ ,\ \overline{f}\ ]_{\mathscr{L}}$ and $\forall g \in [\ \underline{g}\ ,\ \overline{g}\ ]_{\mathscr{L}}$: $\underline{f} * \underline{g} \preccurlyeq f * g \preccurlyeq \overline{f} * \overline{g}$; secondly thanks to Propositions 5 and 6 where $\underline{f} * \underline{g} \in \mathscr{F}_{\text{acv}}$ and $\overline{f} * \overline{g} \in \mathscr{F}_{\text{acx}}$. Finally, for the asymptotic slopes $\sigma(\underline{f} * \underline{g})$ and $\sigma(\overline{f} * \overline{g})$:

- thanks to Proposition 1 and to Eq. 15, $\sigma(\underline{f} * \underline{g}) = \sigma(\Gamma_{\underline{f}} \oplus \Gamma_{\underline{g}})$. Since $\Gamma_{\underline{f}} \oplus \Gamma_{\underline{g}} = \min(\Gamma_{\underline{f}}, \Gamma_{\underline{g}})$, that $\sigma(\Gamma_{\underline{f}}) = \sigma(\underline{f})$ and that $\sigma(\Gamma_{\underline{g}}) = \sigma(\underline{g})$, then $\sigma(\underline{f} * \underline{g}) = \min(\sigma(\underline{f}), \sigma(\underline{g}))$,
- thanks to the proof of Proposition 6, the computation of $\overline{f} * \overline{g}$ is obtained by putting end-to-end the different linear pieces of $\overline{f}$ and $\overline{g}$. Since $\overline{f}$ and $\overline{g}$ are ultimately affine, this handling stops when the lowest asymptotic slope between $\overline{f}$ and $\overline{g}$ is reached, i.e. until $\min(\sigma(\overline{f}), \sigma(\overline{g}))$.

Therefore, since $\sigma(\underline{f}) = \sigma(\overline{f})$ and $\sigma(\underline{g}) = \sigma(\overline{g})$, then $\sigma(\underline{f} * \underline{g}) = \min(\sigma(\underline{f}), \sigma(\underline{g})) = \min(\sigma(\overline{f}), \sigma(\overline{g})) = \sigma(\overline{f} * \overline{g})$. □

Again, this inclusion function $[*]$ does not necessarily provide a canonical result. The canonical form of $\mathbf{f}[*]\mathbf{g}$ is given by:

$$[\,\mathscr{C}_{cv}(\underline{\mathbf{f}[*]\mathbf{g}} \oplus \Omega_{\overline{\mathbf{f}[*]\mathbf{g}}})\,,\ \overline{\mathbf{f}[*]\mathbf{g}}\,]_{\mathscr{L}} = [\,\mathscr{C}_{cv}((\underline{f} * \underline{g}) \oplus \Omega_{\overline{f}*\overline{g}})\,,\ \overline{f} * \overline{g}\,]_{\mathscr{L}}.$$

Proposition 8 (Algorithmic complexity of $[*]$) *Let $N_{\underline{f}}$, $N_{\overline{f}}$, $N_{\underline{g}}$ and $N_{\overline{g}}$ be the number of extremal points of respectively $\underline{f}$, $\overline{f}$, $\underline{g}$ and $\overline{g}$. The computation of $\mathbf{f}[*]\mathbf{g}$ is of linear complexity, namely $\mathscr{O}(N_{\underline{f}} + N_{\overline{f}} + N_{\underline{g}} + N_{\overline{g}})$.*

Proof According to the proof of Proposition 6, the computation of $\overline{f} * \overline{g}$ is obtained by putting end-to-end the different linear pieces of $\overline{f}$ and $\overline{g}$, sorted by nondecreasing slopes. Hence, the computation only requires a simple scan of functions[17]. Regarding the lower bound, the inf-convolution is defined as in Eq. 15 by:

$$\underline{f} * \underline{g} = \left(\Delta_{\tau_{\underline{f}}+\tau_{\underline{g}}}^{\kappa_{\underline{f}}+\kappa_{\underline{g}}}\right) * \left(\Gamma_{\underline{f}} \oplus \Gamma_{\underline{g}}\right),$$

it is enough to make the minimum of the concave parts with a linear complexity, and the shift in the plane by the elementary function $\Delta_{\tau_{\underline{f}}+\tau_{\underline{g}}}^{\kappa_{\underline{f}}+\kappa_{\underline{g}}}$ in a constant time, namely in $\mathscr{O}(1)$. □

4.4 Inclusion function of the subadditive closure: $^{[\star]}$

The subadditive closure * is order-preserving, hence $\underline{f}^{\,\star} \preccurlyeq \overline{f}^{\,\star}$.

Lemma 4 (Asymptotic slope of $\mathscr{C}_{vx}(\overline{f}^{\,\star})$) *The asymptotic slope of $\mathscr{C}_{vx}(\overline{f}^{\,\star})$ is given below:*

$$\sigma(\mathscr{C}_{vx}(\overline{f}^{\,\star})) = \min\left(\sigma(\overline{f}), \min_{i=0}^{n}\left(\frac{k_i}{t_i}\right)\right),$$

where pairs (t_i, k_i) are the n extremal points of $\overline{f}$.

Proof Thanks to the characteristics of both the convex approximation and the subadditive closure, function $\mathscr{C}_{vx}(\overline{f}^{\,\star})$ belongs to the set $\mathscr{F}_{\mathrm{acx}}$ with only one extremal point. Hence, according to Property 5, $\mathscr{C}_{vx}(\overline{f}^{\,\star}) = (\Delta_{\tau_{\mathscr{C}_{vx}(\overline{f}^{\,\star})}}^{\kappa_{\mathscr{C}_{vx}(\overline{f}^{\,\star})}}) * g$ where $\kappa_{\mathscr{C}_{vx}(\overline{f}^{\,\star})} = 0$, $\tau_{\mathscr{C}_{vx}(\overline{f}^{\,\star})} = 0$ and g is a half line with $\sigma(\mathscr{C}_{vx}(\overline{f}^{\,\star}))$ as its slope (see Fig. 12), then, the slope of g comes either from the computations k_i/t_i or from $\sigma(\overline{f})$. □

Proposition 9 (Inclusion function $^{[\star]}$) *Let $\mathbf{f} = [\,\underline{f}\,,\ \overline{f}\,]_{\mathscr{L}}$ be a container of* $\mathbf{F}$. *The operation denoted $^{[\star]}$ and defined by:*

$$\mathbf{f}^{[\star]} = [\,\underline{\mathbf{f}^{[\star]}}\,,\ \overline{\mathbf{f}^{[\star]}}\,],$$

[17] The sorting of the function slopes is assumed to be made by the data structure used for their representation.

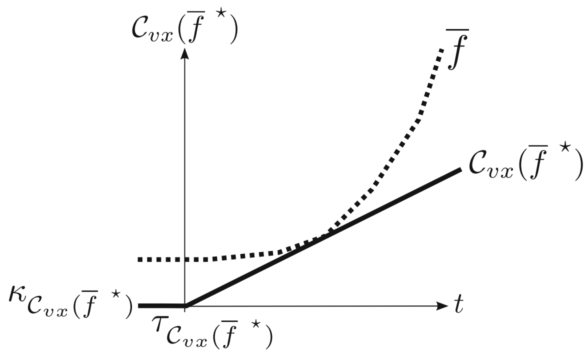


Fig. 12 Upper bound $\overline{f}$ of a container $\mathbf{f} \in \mathbf{F}$ and the convex approximation of its subadditive closure $\mathscr{C}_{vx}(\overline{f}^{\,\star})$

with $\underline{\mathbf{f}^{[\star]}} \triangleq \bigoplus_{i=0}^{n} \mathscr{C}_{cv}(\Delta_{t_i}^{k_i\star}) \oplus \mathscr{C}_{cv}\Big(e \oplus \Delta_{\tau_{\underline{f}}}^{\kappa_{\underline{f}}} * \big(\mathscr{C}_{cv}(\Delta_{\tau_{\underline{f}}}^{\kappa_{\underline{f}}\star}) \oplus \Gamma_{\underline{f}}\big)\Big)$ *and* $\overline{\mathbf{f}^{[\star]}} \triangleq \mathscr{C}_{vx}(\overline{f}^{\,\star})$, *is an inclusion function for the subadditive closure* $\star$, *i.e.:*

$$\forall f \in [\, \underline{f}\,,\ \overline{f}\,]_{\mathscr{L}} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} f^{\star} \in \mathbf{f}^{[\star]}, \\ \mathbf{f}^{[\star]} \in \mathbf{F}, \end{cases}$$

where pairs (t_i, k_i) *of* $\underline{\mathbf{f}^{[\star]}}$ *are the n extremal points of* $\overline{f}$, $\Delta_{\tau_{\underline{f}}}^{\kappa_{\underline{f}}}$ *is the elementary function of* $\underline{f}$ *and* $\Gamma_{\underline{f}}$ *is the concave part of* $\underline{f}$ *(see Proposition 1).*

Proof Firstly, since $\overline{\mathbf{f}^{[\star]}} = \mathscr{C}_{vx}(\overline{f}^{\,\star})$, then $\overline{\mathbf{f}^{[\star]}} \in \mathscr{F}_{acx}$. Moreover, $\forall f \in [\, \underline{f}\,,\ \overline{f}\,]_{\mathscr{L}}$, $f \preccurlyeq \overline{f} \Rightarrow f^{\star} \preccurlyeq \overline{f}^{\,\star} \Rightarrow f^{\star} \preccurlyeq \mathscr{C}_{vx}(f^{\star}) \preccurlyeq \mathscr{C}_{vx}(\overline{f}^{\,\star})$ so $f^{\star} \preccurlyeq \overline{\mathbf{f}^{[\star]}}$.

Secondly, for the computation of $\underline{\mathbf{f}^{[\star]}}$, contrary to inclusion functions $[\oplus]$ and $[*]$, Proposition 9 does not perform the computation of $\mathbf{f}^{[\star]}$ with the canonical form of the container but with the following interval:

$$\mathbf{f} = [\, \underline{f} \oplus \Omega_{\overline{f}}\,,\ \overline{f}\,].$$

Let us recall that $\underline{f} \oplus \Omega_{\overline{f}}$ is the smallest element of the container. Hence, if $f \in [\, \underline{f}\,,\ \overline{f}\,]_{\mathscr{L}}$, then $f \in [\, \underline{f} \oplus \Omega_{\overline{f}}\,,\ \overline{f}\,]$ and $\underline{f} \oplus \Omega_{\overline{f}} \preccurlyeq f \Rightarrow (\underline{f} \oplus \Omega_{\overline{f}})^{\star} \preccurlyeq f^{\star}$. The development of $(\underline{f} \oplus \Omega_{\overline{f}})^{\star}$ is detailed below:

$$\begin{aligned}
(\underline{f} \oplus \Omega_{\overline{f}})^{\star} &= \Big(\Big(\Delta_{\tau_{\underline{f}}}^{\kappa_{\underline{f}}} * \Gamma_{\underline{f}}\Big) \oplus \Big(\bigoplus_{i=0}^{n} \Delta_{t_i}^{k_i}\Big)\Big)^{\star} && \text{see Eqs. 7 and 13,} \\
&= \Big(\Delta_{t_0}^{k_0} \oplus \Delta_{t_1}^{k_1} \oplus \ldots \oplus \Delta_{t_n}^{k_n} \oplus \Delta_{\tau_{\underline{f}}}^{\kappa_{\underline{f}}} * \Gamma_{\underline{f}}\Big)^{\star}, \\
&= \Big(\Delta_{t_0}^{k_0} \oplus \Delta_{t_1}^{k_1} \oplus \ldots \oplus \Delta_{t_n}^{k_n} \oplus \Delta_{\tau_{\underline{f}}}^{\kappa_{\underline{f}}} * \Gamma_{\underline{f}}^{\star}\Big)^{\star} && \text{see Eq. 9,} \\
&= \Delta_{t_0}^{k_0\star} * \Delta_{t_1}^{k_1\star} * \ldots * \Delta_{t_n}^{k_n\star} * \Big(\Delta_{\tau_{\underline{f}}}^{\kappa_{\underline{f}}} * \Gamma_{\underline{f}}^{\star}\Big)^{\star} && \text{see Eq. 3,} \\
&= \Delta_{t_0}^{k_0\star} * \Delta_{t_1}^{k_1\star} * \ldots * \Delta_{t_n}^{k_n\star} * \Big(e \oplus \Delta_{\tau_{\underline{f}}}^{\kappa_{\underline{f}}} * \Delta_{\tau_{\underline{f}}}^{\kappa_{\underline{f}}\star} * \Gamma_{\underline{f}}\Big) && (16) \\
& && \text{see Eqs. 2, 3 and 9.}
\end{aligned}$$

Then, by introducing concave approximations $\mathscr{C}_{cv}$ in Eq. 16, we will approach this computation from below (indeed $\mathscr{C}_{cv}(f) \preccurlyeq f$) that so becomes:

$$\mathscr{C}_{cv}\Big(\Delta_{t_0}^{k_0\star}\Big) * \mathscr{C}_{cv}\Big(\Delta_{t_1}^{k_1\star}\Big) * \ldots * \mathscr{C}_{cv}\Big(\Delta_{t_n}^{k_n\star}\Big) * \mathscr{C}_{cv}\Big(e \oplus \Delta_{\tau_{\underline{f}}}^{\kappa_{\underline{f}}} * \mathscr{C}_{cv}\Big(\Delta_{\tau_{\underline{f}}}^{\kappa_{\underline{f}}\star}\Big) * \Gamma_{\underline{f}}\Big). \quad (17)$$

Furthermore, the following functions are closed for the subadditive closure operation:

- the concave approximation of the subadditive closure of elementary functions: $\mathscr{C}_{cv}(\Delta_{t_i}^{k_i\star})$ (see Fig. 13),
- the concave approximation of a function containing e: $\mathscr{C}_{cv}(e \oplus \Delta_{\tau_{\underline{f}}}^{\kappa_{\underline{f}}} * \mathscr{C}_{cv}(\Delta_{\tau_{\underline{f}}}^{\kappa_{\underline{f}}\star}) * \Gamma_{\underline{f}})$,
- the concave function: $\Gamma_{\underline{f}}$.

So, by applying Theorem 3, the definition of the lower bound $\underline{\mathbf{f}}^{[\star]}$ is given by:

$$\underline{\mathbf{f}}^{[\star]} \triangleq \mathscr{C}_{cv}\left(\Delta_{t_0}^{k_0\star}\right) \oplus \mathscr{C}_{cv}\left(\Delta_{t_1}^{k_1\star}\right) \oplus \ldots \oplus \mathscr{C}_{cv}\left(\Delta_{t_n}^{k_n\star}\right) \oplus \mathscr{C}_{cv}\left(e \oplus \Delta_{\tau_{\underline{f}}}^{\kappa_{\underline{f}}} * \left(\mathscr{C}_{cv}\left(\Delta_{\tau_{\underline{f}}}^{\kappa_{\underline{f}}\star}\right) \oplus \Gamma_{\underline{f}}\right)\right),$$

$$= \bigoplus_{i=0}^{n} \mathscr{C}_{cv}\left(\Delta_{t_i}^{k_i\star}\right) \oplus \mathscr{C}_{cv}\left(e \oplus \Delta_{\tau_{\underline{f}}}^{\kappa_{\underline{f}}} * \left(\mathscr{C}_{cv}\left(\Delta_{\tau_{\underline{f}}}^{\kappa_{\underline{f}}\star}\right) \oplus \Gamma_{\underline{f}}\right)\right). \tag{18}$$

Since $(\underline{f} \oplus \Omega_{\overline{f}})^\star \preccurlyeq f^\star$ and since the concave approximations applied to $(\underline{f} \oplus \Omega_{\overline{f}})^\star$ approximate the functions from below ($\mathscr{C}_{cv}(f) \preccurlyeq f$), then $\underline{\mathbf{f}}^{[\star]} \preccurlyeq (\underline{f} \oplus \Omega_{\overline{f}})^\star \preccurlyeq f^\star$. The function $\underline{\mathbf{f}}^{[\star]}$ is composed of sums of concave functions, therefore $\underline{\mathbf{f}}^{[\star]} \in \mathscr{F}_{acv}$.

Lastly, regarding the asymptotic slopes, let us first deal with the one of $\underline{\mathbf{f}}^{[\star]}$. The subadditive closure of elementary functions $\Delta_{t_i}^{k_i\star}$ (from $\overline{f}$) provides an ultimately pseudo-periodic function of $\mathscr{F}_{cp}$ (see Remark 4) with $\sigma(\Delta_{t_i}^{k_i\star}) = k_i/t_i$ as asymptotic slope. Moreover, according to Cottenceau et al. (1998–2006), let f and g be two functions of $\mathscr{F}_{cp}$, then $\sigma(f * g) = \min(\sigma(f), \sigma(g))$. Finally, $\sigma(\Gamma_{\underline{f}}) = \sigma(\underline{f}) = \sigma(\overline{f})$ (see Proposition 1 and Definition 19). So, the asymptotic slope of $\underline{\mathbf{f}}^{[\star]}$ is given by:

$$\sigma(\underline{\mathbf{f}}^{[\star]}) = \sigma((\underline{f} \oplus \Omega_{\overline{f}})^\star) = \min\left(\sigma(\overline{f}), \min_{i=0}^{n}\left(\frac{k_i}{t_i}\right)\right),$$

where pairs (t_i, k_i) are the n extremal points of $\overline{f}$. According to Lemma 4, this asymptotic slope is the same as the one of $\overline{\mathbf{f}}^{[\star]}$, i.e. $\sigma(\underline{\mathbf{f}}^{[\star]}) = \sigma(\overline{\mathbf{f}}^{[\star]})$. □

To conclude, the algorithm complexity of the computation of these bounds are given below.

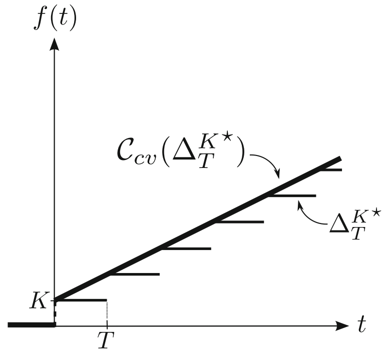


Fig. 13 Concave approximation of the subadditive closure of an elementary function: $\mathscr{C}_{cv}(\Delta_T^{K\star}) \in \mathscr{F}_{acv}$.

Proposition 10 (Algorithmic complexity of $\overline{\mathbf{f}^{[\star]}}$) *Let $N_{\overline{f}}$ be the extremal point number of $\overline{f}$. The computation of $\overline{\mathbf{f}^{[\star]}}$ is of linear complexity, namely $\mathcal{O}(N_{\overline{f}})$.*

Proof According to Lemma 4, the computation of $\overline{\mathbf{f}^{[\star]}}$ only requires some research of its asymptotic slope by checking the $N_{\overline{f}}$ extremal points of $\overline{f}$ and the asymptotic slope $\sigma(\overline{f})$. □

Remark 12 One can see that in the proof of Proposition 9, the computation of $\underline{\mathbf{f}^{[\star]}}$ does not come from Eq. 17 but from Eq. 18 with concave approximations. These approximations are necessary to obtain an efficient algorithm for this inclusion function of the subadditive closure. Indeed, the computation of $(\underline{f} \oplus \Omega_{\overline{f}})^\star$ involves inf-convolutions of ultimately pseudo-periodic functions of $\mathscr{F}_{cp}$ that are very memory- and time-consuming. Formally, let $f = \Delta_{t_0}^{k_0\star}$ and $f' = \Delta_{t_1}^{k_1\star}$ be two subadditive closures of elementary functions with $\sigma(f) < \sigma(f')$. These functions are stair case functions of the set $\mathscr{F}_{cp}$, and since they have different asymptotic slopes, the inf-convolution of f by f' is given by:

$$f * f' = \left(e \oplus \Delta_{t_1}^{k_1} \oplus \ldots \oplus \Delta_{(K-1)t_1}^{(K-1)k_1}\right) * \left(\Delta_{t_0}^{k_0}\right)^\star,$$

with K a positive integer conditioning from which moment function f is permanently above function f' (see Cottenceau et al. (1998–2006) and Le Corronc (2011, Theorem A.28)). The algorithm complexity of this computation is linear depending on the size of K, namely in $\mathcal{O}(K)$, but without conditions on how large the value of K is. The algorithm complexity of this computation can not be controlled and the tentatives undertaken in order to achieve simple and efficient computations become useless by using this method.

Proposition 11 (Algorithmic complexity of $\underline{\mathbf{f}^{[\star]}}$) *Let n be the number of elementary functions $\Delta_{t_i}^{k_i}$ of $(\underline{f} \oplus \Omega\overline{f})$ and $N_{\Gamma_{\underline{f}}}$ be the number of extremal points of $\Gamma_{\underline{f}}$. The computation of $\underline{\mathbf{f}^{[\star]}}$ is in $\mathcal{O}((n + N_{\Gamma_{\underline{f}}})log(n + N_{\Gamma_{\underline{f}}}))$.*

Proof In order to prove this proposition, we will divide Eq. 18 into two parts.

– Firstly, let us consider $\bigoplus_{i=0}^{n} \mathscr{C}_{cv}(\Delta_{t_i}^{k_i\star})$.

According to Proposition 4, the sum of two functions of $\mathscr{F}_{acv}$ is of linear complexity. But, since the computation of $\underline{\mathbf{f}^{[\star]}}$ needs to make the sum of n functions, the complexity will be normally extended to n^2. Nevertheless, thanks to algorithms such as "divide and conquer" where recursion is used in order to break down a problem into sub-problems until these become simple enough to be solved directly, this complexity can be reduced to a quasi-linear problem. Then, if a two by two min of $\mathscr{C}_{cv}(\Delta_{t_i}^{k_i\star})$ is made, this part of the equation is solved in $\mathcal{O}(n\log(n))$.

– Secondly, for the part $\mathscr{C}_{cv}\left(e \oplus \Delta_{\tau_{\underline{f}}}^{\kappa_{\underline{f}}} * \left(\mathscr{C}_{cv}(\Delta_{\tau_{\underline{f}}}^{\kappa_{\underline{f}}\star}) \oplus \Gamma_{\underline{f}}\right)\right)$.

The sum of $\mathscr{C}_{cv}(\Delta_{\tau_{\underline{f}}}^{\kappa_{\underline{f}}\star})$ and $\Gamma_{\underline{f}}$ is made in linear time, namely $\mathscr{O}(N_{\Gamma_{\underline{f}}})$ where $N_{\Gamma_{\underline{f}}}$ is the number of extremal points of $\Gamma_{\underline{f}}$. Then, the shift of $\Delta_{\tau_{\underline{f}}}^{\kappa_{\underline{f}}}$ is in $\mathscr{O}(1)$ as well as the addition of e. The concave approximation does not modify this result since its computation is in linear time (see Proposition 2). So, the complexity of this part of equation is in $\mathscr{O}(N_{\Gamma_{\underline{f}}})$.

Therefore, the complexity of evaluating the expression in Eq. 18 is in $\mathscr{O}((n + N_{\Gamma_{\underline{f}}})log(n + N_{\Gamma_{\underline{f}}}))$. □

To summarize, this section has shown that all inclusion functions $[\diamond] \in \{[\oplus], [*], [^\star]\}$ applied to containers of $\mathbf{F}$ can be computed with a linear complexity for the sum and the inf-convolution, and a quasi-linear complexity for the subadditive closure. Of course, the results of computations also belong to the set $\mathbf{F}$. These advantageous algorithmic complexities are possible only thanks to the convex characteristics of the bounds of the containers.

It is also important to keep in mind that in all these proposed inclusion functions, the upper bound $\overline{f}$ is the canonical representative of the equivalence class $[\ \overline{f}\ ]_{\mathscr{L}}$ of the elements of the container. Therefore, one can see these operations on the containers of $\mathbf{F}$ as operations on the semiring $\mathscr{F}_{\mathrm{cp}}/_{\mathscr{L}}$, for which the handled equivalence classes are restricted: a container $[\ \underline{f}\ ,\ \overline{f}\ ]_{\mathscr{L}}$ only describes the elements of the equivalence class of $[\ \overline{f}\ ]_{\mathscr{L}}$ greater than $\underline{f}$. Finally, since in the container the equivalence class of the exact system is also preserved ($[\ \overline{f}\ ]_{\mathscr{L}} = [f]_{\mathscr{L}}$), some of its important characteristics are kept such as the asymptotic slope and the extremal points of the upper bound that really belong to the exact system.

5 Tests and applications

The container and the algorithms of inclusion functions introduced in this paper have been implemented in a toolbox called *ContainerMinMaxGD*. It is a set of C++ classes, available at the following address: http://www.istia.univ-angers.fr/~euriell.lecorronc/Recherche/softwares.php.

Below, several tests of this toolbox are proposed. They have been carried out by using a computer with the following configuration: 2.9 GB of memory and 4 processors (Intel(R) Core(TM) i7 CPU L640 @ 2.13 GHz).

5.1 Pessimism of computations and gain in memory consumption

In order to evaluate the pessimism introduced by the inclusion functions and the performance according to memory consumption, we consider two containers $\mathbf{S}$ and $\mathbf{R}$ of $\mathbf{F}$. The former is the container built from the exact computation $S = f \diamond g$ (with $f, g \in \mathscr{F}_{cp}$ two exact systems), that is $\mathbf{S} = [\ \mathscr{C}_{cv}(S)\ ,\ \mathscr{C}_{vx}(S)\ ]_{\mathscr{L}}$. The latter contains the result of the computation $\mathbf{R} = \mathbf{f}[\diamond]\mathbf{g}$ (with $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \mathbf{F}$ two containers that respectively contain f and g). So $S \in \mathbf{S} \subset \mathbf{R}$.

A first criterion deals with pessimism due to the approximated computations, in other words, how close are the approximated computations to the real ones? The inclusion functions handle containers that are composed of convex and concave approximations hence, to evaluate the pessimism they introduced, we will compare **S**, the container of S, and **R**, the result of the inclusion functions.

Definition 24 (Pessimism of computations) The pessimism between **S** and **R** is defined by the formula:

$$\frac{\Sigma_{\mathbf{R},\mathbf{S}}}{\Sigma_{\mathbf{R}}},$$

where $\Sigma_{\mathbf{R},\mathbf{S}}$ is the maximal distance between **R** and **S**, and $\Sigma_{\mathbf{R}}$ is the maximal uncertainty of **R**. These quantities are illustrated in Fig. 14.

This indicator can be completed by another criterion about the gain in memory consumption we can do with these approximated computations. Indeed, as shown previously, the complexity of the computations depends of the number of points in the containers. We can thereby observe the difference of the number of points between the exact system S and the container **R** obtained with inclusion functions.

Definition 25 (Ratio of memory consumption saved) The memory consumption saved between S and **R** is evaluated by the following ratio:

$$1 - \frac{N_{\mathbf{R}}}{N_S},$$

where $N_{\mathbf{R}}$ is the number of points of the container **R**, that is the number of extremal points of $\underline{R}$ and $\overline{R}$, and N_S is the number of points of $S = f \diamond g$, this being the number of its elementary functions until the periodic part plus the number of points necessary for one periodicity has been reached. These quantities are also illustrated in Fig. 14, with circles for the points of S (the last two circle points are for the periodicity in this example) and triangles for the points of **R**. In this case, the ratio is equal to $1 - 4/8 = 50$ %.

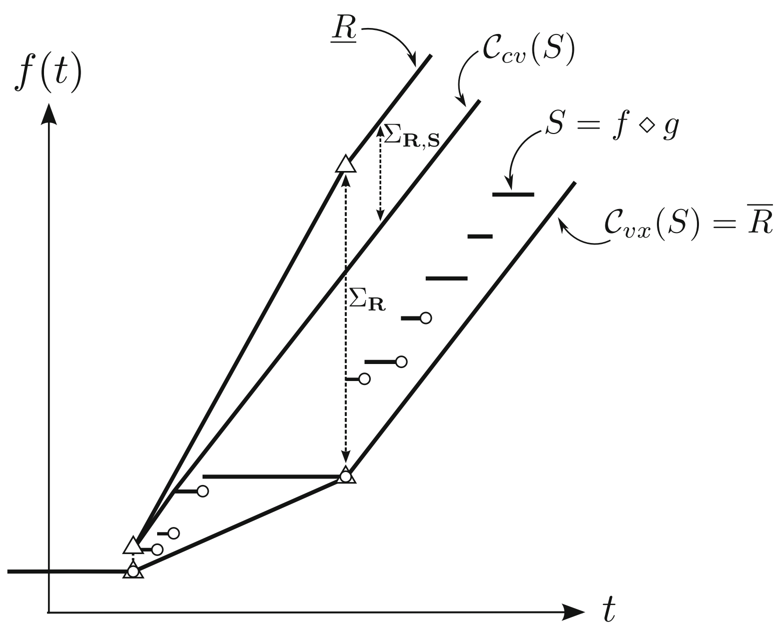


Fig. 14 Pessimism and memory consumption between the approximated computations **R** and the exact ones $S \in \mathbf{S}$

Remark 13 One can note that since the bound $\overline{f}$ of a container is the greatest element of $[f]_{\mathscr{L}}$ (the equivalent class of f modulo the Legendre–Fenchel transform), the pessimism between **R** and **S** does not come from this upper approximation: $\overline{R} = \mathscr{C}_{vx}(S)$ (see Fig. 14). However, the error between these two containers comes from the inequalities obtained with concave approximations: $\underline{R} \preccurlyeq \mathscr{C}_{cv}(S)$ (see Remark 8).

Below we propose three examples to analyze the evolution of these two criteria.

5.2 Examples of application

5.2.1 Computation of a transfer function

Firstly, we give first an example of the computation of a transfer function by comparing the toolbox ContainerMinMaxGD versus the toolbox MinMaxGD where functions of $\mathscr{F}_{cp}$ are used.

For this example, let us consider a SISO system ($p = q = 1$) described by the following state representation:

$$\begin{cases} x = A * x \oplus B * u, \\ y = C * x. \end{cases}$$

Matrices A, B and C are given such that:

$$A = \begin{pmatrix} \Delta_{19}^{39} & \Delta_{29}^{45} & \Delta_{14}^{22} & \Delta_{40}^{20} \\ \Delta_{23}^{1} & \Delta_{5}^{27} & \Delta_{20}^{36} & \Delta_{1}^{12} \\ \Delta_{48}^{9} & \Delta_{46}^{43} & \Delta_{35}^{22} & \Delta_{32}^{39} \\ \Delta_{6}^{10} & \Delta_{27}^{27} & \Delta_{30}^{32} & \Delta_{9}^{32} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} e \\ \varepsilon \\ \varepsilon \\ \varepsilon \end{pmatrix} \quad \text{and} \quad C = (\varepsilon \ \ \varepsilon \ \ \varepsilon \ \ e),$$

where the entries of matrices belong to sub-semiring $(\mathscr{F}_{cp}, \oplus, *)$. Thanks to Theorem 1, transfer matrix $H^{1\times 1}$ of the system is obtained by:

$$H = C * A^\star * B.$$

On the one hand, with MinMaxGD, the computations are made from the exact values of A, B and C with classical operations of (min,+) algebra i.e. $\{\oplus, *, ^\star\}$. On the other hand, with ContainerMinMaxGD, each entry of matrices is lower and upper approximated by a container belonging to **F**. The handled matrices are $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbf{F}$ and the performed operations are inclusion functions $\{[\oplus], [*], ^{[\star]}\}$. We can note that entries of matrices are elementary functions, hence there is no uncertainty[18] in these containers: $\mathscr{C}_{cv}(\Delta_T^K) = \mathscr{C}_{vx}(\Delta_T^K) = \Delta_T^K$. Therefore, the computation of transfer matrix **H** is:

$$\mathbf{H} = \mathbf{C}[*]\mathbf{A}^{[\star]}[*]\mathbf{B} = [\ \underline{H}\ ,\ \overline{H}\ ].$$

[18] The construction of a container **f** from one elementary function Δ_T^K provides two identical bounds $\underline{f} = \overline{f}$ with only one extremal point of (T, K) coordinates, and an infinite asymptotic slope $\sigma(\underline{f}) = \sigma(\overline{f}) = +\infty$.

Table 1 Script files for computations in toolboxes MinMaxGD and ContainerMinMaxGD

// Script for the example // with Scilab/MinMaxGD	// Script for the example // with ContainerMinMaxGD
A = smatrix(4,4);	MCserie A
A(1,1) = series([39,19]);	A(1,1) = (19 39);
A(1,2) = series([45,29]);	A(1,2) = (29 45);
A(1,3) = series([22,14]);	A(1,3) = (14 22);
A(1,4) = series([20,40]);	A(1,4) = (40 20);
A(2,1) = series([1,23]);	A(2,1) = (23 1);
A(2,2) = series([27,5]);	A(2,2) = (5 27);
A(2,3) = series([36,20]);	A(2,3) = (20 36);
A(2,4) = series([12,1]);	A(2,4) = (1 12);
A(3,1) = series([9,48]);	A(3,1) = (48 9);
A(3,2) = series([43,46]);	A(3,2) = (46 43);
A(3,3) = series([22,35]);	A(3,3) = (35 22);
A(3,4) = series([39,32]);	A(3,4) = (32 39);
A(4,1) = series([10,6]);	A(4,1) = (6 10);
A(4,2) = series([27,27]);	A(4,2) = (27 27);
A(4,3) = series([32,30]);	A(4,3) = (30 32);
A(4,4) = series([32,9])	A(4,4) = (9 32)
B = smatrix(4,1);	MCserie B
B(1,1) = series(e)	B(1,1) = (0 0);
	B(4,1) = (eps)
C = smatrix(1,4);	MCserie C
C(1,4) = series(e)	C(1,4) = (0 0)
H = C * stargd(A) * B	MCserie H
	H = C * Star(A) * B

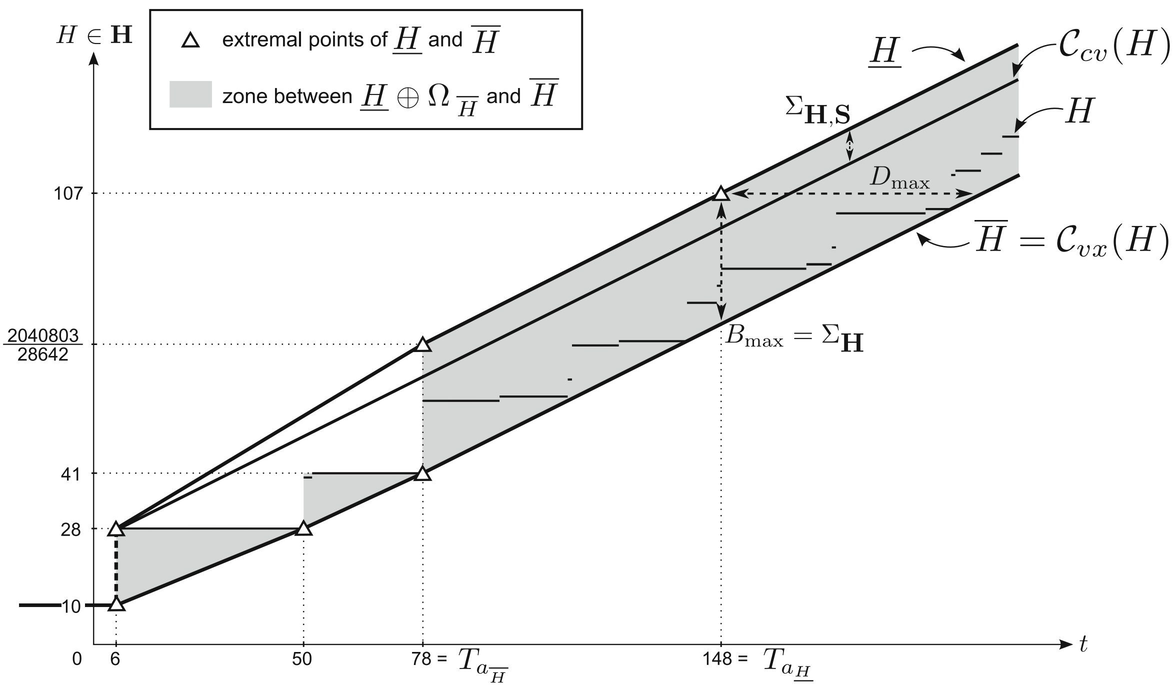


Fig. 15 Transfer matrix $H^{1\times 1} \in \mathscr{F}_{cp}$ and its container $\mathbf{H} = [\ \underline{H}\ ,\ \overline{H}\ ] \in \mathbf{F}$

Table 1 describes the lines written with toolboxes MinMaxGD and ContainerMinMaxGD, and the results obtained are illustrated in Fig. 15.

First of all, the pessimism of container $\mathbf{H}$ versus the container that approximates the exact system $\mathbf{S} = [\ \mathscr{C}_{cv}(H)\ ,\ \mathscr{C}_{vx}(H)\ ]$ (see Definition 24) is:

$$\frac{\Sigma_{\mathbf{H},\mathbf{S}}}{\Sigma_{\mathbf{H}}} = \frac{8}{31} = 25.8\ \%,$$

i.e. $\mathbf{H}$ is 25.8 % greater than the convex and concave approximations of the exact computation. We can therefore note that the computation with MinMaxGD produces a matrix H with a sum of 80 elementary functions Δ_T^K. Here are some of them (during the transient and the periodic parts) as well as its asymptotic slope:

$$H = \Delta_6^{10} \oplus \Delta_{50}^{28} \oplus \Delta_{52}^{40} \oplus \Delta_{78}^{41} \oplus \ldots \oplus \left(\Delta_{494}^{255} \oplus \ldots \oplus \Delta_{550}^{285}\right) * \Delta_{62}^{31\star}, \quad \sigma(H) = 31/62.$$

Concerning the elements of the container $\mathbf{H}$, its bounds $\underline{H}$ and $\overline{H}$ have many fewer points than H. Indeed, they have respectively 4 and 3 extremal points given below by their pairs (time, event):

$$\begin{cases} \underline{H} = \{(6,10)\ ;\ (6^+,28)\ ;\ \left(78, \dfrac{2040803}{28642}\right)\ ;\ (148,107)\}, \\ \overline{H} = \{(6,10)\ ;\ (50,28)\ ;\ (78,41)\}. \end{cases}$$

So, according to the number of points, the memory consumption saved (see Definition 25) is:

$$1 - \frac{N_{\mathbf{H}}}{N_H} = 1 - \frac{7}{80} = 91.25\ \%.$$

Then, $\underline{H}$ and $\overline{H}$ and H have the same first elementary function:

$$\Delta_{\tau_{\underline{H}}}^{\kappa_{\underline{H}}} = \Delta_{\tau_{\overline{H}}}^{\kappa_{\overline{H}}} = \Delta_{\tau_H}^{\kappa_H} = \Delta_6^{10},$$

and the asymptotic slope of $\mathbf{H}$ corresponds to the reduced form to that of H:

$$\sigma(\underline{H}) = \sigma(\overline{H}) = 1/2.$$

Finally, the maximal uncertainty $\Sigma_{\mathbf{H}}$ of $\mathbf{H}$ is also provided by the toolbox. Here, we use Definition 22 which gives us:

$$\underline{H}(T_{a_{\underline{H}}}) = 107 > \overline{H}(T_{a_{\overline{H}}}) = 41 \quad \text{and} \quad \max\{T_{a_{\underline{H}}}, T_{a_{\overline{H}}}\} = T_{a_{\underline{H}}} = 148.$$

Hence:

$$\Sigma_{\mathbf{H}} = \{\ D_{\max} = 62\ ,\ B_{\max} = 31\ \}.$$

To conclude this example, let us recall that the exact system H truly belongs to the grey zone i.e. $\underline{H} \oplus \Omega_{\overline{H}} \preccurlyeq H \preccurlyeq \overline{H}$.

5.2.2 Subadditive closure of a matrix

The second example comes from Olsder et al. (1998) and proposes to compute the subadditive closure of a given matrix $A \in (\mathscr{F}_{cp}, \oplus, *)^{10\times 10}$. This matrix is a benchmark with numerous interconnections among its elements when its subadditive closure is computed. Indeed, even if matrix A does not have many elements different from ε, matrix $A^\star$ is full of functions of $\mathscr{F}_{cp}$, elements Δ_T^K of which are given with $T \in [\,0\,,\ 975\,]$ and $K \in [\,0\,,\ 21\,]$. The entries of matrix A that are not function ε are the following ones:

$$\begin{array}{llll}
A(1,4) = \Delta_{58}^1, & A(2,1) = \Delta_{61}^2, & A(2,8) = e, & A(3,2) = \Delta_{81}^1, \\
A(3,9) = e, & A(4,3) = \Delta_{86}^2, & A(5,8) = \Delta_{58}^1, & A(6,4) = e, \\
A(6,5) = \Delta_{61}^1, & A(7,6) = \Delta_{35}^1, & A(7,10) = e, & A(8,7) = \Delta_{36}^1, \\
A(9,3) = e, & A(9,10) = \Delta_{69}^1, & A(10,7) = e, & A(10,9) = \Delta_{69}^2.
\end{array}$$

Then, let $\mathbf{A} \in \mathbf{F}^{10\times 10}$ be the container of A. Again, since matrix A contains only elementary functions, there is no uncertainty between $\mathbf{A}$ and A, i.e. $\mathscr{C}_{cv}(A) = \mathscr{C}_{vx}(A) = \mathbf{A}$. The computation of $\mathbf{A}^{[\star]}$ is made with the ContainerMinMaxGD toolbox whereas the computation of $A^\star$ is made with MinMaxGD. Finally, let $\mathbf{S} \in \mathbf{F}$ be the container that approximates exact matrix $A^\star$, i.e. $\mathbf{S} = [\,\mathscr{C}_{cv}(A^\star)\,,\ \mathscr{C}_{vx}(A^\star)\,]_{\mathscr{L}}$.

For this example, we can observe that the average of pessimism of container $\mathbf{A}^{[\star]}$ versus the container approximating the exact system $\mathbf{S}$ is:

$$\frac{\Sigma_{\mathbf{A}^{[\star]},\mathbf{S}}}{\Sigma_{\mathbf{A}^{[\star]}}} = 55.07\ \%.$$

This pessimistic result must be carefully linked to the average of the uncertainty $\Sigma_{\mathbf{A}^{[\star]}}$ of $\mathbf{A}^{[\star]}$ which is:

$$\Sigma_{\mathbf{A}^{[\star]}} = \{\ D_{\max} = 286\ ,\ B_{\max} = 6\ \}.$$

Therefore, even if container $\mathbf{A}^{[\star]}$ is about 55 % larger than $A^\star$, pessimism is only of 3.3 in the event domain and 157.3 in the time domain. Finally, regarding the number of points of $\mathbf{A}^{[\star]}$ and $A^\star$, the average ratio of memory consumption saved is:

$$1 - \frac{N_{\mathbf{A}^{[\star]}}}{N_{A^\star}} = 98\ \%.$$

5.2.3 More generally

In this example, we propose to generalize the computation of pessimism and the gain in memory consumption of our containers. Indeed, here we carry out the subadditive closure of matrices with various sizes, and we observe the average of error as well as the gain in the number of points between the container obtained with inclusion functions and either the container of the result obtained with exact computations for the pessimism, or directly the exact system for the number of points.

Let $A \in (\mathscr{F}_{cp}, \oplus, *)^{n\times n}$ and $\mathbf{A} \in \mathbf{F}^{n\times n}$ be two square matrices. The entries of A are either elementary functions Δ_T^K, where T and K are randomly-chosen integers in interval [1, 10], or function $\varepsilon : t \mapsto +\infty$. Matrix $\mathbf{A}$ is the container of A, that is each entry of $\mathbf{A}$ is the container obtained from the respective entry of A. Hence, there is still no uncertainty in $\mathbf{A}$. Then, let $\mathbf{R}, \mathbf{S} \in \mathbf{F}^{n\times n}$ and $S \in (\mathscr{F}_{cp}, \oplus, *)^{n\times n}$ be three square matrices. The first contains the result of computation $\mathbf{R} = \mathbf{A}^{[\star]}$, and the second is the matrix container built from computation $S = A^\star$, that is $\mathbf{S} = [\,\mathscr{C}_{cv}(S)\,, \mathscr{C}_{vx}(S)\,]_{\mathscr{L}}$. So $S \in \mathbf{S} \subset \mathbf{R}$. The experiment is carried out 5 times with a matrix size ranging from 2×2 to 60×60.

For these tests, the average of pessimism observed between **R** and **S** is:

$$\frac{\Sigma_{\mathbf{R},\mathbf{S}}}{\Sigma_{\mathbf{R}}} = 27\ \%,$$

that is **R** is 27 % larger than **S**. According to the gain in the number of points between the exact system S and the container **R**, we can observe:

$$1 - \frac{N_{\mathbf{R}}}{N_S} = 71\ \%,$$

that is **R** saves 71 % of space memory in comparison with the exact representation.

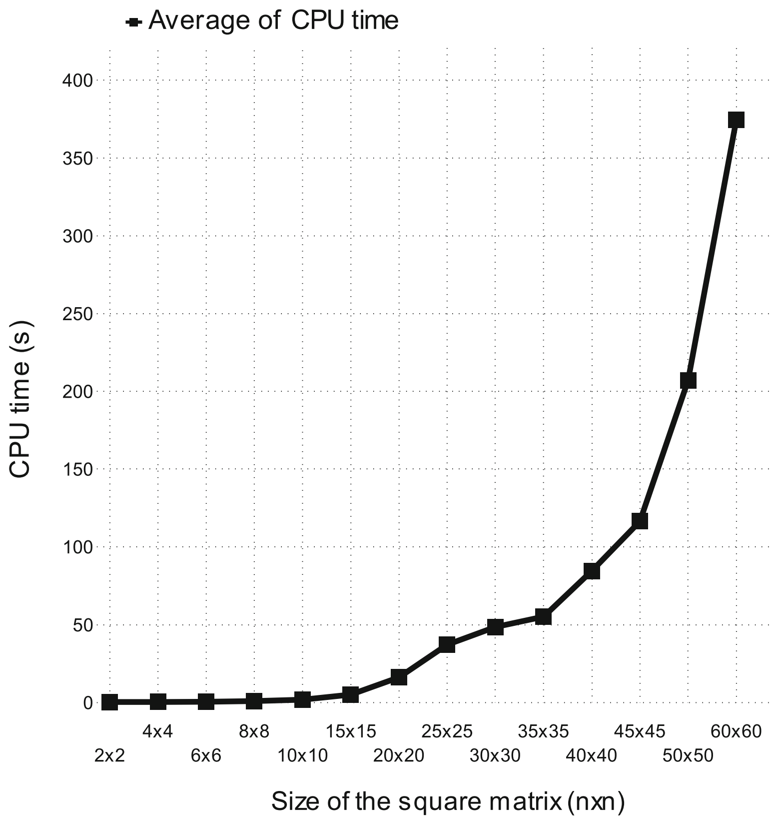
5.3 Experimental complexity

A final test of the ContainerMinMaxGD toolbox is about the practical complexity of the computation of the subadditive closure of a square matrix depending on its size.

To this end, let $\mathbf{A}$ be a square matrix of $\mathbf{F}^{n\times n}$. The entries of $\mathbf{A}$ are either elementary functions Δ_T^K, where T and K are integers randomly chosen in the interval $[1, 5]$, or the function $\varepsilon : t \mapsto +\infty$. The computation of $\mathbf{A}^{[\star]}$ is made with a size of matrix ranging from 2×2 to 60×60, and the average of the CPU times is noted.

The CPU time for the computation of $\mathbf{A}^{[\star]}$, depending on the size of $\mathbf{A}$, is illustrated in Fig. 16. It appears that the practical complexity is approximately in $\mathcal{O}(n^3 \log n)$, with n the size of the matrix. Moreover, we can see that for example, the average CPU time of the computation of a 50×50 matrix is about 200 s.

Fig. 16 CPU time of the computation of $\mathbf{A}^{[\star]}$, depending on the size of $\mathbf{A}$



6 Conclusion

This paper has focused on the computation of the transfer function h for (min,+)-linear systems. More precisely, since the exact computations can be time and memory consuming, we introduced an approximated approach of the exact system h via a container $\mathbf{h} \in \mathbf{F}$ such that:

$$\mathbf{h} = [\, \underline{h}\,,\ \overline{h}\,]_{\mathscr{L}} = [\, \underline{h}\,,\ \overline{h}\,] \cap [\, \overline{h}\,]_{\mathscr{L}} \quad \text{and} \quad [\, \overline{h}\,]_{\mathscr{L}} = [h]_{\mathscr{L}},$$

where $[h]_{\mathscr{L}}$ is the equivalent class of h modulo the Legendre–Fenchel transform $\mathscr{L}$. The bounds $\underline{h}$ and $\overline{h}$ are two ultimately affine functions with convex characteristics. This work has also been inspired by the set membership approach since the main operations of (min,+) algebra, i.e. the sum, the inf-convolution and the subadditive closure, have been integrated into inclusion functions $[\diamond] \in \{[\oplus], [*], {}^{[\star]}\}$ in which only the bounds of the intervals are handled.

Despite the approximations, since the equivalence class modulo the transform $\mathscr{L}$ of the exact system is preserved, some of its important characteristics are kept, such as the asymptotic slope and the extremal points of the upper bound that really belong to the exact system. Furthermore, the convex characteristics of the bounds of the interval allow us to reduce both algorithm complexity of the computations made over these systems, and the amount of data storage. Indeed, the algorithmic complexity of inclusion functions is linear for the sum and the inf-convolution, and quasi-linear for the subadditive closure.

Finally, the container and its algorithms have been implemented in a toolbox developed in C++, called ContainerMinMaxGD. The proposed tests of this toolbox have demonstrated the performance and the computational advantage of these containers by comparison with exact solutions.

References

Baccelli F, Cohen G, Olsder GJ, Quadrat J-P (1992) Synchronization and linearity: an algebra for discrete event systems. Wiley, New York

Bouillard A, Thierry E (2008) An algorithmic toolbox for Network Calculus. Discrete Event Dyn Syst 18(1):3–49

Bouillard A, Gaujal B, Lagrange S, Thierry E (2007) Optimal routing for end-to-end guarantees: the price of multiplexing. In: Proceedings of the 2nd international conference on performance evaluation methodologies and tools, ValueTools'07. ICST (Institute for Computer Sciences, Social-Informatics and Telecommunications Engineering), pp 1–10

Bouillard A, Jouhet L, Thierry E (2008) Computation of a (min,+) multi-dimensional convolution for end-to-end performance analysis. In: Proceedings of the 3rd international conference on performance evaluation methodologies and tools, ValueTools'08. ICST (Institute for Computer Sciences, Social-Informatics and Telecommunications Engineering), pp 1–7

Bouillard A, Cottenceau B, Gaujal B, Hardouin L, Lagrange S, Lhommeau M (2009) COINC library: a toolbox for the network calculus. In: Proceedings of the 4th international conference on performance evaluation methodologies and tools, ValueTools'09. ICST (Institute for Computer Sciences, Social-Informatics and Telecommunications Engineering)

Boyer M (2010) Nc-maude: a rewriting tool to play with Network Calculus. In: Leveraging applications of formal methods, verification, and validation: 4th international symposium on leveraging applications, Isola'10. Springer, pp 137–151

Burkard RE, Butkovič P (2003) Finding all essential terms of a characteristic maxpolynomial. Discrete Appl Math 130(3):367–380

Chang CS (2000) Performance guarantees in communication networks. Springer, Berlin

Cohen G, Gaubert S, Nikoukhah R, Quadrat J-P (1989a) Convex analysis and spectral analysis of timed event graphs. In: Proceedings of the 28th IEEE conference on decision and control, CDC'89. IEEE, pp 1515–1520

Cohen G, Moller P, Quadrat J-P, Viot M (1989b) Algebraic tools for the performance evaluation of discrete event systems. Proc IEEE 77(1):39–85

Conway JH (1971) Regular algebra and finite machines. Chapman, Boston

Cottenceau B (1999) Contribution à la commande de systèmes à événements discrets: synthèse de correcteurs pour les graphes d'événements temporisés dans les dioïdes. PhD thesis, LISA—Université d'Angers. http://www.istia.univ-angers.fr/LISA/THESES/theses.html

Cottenceau B, Hardouin L, Lhommeau M (1998–2006) MinMaxGD, une librairie de calculs dans $\mathcal{M}_{\rm in}^{\rm ax}[\![\gamma,\delta]\!]$. Tech rep, http://www.istia.univ-angers.fr/∼hardouin/

Cottenceau B, Lhommeau M, Hardouin L, Boimond J-L (2000) Data processing tool for calculation in dioid. In: 5th international workshop on discrete event systems. WODES'00. http://www.istia.univ-angers.fr/∼hardouin/

Cottenceau B, Hardouin L, Boimond J-L, Ferrier J-L (2001) Model reference control for timed event graphs in dioids. Automatica 37(9):1451–1458

Fidler M, Recker S (2006) Conjugate Network Calculus: a dual approach applying the Legendre transform. Comput Networks 50(8):1026–1039

Gaubert S (1992) Théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes. PhD thesis, INRIA—Ecole des Mines de Paris. http://amadeus.inria.fr/gaubert/PAPERS/ALL.pdf

Graham RL (1972) An efficient algorithm for determining the convex hull of a finite planar set. Inf Process Lett 1(4):132–133

Hardouin L, Cottenceau B, Lhommeau M, Le Corronc E (2009) Interval systems over idempotent semiring. Linear Algebra Appl 431(5–7):855–862

Heidergott B, Olsder GJ, van der Woude J (2006) Max plus at work, modeling and analysis of synchronized systems: a course on max-plus algebra and its applications. Princeton University Press, Princeton

Jaulin L, Kieffer M, Didrit O, Walter E (2001) Applied interval analysis. Springer, London

Krob D (1990) A complete system of b-rational identities. Lect Notes Comput Sci 443/1990: 60–73

Le Boudec J-Y, Thiran P (2001) Network Calculus: a theory of deterministic queuing systems for the internet. Springer, Berlin

Le Corronc E (2011) Modèles et calculs garantis pour les systèmes (min,+)-linéaires. PhD thesis, LISA—Université d'Angers. http://www.istia.univ-angers.fr/LISA/THESES/theses.html

Le Corronc E, Cottenceau B, Hardouin L (2010) Flow control with (min,+) algebra. In: 4th international symposium on leveraging applications of formal methods, verification and validation, special session worst case traversal time. ISOLA'10

Lenzini L, Martorini L, Mingozzi E, Stea G (2006) Tight end-to-end per-flow delay bounds in fifo multiplexing sink-tree networks. Perform Eval 63(9–10):956–987

Lhommeau M, Hardouin L, Ferrier J-L, Ouerghi I (2005) Interval analysis in dioid: application to robust open-loop control for timed event graphs. In: 44th IEEE conference on decision and control and European control conference. CDC-ECC'05, pp 7744–7749

Litvinov GL, Sobolevskiī AN (2001) Idempotent interval analysis and optimization problems. Reliab Comput 7(5):353–377

Maia CA, Hardouin L, Santos-Mendes R, Cottenceau B (2003) Optimal closed-loop control of timed event graphs in dioids. IEEE Trans Automat Contr 48(12):2284–2287

Moore RE (1979) Methods and applications of interval analysis. SIAM, Philadelphia

Olsder GJ, Subiono, Mac Gettrick M (1998) On large scale max-plus algebra model in railway systems. In: Algèbres Max-Plus et applications en informatique et automatique, École de printemps d'informatique théorique, Noirmoutier

Pandit K, Schmitt J, Kirchner C, Steinmetz R (2006) A transform for network calculus and its application to multimedia networking. In: Proceedings of SPIE on multimedia computing and networking. MMCN'06, vol 6071, pp 103–114

Rockafellar RT (1997) Convex analysis. Princeton University Press, Princeton

Schmitt JB, Zdarsky FA (2006) The disco network calculator: a toolbox for worst case analysis. In: Proceedings of the 1st international conference on performance evaluation methodologies and tools, ValueTools'06. ACM

Wandeler E, Thiele L (2006) Real-time calculus (rtc) toolbox. http://www.mpa.ethz.ch/Rtctoolbox

Euriell Le Corronc received her Ph.D. in automatic and computer engineering from the University of Angers, France, in 2011. Her current research interests are discrete event systems.

Bertrand Cottenceau was born in France, in 1973. He received the Ph.D. degree from the University of Angers, France, in 1999. His research interest is the control of discrete event systems.

Laurent Hardouin is a professor at University of Angers. He received his Ph.D. in acoustics and automatic control from University of Poitiers (France) in 1993, and he concluded the “Habilitation à Diriger des Recherches (HDR)” in 2004 from University of Angers. He is the head of the team Models and Dynamic Systems of the “Laboratoire d’Ingénierie des Systèmes Automatisés, Université d’Angers” (LISA—University of Angers). His current research interests are about max-plus algebra, interval analysis and robotics (see www.istia.univ-angers.fr/∼hardouin).

Modelling Systems with Periodic Routing Functions in dioid $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$

Olivier Boutin [*,**] **Bertrand Cottenceau** [**] **Anne L'Anton** [*]
Jean-Jacques Loiseau [*]

[*] *Institut de Recherche en Communications et Cybernétique de Nantes (IRCCyN), UMR CNRS 6597*
1 rue de la Noë – BP 92101 – 44321 Nantes Cedex 03, France
e-mail: {olivier.boutin, anne.l-anton, jean-Jacques.loiseau}@irccyn.ec-nantes.fr
[**] *Laboratoire d'Ingénierie des Systèmes Automatisés (LISA), EA 4014*
62 avenue Notre Dame du Lac – 49000 Angers, France
e-mail: bertrand.cottenceau@istia.univ-angers.fr

Abstract: Routing is a prevailing aspect in job-shop systems. Each product is routed according to its own production cycle. However, routing phenomena, or equivalently conflicts in Petri nets, usually cannot be modelled in dioid algebraic structures such as $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$ or $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$. The main reason is that choices can not be represented in such models. In this article we overcome this problem by giving an interval including the input/output behaviour of a system encapsulating several sub-systems in conflict. This interval contains all the possible system behaviours (in terms of number of pallets coming and going, delays and production rates) when the routing policy therein is periodic. As a consequence, even though the input/output behaviour of such a system is not linear in dioid $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$, for instance, it can nevertheless be bounded by those of two $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$ linear systems, being either faster or slower than the studied system. Doing so, we can use an indirect modelling over a dioid of intervals, thus allowing for using dioid theory contributions, as in control problem synthesis issues.

Keywords: Discrete event systems with conflicts; Modelling; Petri nets; Periodic routing; (max,+) linear systems; Interval analysis; Manufacturing plant operations.

1. INTRODUCTION

We consider in this paper discrete event dynamic systems that can be represented in idempotent semiring (also called "dioids"). They are mainly composed of stocks, time-consuming activities (processes in workstations or during transport) and synchronisations, which can be linearly represented in suitable dioids (Baccelli et al. [1992]). These systems are commonly called $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ linear, or "(max, plus)" linear systems, since their modelling become linear as soon as we consider them in a dioid ($\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ for instance). Timed Event Graphs (TEG) [1] are usually used to graphically represent $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ linear systems.

Their study stems from the late 70's and early 80's, mainly for modelling, performance analysis, control and diagnosis issues (Cuninghame-Green [1979], Cohen et al. [1984], Gondran and Minoux [1984]). The main results of this theory have been applied to manufacturing systems, transportation systems (urban or railway ones) or computer networks (for network calculus).

The events happening in our systems (mainly the detection of a product passing by a sensor) can either be dated or counted. $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ and $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$ dioids are respectively used for such purposes. It is also possible, by considering event and/or temporal shift operators, to describe systems as formal series. All of these representations share the same algebraic structure of idempotent semiring.

$\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ linear systems naturally describe *synchronised* systems. If two $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ linear systems H_1 and H_2 in parallel handle the same input u (the input goes both into H_1 *and* H_2), the whole system H is equivalent to $H_1 \oplus H_2$, which is $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ linear as well (Baccelli et al. [1992], chapter 6). System H is depicted on the left handside of Figure 1 where sub-systems H_1 and H_2 are represented by TEG's.

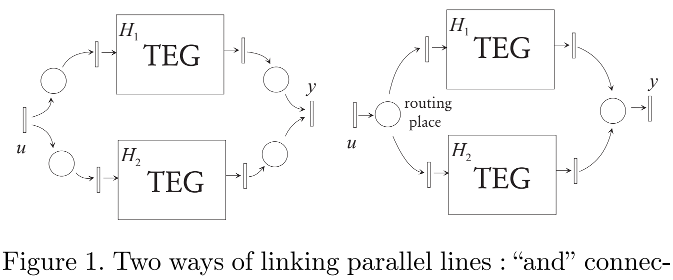


Figure 1. Two ways of linking parallel lines : "and" connection and "or" connection

Another way of linking parallel production lines can be considered, namely *conflicts*. Several $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ linear systems in conflicts do not lead to a global $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ linear system, because of the compulsory routing therein. This phenomenon is depicted on the right handside of Figure 1. Both sub-

[1] a sub-class of timed Petri nets

systems H_1 and H_2 are $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ linear (and modelled by TEG's), but the input u is routed *either* to system H_1 *or* to system H_2. Let us note that the whole Petri net is no longer a TEG (as there are places with several incoming or outgoing arcs). This is equivalent to saying that the whole system is usually not $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ linear any more.

The phenomena studied in this paper correspond to what is called *junctions* and *distributions* in Grafcets (David [1995]). In this formalism, synchronisations and conflicts have been defined as "and" and "or" connections. In fact, these kinds of connection are really close to the underlying logic notions. For a "and" connection, signals go in both parallel sub-systems in a synchronised way, whereas for a "or" connection, signals go either to one or the other subsystem [2]. Nevertheless, counting and dating events cannot be done in Grafcets. This is mainly why we rather use Petri nets instead of Grafcets.

In this paper, the focus is put on conflicts ("or" connections), products being routed to either one of the parallel systems. In fact, we consider the input/output behaviour of the system, for a given routing policy (located on a routing place). The main result of this work is to show that, for *periodic* routing policies, the input/output behaviour of the system can be bounded by those of two $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ linear systems.

Thanks to the dioid of intervals defined in Lhommeau et al. [2004], we describe a system including a conflict by an interval containing the behaviour of the studied system in a guaranteed way.

The remainder of this paper is organised as follows. In the next section, we recall the main models used to describe timed event graphs in this paper. Then we describe in section 3 the conflict phenomenon and we provide an infimum for the input/output behaviour for "or"-connected systems. Afterwards, we introduce in section 4 the studied periodic routing policies. Based on these, we give in section 5 an upper bound when a "or"-connected system is driven by a periodic routing. The paper ends with an illustrative example.

2. LINEAR MODELS FOR TEG'S

We recall in this section some aspects of the dioid theory. The reader is invited to consult Baccelli et al. [1992] or Heidergott et al. [2005] for an exhaustive presentation.

A dioid is a semiring denoted $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ of which the $\oplus$ law is idempotent ($\forall a, a \oplus a = a$). The neutral elements for the sum and the product are generally denoted by ε and e. Denoting $\wedge$ the infimum of two elements, a dioid can naturally be endowed with a *canonical order relation* defined by

$$a \succeq b \iff a \oplus b = a \iff a \wedge b = b. \tag{1}$$

For instance, $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ represents the set $\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$ with the max operation as $\oplus$ and the classical sum $+$ as $\otimes$ [3]. The set $\mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$ with the min as $\oplus$ and $+$ as $\otimes$ is also a dioid, denoted $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$. Let us note that the canonical order in $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$ is the opposite of the natural order on $\mathbb{Z}$, that is, $a \succeq b \iff a = a \oplus b \iff a = \min(a, b) \iff a \leq b$.

[2] in fact, this should rather be seen as a logical "x-or"

[3] this dioid is also known as the "max-plus algebra" in literature

Definition 1. (Timed event graph). A timed event graph (TEG) is a timed Petri net such that each place has *only* one input arc and one output arc. Delays, taking values in $\mathbb{N}$, will be attached to places in our case.

The dynamics of a TEG having an "earliest as possible" firing policy [4] can be modelled by state equations on dioids $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ or $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$. A $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ model focuses on the events occurring dates, whereas a $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$ model focuses on the numbering of events occurred up to a given date. Besides, by introducing shift operators [5], one can also describe the input/output behaviour of a system by a formal series.

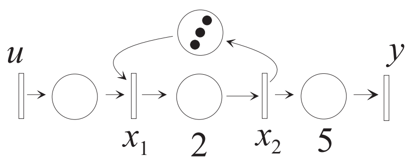


Figure 2. A TEG example

For systems described by single input/single output TEG's (such as the one of Figure 2), if we consider inputs as signal, the output of the system is a convolution of the input and the impulse response of the system. For the TEG of Figure 2, the impulse response of the system can be represented by the following counter function [6]:

$$\begin{cases} H(t) = 0 & \forall t < 7 \\ H(7) = H(8) = 3 \\ H(t) = 3 \otimes H(t-2) & \forall t > 8 \end{cases}$$

Definition 2. (Ultimately periodic series). A series of elements $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ is said ultimately periodic when there exists $n_0 \in \mathbb{N}$ and $p \in \mathbb{N}$ such that $x_{n+p} = x_n, \forall n \geq n_0$.

Thus function H is ultimately periodic, of period 3 events every 2 units of time.

In this context, the input/output behaviour is expressed in dioid $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$ by the following inf-convolution:

$$\begin{aligned} y(t) &= H(0) \otimes u(t) \oplus H(1) \otimes u(t-1) \\ &\quad \oplus H(2) \otimes u(t-2) \oplus \ldots \\ &= \bigoplus_{i=0}^{t} H(i) \otimes u(t-i) \\ &= (H * u)(t), \end{aligned}$$

where the $*$ operation represents the inf-convolution product of the counter functions H and u. The set of counter functions defined on $\mathbb{N} \to \overline{\mathbb{Z}}_{min}$ endowed with the pointwise min as sum and the inf-convolution $*$ as product is a dioid denoted $\overline{\mathbb{Z}}_{min}^{\mathbb{N}}$.

Finally, by introducing the δ-transform [7] of a counter function c as the following formal series

$$c(\delta) = \bigoplus_{t=0}^{+\infty} c(t) \delta^t,$$

the impulse response H of the system of Figure 2 can also be represented as a formal series:

[4] a transition is fired as soon as it can be

[5] similar to the $\mathcal{Z}$ operator used for discrete-time continuous systems

[6] $H : \mathbb{Z} \to \overline{\mathbb{Z}}_{min}$; $H(t)$ is the cumulative number of events occurred up to date t

[7] $a = b\delta^\tau$ means that event a happens τ units of time after b

$$\begin{aligned} H(\delta) &= \delta^7 \oplus 3\delta^9 \oplus 6\delta^{11} \oplus \ldots \\ &= \delta^7 \otimes (\delta^0 \oplus 3\delta^2 \oplus 6\delta^4 \oplus \ldots) \\ &= \delta^7 (3\delta^2)^\star, \end{aligned}$$

where $\star$ is the Kleene star operator defined by $a^\star = a^0 \oplus a \oplus a^2 \oplus \ldots = \bigoplus_{i=0}^{+\infty} a^i$, with $a^0 = \delta^0$.

The dioid of δ-series with coefficients in $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$ is usually denoted by $\overline{\mathbb{Z}}_{min}[\![\delta]\!]$. Dioids $\overline{\mathbb{Z}}_{min}^{\mathbb{N}}$ and $\overline{\mathbb{Z}}_{min}[\![\delta]\!]$ are isomorphic. The inf-convolution in $\overline{\mathbb{Z}}_{min}^{\mathbb{N}}$ corresponds to the series product (also called the "Cauchy product") in $\overline{\mathbb{Z}}_{min}[\![\delta]\!]$.

Remark 3. A significant property of $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ linear systems is that is it always possible to represent their impulse response by ultimately periodic dater or counter functions. Therefore, the corresponding δ-series are always rational expressions. Let us note that software tools have been developed in order to handle such series (Hardouin [2006]).

3. INFIMUM FOR PARALLEL SYSTEMS IN CONFLICT

The systems H_i studied in this paper (see Figure 3) are assumed to be $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$ linear systems with single input u_i and single output y_i, and having an upstream routing place. The global system corresponds to putting all H_i in parallel, thus creating a conflict (all sub-systems H_i are "or"-connected). Each incoming event is routed to *only* one of its sub-systems H_i and the output y collects all the events y_i.

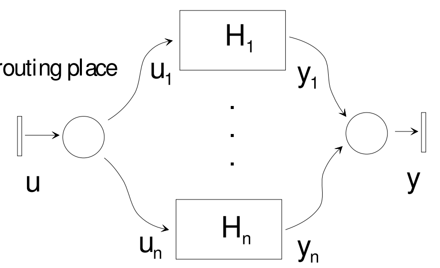


Figure 3. Typical studied system

From a counter point of view, the following conservation equations are satisfied, for all t :

$$u(t) = \bigotimes_i u_i(t) \text{ and } \bigotimes_i y_i(t) = y(t).$$

Let us consider a system H composed of only two sub-systems H_1 and H_2, both $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$ linear. We get the following equations:

$$u(t) = u_1(t) \otimes u_2(t) \text{ and } y(t) = y_1(t) \otimes y_2(t).$$

Moreover, we have in $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$

$$y_1(t) = (H_1 * u_1)(t) \text{ and } y_2(t) = (H_2 * u_2)(t),$$

since both systems are $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$ linear. So we finally get

$$y(t) = (H_1 * u_1 \odot H_2 * u_2)(t),$$

where the product of functions $\odot$ is defined by

$$\forall t,\ (f \odot g)(t) = f(t) \otimes g(t).$$

Property 4. For counter functions a, b and $c \in \overline{\mathbb{Z}}_{min}^{\mathbb{N}}$

$$a \odot (b \oplus c) = (a \odot b) \oplus (a \odot c).$$

Proof: For all t, $\odot$ distributes over the min of functions. □

Property 5. Mapping $x \mapsto a \odot x$ defined on $\overline{\mathbb{Z}}_{min}^{\mathbb{N}}$ is isotone, *i.e.*

$$b \preceq c \Rightarrow a \odot b \preceq a \odot c.$$

Remark 6. On $\overline{\mathbb{Z}}_{min}[\![\delta]\!]$, the $\odot$ operation is defined as follows :

$$a(\delta) \odot b(\delta) = \bigoplus_{t=0}^{+\infty} (a(t) \otimes b(t))\, \delta^t.$$

As a matter of fact, this product corresponds to what is called the "Hadamard product" of two formal series in literature (Gaubert [1993]).

The following proposition introduces a infimum for parallel systems in conflict ("or"-connected systems).

Proposition 7. For all counter functions H_1, H_2, u_1 and $u_2 \in \overline{\mathbb{Z}}_{min}^{\mathbb{N}}$, the following inequality is always satisfied:

$$(H_1 \odot H_2) * (u_1 \odot u_2) \preceq (H_1 * u_1) \odot (H_2 * u_2).$$

Proof: Let us compare the two members of this inequality, for all t.

$$[(H_1 \odot H_2) * (u_1 \odot u_2)](t) = \bigoplus_{t=t_1+t_2} (H_1(t_1) \otimes H_2(t_1) \otimes u_1(t_2) \otimes u_2(t_2))$$

By developing the other member, we get:

$$[(H_1 * u_1) \odot (H_2 * u_2)](t) = [\bigoplus_{t=t_1+t_2} H_1(t_1) \otimes u_1(t_2)] \otimes [\bigoplus_{t=t_1+t_2} H_2(t_1) \otimes u_2(t_2)].$$

So $[(H_1 \odot H_2) * (u_1 \odot u_2)](t)$ corresponds to the minimum of n terms, and $[(H_1 * u_1) \odot (H_2 * u_2)](t)$ can be written as the minimum of n^2 terms, all the terms of the first expression being included in the second one. Thanks to the canonical order definition (see equivalence (1)), we can conclude [8] . □

Remark 8. It is noticeable that when $u_1 = u_2 = e$ (e being here the function $e(t) = 0$ for $t < 0$ and $e(t) = +\infty$ otherwise), the equality is reached: $(H_1 \odot H_2) * (u_1 \odot u_2) = (H_1 \odot H_2) * e = (H_1 * e) \odot (H_2 * e)$. In other words, the impulse response of the "or"-connected system is $H_1 \odot H_2$ in that case.

Proposition 9. For a "or"-connected system H with n $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$ linear sub-systems, for any routing functions, we have

$$y \succeq (H_1 \odot H_2 \odot \cdots \odot H_n) * u.$$

Proof: This is a direct extension of Proposition 7, knowing that $\odot$ is associative. □

Example 10. Let us consider the example of Figure 5 with two sub-systems. The impulse responses of the sub-systems are described by the following δ-series in $\overline{\mathbb{Z}}_{min}[\![\delta]\!]$:

$$H_1(\delta) = \delta^4 (2\delta^3)^\star \text{ and } H_2(\delta) = (\delta^5 \oplus 2\delta^6)(4\delta^4)^\star.$$

For this example, we have

$$\begin{aligned} H_1(\delta) \odot H_2(\delta) = (&\delta^4 \oplus 2\delta^5 \oplus 4\delta^6 \oplus 6\delta^7 \oplus 8\delta^9 \\ &\oplus 10\delta^{10} \oplus 14\delta^{13} \oplus 18\delta^{14})(20\delta^{12})^\star. \end{aligned}$$

For this system, the output $y(\delta)$ is necessarily greater than $(H_1(\delta) \odot H_2(\delta)) \otimes u(\delta)$. In other words, the input/output

[8] let us note that a proof of a similar proposition can be found in Gaubert [1993], Lemma 6.2.1

behaviour can not be faster than a $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$ linear system of which impulse response is $H_1(\delta) \odot H_2(\delta)$.

4. PERIODIC ROUTING FUNCTIONS

Previous section shows that the Hadamard product of counter functions related to impulse response of sub-systems in conflict is an infimum of the input/output of a system containing them, for any chosen routing policy. In this section, we consider the influence of using such periodic routing functions.

Definition 11. (Periodic routing). For a "or"-connected system H constituted of 2 sub-systems, let us denote by $r = m|n$ the routing function upstream H_1 and H_2 such that dater functions u, u_1 and u_2 satisfy

$$\begin{aligned} \forall k,\ u_1(k) &= u(\lfloor k/m \rfloor \times (m+n) + (k \mod m)) \\ u_2(k) &= u(\lfloor k/n \rfloor \times (m+n) + (k \mod n) + m). \end{aligned}$$

In other words, for a periodic routing $r = m|n$, m incoming events are first routed to H_1, n of these events are subsequently routed to H_2, then m of them to H_1 and so on in a cyclic fashion.

Example 12. For instance, for a routing function $r = 2|3$, we have

$$\begin{aligned} \forall k,\ u_1(k) &= u(\lfloor k/2 \rfloor 5 + (k \mod 2)) \\ u_2(k) &= u(\lfloor k/3 \rfloor 5 + (k \mod 3) + 2). \end{aligned}$$

Notation 13. We will denote by $(H_1|H_2)_r$ the behaviour of a "or"-connected system H, composed of two sub-systems H_1 and H_2 bearing a periodic routing r. The input/output behaviour of the system will thus be noted $y = H(u) = (H_1|H_2)_r(u)$.

Notation 14. (Scale mapping). Let us denote by $\mathtt{Sc}_n : \overline{\mathbb{Z}}_{min}^{\mathbb{N}} \to \overline{\mathbb{Z}}_{min}^{\mathbb{N}}, x \mapsto n \times x$ the scale mapping such that x is a counter function and $n \in \mathbb{N}$. [9]

The next result deals with the behaviour of a "or"-connected system composed of two identical sub-systems H and bearing a $r = 1|1$ routing function.

Proposition 15. The input/output relation of the "or"-connected $(H|H)_{1|1}$ system is $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ linear and its impulse response is $\mathtt{Sc}_2(H)$.

Proof: For the sake of this proof, we switch to a $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ linear representation of the sub-systems. Henceforth, $*$ will represent a sup-convolution.

$$\begin{aligned} y_1(k) &= (H * u_1)(k) \\ &= \bigoplus_{i=0}^{k} H(i) \otimes u_1(k-i) \\ y_2(k) &= (H * u_2)(k) \\ &= \bigoplus_{i=0}^{k} H(i) \otimes u_2(k-i) \end{aligned}$$

As a $1|1$ routing function is applied (see Definition 11), we have

$$u(2k) = u_1(k) \text{ and } u(2k+1) = u_2(k).$$

We also have $\forall k, u_1(k) \preceq u_2(k) \preceq u_1(k+1)$. Since the two sub-systems are identical, and the convolution product is isotone, we get $\forall k, y_1(k) \preceq y_2(k) \preceq y_1(k+1)$ and finally

$$y(2k) = y_1(k) \text{ and } y(2k+1) = y_2(k).$$

Thus we can write for even events

$$\begin{aligned} y(2k) &= \bigoplus_{i=0}^{k} H(i) \otimes u_1(k-i) \\ &= H(0) \otimes u_1(k) \oplus H(1) \otimes u_1(k-1) \oplus \dots \\ &= H(0) \otimes u(2k) \oplus H(1) \otimes u_1(2(k-1)) \oplus \dots \\ &= \bigoplus_{i=0}^{k} H(i) \otimes u(2(k-i)), \end{aligned}$$

and for odd events

$$\begin{aligned} y(2k+1) &= H(0) \otimes u_2(k) \oplus H(1) \otimes u_2(k-1) \oplus \dots \\ &= \bigoplus_{i=0}^{k} H(i) \otimes u(2(k-i)+1). \end{aligned}$$

As a conclusion, be K odd or even, we have

$$y(K) = \bigoplus_{i=0}^{K} H(i) \otimes u(K-2i),$$

which shows that the global system is $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ linear (the output clearly appears as a sup-convolution of a dater function by the input), and $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$ linear as well if we switch to a counter representation, using conjugate functions. By a change of variable, the impulse response of the equivalent system is obviously $H \odot H = \mathtt{Sc}_2(H)$ (see Remark 8). $\square$

By extending the proof to n equivalent sub-systems, we obtain the next result.

Proposition 16. A "or"-connected system $(H|H|\dots|H)_{1|\dots|1}$ composed of n sub-systems H and with a $1|\dots|1$ routing function is $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$ linear and its impulse response is $\mathtt{Sc}_n(H)$.

$$(H|H|\dots|H)_{1|1|\dots|1}(u) = (\mathtt{Sc}_n(H)) * u.$$

Example 17. Each sub-system of Figure 4(a) has the following impulse response $H = \delta^7(3\delta^2)^\star$. The system $(H|H)_{1|1}$ is also a $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$ linear system of which impulse response is $\mathtt{Sc}_2(H) = \delta^7(6\delta^2)^\star$. The timed event graph of Figure 4(b) has the same impulse response. The crucial point here is that when two identical systems are put in parallel, the production rate of the whole system is twice as big.

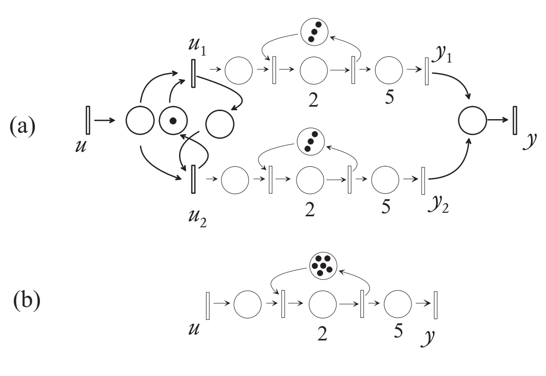


Figure 4. Equivalence of $(H|H)_{1|1}$ (a) and $\mathtt{Sc}_2(H)$ (b)

[9] when considering the graphical representation of a counter function, multiplying the latter by a natural number can be considered as changing the scale of the event axis, so to speak

5. UPPER BOUND FOR PARALLEL SYSTEMS IN CONFLICT WITH PERIODIC ROUTINGS

5.1 Conflicts with 1/1 routing functions

We now consider the case when a "or"-connected system is composed of several different sub-systems.

Proposition 18. In $\overline{\mathbb{Z}}_{min}^{\mathbb{N}}$, the behaviour of the "or"-connected system $H = (H_1|H_2)_{1|1}$ is such that

$$(H_1 \odot H_2) * u \preceq H(u) \preceq \mathtt{Sc}_2(H_1 \oplus H_2) * u.$$

So we can define a guaranteed interval for the the input/output behaviour of system H,

$$(H_1|H_2)_{1|1} \in [H_1 \odot H_2, \mathtt{Sc}_2(H_1 \oplus H_2)].$$

Proof: The first part of the inequality has already been proved by Proposition 7. Moreover, since the Hadamard product $\odot$ and the convolution product $*$ are isotone (see Property 5), we get

$H_1 * u_1 \preceq (H_1 \oplus H_2) * u_1$ and $H_2 * u_2 \preceq (H_1 \oplus H_2) * u_2$.

Thus

$$\begin{aligned} H(u) &= (H_1 * u_1) \odot (H_2 * u_2) \\ &\preceq [(H_1 \oplus H_2) * u_1] \odot [(H_1 \oplus H_2) * u_2]. \end{aligned}$$

For a 1|1 routing, Proposition 16 tells us that

$$\begin{aligned} &(H_1 \oplus H_2) * u_1 \odot (H_1 \oplus H_2) * u_2 = \\ &\quad \mathtt{Sc}_2(H_1 \oplus H_2) * (u_1 \odot u_2) = \mathtt{Sc}_2(H_1 \oplus H_2) * u. \end{aligned}$$

□

This result about "or"-connected $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$ linear parallel systems bearing a 1|1 periodic routing shows that the behaviour of the whole system can be bounded between those of two $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$ linear systems. This result can also be generalised to n sub-systems.

Proposition 19. For a "or"-connected system with n subsystems H_i and a $r = 1|1|\dots|1$ routing, we have

$$\bigodot_{i=0}^{n} H_i \preceq (H_1|H_2|\dots|H_n)_{1|1|\dots|1} \preceq \mathtt{Sc}_n(\bigoplus_{i=0}^{n} H_i),$$

or equivalently

$$\begin{aligned} (H_0 \odot \dots \odot H_n) * u &\preceq (H_1|H_2|\dots|H_n)_{1|1|\dots|1}(u) \\ &\preceq (\mathtt{Sc}_n(H_0 \oplus \dots \oplus H_n)) * u. \end{aligned}$$

5.2 Conflicts with n/m routing functions

Definition 20. (Residuation (Blyth and Janowitz [1972])). An isotone mapping f defined on a complete dioid is said to be "dually residuated" if for every b $f(x) \succeq y$ has a lowest[10] solution denoted $x' = f^\flat(y)$.

Proposition 21. Mapping $\mathtt{Sc}_n$ is dually residuated. Its dual residual is defined as follows:

$$\mathtt{Sc}_n^\flat(x) = \lfloor x/n \rfloor.$$

Proof: Is suffices to remark that mapping $\mathtt{Sc}_n$ satisfies $\mathtt{Sc}_n(a \wedge b) = \mathtt{Sc}_n(a) \wedge \mathtt{Sc}_n(b)$. In other words, the infimum of all the solutions of $\mathtt{Sc}_n(x) \succeq y$ is always a solution, and it is the lowest according to the canonical order (see relation (1)). Thus $\mathtt{Sc}_n$ is dually residuated. □

[10] according to the canonical order of $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$; the "lowest" here is to be understood as the "greatest" in the natural order

Remark 22. Naturally, the following inequality is satisfied

$$\mathtt{Sc}_n(\mathtt{Sc}_n^\flat(b)) \succeq b. \tag{2}$$

Proposition 23. A "or"-connected system $H = (H_1|H_2)_{m|n}$ is such that

$$H \in [H_1 \odot H_2, \mathtt{Sc}_{m+n}(\mathtt{Sc}_m^\flat(H_1) \oplus \mathtt{Sc}_n^\flat(H_2))]. \tag{3}$$

Proof: Thanks to Proposition 16, we have the following equivalences.

- A $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$ linear system of which impulse response is $\mathtt{Sc}_m(H_1)$ is equivalent to the "or"-connected system $(\underbrace{H_1|\dots|H_1}_{\text{m times}})_{\underbrace{1|\dots|1}_{\text{m times}}}$.
- Identically, a $\overline{\mathbb{Z}}_{min}$ linear system $\mathtt{Sc}_n(H_2)$ is equivalent to the "or"-connected system $(\underbrace{H_2|\dots|H_2}_{\text{n times}})_{\underbrace{1|\dots|1}_{\text{n times}}}$.

So, we claim that the following equivalence is also satisfied

$$\begin{aligned} &(\mathtt{Sc}_m(H_1)|\mathtt{Sc}_n(H_2))_{m|n} = \\ &\quad (\underbrace{H_1|\dots|H_1}_{\text{m times}}|\underbrace{H_2|\dots|H_2}_{\text{n times}})_{\underbrace{1|1|\dots|1}_{\text{m+n times}}}. \end{aligned}$$

In other words, we can transform a $m|n$ routing problem with 2 sub-systems into a $1|\dots|1$ routing problem with $m+n$ sub-systems. Thanks to Remark 2,

$$H_1 \preceq \mathtt{Sc}_m(\mathtt{Sc}_m^\flat(H_1)) \text{ and } H_2 \preceq \mathtt{Sc}_n(\mathtt{Sc}_n^\flat(H_2)).$$

Therefore,

$$\begin{aligned} &(H_1|H_2)_{m|n} \preceq (\mathtt{Sc}_m(\mathtt{Sc}_m^\flat(H_1))|\mathtt{Sc}_n(\mathtt{Sc}_n^\flat(H_2)))_{m|n} = \\ &(\underbrace{\mathtt{Sc}_m^\flat(H_1)|\dots|\mathtt{Sc}_m^\flat(H_1)}_{\text{m times}}|\underbrace{\mathtt{Sc}_n^\flat(H_2)|\dots|\mathtt{Sc}_n^\flat(H_2)}_{\text{n times}})_{\underbrace{1|1|\dots|1}_{\text{m+n times}}}. \end{aligned}$$

The result of Proposition 19 ends the proof. □

Definition 24. (Asymptotic slope). Let $H \in \overline{\mathbb{Z}}_{min}^{\mathbb{N}}$ be an ultimately periodic counter function such that for all $t > t_0, H(t) = N \otimes H(t-T)$. Let us denote by $\sigma(H) = \frac{N}{T}$ the asymptotic slope of H.

It corresponds to the production rate in a manufacturing context.

Property 25. Let $H_1, H_2 \in \overline{\mathbb{Z}}_{min}^{\mathbb{N}}$ be ultimately periodic functions. Then

$$\sigma(H_1 \odot H_2) = \sigma(H_1) + \sigma(H_2).$$

Timed event graphs are always characterised by ultimately periodic behaviours. We can choose the routing $m|n$ so that the two endpoints of interval (3) have the same slope. The routing function thus aims at giving the best possible production rate, while reducing the uncertainty related to an interval modelling.

Indeed, by setting $r = m|n$ such that $\frac{m}{n} = \frac{\sigma(H_1)}{\sigma(H_2)}$, we have

$$\sigma(\mathtt{Sc}_m^\flat(H_1)) = \sigma(\mathtt{Sc}_n^\flat(H_2)),$$

and also

$$\sigma(H1 \odot H2) = \sigma(\mathtt{Sc}_{m+n}(\mathtt{Sc}_m^\flat(H_1) \oplus \mathtt{Sc}_n^\flat(H_2))).$$

5.3 Application case

Let us consider the job-shop with two parallel production lines $u_1 \to y_1$ and $u_2 \to y_2$ depicted on Figure 5. They are described through their impulse response as follows in $\overline{\mathbb{Z}}_{min}[\![\delta]\!]$:

$$H_1(\delta) = \delta^4(2\delta^3)^\star \quad H_2(\delta) = (\delta^5 \oplus 2\delta^6)(4\delta^4)^\star.$$

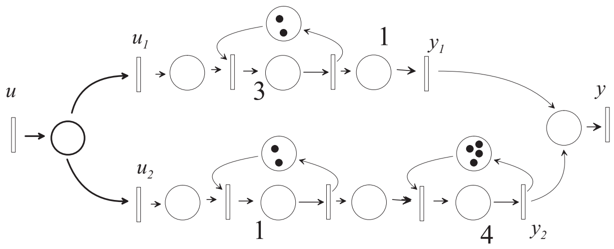


Figure 5. Job-shop example

We have the following production rates for each sub-systems:

$$\sigma(H_1) = 2/3 \text{ and } \sigma(H_2) = 1.$$

By applying a $r = 2|3$ routing, we guarantee a global production rate of $\sigma((H_1|H_2)_{2|3}) = \sigma(H_1) + \sigma(H_2) = 5/3$. Therefore, the behaviour of the whole shop is included in the interval $[\underline{H}, \overline{H}] = [H_1 \odot H_2, \mathtt{Sc}_5(\mathtt{Sc}^\flat_2(H_1) \oplus \mathtt{Sc}^\flat_3(H_2))]$. For this transfer line, we have (see Example 10)

$$\underline{H} = H_1 \odot H_2 = (\delta^4 \oplus 2\delta^5 \oplus 4\delta^6 \oplus 6\delta^7 \oplus 8\delta^9 \oplus 10\delta^{10} \oplus 14\delta^{13} \oplus 18\delta^{14})(20\delta^{12})^\star.$$

Besides,

$$\mathtt{Sc}^\flat_2(H_1) = \delta^4(1\delta^3)^\star,$$

and

$$\mathtt{Sc}^\flat_3(H_2) = (\delta^6 \oplus 1\delta^9 \oplus 2\delta^{13} \oplus 3\delta^{14})(4\delta^{12})^\star.$$

In our case

$$\mathtt{Sc}^\flat_3(H_2) \succeq \mathtt{Sc}^\flat_2(H_1),$$

so we can actually compute the upper bound of the interval, which is equal to

$$\overline{H} = \mathtt{Sc}_5(\mathtt{Sc}^\flat_3(H_2)) = (\delta^6 \oplus 5\delta^9 \oplus 10\delta^{13} \oplus 15\delta^{14})(20\delta^{12})^\star.$$

For this example, for any input u, the output $(H_1|H_2)_{2|3}(u)$ is greater than $\underline{H} * u$ and lower than $\overline{H} * u$. Figure 6 gives of graphical representation of counter functions $\underline{H}$ and $\overline{H}$. Let us note that the infimum $\underline{H}$ is the fastest behaviour. The grey zone corresponds to the uncertainties.

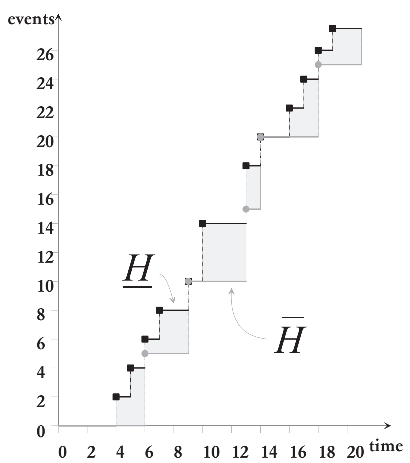


Figure 6. Impulse Response of both interval endpoints

6. CONCLUSION

Thanks to the dioid of intervals, as defined in the work of Mehdi Lhommeau (Lhommeau et al. [2004]), systems which are not linear in dioid $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ can be described by an interval of which endpoints are $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ linear. This approach allows for using results of the theory of dioids on the endpoints of such intervals, in order to study the properties of these systems.

In this paper, we showed that a system composed of parallel sub-systems in conflict over the single input of the general system can be bounded by two $\overline{\mathbb{Z}}_{max}$ linear system, provided a *periodic* routing upstream all the sub-systems. Each endpoint represents either a slower or a faster input/output behaviour than the actual one. When studying manufacturing systems, a routing policy can be chosen so that the systems represented by the endpoints of the interval have the same production rate.

The problem of modelling mutual exclusion sections of manufacturing systems in such a dioid of intervals has already been addressed in Boutin et al. [2008]. Thanks to the contribution of this very paper, under some periodicity constraints, some classes of manufacturing systems can now be formally represented in a dioid. The next step is to merge these two results into a global modelling approach and to put it to the test on a system including both mutual exclusion sections (as when two production lines merges and where pallets cannot overlap) and periodic routing sections (for example at a conveyor turnout).

REFERENCES

François Baccelli, Guy Cohen, Geert Jan Olsder, and Jean-Pierre Quadrat. *Synchronization and Linearity, An Algebra for Discrete Event Systems.* John Wiley and Sons, New York, 1992.

Thomas S. Blyth and Melvin F. Janowitz. *Residuation Theory.* Pergamon press, 1972.

Olivier Boutin, Bertrand Cottenceau, and Anne L'Anton. Dealing with Mutual Exclusion Sections in Production Systems: from Shared Resources to Parallel TEG's. In *Proceedings of the 17th IFAC World Congress, IFAC'08*, Seoul, South Korea, July 2008.

Guy Cohen, Pierre Moller, Jean-Pierre Quadrat, and Michel Viot. Linear system theory for discrete event systems. In *Proceedings of the 23rd IEEE Conference on Decision and Control*, pages 539 – 544, Las Vegas, Nevada, USA, December 1984.

Raymond A. Cuninghame-Green. *Minimax algebra*, volume 166 of *Lecture Notes in Economics and Mathematical Systems.* Springer-Verlag, 1979.

René David. Grafcet: A Powerful Tool for Specification of Logic Controllers. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 3(3):253 – 268, 1995.

Stéphane Gaubert. Performance Evaluation of Timed Automata. RR-1922, INRIA, May 1993.

Michel Gondran and Michel Minoux. Linear algebra in dioids: a survey of recent results. *Annals of Discrete Mathematics*, 19:147–164, 1984.

Laurent Hardouin. Data processing tools to handle periodic series in dioid. `www.istia.univ-angers.fr/~hardouin/outils.html`, 2006. Retrieved 9th October 2008.

Bernd Heidergott, Geert Jan Olsder, and Jacob van der Woude. *Max Plus at Work – Modeling and Analysis of Synchronized Systems: A Course on Max-Plus Algebra and Its Applications.* Princeton University Press, 2005.

Mehdi Lhommeau, Laurent Hardouin, Bertrand Cottenceau, and Luc Jaulin. Interval Analysis and Dioid: Application to Robust Controller Design for Timed Event Graphs. *Automatica*, 40(11): 1923 – 1930, November 2004.

Modeling and Control of Weight-Balanced Timed Event Graphs in Dioids

Bertrand Cottenceau, Laurent Hardouin, and Jean-Louis Boimond

***Abstract*—The class of timed event graphs (TEGs) has widely been studied thanks to an approach known as the theory of max-plus linear systems. In particular, the modeling of TEGs via formal power series in a dioid called $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ has led to input–output representations on which some model matching control problems have been solved. Our work attempts to extend the class of systems for which a similar control synthesis is possible. To this end, a subclass of timed Petri nets that we call weight-balanced timed event graphs (WBTEGs) will be first defined. They can model synchronization and delays (WBTEGs contain TEGs) and can also describe dynamic phenomena such as batching and event duplications (unbatching). Their behavior is described by rational compositions (sum, product and Kleene star) of four elementary operators γ^n, δ^t, μ_m, and β_b on a dioid of formal power series denoted $\mathcal{E}^*[\![\delta]\!]$. The main feature is that the transfer series of WBTEGs have a property of ultimate periodicity (such as rational series in $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$). Finally, the existing results on control synthesis for max-plus linear systems find a natural application in this framework.**

***Index Terms*—Controller synthesis, dioids, discrete-event systems, formal power series, residuation, weighted timed event graphs (WTEGs).**

I. Introduction

Since the beginning of the eighties, it has been known that the class of timed event graphs (TEGs) can be studied thanks to linear models in specific algebraic structures called dioids (or idempotent semirings) [1], [5], [9], [14], [19]. Among different representations, a description of TEGs by the means of operators is possible. By denoting Σ the semimodule of counter functions[1], one can describe their behavior by combining two shift operators (see [1, Ch. 5], [5]) denoted, respectively, $\gamma : \Sigma \to \Sigma$ and $\delta : \Sigma \to \Sigma$

$$(\gamma x)(t) = x(t) + 1;\ (\delta x)(t) = x(t-1). \tag{1}$$

The input–output behavior of a TEG is then described by a transfer matrix the entries of which are elements of the rational closure of the set $\{\varepsilon, e, \gamma, \delta\}$, where ε (resp. e) is the null (resp. neutral) operator. In other words, the input–output behavior of any TEG can be written with a finite expression involving these operators. Moreover, it is shown in [1], [10], and [9] that a rational expression can be turned into a canonical form which is ultimately periodic. The algebraic structure for the calculus of transfer series for TEGs is a dioid called $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ introduced in [5]. It is a set of formal series in two variables γ and δ corresponding, respectively, to the event-shift operator and to the time-shift operator given in (1). This modeling has made it possible to elaborate software tools to compute the transfer matrix of any TEG in $\mathcal{M}_{in}^{ax}[\![\gamma,\delta]\!]$ [7], [9]. These tools also contribute to the performance evaluation of discrete event systems since the ultimate periodicity of a TEG corresponds to its production rate (number of events by time unit).

Moreover, an input–output model is well suited to address some model matching control problems such as the ones studied in [6], [15], [17], and [13]. These control strategies have clearly been elaborated by analogy with the classical control theory, i.e., controllers are computed so that the closed-loop system matches a given reference model. The role of the controller is to filter the system input in order to achieve some given performance. When applied on a manufacturing production system, the controller obtained with that approach leads to improve the internal flows of products and to reduce the internal stocks.

The objective of the work presented here is to study the class of weighted timed event graphs (WTEGs) [18], i.e., TEGs the arcs of which are valued by positive integers. In comparison with TEGs, the modeling power is greatly increased since in addition to synchronisations and delays, WTEGs can describe batch constitution (several successive input events are necessary to release one output event) and duplication (one input event releases several output events). These phenomena are usual in manufacturing systems (batch/unbatch) and cannot be accurately modeled with ordinary TEGs.

In the literature of discrete event systems, the analysis of WTEGs is discussed for instance in [2], [18], and also under an equivalent graphical model called Synchronous Data Flow graphs (SDF) in [16], [21]. In these works, WTEGs are considered as modeling tools both for manufacturing systems and for computation in the field of concurrent applications. The main concerns are the throughput computation of a given system [8] and the possibility of elaborating a periodic schedule [2], [18]. Due to the importance of the synchronisation phenomena in these systems, several papers based on the max-plus theory are available. In [8], [11], the throughput of a SDF is computed thanks to a max-plus model. In [4] and [12], a class of *fluid* TEGs with multipliers (TEGMs) is modeled by formal series in a specific dioid. The TEGMs can be seen as a continuous approxi-

Manuscript received July 17, 2012; revised June 07, 2013; accepted November 27, 2013. Date of publication December 12, 2013; date of current version April 18, 2014. Recommended by Associate Editor C. Hadjicostis.

The authors are with the Laboratoire Angevin de Recherche en Ingénierie des Systèmes, LARIS/ISTIA, LISA/ISTIA, Université d'Angers, Angers 49100, France (e-mail: bertrand.cottenceau@univ-angers.fr; laurent.hardouin@univ-angers.fr; jean-louis.boimond@univ-angers.fr).

Color versions of one or more of the figures in this paper are available online at http://ieeexplore.ieee.org.

Digital Object Identifier 10.1109/TAC.2013.2294822

[1]A counter function $x : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, t \mapsto x(t)$ gives the cumulative number of occurrences of the event labeled x at date t. Such a function plays the role of signal.

mation of the (discrete) WTEGs considered here. Nevertheless, as mentioned in the conclusion of [4], the fluid behavior can be arbitrarily far from the discrete one. Therefore, the (discrete) WTEGs deserve a specific study since they cannot be analysed with the tools introduced in [4].

The main motivation of our work is to tackle the controller synthesis for WTEGs. More specifically, we aim to solve some model matching control problems (such as [6], [13], [17]) for the class of WTEGs. Let us note that this adaptation of existing results is not so immediate since all these works rely on an input–output representation (transfer function) which was not available yet for WTEGs. In that context, our main contribution is to provide a description of the input–output behavior of WTEGs by formal power series the variable of which can be assimilate to operators. In addition to operators γ and δ defined in (1), two additional ones denoted β_b and μ_m are introduced to describe a batch operation (division operator) and a duplication phenomenon (multiplier operator). The main result of our paper is to show that for a subclass of WTEGs that we call weight-balanced timed event graphs (WBTEGs), the input–output behavior is necessarily described by a rational expression (with operators γ^n, δ^t, μ_m, and β_b) that can be turned into an ultimately periodic form. As for TEGs, periodic phenomena are still a prevailing aspect of the behavior of WBTEGs. The algebraic structure used to obtain these results is a new dioid called $\mathcal{E}^*[\![\delta]\!]$ that encompasses dioid $\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[\![\gamma,\delta]\!]$.

The paper is organized as follows. In Section II, the subclass of weight-balanced timed event graphs is first defined. Then, the modeling of WBTEGs thanks to the additive operators γ^n, δ^t, μ_m, and β_b is presented. A new dioid of formal power series denoted $\mathcal{E}^*[\![\delta]\!]$ is introduced in Section III. The formal series have a graphical representation that is also given in that section. The results concerning the ultimate periodicity of WBTEGs' transfer series are stated in Section IV. This part lies on technical proofs adapted from the work on the rational calculus in $\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[\![\gamma,\delta]\!]$ introduced in [9], [10]. Finally, the question of control synthesis for WBTEGs is addressed in Section V after some reminders on the residuation theory.

II. Weight-Balanced Timed Event Graphs (WBTEGs)

Definitions

Weighted Event Graphs (WEGs) [18] constitute a subclass of generalized Petri Nets given by a set of places $P = \{p_1, \ldots, p_m\}$ and a set of transitions $T = \{t_1, \ldots, t_n\}$ (see [20] for a survey on Petri nets). An event graph cannot describe concurrency phenomena, then every place $p_k \in P$ is defined between one input transition t_i and one output transition t_o. The arcs $t_i \rightarrow p_k$ and $p_k \rightarrow t_o$ are oriented and valued[2] by strictly positive integers denoted respectively $w_i(p_k)$ and $w_o(p_k)$. A transition without input (resp. output) place is called a source or input (resp. sink or output) transition. An initial marking (a set of initial tokens depicted with black dots) denoted $M_0(p_k)$ is associated to each place $p_k \in P$. A given transition t_j is said *enabled* as soon as each input place p_l contains at least $w_o(p_l)$ tokens. A transition can be fired only if it is enabled. At each firing of a transition, $w_o(p_l)$ tokens are removed from each input place p_l, and $w_i(p_k)$ tokens are added to each output place p_k.

[2]From a graphical point of view, the valuations are depicted directly on the arcs.

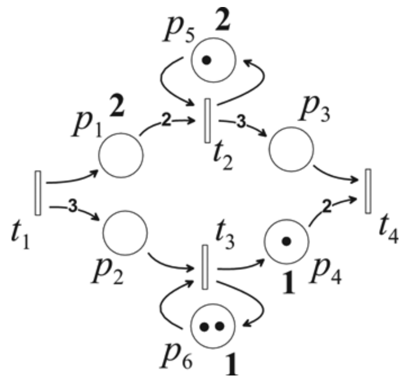


Fig. 1. Weight-balanced timed event graph.

1) Example 1: For the WEG depicted on Fig. 1, t_1 (resp. t_4) is an input (resp. output) transition. The initial marking is given by $M_0(p_4) = 1$, $M_0(p_5) = 1$ and $M_0(p_6) = 2$. All arcs are assumed to be 1-valued except when mentioned, for instance $w_i(p_3) = 3$ and $w_o(p_1) = 2$. Transition t_4 is enabled when place p_4 has two tokens and place p_3 has one token. The firing of transition t_2 adds three tokens to place p_3.

Definition 1 (Gain of a Path): The gain of an elementary (oriented) path $t_i \rightarrow p_k \rightarrow t_o$ is defined as $\Gamma(t_i, p_k, t_o) \triangleq w_i(p_k)/w_o(p_k) \in \mathbb{Q}$. For a general path π passing through several places, the gain corresponds to the product of elementary paths, i.e., $\Gamma(\pi) = \prod_{p_j \in \pi} w_i(p_j)/w_o(p_j)$.

Definition 2 (Neutral and Weight-Balanced Event Graph): A WEG is said *neutral* if all its circuits have a gain of 1. A WEG is said *weight-balanced* if $\forall t_i, t_j \in T$, all the paths from t_i to t_j have the same gain (gains are balanced for parallel paths). Therefore, a weight-balanced event graph is necessarily neutral.

A holding time denoted $\Delta(p_k) \in \mathbb{N}$ can be associated to each place $p_k \in P$ of a WEG. Each token entering in a place p_k has to wait $\Delta(p_k)$ time units before contributing to enable the output transition. A WEG with holding times is called a weighted timed event graph (WTEG). Hereafter, we will only consider weight-balanced timed event graphs (in short WBTEGs).

Definition 3 (Earliest Functioning): The *earliest functioning* of a WTEG consists in firing transitions as soon as they are enabled, except for input transitions that are fired in accordance with input trajectories.

2) Example 2: For the WTEG depicted on Fig. 1, holding times are attached to places: $\Delta(p_1) = 2$, $\Delta(p_6) = 1$, $\Delta(p_4) = 1$, and $\Delta(p_5) = 2$. This is a Weight-Balanced TEG since it is neutral and all the parallel paths from t_1 to t_4 are balanced (they have the same gain equal to $3/2$). For instance, $\Gamma(t_1, p_1, t_2) = 1/2$ and $\Gamma(t_1, p_2, t_3) = 3$. The input–output gain of $3/2$ represents the fact that the average functioning of the system produces three output events for each two input events.

A. Algebra of Additive Operators

A dioid [1, Ch. 4] (or idempotent semiring) is an algebraic structure with two inner operations, a sum and a product. The sum is commutative, associative and idempotent ($a \oplus a = a$) and the product is associative and distributive over the sum. The neutral elements of these operations are usually denoted ε for the sum, and e for the product. Since the sum is idempotent, a natural order can be associated to a dioid:

$$a \succeq b \iff a = a \oplus b. \quad (2)$$

When the sum of any finite or infinite subset of a dioid is defined, and the product distributes over infinite sums, the dioid is said complete. A complete dioid is a partially ordered set (poset) with a complete lattice structure: the infimum operator is defined as $a \wedge b = \bigoplus\{x | x \oplus a = a \text{ and } x \oplus b = b\}$. On a dioid, since the order is partial, two elements a and b may be incomparable: $a \not\preceq b$ and $b \not\preceq a$, which is denoted by $a \| b$.

For WBTEGs modeling, a counter function $x_i : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z} \cup \{+\infty\}$ is associated to each transition t_i: $x_i(\tau)$ gives the cumulative number of events t_i at date τ. A counter function is naturally non-decreasing: $\tau_a \leq \tau_b \Rightarrow x(\tau_a) \leq x(\tau_b)$. The set of counter functions denoted Σ has a semimodule structure for the internal operation $\oplus = \min$ and for the scalar operation defined by $\lambda.x(t) = x(t) + \lambda$. An operator is a map $\mathcal{H} : \Sigma \to \Sigma$ which is said *linear* if $\forall x, y \in \Sigma$, a) $\mathcal{H}(x \oplus y) = \mathcal{H}(x) \oplus \mathcal{H}(y)$ and b) $\mathcal{H}(\lambda.x) = \lambda.\mathcal{H}(x)$. An operator is said *additive* if only a) is satisfied.

Definition 4 (Dioid $\mathcal{O}$ of Additive Operators [19]): The set of additive operators on Σ, with the operations defined below, is a non commutative complete dioid denoted $\mathcal{O}$: $x \in \Sigma$, $\forall \mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \in \mathcal{O}$

$$\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 \triangleq \forall x, (\mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2)(x) = \min(\mathcal{H}_1(x), \mathcal{H}_2(x))$$
$$\mathcal{H}_1 \circ \mathcal{H}_2 \triangleq \forall x, (\mathcal{H}_1 \circ \mathcal{H}_2)(x) = \mathcal{H}_1(\mathcal{H}_2(x)).$$

The null operator (neutral for $\oplus$ and absorbing for $\circ$) is denoted $\varepsilon : \forall x \in \Sigma, (\varepsilon x)(t) = +\infty$ and the unit operator (neutral for $\circ$) is denoted $e : \forall x \in \Sigma, (ex)(t) = x(t)$.

For the sequel, we will simply denote $\mathcal{H}x$ (instead of $\mathcal{H}(x)$) the image of the counter $x \in \Sigma$ by the additive operator $\mathcal{H} \in \mathcal{O}$, and we will also often omit symbol $\circ$ for the product of $\mathcal{O}$, $\mathcal{H}_1\mathcal{H}_2 = \mathcal{H}_1 \circ \mathcal{H}_2$. Two additive operators $\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2 \in \mathcal{O}$ are equal if $\forall x \in \Sigma, \mathcal{H}_1 x = \mathcal{H}_2 x$.

Definition 5 (Elementary Operators in WBTEGs): The dynamical phenomena arising in WBTEGs can be described thanks to the next additive operators in $\mathcal{O}$: let $x \in \Sigma$ be a counter

$$\begin{aligned} \tau \in \mathbb{Z}, \delta^\tau &: \forall x,\ (\delta^\tau x)(t) = x(t - \tau), \\ \nu \in \mathbb{Z}, \gamma^\nu &: \forall x,\ (\gamma^\nu x)(t) = x(t) + \nu, \\ b \in \mathbb{N}^*, \beta_b &: \forall x,\ (\beta_b x)(t) = \lfloor x(t)/b \rfloor, \\ m \in \mathbb{N}^*, \mu_m &: \forall x,\ (\mu_m x)(t) = x(t) \times m \end{aligned}$$

where $\lfloor a \rfloor$ is the greatest integer less than or equal to $a \in \mathbb{Q}$.

We can remark that the unit operator e has various expressions: $e = \gamma^0 = \delta^0 = \mu_1 = \beta_1$.

Proposition 1: The next formal identities can be stated

$$\gamma^n \gamma^{n'} = \gamma^{n+n'};\ \delta^t \delta^{t'} = \delta^{t+t'} \quad (3)$$
$$\gamma^n \oplus \gamma^{n'} = \gamma^{\min(n,n')};\ \delta^t \oplus \delta^{t'} = \delta^{\max(t,t')} \quad (4)$$
$$\gamma^1\delta^1 = \delta^1\gamma^1;\ \mu_m\delta^1 = \delta^1\mu_m;\ \beta_b\delta^1 = \delta^1\beta_b \quad (5)$$
$$\mu_m\gamma^n = \gamma^{m\times n}\mu_m;\ \gamma^n\beta_b = \beta_b\gamma^{n\times b}. \quad (6)$$

Proof: For all counter $x \in \Sigma$ we have (3): $\forall t, (x(t) + n') + n = x(t) + (n' + n)$ and $x(\tau - t - t') = x(\tau - (t + t'))$. Equation (4): $\forall t, \min(x(t) + n, x(t) + n') = x(t) + \min(n, n')$. Since $\forall t, x(t) \geq x(t - 1)$, then $\min(x(\tau - t), x(\tau - t')) = x(\tau - \max(t, t'))$. Equation (5): immediate equation (6): $m \times (x(t) + n) = m \times x(t) + m \times n$ and $\lfloor x(t)/b \rfloor + n = \lfloor (x(t) + n \times b)/b \rfloor$. ■

Definition 6 (Kleene Star): The Kleene star of an operator is defined by: $\forall \mathcal{H} \in \mathcal{O}, \mathcal{H}^* = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{H}^i = e \oplus \mathcal{H} \oplus \mathcal{H}^2 \oplus \ldots$ with $\mathcal{H}^n = \mathcal{H} \circ \ldots \circ \mathcal{H}$ (n times).

Theorem 1: On a complete dioid $\mathcal{D}$, the implicit equation $x = ax \oplus b$ has $x = a^*b$ as least solution.

Proof: see [1, Th. 4.75] ■

Theorem 2: For all operator $\mathcal{H} \in \mathcal{O}$, the next equalities are satisfied: $\mathcal{H} = \mathcal{H}(\delta^{-1})^* = (\delta^{-1})^*\mathcal{H} = (\gamma^1)^*\mathcal{H} = \mathcal{H}(\gamma^1)^*$.

Proof: Since a counter function x is monotone, then $\forall t, x(t + 1) \geq x(t) \iff \delta^{-1}x \preceq x$. For the same reason, $\forall t, x(t) + 1 \geq x(t) \iff \gamma x \preceq x$. Therefore, $\forall x \in \Sigma, \forall \mathcal{H} \in \mathcal{O}, \mathcal{H}(\gamma^1)^*x = \mathcal{H}x = (\gamma^1)^*\mathcal{H}x = \mathcal{H}(\delta^{-1})^*x = (\delta^{-1})^*\mathcal{H}x$. ■

Theorem 3: On a complete dioid $\mathcal{D}$, with $a, b \in \mathcal{D}$, $k \in \mathbb{N}^*$, one has

$$(a \oplus b)^* = a^*(ba^*)^* \quad (7)$$
$$(ab^*)^* = e \oplus a(a \oplus b)^* \quad (8)$$
$$a^* = (a^k)^*(e \oplus a \oplus \ldots \oplus a^{k-1}) \quad (9)$$
$$\text{if } \mathcal{D} \text{ is commutative } (a \oplus b)^* = a^*b^*. \quad (10)$$

Proof: These results can be found in [9, Prop. 4.1.6] and in [1, Sec. 4.8] ■

Definition 7 (Redundancy): Let us consider an expression $w = o_1 \oplus o_2 \oplus \ldots \oplus o_n$, with $o_i \in \mathcal{O}$. A term o_j is said redundant for w if $w = \bigoplus o_i = \bigoplus\{o_i | o_i \neq o_j\}$. In other words, removing o_j does not change the expression w.

1) Example 3: In the following expression $\gamma^1\delta^2 \oplus \gamma^3\delta^1 \oplus \gamma^4\delta^3$, operator $\gamma^3\delta^1$ is redundant. Indeed, by applying (4), $\gamma^1\delta^2 = \gamma^1\delta^2 \oplus \gamma^3\delta^2 \oplus \gamma^3\delta^1 \iff \gamma^3\delta^1 \preceq \gamma^1\delta^2$.

B. Modeling of WBTEGs

The WBTEGs are analyzed here with the earliest functioning rule (see Def. 3). We can model a path of a WBTEG by a product of operators in $\mathcal{O}$, the synchronization of parallel paths by a sum $\oplus$, and the circuits by the Kleene star of operators. Each elementary path $t_i \to p_k \to t_j$ of a WBTEG, where $M_0(p_k)$ is the initial marking of place p_k and $\tau = \Delta(p_k)$ its holding time, can be described by the relation

$$x_j = \beta_{w_o(p_k)}\gamma^{M_0(p_k)}\mu_{w_i(p_k)}\delta^\tau x_i \quad (11)$$

where x_i (resp. x_j) is the counter function associated to transition t_i (resp. t_j).

1) Example 4 (WBTEG of Fig. 1): For the WBTEG depicted in Fig. 1 and for the earliest functioning, we have

$$x_2(t) = \min(\lfloor \tfrac{x_1(t-2)}{2} \rfloor, x_2(t - 2) + 1)$$
$$x_3(t) = \min(x_1(t) \times 3, x_3(t - 1) + 2).$$

Therefore, the counter functions are linked by $x_2 = \beta_2\delta^2 x_1 \oplus \gamma^1\delta^2 x_2$ and thanks to Theorem 1, $x_2 = (\gamma^1\delta^2)^*\beta_2\delta^2 x_1$. Similarly, $x_3 = (\gamma^2\delta^1)^*\mu_3 x_1$. Finally, the counter function associated to the output transition is $x_4 = \mu_3 x_2 \oplus \beta_2\gamma^1\delta^1 x_3 = (\mu_3(\gamma^1\delta^2)^*\beta_2\delta^2 \oplus \beta_2\gamma^1\delta^1(\gamma^2\delta^1)^*\mu_3)x_1$. The input–output behavior (or transfer function) of the WBTEG is described by the rational expression $\mu_3(\gamma^1\delta^2)^*\beta_2\delta^2 \oplus \beta_2\gamma^1\delta^1(\gamma^2\delta^1)^*\mu_3$ in $\mathcal{O}$.

Theorem 4 (Transfer Matrix of a WBTEG): The behavior of a WBTEG is described by a matrix the elements of which belong to the rational closure of the set of operators $O_{M,B} = \{\varepsilon, e, \gamma^1, \delta^1, \mu_2, \ldots, \mu_M, \beta_2, \ldots, \beta_B\}$ where $B = \max_i w_o(p_i)$ and $M = \max_i w_i(p_i)$ with $p_i \in P$.

Proof: For each place p_k an operator $\beta_b\gamma^n\mu_m\delta^t$ [see (11)] is associated. Therefore, the different graph compositions (parallel, serial, feedback) are expressed by operations in $\{\oplus, \circ, *\}$. Since a WBTEG is a finite graph, the rationality is straightforward. ■

III. Graphical Representations of Operators

According to (5) in Prop. 1, operator δ^1 can commute with any simple or composed event operator. For instance, $\delta^1\gamma^1\delta^2\mu_3\beta_2\delta^1 = \gamma^1\mu_3\beta_2\delta^4 = \delta^4\gamma^1\mu_3\beta_2$. Hence, in every finite composition (product) of elementary operators in $\{\delta^t, \gamma^n, \mu_m, \beta_b\}$, the time-shift operator can be factorized. That is why operations can be evaluated separately, on the one hand on event operators and on the other hand on time-shift operators.

A. Bi-Dimensional Graphical Representation of E-Operators

1) Event Operators: The set of operators generated by sum and composition of operators in γ^n, μ_m and β_b has a dioid structure.

Definition 8 (Dioid $\mathcal{E}$): We denote by $\mathcal{E}$ (for event) the dioid of operators obtained by sums and compositions of operators in $\{\varepsilon, e, \gamma^n, \mu_m, \beta_b\}$, with $n \in \mathbb{Z}$, and $m, b \in \mathbb{N}^*$. The elements of $\mathcal{E}$ are called E-operators hereafter.

Dioid $\mathcal{E}$ is a complete subdioid of $\mathcal{O}$ (additive operators). Since operation $\circ$ is not commutative on $\mathcal{E}$, checking the equality of two E-operators is not immediate. Nevertheless, the comparison of E-operators is possible thanks to an associate map called *counter-to-counter (C/C) function*. Since an E-operator $w \in \mathcal{E}$ induces modifications only on the event numbering (no time shift), its instantaneous behavior is described by a function denoted $\mathcal{F} : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$.

Definition 9 (C/C Function $\mathcal{F}$): For a given E-operator w in $\mathcal{E}$, we denote by $\mathcal{F}_w : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}, k_i \mapsto k_o$ the mapping which maps its input counter value k_i to its output counter value k_o. $\mathcal{F}_w$ is obtained by replacing $x(t)$ by k_i in the counter equation $(wx)(t)$ where $x \in \Sigma$.

2) Example 5: For instance $(\beta_2\gamma^1\mu_3 x)(t) = \lfloor(3 \times x(t) + 1)/2\rfloor$. By replacing $x(t) \in \mathbb{Z}$ by a value $k_i \in \mathbb{Z}$, we obtain $\mathcal{F}_{\beta_2\gamma^1\mu_3}(k_i) = \lfloor(3 \times k_i) + 1)/2\rfloor$ (see Fig. 2). For operator $\beta_2\gamma^1\mu_3$, if k_i input events have occurred at a given date t, then $k_o = \lfloor(3 \times k_i) + 1)/2\rfloor$ output events have occurred at date t.

The C/C function $\mathcal{F}_w$ gives an unambiguous representation of E-operator w and leads to a natural bi-dimensional graphical representation in $\mathbb{Z}^2$. On the graphical representation, the axis are labeled by I-count (input count) and O-count (output count).

Due to the non commutativity of product in $\mathcal{O}$, checking the formal identity of operators is not immediate. Nevertheless, when restricted to operators in $\mathcal{E}$, the equality can be checked thanks to the C/C function

$$w_1, w_2 \in \mathcal{E}, w_1 = w_2 \iff \mathcal{F}_{w_1} = \mathcal{F}_{w_2}. \quad (12)$$

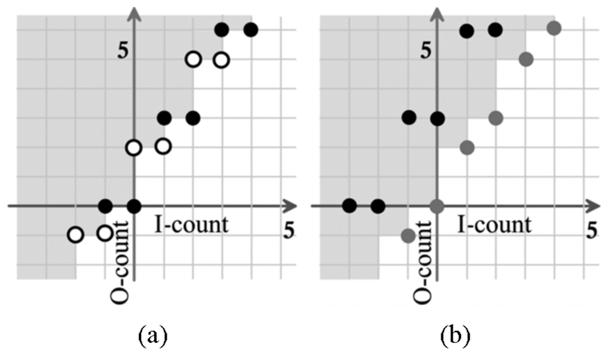


Fig. 2. (a) On the left, $\mathcal{F}_{\mu_3\beta_2\gamma^1}$ (black dots) and $\mathcal{F}\gamma^2\mu_3\beta_2$ (white dots). (b) On the right, $\mathcal{F}_{\beta_2\gamma^1\mu_3}$ (gray dots) and $\mathcal{F}_{\gamma^3\mu_3\beta_2\gamma^1}$ (black dots).

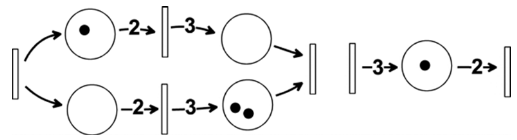


Fig. 3. Input–output equivalence: $\mu_3\beta_2\gamma^1 \oplus \gamma^2\mu_3\beta_2 = \beta_2\gamma^1\mu_3$.

Moreover, we have an isomorphism between $\mathcal{E}$ and the set of C/C functions

$$\mathcal{F}_{w_1\oplus w_2} = \min(\mathcal{F}_{w_1}, \mathcal{F}_{w_2}) \text{ and } \mathcal{F}_{w_1\circ w_2} = \mathcal{F}_{w_1} \circ \mathcal{F}_{w_2}. \quad (13)$$

In other words, the calculus on C/C functions is an alternative to the formal calculus on $\mathcal{E}$.

3) Example 6: Thanks to (12) and (13), we can check the equality $\mu_3\beta_2\gamma^1 \oplus \gamma^2\mu_3\beta_2 = \beta_2\gamma^1\mu_3$, even if Prop. 1 does not give all the formal equalities necessary to obtain that result. On the right-hand side of Fig. 2, $\mathcal{F}_{\beta_2\gamma^1\mu_3}$ is depicted with gray dots, and on the left-hand side, $\mathcal{F}_{\mu_3\beta_2\gamma^1}$ is depicted with black dots and $\mathcal{F}_{\gamma^2\mu_3\beta_2}$ with white dots. Obviously, $\mathcal{F}_{\beta_2\gamma^1\mu_3} = \min(\mathcal{F}_{\mu_3\beta_2\gamma^1}, \mathcal{F}_{\gamma^2\mu_3\beta_2})$. When translated into a WBTEG model, the previous identity means that the two WBTEGs depicted in Fig. 3 are equivalent from an input–output point of view: the same input sequence will produce the same output sequence.

4) Graphical Considerations: The relation on E-operators can be viewed from a geometrical point of view.

Partial Order on $\mathcal{E}$: thanks to (2), the comparison in $\mathcal{E}$ is interpreted as follows:

$$\begin{aligned} w_1 \preceq w_2 &\iff w_1 \oplus w_2 = w_2 \\ &\iff min(\mathcal{F}_{w_1}, \mathcal{F}_{w_2}) = \mathcal{F}_{w_2} \\ &\iff \mathcal{F}_{w_1} \geq \mathcal{F}_{w_2}. \end{aligned}$$

In Fig. 2, the gray zone corresponds to the domain of E-operators less than w according to the order (2). For instance, we can see on the right-hand side of Fig. 2 that $\mathcal{F}_{\gamma^3\mu_3\beta_2\gamma^1} \geq \mathcal{F}_{\beta_2\gamma^1\mu_3}$, which corresponds to $\gamma^3\mu_3\beta_2\gamma^1 \preceq \beta_2\gamma^1\mu_3$. The right side of Fig. 2 shows that operator $\beta_2\gamma^1\mu_3$ dominates[3] operator $\gamma^3\mu_3\beta_2\gamma^1$. From a practical point of view, if these two operators are synchronized, the behavior of operator $\beta_2\gamma^1\mu_3$ is dominant.

[3]The domination designation comes from [5].

Left and Right Product by γ^n: For $w \in \mathcal{E}$, the left and the right product by γ^n are graphically described by shifts in $\mathbb{Z}^2$, say

$$\mathcal{F}_{\gamma^n w} \iff \mathcal{F}_w \text{ shifted by } n \text{ units to the top in } \mathbb{Z}^2(\uparrow)$$
$$\mathcal{F}_{w\gamma^n} \iff \mathcal{F}_w \text{ shifted by } n \text{ units to the left in } \mathbb{Z}^2(\leftarrow).$$

B. Periodic E-Operators

Definition 10 (Periodic E-Operator): An E-operator $w \in \mathcal{E}$ is said (n, n')-periodic, or simply periodic, if $\mathcal{F}_w$ satisfies $\forall k_i \in \mathbb{Z}, \mathcal{F}_w(k_i + n) = \mathcal{F}_w(k_i) + n'$.

Clearly, γ^n, μ_m, β_b are periodic E-operators since

$$\mathcal{F}_{\gamma^n}(0) = n, \mathcal{F}_{\gamma^n}(k_i + 1) = \mathcal{F}_{\gamma^n}(k_i) + 1$$
$$\mathcal{F}_{\mu_m}(0) = 0, \mathcal{F}_{\mu_m}(k_i + 1) = \mathcal{F}_{\mu_m}(k_i) + m$$
$$\mathcal{F}_{\beta_b}(0 \le k_i < b) = 0, \mathcal{F}_{\beta_b}(k_i + b) = \mathcal{F}_{\beta_b}(k_i) + 1.$$

γ^n is $(1, 1)$-periodic, μ_m is $(1, m)$-periodic and β_b is $(b, 1)$-periodic. The set of periodic E-operators is denoted $\mathcal{E}_{per}$.

Definition 11 (Gain of $w \in \mathcal{E}_{per}$): Let $w \in \mathcal{E}_{per}$ be a (k, k')-periodic E-operator. The gain of w is defined as $\Gamma(w) = k'/k$. It is the average slope of $\mathcal{F}_w$. An E-operator is said conservative if $\Gamma(w) = 1$.

Proposition 2: Let $w_1, w_2 \in \mathcal{E}_{per}$ be two periodic E-operators. We have

$$w_1 w_2 \in \mathcal{E}_{per} \text{ and } \Gamma(w_1 w_2) = \Gamma(w_1) \times \Gamma(w_2)$$
$$\text{if } \Gamma(w_1) = \Gamma(w_2) \text{ then } w_1 \oplus w_2 \in \mathcal{E}_{per}$$
$$\text{if } \Gamma(w_1) = \Gamma(w_2) \text{ then } w_1 \wedge w_2 \in \mathcal{E}_{per}.$$

Proof: Since w_1 and w_2 are periodic then $\mathcal{F}_{w_1}(k_i + k_1) = \mathcal{F}_{w_1}(k_i) + k_1'$ and $\mathcal{F}_{w_2}(k_i + k_2) = \mathcal{F}_{w_2}(k_i) + k_2'$. Hence, $\mathcal{F}_{w_2}(k_i + k_1 k_2) = \mathcal{F}_{w_2}(k_i) + k_1 k_2'$ and $\mathcal{F}_{w_1}(\mathcal{F}_{w_2}(k_i + k_1 k_2)) = \mathcal{F}_{w_1}(\mathcal{F}_{w_2}(k_i) + k_1 k_2') = \mathcal{F}_{w_1}(\mathcal{F}_{w_2}(k_i)) + k_1' k_2' = \mathcal{F}_{w_1 w_2}(k_i) + k_1' k_2'$. Therefore, operator $w_1 w_2$ is a periodic operator the gain of which is $(k_1' k_2')/(k_1 k_2)$. For the sum of operators with the same gain, both operators can be written with the same periodicity: $\mathcal{F}_{w_1}(k_i + k_1 k_2) = \mathcal{F}_{w_1}(k_i) + k_1' k_2$ and $\mathcal{F}_{w_2}(k_i + k_1 k_2) = \mathcal{F}_{w_2}(k_i) + k_2' k_1$ with $k_1' k_2 = k_1 k_2'$ since $\Gamma(w_1) = \Gamma(w_2)$. Hence, $\min(\mathcal{F}_{w_1}, \mathcal{F}_{w_2})$ is also periodic. By symmetry, the max ($\wedge$) of two periodic E-operators with the same gain is also periodic. ■

Proposition 3: The E-operators arising in WBTEGs are periodic.

Proof: Due to the definition of WBTEGs (see Def. 2), the parallel paths have the same gain. Thanks to Prop. 2, the periodicity of E-operators is therefore kept by the serial and the parallel compositions of WBTEGs. ■

A periodic E-operator $w \in \mathcal{E}_{per}$ can be handled by the means of a finite representation, which will make a finite data description adapted to a software implementation possible. A (k, k')-periodic E-operator can be represented by a pair $(k, k') \in \mathbb{N}^{*2}$ describing the gain $\Gamma(w) = k'/k$ and the values of $\mathcal{F}_w(k_i)$ for one period $k_i \in \{0, \ldots, k - 1\}$. The canonical form of a periodic E-operator is strongly linked to the possibility of describing a periodic C/C function with a canonical form. First, it is clear that a (k, k')-periodic C/C function $\mathcal{F}_w$ is also (nk, nk')-periodic, for $n \in \mathbb{N}^*$. Conversely, a (k, k')-periodic C/C function $\mathcal{F}_w$ may have a shorter periodicity if there exists $n' \in \mathbb{N}$ such that $\forall k_i, \mathcal{F}_w(k_i + k/n') = k'/n'$. All the periodicities of a given E-operator are therefore totally ordered.

Definition 12 (Least Periodicity): The periodicity of a periodic operator is defined as the least pair (k, k') such that $\forall k_i, \mathcal{F}_w(k_i + k) = k'$.

Remark 1: For a given representation of a (k, k')-periodic operator $w \in \mathcal{E}_{per}$, finding the least periodicity amounts to finding the greatest integer n such that w is also $(k/n, k'/n)$-periodic.

The canonical decomposition of an operator $w \in \mathcal{E}_{per}$ is based on a sum of specific E-operators defined hereafter.

Definition 13 (∇ Operator): Let us denote by $\nabla_{m|b}$ and ∇_n the next composed E-operators $\nabla_{m|b} \triangleq \mu_m \beta_b$ and $\nabla_n \triangleq \mu_n \beta_n$.

Let us note that $\nabla_{m|b}$ is (b, m)-periodic and that it is graphically represented by a staircase C/C function: $\mathcal{F}_{\nabla_{m|b}}(k_i) = m\lfloor k_i/b \rfloor$, say $\mathcal{F}_{\nabla_{m|b}}(0 \le k_i \le b-1) = 0$, and $\mathcal{F}_{\nabla_{m|b}}(k_i + b) = \mathcal{F}_{\nabla_{m|b}}(k_i) + m$. For instance in Fig. 2, operator $\mathcal{F}_{\gamma^3 \nabla_{3|2} \gamma^1}$, which is $(2, 3)$-periodic, is depicted on the right-hand side with black dots.

Proposition 4 (Canonical Form of $w \in \mathcal{E}_{per}$): A periodic E-operator w has a canonical form which is a finite sum given by $w = \bigoplus_{i=1}^{N} \gamma^{n_i} \nabla_{m|b} \gamma^{n_i'}$ without redundant terms and such that $0 \le n_i' < b$.

Proof: First, $\mathcal{F}_w$ is written with its least periodicity (see Def. 12). This form is a canonical (b, m)-periodic form of $\mathcal{F}_w$. Then, $\mathcal{F}_w$ can be expressed as the minimum of b functions $\mathcal{F}_w = min(S_0, \ldots, S_{b-1})$ where function S_i is a (b, m)-periodic function given by $S_i(0 \le j \le i) = \mathcal{F}_w(i)$ and $S_i(i < j \le b - 1) = \mathcal{F}_w(i) + m$. Each function S_i is a staircase (b, m)-periodic function which is also the C/C function of an operator $\gamma^n \nabla_{m|b} \gamma^{n'}$, more specifically $S_i = \mathcal{F}_{\gamma^{\mathcal{F}_w(i)} \nabla_{m|b} \gamma^{b-1-i}}$. Finally, the canonical form of w is obtained by summing $\bigoplus_{i=0}^{b-1} \gamma^{\mathcal{F}_w(i)} \nabla_{m|b} \gamma^{b-1-i}$ and by removing all the redundant E-operators from that expression, if any. At the end, w is expressed by a sum of incomparable E-operators which is unique since the considered representation of $\mathcal{F}_w$ is canonical. ■

1) Example 7: Let us consider operator $\beta_2 \gamma^1 \mu_3$ the C/C function of which is $\mathcal{F}_{\beta_2 \gamma^1 \mu_3}(k_i) = \lfloor (3k_i + 1)/2 \rfloor$. This $(2, 3)$-periodic function is such that $\mathcal{F}_{\beta_2 \gamma^1 \mu_3}(0) = 0$ and $\mathcal{F}_{\beta_2 \gamma^1 \mu_3}(1) = 2$. Therefore, the canonical form of $\beta_2 \gamma^1 \mu_3$ is $\gamma^0 \nabla_{3|2} \gamma^1 \oplus \gamma^2 \nabla_{3|2} \gamma^0$, or simply $\nabla_{3|2} \gamma^1 \oplus \gamma^2 \nabla_{3|2}$ since γ^0 is the unit operator (see Fig. 2). As a second example, let us consider the E-operator $\beta_4 \mu_3$. We have $\mathcal{F}_{\beta_4 \mu_3}(k_i) = \lfloor 3k_i/4 \rfloor$ which is $(4, 3)$-periodic. Then, by expressing the values of the C/C function for one period we obtain: $\mathcal{F}_{\beta_4 \mu_3}(0 \le k_i \le 1) = 0$, $\mathcal{F}_{\beta_4 \mu_3}(2) = 1$ and $\mathcal{F}_{\beta_4 \mu_3}(3) = 2$. Hence, we have $\beta_4 \mu_3 = \gamma^0 \nabla_{3|4} \gamma^3 \oplus \gamma^0 \nabla_{3|4} \gamma^2 \oplus \gamma^1 \nabla_{3|4} \gamma^1 \oplus \gamma^2 \nabla_{3|4} \gamma^0$. In this expression $\gamma^0 \nabla_{3|4} \gamma^3$ is redundant since $\gamma^3 \preceq \gamma^2 \Rightarrow \gamma^0 \nabla_{3|4} \gamma^3 \preceq \gamma^0 \nabla_{3|4} \gamma^2$. Finally, the canonical form of $\beta_3 \mu_4$ is $\nabla_{3|4} \gamma^2 \oplus \gamma^1 \nabla_{3|4} \gamma^1 \oplus \gamma^2 \nabla_{3|4}$.

C. Dioid $\mathcal{E}^*[\![\delta]\!]$

The previous subsection shows that E-operators generated by WBTEGs are periodic and have a canonical form. Since

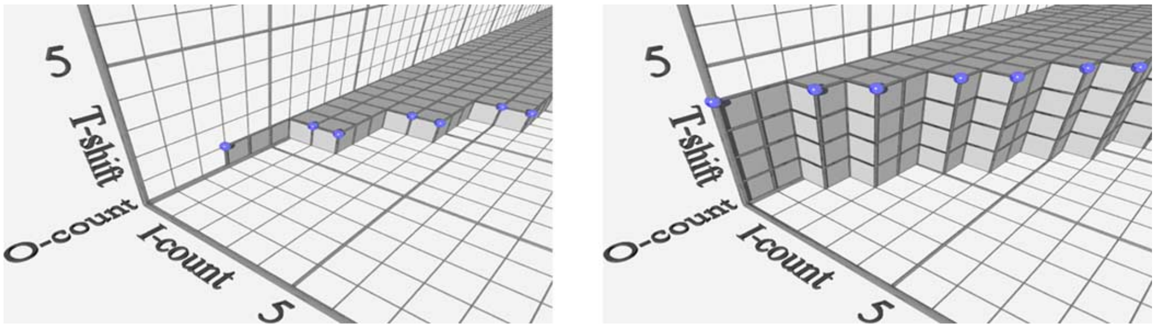


Fig. 4. Graphical representation of $\gamma^3\mu_3\beta_2\gamma^1\delta^1$ (on the left) and $\beta_2\gamma^1\mu_3\delta^4$ (on the right).

time-shift operator δ^τ can commute with all the E-operators (see Prop. 1), then the operators generated by WBTEGs can be described by the means of formal power series in one variable δ denoted $\bigoplus_i w_i\delta^{t_i}$, where coefficients w_i are taken in $\mathcal{E}_{per}$ and the exponents are in $\mathbb{Z}$.

Theorem 5 ([1]): The set of formal power series in variable z with exponents in $\mathbb{Z}$ and coefficients in a complete dioid $\mathcal{D}$ is a complete dioid denoted $\mathcal{D}[\![z]\!]$.

Theorem 6 ([1]): The quotient of a dioid $(\mathcal{D},\oplus,\otimes)$ by an equivalence relation $\mathcal{R}$ compatible with $\oplus$ and $\otimes$ is a dioid denoted $\mathcal{D}_{/\mathcal{R}}$.

Definition 14 (Dioid $\mathcal{E}^*[\![\delta]\!]$): We denote by $\mathcal{E}[\![\delta]\!]$ the complete dioid of formal power series in one variable δ with exponents in $\mathbb{Z}$ and coefficients in the non commutative complete dioid $\mathcal{E}$. We denote by $\mathcal{E}^*[\![\delta]\!]$ the quotient $\mathcal{E}[\![\delta]\!]_{/\equiv^*}$ where the equivalence relation considered is defined as: $s_a, s_b \in \mathcal{E}[\![\delta]\!]$

$$s_a \equiv^* s_b \iff s_a(\delta^{-1})^* = s_b(\delta^{-1})^*. \quad (14)$$

A series $s \in \mathcal{E}^*[\![\delta]\!]$ is written $s = \bigoplus_{t\in\mathbb{Z}} s(t)\delta^t$ with $s(t) \in \mathcal{E}$. For two series $s_1, s_2 \in \mathcal{E}^*[\![\delta]\!]$:

$$s_1 \oplus s_2 = \bigoplus_{t\in\mathbb{Z}} (s_1(t) \oplus s_2(t))\,\delta^t$$
$$s_1 \otimes s_2 = \bigoplus_{t\in\mathbb{Z}} \left(\bigoplus_{\tau+\tau'=t} s_1(\tau)\circ s_2(\tau')\right)\delta^t.$$

Adding the quotient structure by (14) allows us to assimilate the variable δ in dioid $\mathcal{E}^*[\![\delta]\!]$ to the time-shift operator $\delta^1 : \Sigma \to \Sigma, x(t) \mapsto x(t-1)$ in dioid $\mathcal{O}$. Therefore, all the identities given in Prop. 1 hold in $\mathcal{E}^*[\![\delta]\!]$. Dioid $\mathcal{E}^*[\![\delta]\!]$ is the algebraic structure the best adapted to handle operators given in Def. 5.

The series of $\mathcal{E}^*[\![\delta]\!]$ have a graphical representation which consists in describing each monomial $s(t)\delta^t$ in $\mathbb{Z}^3$, where coefficient $s(t) \in \mathcal{E}$ is described by its C/C function in a $\mathrm{I\text{-}count} \times \mathrm{O\text{-}count}$ plane which is located at value t along the T-shift axis. To improve the readability, the three-dimensional representation has been truncated to the positive values.

Thanks to equalities in Prop. 1, let us note that for $w_1, w_2 \in \mathcal{E}_{per}$ and $t_1, t_2 \in \mathbb{Z}$, we have

$$w_1\delta^{t_1} \preceq w_2\delta^{t_2} \iff w_1 \preceq w_2 \text{ and } t_1 \le t_2. \quad (15)$$

Therefore, a monomial $a = w_a\delta^{t_a}$ in $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$ dominates all the monomials $w\delta^t$ such that $w \preceq w_a$ and $t \le t_a$. For each monomial, the subspace of $\mathbb{Z}^3$ which corresponds to the dominated operators is depicted as a gray shadow.

1) Example 8: In order to give a graphical interpretation of the partial order in $\mathcal{E}^*[\![\delta]\!]$, the representation of $\gamma^3\mu_3\beta_2\gamma^1\delta^1$ and $\beta_2\gamma^1\mu_3\delta^4$ have been juxtaposed in Fig. 4. Each monomial is depicted as well as the gray shadow corresponding to the domain of dominated monomials. Since $\gamma^3\mu_3\beta_2\gamma^1 \preceq \beta_2\gamma^1\mu_3$ (see Fig. 2) and $\delta^1 \preceq \delta^4$, then $\gamma^3\mu_3\beta_2\gamma^1\delta^1 \preceq \beta_2\gamma^1\mu_3\delta^4$. From a graphical point of view, if the representations of $\gamma^3\mu_3\beta_2\gamma^1\delta^1$ and $\beta_2\gamma^1\mu_3\delta^4$ are merged into the same picture, the shadow of $\beta_2\gamma^1\mu_3\delta^4$ clearly hides the representation of $\gamma^3\mu_3\beta_2\gamma^1\delta^1$.

Remark 2 (Simplifications): By representing each monomial of a series $s \in \mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$ with its gray shadow in $\mathbb{Z}^3$, the graphical representation naturally hides the redundant monomials of the series. It is the geometrical interpretation of the simplifications that can be done in $\mathcal{E}^*[\![\delta]\!]$. Let us note that the gray shadow of monomials in $\mathcal{E}^*[\![\delta]\!]$ is the natural extension in $\mathbb{Z}^3$ of the south-east cones used to describe monomials in $\mathcal{M}^{\mathrm{ax}}_{\mathrm{in}}[\![\gamma,\delta]\!]$ (see [5]).

D. Polynomials in $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$

Due to the specific structure of WBTEGs, we do not consider the whole set of series of $\mathcal{E}^*[\![\delta]\!]$ but only the series the coefficients of which are periodic E-operators. This subset is denoted $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$.

Definition 15 (Balanced Series in $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$): A series $s = \bigoplus s(t)\delta^t \in \mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$ is said balanced if all its coefficients $s(t) \in \mathcal{E}_{per}$ have the same gain. The gain of s is denoted $\Gamma(s)$ and corresponds to the gain of all its coefficients. A balanced series is said *conservative* if $\Gamma(s) = 1$.

The series that can be described by finite sums $\bigoplus_{i=1}^T s(t_i)\delta^{t_i}$ are called polynomials.

Proposition 5 (Canonical Form of Balanced Polynomials): Let $p = \bigoplus_{i=1}^N w_i\delta^{t_i}$ be a balanced polynomial of $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$. The canonical form of p is the unique expression $p = \bigoplus_{j=1}^{N'} w'_j\delta^{t'_j}$ such that w'_j are in the canonical form of Prop. 4 and coefficients and exponents are strictly ordered, that is to say

$$1 \le j \le N'-1, t'_j < t'_{j+1} \text{ and } w'_j \succ w'_{j+1}. \quad (16)$$

Proof: This form is obtained by sorting monomials according to the exponents of δ. Then, each coefficient is modified as follows $w'_j = \bigoplus_{i\ge j}^N w_i$. Finally, if $t_i < t_{i+1}$ and $w'_i = w'_{i+1}$, monomial $w'_i\delta^{t_i}$ is redundant and can be removed. In the final

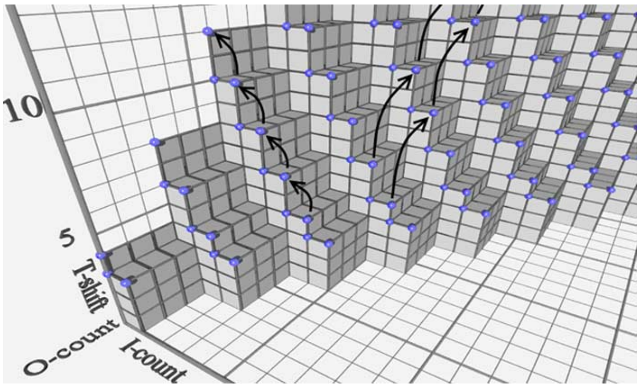


Fig. 5. Ultimately periodic series in $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$.

form $p=\bigoplus_{j=1}^{N'} w'_j\delta^{t'_j}$ (with $N'\leq N$), coefficients and exponents are strictly ordered. In other words, the remaining monomials are incomparable (no further simplification is possible). ■

1) Example 9: Let us consider polynomial $p=\gamma^1\nabla_3\gamma^1\delta^2\oplus\gamma^2\delta^3\oplus\gamma^2\nabla_3\delta^4\oplus\nabla_3\gamma^2\delta^6\oplus\gamma^2\nabla_3\gamma^1\delta^7$. First, the monomials are sorted according to the exponent of δ. Next, the coefficient of δ^2 is replaced by $\gamma^1\nabla_3\gamma^1\oplus\gamma^2\oplus\gamma^2\nabla_3\oplus\nabla_3\gamma^2\oplus\gamma^2\nabla_3\gamma^1=\gamma^0$. Then, the coefficient of δ^3 is replaced by the sum $\gamma^2\oplus\gamma^2\nabla_3\oplus\nabla_3\gamma^2\oplus\gamma^2\nabla_3\gamma^1=\nabla_3\gamma^2\oplus\gamma^2\nabla_3$, and so on. At this step, $p=\gamma^0\delta^2\oplus(\nabla_3\gamma^2\oplus\gamma^2\nabla_3)\delta^3\oplus(\nabla_3\gamma^2\oplus\gamma^2\nabla_3)\delta^4\oplus(\nabla_3\gamma^2\oplus\gamma^2\nabla_3\gamma^1)\delta^6\oplus\gamma^2\nabla_3\gamma^1\delta^7$. Monomial $(\nabla_3\gamma^2\oplus\gamma^2\nabla_3)\delta^3$ is redundant since the coefficients of δ^3 and δ^4 are the same. Once it is removed, the form obtained is such that the coefficients and the exponents are strictly ordered, say $p=\delta^2\oplus(\nabla_3\gamma^2\oplus\gamma^2\nabla_3)\delta^4\oplus(\nabla_3\gamma^2\oplus\gamma^2\nabla_3\gamma^1)\delta^6\oplus\gamma^2\nabla_3\gamma^1\delta^7$.

IV. WBTEGs are Described by Ultimately Periodic Series of $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$

In this section, we will show that the behavior of a WBTEG is described by ultimately periodic and balanced series of $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$. This result has to be compared to the well known result for ordinary Timed Event Graphs [5, Th. 21]: the entries of the transfer matrix of a TEG are ultimately periodic series of $\mathcal{M}^{\text{ax}}_{\text{in}}[\![\gamma,\delta]\!]$. For TEGs, operations (and algorithms) on ultimately periodic series of $\mathcal{M}^{\text{ax}}_{\text{in}}[\![\gamma,\delta]\!]$ have already been investigated in [10] and [9]. The developments given here are clearly in the same spirit.

Since we consider WBTEGs, only balanced series of $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$ are considered hereafter.

Definition 16 (Ultimately Periodic Series of $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$): A balanced series $s\in\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$ is said ultimately periodic if it can be written as $s=p\oplus q(\gamma^\nu\delta^\tau)^*$, where $\nu,\tau\in\mathbb{N}$, p and q are balanced polynomials $p=\bigoplus_{i=1}^{n} w_i\delta^{t_i}$, $q=\bigoplus_{j=1}^{N} W_j\delta^{T_j}$ with $\forall i,j,w_i,W_j\in\mathcal{E}_{per}$.

The property of periodicity has a natural graphical interpretation. In the graphical representation of s, the monomials of q are depicted as a group of C/C functions that are periodically shifted by τ units to the increasing values along the T-shift axis and by ν units towards the decreasing values along the I-count axis.

1) Example 10: Fig. 5 gives the graphical description of $s=\nabla_{3|2}\delta^3\oplus\nabla_{3|2}\gamma^1\delta^4(\gamma^1\delta^2)^*$.

Remark 3: A periodic form is not unique. For instance, $s=p\oplus q(\gamma^\nu\delta^\tau)^*$ and $s=p\oplus q\oplus q\gamma^\nu\delta^\tau(\gamma^\nu\delta^\tau)^*$ are two different ultimately periodic forms of the same series.

Remark 4: Balanced polynomials in $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$ can always be considered as ultimately periodic series since $(\gamma^1\delta^0)^*=e$.

Proposition 6 (Left and Right Periodicity): An ultimately right-periodic series $s=p\oplus q(\gamma^\nu\delta^\tau)^*$ in $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$ has also an ultimately left-periodic form $s=p\oplus(\gamma^{\nu'}\delta^{\tau'})^*q'$ where q' is a balanced polynomial. The left (resp. right) asymptotic slope is defined as $\sigma_l(s)=\tau'/\nu'$ (resp. $\sigma_r(s)=\tau/\nu$), and the next equality is satisfied $\Gamma(s)=\sigma_r(s)/\sigma_l(s)$.

Proof: Let $\Gamma(s)=k'/k$ be the gain of s. The coefficients of polynomial $q=\bigoplus w_j\delta^{t_j}$ are given by $w_j=\bigoplus_i\gamma^{n_{ij}}\nabla_{m_j|b_j}\gamma^{n'_{ij}}$ with $\forall j, m_j/b_j=k'/k$. Let us remark that thanks to (6), $\nabla_{m_j|b_j}\gamma^{b_j}=\mu_{m_j}\beta_{b_j}\gamma^{b_j}=\mu_{m_j}\gamma^1\beta_{b_j}=\gamma^{m_j}\mu_{m_j}\beta_{b_j}=\gamma^{m_j}\nabla_{m_j|b_j}$. More generally, for $\alpha\in\mathbb{N}$, $\nabla_{m_j|b_j}\gamma^{\alpha b_j}=\gamma^{\alpha m_j}\nabla_{m_j|b_j}$. Therefore, if we take $B=lcm(b_j)$ and $M=Bk'/k$, then $\forall i,j,\gamma^{n_{ij}}\nabla_{m_j|b_j}\gamma^{n'_{ij}}\gamma^B=\gamma^M\gamma^{n_{ij}}\nabla_{m_j|b_j}\gamma^{n'_{ij}}$, and consequently $\forall i, w_i\gamma^B=\gamma^M w_i$. By applying (9)

$$\begin{aligned}q(\gamma^\nu\delta^\tau)^*&=q(\gamma^{B\nu}\delta^{B\tau})^*(e\oplus\ldots\oplus\gamma^{(B-1)\nu}\delta^{(B-1)\tau})\\&=(\gamma^{M\nu}\delta^{B\tau})^*q(e\oplus\ldots\oplus\gamma^{(B-1)\nu}\delta^{(B-1)\tau})\\&=(\gamma^{M\nu}\delta^{B\tau})^*q'.\end{aligned}$$

Finally, $\sigma_r(s)=\tau/\nu$ and $\sigma_l(s)=(B\tau)/(M\nu)$ and $\sigma_r(s)/\sigma_l(s)=\Gamma(s)=k'/k$. ■

2) Example 11: For the series depicted on Fig. 5, a right-periodic form and a left-periodic form are given by

$$\begin{aligned}s&=\nabla_{3|2}\delta^3\oplus\nabla_{3|2}\gamma^1\delta^4(\gamma^1\delta^2)^*\\&=\nabla_{3|2}\delta^3\oplus(\gamma^3\delta^4)^*(\nabla_{3|2}\gamma^1\delta^4\oplus\gamma^3\nabla_{3|2}\delta^6).\end{aligned}$$

The way the coefficients are periodically shifted is illustrated by a set of arrows depicted on the picture. For this series, the slopes are, respectively, $\sigma_l(s)=4/3$ and $\sigma_r(s)=2$.

The main result concerning the class of WBTEGs is that the serial, the parallel and the feedback composition keep the ultimate periodicity property. To obtain this result, one has to analyze how the sum, the product and the Kleene star operations behave on ultimately periodic series in $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$.

For the next propositions, series s_1 and s_2 are periodic series defined as $s_1=p_1\oplus q_1(\gamma^{\nu_1}\delta^{\tau_1})^*$ and $s_2=p_2\oplus q_2(\gamma^{\nu_2}\delta^{\tau_2})^*$ with $p_1=\bigoplus_{i=1}^{n_1}w_{1i}\delta^{t_{1i}}$, $q_1=\bigoplus_{j=1}^{N_1}W_{1j}\delta^{T_{1j}}$, $p_2=\bigoplus_{k=1}^{n_2}w_{2k}\delta^{t_{2k}}$, $q_2=\bigoplus_{l=1}^{N_2}W_{2l}\delta^{T_{2l}}$, and $w_{1i},w_{2k},W_{1j},W_{2l}\in\mathcal{E}_{per}$.

Proposition 7: Let s_1 and s_2 be two ultimately periodic series of $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$. If $\Gamma(s_1)=\Gamma(s_2)$ then $s_1\oplus s_2$ is an ultimately periodic series of $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$ such that

$$\begin{aligned}\sigma_r(s_1\oplus s_2)&=\max(\sigma_r(s_1),\sigma_r(s_2))\\\sigma_l(s_1\oplus s_2)&=\max(\sigma_l(s_1),\sigma_l(s_2)).\end{aligned}$$

Proof: If $(\tau_1/\nu_1)=(\tau_2/\nu_2)$, by taking $N=lcm(\nu_1,\nu_2)=k_1\nu_1=k_2\nu_2$ and $T=k_1\tau_1=k_2\tau_2$, then by applying (9) we can express $(\gamma^{\nu_1}\delta^{\tau_1})^*=(e\oplus\gamma^{\nu_1}\delta^{\tau_1}\oplus\ldots\oplus\gamma^{(k_1-1)\nu_1}\delta^{(k_1-1)\tau_1})(\gamma^{k_1\nu_1}\delta^{k_1\tau_1})^*g$ and $(\gamma^{\nu_2}\delta^{\tau_2})^*=$

$(e\oplus\gamma^{\nu_2}\delta^{\tau_2}\oplus\ldots\oplus\gamma^{(k_2-1)\nu_2}\delta^{(k_2-1)\tau_2})(\gamma^{k_2\nu_2}\delta^{k_2\tau_2})^*$. Therefore, $q_1(\gamma^{\nu_1}\delta^{\tau_1})^* = q_1'(\gamma^N\delta^T)^*$ and $q_2(\gamma^{\nu_2}\delta^{\tau_2})^* = q_2'(\gamma^N\delta^T)^*$. Therefore, $s_1 \oplus s_2 = p_1 \oplus p_2 \oplus (q_1' \oplus q_2')(\gamma^N\delta^T)^*$ is also ultimately periodic. If $(\tau_1/\nu_1) > (\tau_2/\nu_2)$, according to Lemma 4 (see the Appendix) we obtain that $\forall j, l$ s.t. $1 \leq j \leq N_1, 1 \leq l \leq N_2$, then $W_{1j}\delta^{T_{1j}}(\gamma^{\nu_1}\delta^{\tau_1})^*$ is ultimately greater than $W_{2l}\delta^{T_{2l}}(\gamma^{\nu_2}\delta^{\tau_2})^*$. In other words, $q_1(\gamma^{\nu_1}\delta^{\tau_1})^*$ is ultimately greater than $q_2(\gamma^{\nu_2}\delta^{\tau_2})^*$. Finally, $s_1 \oplus s_2$ is ultimately periodic with the periodicity of s_1. ■

Proposition 8: Let s_1 and s_2 be two ultimately periodic series of $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$. If $\Gamma(s_1) = \Gamma(s_2)$ then $s_1 \wedge s_2$ is an ultimately periodic series of $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$.

Proof: (Sketch of proof) The proof is similar. Two cases have to be considered. If $(\tau_1/\nu_1) = (\tau_2/\nu_2)$ then we can write the infimum as $s_1 \wedge s_2 = (p_1 \oplus q_1'(\gamma^N\delta^T)^*) \wedge (p_2 \oplus q_2'(\gamma^N\delta^T)^*) = (p_1 \wedge p_2) \oplus (p_1 \wedge q_2'(\gamma^N\delta^T)^*) \oplus (p_2 \wedge q_1'(\gamma^N\delta^T)^*) \oplus (q_1'(\gamma^N\delta^T)^* \wedge q_2'(\gamma^N\delta^T)^*)$. The first three terms are polynomials and the last one is an ultimately periodic series the slope of which is T/N. If $(\tau_1/\nu_1) > (\tau_2/\nu_2)$, we previously obtained that $q_1(\gamma^{\nu_1}\delta^{\tau_1})^*$ is ultimately greater than $q_2(\gamma^{\nu_2}\delta^{\tau_2})^*$. In other words, $s_1 \wedge s_2$ has the ultimate periodicity of s_2. ■

Proposition 9: Let $s_1 = p_1 \oplus q_1(\gamma^{\nu_1}\delta^{\tau_1})^*$ and $s_2 = p_2 \oplus q_2(\gamma^{\nu_2}\delta^{\tau_2})^*$ be two ultimately periodic series of $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$. Then $s_1 \otimes s_2$ is an ultimately periodic series such that $\Gamma(s_1 \otimes s_2) = \Gamma(s_1) \times \Gamma(s_2)$

$$\sigma_r(s_1 \otimes s_2) = max(\sigma_r(s_2), \Gamma(s_2) \times \sigma_r(s_1))$$
$$\sigma_l(s_1 \otimes s_2) = max(\sigma_l(s_1), \sigma_l(s_2)/\Gamma(s_1)).$$

Proof: Thanks to Prop. 6, we can write s_1 and s_2, respectively, with a right-periodic form and a left-periodic form such as $s_1 \otimes s_2 = (p_1 \oplus q_1(\gamma^{\nu_1}\delta^{\tau_1})^*) \otimes (p_2 \oplus (\gamma^{\nu_2'}\delta^{\tau_2'})^* q_2') = p_1p_2 \oplus p_1(\gamma^{\nu_2'}\delta^{\tau_2'})^* q_2' \oplus q_1(\gamma^{\nu_1}\delta^{\tau_1})^* p_2 \oplus q_1(\gamma^{\nu_1}\delta^{\tau_1})^*(\gamma^{\nu_2'}\delta^{\tau_2'})^* q_2'$. The first term p_1p_2 is a polynomial. The second and the third term are explicitly equal to $p_1(\gamma^{\nu_2'}\delta^{\tau_2'})^* q_2' = (\bigoplus w_{1i}\delta^{t_{1i}})(\gamma^{\nu_2'}\delta^{\tau_2'})^*(\bigoplus W_{2l}'\delta^{T_{2l}'})$ and $q_1(\gamma^{\nu_1}\delta^{\tau_1})^* p_2 = (\bigoplus W_{1j}\delta^{T_{1j}})(\gamma^{\nu_1}\delta^{\tau_1})^*(\bigoplus w_{2k}\delta^{t_{2k}})$. These terms are two finite sums of periodic series with the same gain. Due to Prop. 7, these terms are periodic too. In the last term, $(\gamma^{\nu_1}\delta^{\tau_1})^*(\gamma^{\nu_2'}\delta^{\tau_2'})^*$ is an ultimately periodic series in $\mathcal{M}^{\text{ax}}_{\text{in}}[\![\gamma, \delta]\!]$ (Th. 8 in the Appendix), and therefore in $\mathcal{E}^*[\![\delta]\!]$ too. The term $q_1(\gamma^{\nu_1}\delta^{\tau_1})^*(\gamma^{\nu_2'}\delta^{\tau_2'})^* q_2'$ is consequently a finite sum of ultimately periodic series in $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$. The product $s1 \otimes s_2$ is finally a finite sum of ultimately series with the same gain which is periodic by applying Prop. 7 again. ■

Let us now focus on the behavior of circuits in WBTEGs. They are algebraically described by Kleene star operations on conservative series of $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$.

Proposition 10: Let $s = p \oplus q(\gamma^\nu\delta^\tau)^*$ be a conservative ($\Gamma(s) = 1$) ultimately periodic series in $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$. Then s^* is a conservative ultimately periodic series.

Proof: Thanks to Lemma 7 in the Appendix, we can write polynomials p and q with a non canonical form $p = \bigoplus_i \gamma^{n_i}\nabla_M\gamma^{n_i'}\delta^{t_i}$ and $q = \bigoplus_j \gamma^{N_j}\nabla_M\gamma^{N_j'}\delta^{T_j}$. By taking $r = \gamma^{M\nu}\delta^{M\tau}$, then monomial r commutes with p and q, *i.e.*, $pr = rp$ and $qr = rq$. Thanks to (9), series s can be written $s = p \oplus q(e \oplus \gamma^\nu\delta^\tau \oplus \ldots \oplus \gamma^{(M-1)\nu}\delta^{(M-1)\tau})r^* = p \oplus q'r^*$. Moreover, r also commutes with q', i.e., $q'r = rq'$. By applying (7), one has $s^* = (p \oplus q'r^*)^* = p^*(q'r^*p^*)^*$. Since $rp = pr$ and thanks to (10), then $r^*p^* = (r \oplus p)^*$. Finally, by using (8), we can write $s^* = p^*(q'(r \oplus p)^*)^* = p^*(e \oplus q'(q' \oplus r \oplus p)^*)$. In that expression, $(q' \oplus r \oplus p)$ and p are two conservative polynomials. Thanks to Prop. 15 shown in the Appendix, $(q' \oplus r \oplus p)^*$ and p^* are two conservative ultimately periodic series. Finally, it can be inferred that $(e \oplus q'(q' \oplus r \oplus p)^*)$ is a conservative ultimately periodic series, and thanks to Prop. 9, s^* is periodic as well. ■

Proposition 11 (Transfer of a WBTEG): The transfer matrix of a weight-balanced timed event graph is composed of ultimately periodic series of $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$.

Proof: We recall first that all the elementary operators $\gamma^n, \delta^t, \mu_m$ and β_b can be considered as ultimately periodic series (see remark 4). Then, due to the specific structure of WBTEGs, the modeling by series in $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$ is such that:

- the sum ($\oplus$) of series in $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$ is necessarily done on series with the same gain (balanced property) and the periodicity is kept by the balanced synchronization (see Prop. 7);
- the product of ultimately periodic series is done when the serial composition of systems arises, and the product keeps the periodicity property (see Prop. 9);
- the Kleene star is done only on conservative ultimately periodic series since the loops of a WBTEG are neutral. Thanks to Prop. 10, the Kleene star of conservative ultimately periodic series keeps the periodicity property.

■

Remark 5 (Canonical Form): The property of ultimate periodicity of WBTEGs does not depend on a specific periodic form. However, by comparison to existing results for periodic series in $\mathcal{M}^{\text{ax}}_{\text{in}}[\![\gamma, \delta]\!]$, we think that a canonical periodic form exists also for ultimately periodic series in $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$. Such a canonical form would be useful for a software tool dedicated to periodic series in $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$ (such as [7] for $\mathcal{M}^{\text{ax}}_{\text{in}}[\![\gamma, \delta]\!]$). By transposing the results given in [10] and [9] and by writing a series $s = p \oplus q(\gamma^\nu\delta^\tau)^*$ with $p = \bigoplus_{i=1}^n w_i\delta^{t_i}$, $q = \bigoplus_{j=1}^N W_j\delta^{T_j}$, the canonical form of s would be the unique one such that p and q are in a canonical form ($\forall i, j\ w_i \succ w_{i+1}$, $t_i < t_{i+1}$, $W_j \succ W_{j+1}, T_j < T_{j+1}$), $w_n \succ W_1$ and $W_N \succ W_1\gamma^\nu$ (such a form is called a proper form in [10]), and finally the number n of monomials in p is as small as possible, and the periodic pattern q is also as short as possible (pair (ν, τ) is as small as possible).

V. Control of WBTEGs

The input–output model obtained in the previous section for WBTEGs allows us to consider some model matching control problems such as the ones studied in [6], [12], [13], [15], and [17]. We only need to express the residuation of the product in $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$. The first step consists in expressing the residuation of the product in $\mathcal{E}_{per}$.

A. Residuation in $\mathcal{E}_{per}$

On a complete dioid, the product is not invertible, but the theory of residuation developped in [3], and applied to idempotent semirings in [1], can be used to find optimal solutions to some inequalities. On a complete dioid, mappings $L_a : x \mapsto ax$ and $R_a : x \mapsto xa$ are residuated. It means that $\forall b$, $L_a(x) \preceq b$ and $R_a(x) \preceq b$ have maximal solutions, that are, respectively, denoted $L_a^\sharp(b) = a \obslash b = \bigoplus\{x | ax \preceq b\}$ and $R_a^\sharp(b) = b \oslash a = \bigoplus\{x | xa \preceq b\}$. Mappings $L_a^\sharp$ and $R_a^\sharp$ are said residual mappings of L_a and R_a. When the dioid product is commutative, then $L_a^\sharp = R_a^\sharp$.

Theorem 7 ([1], [3]): On a complete dioid $\mathcal{D}$,

$$abx \preceq c \iff x \preceq b \obslash a \obslash c = (ab) \obslash c \tag{17}$$

$$xba \preceq c \iff x \preceq c \oslash a \oslash b = c \oslash (ba) \tag{18}$$

$$(a \oplus b)x \preceq c \iff x \preceq a \obslash c \wedge b \obslash c \tag{19}$$

$$x(a \oplus b) \preceq c \iff x \preceq c \oslash a \wedge c \oslash b. \tag{20}$$

The dioid of E-operators denoted $\mathcal{E}$ is complete. It is then possible to define the residual mappings of L_a and R_a on $\mathcal{E}$. More precisely, concerning the elementary operators of $\mathcal{E}$, the following results can be obtained.

Proposition 12: Let $w \in \mathcal{E}$ be an E-operator, then

$$\gamma^n \obslash w = \gamma^{-n} w \qquad w \oslash \gamma^n = w\gamma^{-n} \tag{21}$$

$$\mu_m \obslash w = \beta_m \gamma^{m-1} w \qquad w \oslash \mu_m = w\beta_m \tag{22}$$

$$\beta_b \obslash w = \mu_b w \qquad w \oslash \beta_b = w\gamma^{b-1}\mu_b. \tag{23}$$

Proof: Since operator γ^n is invertible ($\gamma^n\gamma^{-n} = \gamma^{-n}\gamma^n = e$), then we obtain (21). For (22), the right product by μ_m is invertible since $\beta_m\mu_m = e$. For the left product, by definition of the residual mapping: $\mu_m \obslash w = \bigoplus\{v \in \mathcal{E} | \mu_m v \preceq w\}$. Since $w_1 \preceq w_2 \iff \mathcal{F}_{w_1} \geq \mathcal{F}_{w_2}$, then we have $\mu_m \obslash w = \bigoplus\{v \in \mathcal{E} | \mathcal{F}_{\mu_m v} \geq \mathcal{F}_w\} = \bigoplus\{v \in \mathcal{E} | m\mathcal{F}_v \geq \mathcal{F}_w\} = \bigoplus\{v \in \mathcal{E} | \mathcal{F}_v \geq \mathcal{F}_w/m\}$. Finally, $\mathcal{F}_{\mu_m \obslash w}$ must satisfy $\forall k \in \mathbb{Z},\ \mathcal{F}_{\mu_m \obslash w}(k) \geq \mathcal{F}_w(k)/m$, which is equivalent to $\forall k \in \mathbb{Z}, \mathcal{F}_{\mu_m \obslash w}(k) = \lceil \mathcal{F}_w(k)/m \rceil = \lfloor (\mathcal{F}_w(k) + m - 1)/m \rfloor$ where $\lceil x \rceil$ denotes the least integer greater than or equal to x. Translated into operators, we have $\mu_m \obslash w = \beta_m \gamma^{m-1} w$.

For (23), we know that the left product by β_b is invertible. For the right product, we have

$$\begin{aligned} w \oslash \beta_b &= \bigoplus\{v \in \mathcal{E} | \mathcal{F}_{v\beta_b} \geq \mathcal{F}_w\} \\ &= \bigoplus\{v \in \mathcal{E} | \forall k \in \mathbb{Z}, \mathcal{F}_v(\lfloor k/b \rfloor) \geq \mathcal{F}_w(k)\}. \end{aligned}$$

Therefore, the C/C function of $w \oslash \beta_b$ has to satisfy the following constraints:

$$\begin{gathered} 0 \leq k \leq b-1, \mathcal{F}_{w \oslash \beta_b}(0) \geq \mathcal{F}_w(k) \\ b \leq k \leq 2b-1, \mathcal{F}_{w \oslash \beta_b}(1) \geq \mathcal{F}_w(k) \\ \dots \\ nb \leq k \leq (n+1)b - 1, \mathcal{F}_{w \oslash \beta_b}(n) \geq \mathcal{F}_w(k). \end{gathered}$$

Since $\mathcal{F}_w$ is a non decreasing function, $\mathcal{F}_{w \oslash \beta_b}$ must satisfy $\mathcal{F}_{w \oslash \beta_b}(n) = \mathcal{F}_w((n+1)b - 1)$ say $\mathcal{F}_{w \oslash \beta_b}(k) = \mathcal{F}_w(bk + (b-1))$, which amounts to $w \oslash \beta_b = w\gamma^{b-1}\mu_b$. ■

1) Example 12: Let us develop the computation of $(\gamma^1\mu_2) \obslash (\gamma^2\beta_3\mu_4) \in \mathcal{E}$. By applying results from Prop. 12 and from Prop. 1, we obtain

$$\begin{aligned} (\gamma^1\mu_2) \obslash (\gamma^2\beta_3\mu_4) &= \mu_2 \obslash (\gamma^1 \obslash (\gamma^2\beta_3\mu_4)) \\ &= \mu_2 \obslash (\gamma^{-1}(\gamma^2\beta_3\mu_4)) \\ &= \beta_2\gamma^1(\gamma^1\beta_3\mu_4) = \beta_2\gamma^2\beta_3\mu_4 \\ &= \gamma^1\beta_2\beta_3\mu_4 = \gamma^1\beta_6\mu_4 = \gamma^1\beta_3\mu_2. \end{aligned}$$

Let us note that the canonical form of $\gamma^1\beta_3\mu_2$ is $\gamma^1\nabla_{2|3}\gamma^1 \oplus \gamma^2\nabla_{2|3}$. Since residuation is not an exact inversion, we can remark here that the canonical form of $(\gamma^1\mu_2)[(\gamma^1\mu_2) \obslash (\gamma^2\beta_3\mu_4)] = \gamma^3\nabla_{4|3}\gamma^1 \oplus \gamma^5\nabla_{4|3}$ is different from $(\gamma^2\beta_3\mu_4) = \gamma^2\nabla_{4|3}\gamma^2 \oplus \gamma^3\nabla_{4|3}\gamma^1 \oplus \gamma^4\nabla_{4|3}$.

Proposition 13: Let us consider $w_1, w_2 \in \mathcal{E}_{per}$. Then $w_2 \obslash w_1$ and $w_1 \oslash w_2$ are periodic E-operators such that $\Gamma(w_2 \obslash w_1) = \Gamma(w_1)/\Gamma(w_2)$ and $\Gamma(w_1 \oslash w_2) = \Gamma(w_1)/\Gamma(w_2)$.

Proof: Thanks to Th. 7 and Prop. 12, and since we can write periodic E-operators as finite sums, $w_1 = \bigoplus_i \gamma^{n_i}\nabla_{m|b}\gamma^{n_i'}$ and $w_2 = \bigoplus_j \gamma^{n_j}\nabla_{M|B}\gamma^{n_j'}$, then

$$\begin{aligned} w_2 \obslash w_1 &= [\bigoplus_j \gamma^{n_j}\nabla_{M|B}\gamma^{n_j'}] \obslash [\bigoplus_i \gamma^{n_i}\nabla_{m|b}\gamma^{n_i'}] \\ &= \bigwedge_j \left([\gamma^{n_j}\nabla_{M|B}\gamma^{n_j'}] \obslash [\bigoplus_i \gamma^{n_i}\nabla_{m|b}\gamma^{n_i'}] \right) \\ &= \bigwedge_j \left(\bigoplus_i \gamma^{-n_j'}\mu_B\beta_M\gamma^{M-1}\gamma^{-n_j}\gamma^{n_i}\nabla_{m|b}\gamma^{n_i'} \right). \end{aligned}$$

It is then a finite infimum of periodic E-operators, that is also a periodic E-operator thanks to Prop. 2. ■

B. Residuation in $\mathcal{E}_{per}^*[\![\delta]\!]$

Let us note that $w_a\delta^{t_a} \obslash w_b\delta^{t_b} = w_a \obslash w_b\delta^{t_b - t_a}$. Thanks to (19) and (20), we can express the residuation of the product of balanced polynomials. Let $p_1 = \bigoplus_i w_{1_i}\delta^{t_{1_i}}$ and $p_2 = \bigoplus_j w_{2_j}\delta^{t_{2_j}}$ be two balanced polynomials in $\mathcal{E}_{per}^*[\![\delta]\!]$. Then, we can write $p_2 \obslash p_1$ and $p_1 \oslash p_2$ as

$$\begin{aligned} p_2 \obslash p_1 &= (\bigoplus_j w_{2_j}\delta^{t_{2_j}}) \obslash [\bigoplus_i w_{1_i}\delta^{t_{1_i}}] \\ &= \bigwedge_j \left((w_{2_j}\delta^{t_{2_j}}) \obslash [\bigoplus_i w_{1_i}\delta^{t_{1_i}}] \right) \\ &= \bigwedge_j [\bigoplus_i (w_{2_j} \obslash w_{1_i})\delta^{t_{1_i} - t_{2_j}}] \end{aligned}$$

and

$$p_1 \oslash p_2 = \bigwedge_j [\bigoplus_i (w_{1_i} \oslash w_{2_j})\delta^{t_{1_i} - t_{2_j}}].$$

The computation of operations $\obslash$ and $\oslash$ on balanced polynomials is based on the residuation of coefficients in $\mathcal{E}_{per}$ (see the previous subsection), and it is then equivalent to the infimum operation on a finite set of polynomials in $\mathcal{E}_{per}^*[\![\delta]\!]$ which is a balanced polynomial.

When we extend the computation of operations $\obslash$ and $\oslash$ to ultimately periodic series of $\mathcal{E}_{per}^*[\![\delta]\!]$, we can show that the residuation of two periodic series can be computed with a fixed-point iteration method.

Lemma 1 ([1]): The greatest fixed-point of $\Pi_l(x) = a \obslash x \wedge b$ (resp. $\Pi_r(x) = x \oslash a \wedge b$) is $a^* \obslash b$ (resp. $b \oslash a^*$).

Proposition 14: Let $s_1 = p_1 \oplus q_1(\gamma^{\nu_1}\delta^{\tau_1})^*$ and $s_2 = p_2 \oplus q_2(\gamma^{\nu_2}\delta^{\tau_2})^*$ be two periodic series in $\mathcal{E}_{per}^*[\![\delta]\!]$. If the mapping $(\gamma^{\nu_2}\delta^{\tau_2}) \obslash x \wedge (q_2 \obslash s_1)$ has a fixed point, then $s_2 \obslash s_1$ is a periodic series.

Proof: We can write $s_2 \circ\!\!\!\backslash s_1 = [p_2 \oplus q_2(\gamma^{\nu_2}\delta^{\tau_2})^*] \circ\!\!\!\backslash s_1 = p_2 \circ\!\!\!\backslash s_1 \wedge (\gamma^{\nu_2}\delta^{\tau_2})^* \circ\!\!\!\backslash (q_2 \circ\!\!\!\backslash s_1)$ (according to (19)). Thanks to Lemma 1, if $(\gamma^{\nu_2}\delta^{\tau_2}) \circ\!\!\!\backslash x \wedge (q_2 \circ\!\!\!\backslash s_1)$ has a fixed point, then $s_2 \circ\!\!\!\backslash s_1$ is shown to be expressed as the infimum ($\wedge$) of a finite set of periodic series with the same slope. Thanks to Prop. 8, the result is also periodic. ■

Remark 6: Prop. 14 gives a practical way to compute the residuation of two ultimately periodic series in $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$. However, it should be kept in mind that the fixed-point iteration method does not necessarily terminate in a finite number of steps. The convergence depends on the ultimate slopes of series. This aspect would need more developments to be clarified.

C. *Example of Output Feedback Synthesis*

This modeling is applied in this section to obtain an output feedback control for the WBTEG of Fig. 1. First, we state the transfer relation of Fig. 1 in an ultimately periodic form. In Ex. 4 we obtained $x_4 = \left(\mu_3(\gamma^1\delta^2)^*\beta_2\delta^2 \oplus \beta_2\gamma^1\delta^1(\gamma^2\delta^1)^*\mu_3\right) x_1$, i.e., $x_4 = Hx_1$. The transfer function H is expressed as a sum of two periodic series. The first term of H can be written in a left-periodic or in a right-periodic form, $\mu_3(\gamma^1\delta^2)^*\beta_2\delta^2 = (\gamma^3\delta^2)^*\nabla_{3|2}\delta^2 = \nabla_{3|2}\delta^2(\gamma^2\delta^2)^*$. The second one can also be written as $\beta_2\gamma^1\delta^1(\gamma^2\delta^1)^*\mu_3 = (\gamma^1\delta^1)^*(\nabla_{3|2}\gamma^1 \oplus \gamma^2\nabla_{3|2})\delta^1 = [(\nabla_{3|2}\gamma^1 \oplus \gamma^2\nabla_{3|2})\delta^1 \oplus (\gamma^1\nabla_{3|2}\gamma^1 \oplus \gamma^3\nabla_{3|2})\delta^2 \oplus (\gamma^2\nabla_{3|2}\gamma^1 \oplus \gamma^4\nabla_{3|2})\delta^3](\gamma^2\delta^3)^*$. According to Prop. 7, the sum of these series is ultimately periodic with $\sigma_r(H) = max(1/1, 3/2)$ and $\sigma_l(H) = max(2/3, 1/1)$ (the slope of the second term). The gain of series H is clearly the gain of all paths from t_1 to t_4, $\Gamma(H) = 3/2$. A left and a right periodic form of H are given below (where coefficients are described in their canonical form in $\mathcal{E}_{per}$):

$$H = p \oplus q(\gamma^2\delta^3)^* = p \oplus (\gamma^1\delta^1)^* q'$$

with $p = \nabla_{3|2}\delta^2 \oplus (\gamma^2\nabla_{3|2}\gamma^1 \oplus \gamma^3\nabla_{3|2})\delta^3 \oplus \gamma^3\nabla_{3|2}\delta^4 \oplus (\gamma^4\nabla_{3|2}\gamma^1 \oplus \gamma^6\nabla_{3|2})\delta^5 \oplus (\gamma^5\nabla_{3|2}\gamma^1 \oplus \gamma^6\nabla_{3|2})\delta^6$, $q = [(\gamma^6\nabla_{3|2}\gamma^1 \oplus \gamma^8\nabla_{3|2})\delta^7 \oplus (\gamma^7\nabla_{3|2}\gamma^1 \oplus \gamma^9\nabla_{3|2})\delta^8 \oplus (\gamma^8\nabla_{3|2}\gamma^1 \oplus \gamma^{10}\nabla_{3|2})\delta^9]$ and $q' = [(\gamma^6\nabla_{3|2}\gamma^1 \oplus \gamma^8\nabla_{3|2})\delta^7]$.

Thanks to results obtained in [6], we can compute the greatest neutral output feedback for the WBTEG described by the transfer matrix H. From a practical point of view, it is the slowest controller that we can add between the output and the input so that the closed-loop system has the same behavior as the system alone. The benefit from this controller is to reduce the internal stocks as much as possible while keeping the system throughput. By knowing H, this controller is expressed by (see [6]) $\hat{F} = H \circ\!\!\!\backslash H \circ\!\!\!/ H$. Series $H \circ\!\!\!\backslash H$ is computed first with the fixed-point iteration given in Prop. 14 which terminates in a finite number of steps. Then, the same method is applied again to obtain the result of $H \circ\!\!\!\backslash H \circ\!\!\!/ H$. For the WBTEG of Fig. 1, the computation gives

$$\begin{aligned}\hat{F} &= (\gamma^3\nabla_{2|3}\gamma^1 \oplus \gamma^4\nabla_{2|3})\delta^0 \oplus \gamma^4\nabla_{2|3}\delta^2 \\ &\quad \oplus (\gamma^2\delta^3)^*[\gamma^6\nabla_{2|3}\delta^4] \\ &= (\gamma^3\nabla_{2|3}\gamma^1 \oplus \gamma^4\nabla_{2|3})\delta^0 \oplus \gamma^4\nabla_{2|3}\delta^2 \\ &\quad \oplus [\gamma^6\nabla_{2|3}\delta^4](\gamma^3\delta^3)^*.\end{aligned}$$

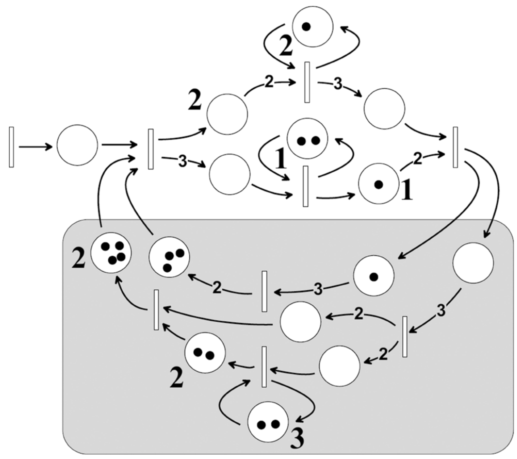


Fig. 6. Greatest neutral output feedback.

The controller is described by an ultimately periodic series the slopes of which are $\sigma_r(\hat{F}) = 3/3$ and $\sigma_l(\hat{F}) = 3/2$. We naturally obtain that $\Gamma(\hat{F}) = 2/3$ is equal to $1/\Gamma(H)$: the additional circuit due to the feedback loop is neutral, and therefore the closed-loop system is still a WBTEG. Controller $\hat{F}$ can be described by a WBTEG which is depicted in Fig. 6. The gray zone corresponds to the realization of controller $\hat{F}$. Let us note that the closed-loop system becomes bounded since it is a strongly connected WBTEGs.

VI. Conclusion

This work presents a modeling approach for the class of WBTEGs in a dioid of additive operators. Four elementary operators denoted $\gamma^n, \delta^t, \mu_m$ and β_b are necessary to describe the dynamical phenomena modeled by a WBTEG. The input–output behavior of WBTEGs can be embedded into rational formal power series in a non commutative dioid denoted $\mathcal{E}^*[\![\delta]\!]$. More specifically, we show that the transfer series of WBTEGs expressed in $\mathcal{E}^*[\![\delta]\!]$ have an ultimate periodicity property. This input–output representation is well suited to address some model matching control problems already tackled in literature for TEGs. As an example, the computation of a neutral output feedback controller for a WBTEG is given in this paper. The main contribution of this work is to show that the study of WBTEGs can be done with algebraic tools similar to the ones presented in [1] for the analysis and the control of TEGs.

Appendix

A. *Rational Calculus in $\mathcal{M}^{ax}_{in}[\![\gamma, \delta]\!]$*

Definition 17 ($\mathcal{M}^{ax}_{in}[\![\gamma, \delta]\!]$): Dioid $\mathcal{M}^{ax}_{in}[\![\gamma, \delta]\!]$ is the set of formal power series in two commutative variables γ and δ with boolean coefficients quotiented by the equivalence $s_1 \equiv s_2 \iff \gamma^*(\delta^{-1})^* s_1 = \gamma^*(\delta^{-1})^* s_2$.

Theorem 8 (Operations on Periodic Series): Let $s_1 = p_1 \oplus q_1(\gamma^{\nu_1}\delta^{\tau_1})^*$ and $s_2 = p_2 \oplus q_2(\gamma^{\nu_2}\delta^{\tau_2})^*$ be two periodic series of $\mathcal{M}^{ax}_{in}[\![\gamma, \delta]\!]$, where $\nu_1, \nu_2, \tau_1, \tau_2 \in \mathbb{N}$, p_1, p_2, q_1 and q_2 are polynomials in $\mathcal{M}^{ax}_{in}[\![\gamma, \delta]\!]$. The asymptotic slope of s_1 (resp.

s_2) is denoted $\sigma(s_1) = \tau_1/\nu_1$ (resp. $\sigma(s_2) = \tau_2/\nu_2$). Let $s_1 \neq \varepsilon$ and $s_2 \neq \varepsilon$, then

- $s_1 \oplus s_2$ is a periodic series such that $\sigma(s_1 \oplus s_2) = max(\sigma(s_1), \sigma(s_2))$;
- $s_1 \otimes s_2$ is a periodic series such that $\sigma(s_1 \otimes s_2) = max(\sigma(s_1), \sigma(s_2))$;
- $(s_1)^*$ is a periodic series

Proof: Proofs are detailed in [9] and in a more concise way in [10]. ■

B. Intermediate Results in $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$

First, we recall a result given in [5, Lem 6], the proof of which is detailed in [9, Lem. 4.1.4]. This result is stated in $\mathcal{M}^{\text{ax}}_{\text{in}}[\![\gamma, \delta]\!]$ and is still valid in $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$ since $\mathcal{M}^{\text{ax}}_{\text{in}}[\![\gamma, \delta]\!]$ is a subdioid.

Lemma 2 (Domination Lemma): Let $m_1 = \gamma^{n_1}\delta^{t_1}(\gamma^{\nu_1}\delta^{\tau_1})^*$ and $m_2 = \gamma^{n_2}\delta^{t_2}(\gamma^{\nu_2}\delta^{\tau_2})^*$ be two simple periodic series in $\mathcal{M}^{\text{ax}}_{\text{in}}[\![\gamma, \delta]\!]$ such that $\tau_1/\nu_1 > \tau_2/\nu_2$. There exists an integer K such that

$$\gamma^{n_2}\delta^{t_2}\gamma^{K\nu_2}\delta^{K\tau_2}(\gamma^{\nu_2}\delta^{\tau_2})^* \preceq m_1.$$

Remark 7: The previous lemma means that in the expression $m_1 \oplus m_2$, monomials $\gamma^{n_2}\delta^{t_2}\gamma^{K\nu_2}\delta^{K\tau_2} \oplus \gamma^{n_2}\delta^{t_2}\gamma^{(K+1)\nu_2}\delta^{(K+1)\tau_2} \oplus \ldots$ are redundant. Asymptotically, series m_1 dominates series m_2.

Lemma 3: Let $w_1 = \bigoplus_i \gamma^{n_{1i}}\nabla_{m_1|b_1}\gamma^{n'_{1i}}$ and $w_2 = \bigoplus_j \gamma^{n_{2j}}\nabla_{m_2|b_2}\gamma^{n'_{2j}}$ be two periodic E-operators in $\mathcal{E}_{per}$ such that $\Gamma(w_1) = \Gamma(w_2)$. There exists a positive integer K such that $w_2\gamma^K \preceq w_1$.

Proof: First we show that for all i, j there exists an integer K_{ji} such that $\gamma^{n_{2j}}\nabla_{m_2|b_2}\gamma^{n'_{2j}}\gamma^{K_{ji}} \preceq \gamma^{n_{1i}}\nabla_{m_1|b_1}\gamma^{n'_{1i}}$. For all counter value $k \in \mathbb{Z}$, K_{ji} must satisfy

$$\left\lfloor \frac{k + n'_{2j} + K_{ji}}{b_2} \right\rfloor m_2 + n_{2j} \geq \left\lfloor \frac{k + n'_{1i}}{b_1} \right\rfloor m_1 + n_{1i}. \quad (24)$$

Since for all $x \in \mathbb{R}, x \geq \lfloor x \rfloor \geq x - 1$, if K_{ji} is chosen such that $\forall k \in \mathbb{Z}, ((k+n'_{2j}+K_{ji})/b_2-1)m_2+n_{2j} \geq ((k+n'_{1i})/b_1)m_1+n_{1i}$, then (24) is satisfied too. By assumption, $m_2/b_2 = m_1/b_1$; therefore, the previous inequality does not depend on k. It suffices to take $K_{ji} = n'_{1i} - n'_{2j} + b_2 + \lceil \frac{b_2}{m_2}(n_{1i} - n_{2j}) \rceil$. Finally, by taking $K = \max(0, \max_{i,j} K_{ji})$, we have $w_2\gamma^K \preceq w_1$. ■

The next Lemma is an extension of Lemma 2 in $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$.

Lemma 4: Let us consider $m_1 = w_1\delta^{t_1}(\gamma^{\nu_1}\delta^{\tau_1})^*$ and $m_2 = w_2\delta^{t_2}(\gamma^{\nu_2}\delta^{\tau_2})^*$ with $w_1, w_2 \in \mathcal{E}_{per}$ such that $\Gamma(w_1) = \Gamma(w_2)$. If $\tau_1/\nu_1 > \tau_2/\nu_2$, there exists a positive integer K such that

$$w_2\delta^{t_2}\gamma^{K\nu_2}\delta^{K\tau_2}(\gamma^{\nu_2}\delta^{\tau_2})^* \preceq m_1.$$

Proof: Thanks to Lemma 3 we can find an integer N s.t. $w_2\gamma^N \preceq w_1$. By applying Lemma 2, since $\tau_1/\nu_1 > \tau_2/\nu_2$, then $\delta^{t_1}(\gamma^{\nu_1}\delta^{\tau_1})^*$ is asymptotically greater than $\gamma^{-N}\delta^{t_2}(\gamma^{\nu_2}\delta^{\tau_2})^*$. Therefore, since $w_2\gamma^N \preceq w_1$ then $w_1\delta^{t_1}(\gamma^{\nu_1}\delta^{\tau_1})^*$ is asymptotically greater than $w_2\delta^{t_2}(\gamma^{\nu_2}\delta^{\tau_2})^*$. ■

Lemma 5: In $\mathcal{E}_{per}$, operator ∇_m can be written in a non canonical form as

$$\nabla_m = \bigoplus_{j=0}^{j=n-1} \gamma^{jm}\nabla_{nm}\gamma^{(n-1-j)m}.$$

Proof: The C/C function of ∇_m is clearly (m, m)-periodic. By considering $\mathcal{F}_{\nabla_m}$ as a (nm, nm)-periodic function, we obtain this non canonical form. ■

1) Example 13: For instance, we can write ∇_2 in a non canonical form as $\nabla_2 = \nabla_6\gamma^4 \oplus \gamma^2\nabla_6\gamma^2 \oplus \gamma^4\nabla_6$.

Lemma 6: In $\mathcal{E}_{per}$, we have $\nabla_M\gamma^K\nabla_M = \gamma^{\lfloor K \rfloor_M}\nabla_M = \nabla_M\gamma^{\lfloor K \rfloor_M}$ where $\lfloor K \rfloor_M \triangleq M\lfloor K/M \rfloor$ is the greatest integer in $M\mathbb{Z}$ less than or equal to K.

Proof: $\forall x \in \Sigma$, we have $(\nabla_M x)(t) = M\lfloor x(t)/M \rfloor = \lfloor x(t) \rfloor_M$. Since $K = \lfloor K \rfloor_M + K \bmod M$, we have $(\nabla_M\gamma^K\nabla_M x)(t) = \lfloor \lfloor x(t) \rfloor_M + K \rfloor_M = \lfloor \lfloor x(t) \rfloor_M + M\lfloor K/M \rfloor + (K \bmod M) \rfloor_M = \lfloor \lfloor x(t) \rfloor_M \rfloor_M + \lfloor K \rfloor_M = \lfloor x(t) \rfloor_M + \lfloor K \rfloor_M$. ■

Lemma 7: Let $p = \bigoplus_i w_i\delta^{t_i} = \bigoplus_i (\bigoplus_j \gamma^{n_{ij}}\nabla_{m_i}\gamma^{n'_{ij}})\delta^{t_i}$ be a conservative ($\Gamma(p) = 1$) balanced polynomial of $\mathcal{E}^*_{per}[\![\delta]\!]$. Polynomial p can be written in a non canonical form as $p = \bigoplus_k \gamma^{n_k}\nabla_M\gamma^{n'_k}\delta^{t_k}$ where $M = lcm(m_i)$.

Proof: By applying Lemma 5, each coefficient w_i of p can be developed as a sum of $\gamma^n\nabla_M\gamma^{n'}$ operators with $M = lcm(m_i)$. ■

2) Example 14: Let $p = \gamma^2\nabla_3\gamma^2\delta^2 \oplus \gamma^3\nabla_2\gamma^1\delta^3$. Thanks to Lemma 5, we can write p as a sum of $\gamma^n\nabla_{lcm(2,3)}\gamma^{n'}$ operators: $p = \gamma^2\nabla_6\gamma^5\delta^2 \oplus \gamma^5\nabla_6\gamma^2\delta^2 \oplus \gamma^3\nabla_6\gamma^5\delta^3 \oplus \gamma^5\nabla_6\gamma^3\delta^3 \oplus \gamma^7\nabla_6\gamma^1\delta^3$.

Thanks to Lemma 7, a conservative polynomial p can always be written as $p = \bigoplus_{i=1}^N w_i\delta^{t_i} = \bigoplus_{i=1}^N \gamma^{n_i}\nabla_M\gamma^{n'_i}\delta^{t_i}$ (see Ex. 14), i.e., all terms depend on the same operator ∇_M. Thanks to this form, the expression of the Kleene star of p can now be studied. In the expression of p^*, the products of L elements in $\{w_1\delta^{t_1}, .., w_N\delta^{t_N}\}$ is central. First, we introduce the following notation with $L \geq 2$:

$$M^L_{IJ} \triangleq \bigoplus_{i_x \in \{1,..,N\}} \left\{ \bigotimes_{x=1}^{L} w_{i_x}\delta^{t_{i_x}} | i_1 = I, i_L = J \right\}.$$

Operator M^L_{IJ} is obtained by summing all the products of exactly L operators from the set $\{w_1\delta^{t_1}, .., w_N\delta^{t_N}\}$ and such that the left factor is $w_I\delta^{t_I}$ and the right factor is $w_J\delta^{t_J}$, with $I, J \in \{1, .., N\}$. Thanks to the notation above, p^* can be expressed as follows:

$$p^* = e \oplus p \oplus \bigoplus_{i=1}^{N}\bigoplus_{j=1}^{N}\bigoplus_{l=2}^{\infty} M^l_{ij}. \quad (25)$$

First, let us focus on product $\bigotimes_{x=1}^{L} w_{i_x}\delta^{t_{i_x}}$ such that $i_x \in \{1, .., N\}$:

$$\begin{aligned}\bigotimes_{x=1}^{x=L} w_{i_x}\delta^{t_{i_x}} &= w_{i_1}w_{i_2}\ldots w_{i_L}\delta^{(t_{i_1}+t_{i_2}+\ldots+t_{i_L})}\\ &= \gamma^{n_{i_1}}\nabla_M\gamma^{n'_{i_1}}\ldots\gamma^{n_{i_L}}\nabla_M\gamma^{n'_{i_L}}\delta^{(t_{i_1}+\ldots+t_{i_L})}.\end{aligned}$$

By applying Lemma 6, one can simplify as follows:

$$\bigotimes_{x=1}^{L} w_{i_x}\delta^{t_{i_x}} = \gamma^{\kappa}\delta^{\tau}\gamma^{n_{i_1}}\nabla_M\gamma^{n'_{i_L}}$$

with

$$\begin{aligned}\kappa &= \lfloor n'_{i_1} + n_{i_2} \rfloor_M + \ldots + \lfloor n'_{i_{L-1}} + n_{i_L} \rfloor_M\\ &= \sum_{j=1}^{j=L-1} \lfloor n'_{i_j} + n_{i_{j+1}} \rfloor_M,\\ \tau &= \sum_{j=1}^{j=L} t_{i_j}.\end{aligned}$$

Finally, such an operator can be written

$$\bigotimes_{x=1}^{L} w_{i_x}\delta^{t_{i_x}} = \left[\bigotimes_{j=1}^{L-1} \gamma^{\lfloor n'_{i_j}+n_{i_{j+1}}\rfloor_M}\delta^{t_{i_j}}\right]\gamma^{n_{i_1}}\nabla_M\gamma^{n'_{i_L}}\delta^{t_{i_L}}.$$

It can be inferred that expression $\bigotimes_{j=1}^{j=L} w_{i_j}\delta^{t_{i_j}}$ such that $i_1 = I$ and $i_L = J$ can be written $\gamma^{\kappa}\delta^{\tau}\gamma^{n_I}\nabla_M\gamma^{n'_J}\delta^{t_J}$.

Lemma 8: Let $L \geq 2$ be a finite integer, then we have

$$M_{IJ}^{L} = (\varphi^{L-1})_{IJ}\gamma^{n_I}\nabla_M\gamma^{n'_J}\delta^{t_J}$$

where φ is a square matrix of $\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[\![\gamma,\delta]\!]^{N\times N}$ defined by

$$\forall a,b \in \{1,..,N\}, \varphi_{ab} = \gamma^{\lfloor n'_a+n_b\rfloor_M}\delta^{t_a}.$$

Proof: According to this definition of φ, for the exponent $L-1$ of matrix φ we have

$$(\varphi^{L-1})_{IJ} = \bigoplus_{i_x\in\{1,..,N\}} \{\bigotimes_{x=1}^{L-1} \gamma^{\lfloor n'_{i_x}+n_{i_{x+1}}\rfloor_M}\delta^{t_{i_x}} | i_1 = I, i_L = J\}.$$

■

Lemma 9: The infinite sum $\bigoplus_{L=2}^{+\infty} M_{IJ}^{L}$ is described by the following equivalent expression:

$$\bigoplus_{L=2}^{+\infty} M_{IJ}^{L} = (\varphi^{+})_{IJ}\gamma^{n_I}\nabla_M\gamma^{n'_J}\delta^{t_J}$$

with $\varphi^{+} = \bigoplus_{n\geq 1}\varphi^{n} = \varphi\varphi^{*}$.

Proof: By using Lemma 8 for operators M_{IJ}^{L} where $L \geq 2$, we obtain

$$\begin{aligned}\bigoplus_{L\geq 2} M_{IJ}^{L} &= \bigoplus_{L\geq 2}\left[(\varphi^{L-1})_{IJ}\gamma^{n_I}\nabla_M\gamma^{n'_J}\delta^{t_J}\right]\\ &= (\bigoplus_{n\geq 1}\varphi^{n})_{IJ}\gamma^{n_I}\nabla_M\gamma^{n'_J}\delta^{t_J}\\ &= (\varphi^{+})_{IJ}\gamma^{n_I}\nabla_M\gamma^{n'_J}\delta^{t_J}.\end{aligned}$$

■

Proposition 15: Let p be a conservative polynomial defined as $p = \bigoplus_{i=1}^{i=N} w_i\delta^{t_i}$ with $\forall i \in \{1,..,N\}, w_i = \gamma^{n_i}\nabla_M\gamma^{n'_i}$. The Kleene star of p is a conservative and ultimately periodic series in $\mathcal{E}_{per}^{*}[\![\delta]\!]$ defined by

$$p^{*} = e \oplus \left(\bigoplus_{I=1}^{N}\bigoplus_{J=1}^{N}\left((\varphi^{*})_{IJ}\gamma^{n_I}\nabla_M\gamma^{n'_J}\delta^{t_J}\right)\right). \tag{26}$$

Proof: Thanks to Lemma 9 and (25), then

$$\begin{aligned}p^{*} &= e \oplus \bigoplus_{k=1}^{N}\gamma^{n_k}\nabla_M\gamma^{n'_k}\delta^{t_k}\\ &\oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{i=N}\bigoplus_{j=1}^{j=N}\left((\varphi^{+})_{ij}\gamma^{n_i}\nabla_M\gamma^{n'_j}\delta^{t_j}\right)\right)\\ &= e \oplus \left(\bigoplus_{i=1}^{i=N}\bigoplus_{j=1}^{j=N}\left((\varphi^{*})_{ij}\gamma^{n_i}\nabla_M\gamma^{n'_j}\delta^{t_j}\right)\right).\end{aligned}$$

The Kleene star of matrix φ, since it is a matrix of $\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[\![\gamma,\delta]\!]$, is known to be composed of periodic series of $\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[\![\gamma,\delta]\!]$ (thanks to Th. 8, rational series $\iff$ periodic series in $\mathcal{M}_{\text{in}}^{\text{ax}}[\![\gamma,\delta]\!]$). Then, for all i,j, series $(\varphi^{*})_{ij}\gamma^{n_i}\nabla_M\gamma^{n'_j}\delta^{t_j}$ is ultimately periodic in $\mathcal{E}_{per}^{*}[\![\delta]\!]$. Therefore, the Kleene star p^{*} is obtained by summing N^2 ultimately periodic series of $\mathcal{E}_{per}^{*}[\![\delta]\!]$. Thanks to proposition 7, the result is periodic too. ■

Acknowledgment

The authors would like to thank the reviewers for their valuable comments and V. Reverdy for her linguistic help.

References

[1] F. Baccelli, G. Cohen, G. J. Olsder, and J. P. Quadrat, *Synchronization and Linearity: An Algebra for Discrete Event Systems*. New York, NY, USA: Wiley, 1992.

[2] A. Benabid-Najjar, C. Hanen, O. Marchetti, and A. Munier-Kordon, "Periodic schedules for bounded timed weighted event graphs," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 57, no. 5, pp. 1222–1232, May 2012.

[3] T. S. Blyth and M. F. Janowitz, *Residuation Theory*. Oxford, U.K.: Pergamon, 1972.

[4] G. Cohen, S. Gaubert, and J. P. Quadrat, "Timed event graphs with multipliers and homogeneous min-plus systems," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 43, no. 9, pp. 1296–1302, Sep. 1998.

[5] G. Cohen, P. Moller, J.-P. Quadrat, and M. Viot, "Algebraic tools for the performance evaluation of discrete event systems," *Proc. IEEE*, vol. 77, no. 1, pp. 39–58, Jan. 1989.

[6] B. Cottenceau, L. Hardouin, J.-L. Boimond, and J.-L. Ferrier, "Model reference control for timed event graphs in dioids," *Automat.*, vol. 37, no. 9, pp. 1451–1458, 2001.

[7] B. Cottenceau, M. Lhommeau, L. Hardouin, and J. L. Boimond, "Data processing tool for calculation in dioid," in *Proc. WODES'00, Workshop Discrete Event Syst.*, 2000.

[8] R. de Groote, J. Kuper, H. J. Broersma, and G. J. M. Smit, "Max-plus algebraic throughput analysis of synchronous dataflow graphs," in *Proc. 38th EUROMICRO Conf. Software Eng. Adv. Applicat. (SEAA)*, 2012, pp. 29–38.

[9] S. Gaubert, "Théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes," (in French) Ph.D. dissertation, Ecole des Mines de Paris, Paris, France, 1992.

[10] S. Gaubert and C. Klimann, "Rational computation in dioid algebra and its application to performance evaluation of discrete event systems," in *Algebraic Computing in Control*. New York, NY, USA: Springer, 1991, pp. 241–252.

[11] M. C. W. Geilen, "Synchronous dataflow scenarios," *ACM Trans. Embedded Comput. Syst.*, vol. 10, no. 2, pp. 16:1–16:31, Dec. 2010.

[12] S. Hamaci, J.-L. Boimond, and S. Lahaye, "Modeling and control of hybrid timed event graphs with multipliers using $(\min,+)$ algebra," *Discrete Event Dynamic Syst.*, vol. 16, no. 2, pp. 241–256, 2006.

[13] L. Hardouin, C. A. Maia, B. Cottenceau, and M. Lhommeau, "Observer design for $(\max,+)$ linear systems," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 55, no. 2, pp. 538–543, Feb. 2010.

[14] B. Heidergott, G. J. Olsder, and J. van der Woude, *Max Plus at Work – Modeling and Analysis of Synchronized Systems – A Course on Max-Plus Algebra and Its Applications*. Princeton, NJ, USA: Princeton Univ. Press, 2006.

[15] L. Houssin, S. Lahaye, and J. L. Boimond, "Control of $(\max,+)$-linear systems minimizing delays," *Discrete Event Dynamic Syst.*, vol. 23, no. 3, pp. 261–276, Sep. 2013.

[16] E. A. Lee and D. G. Messerschmitt, "Synchronous data flow," *Proc. IEEE*, vol. 75, no. 9, pp. 1235–1245, Sep. 1987.

[17] C. A. Maia, L. Hardouin, R. S. Mendes, and B. Cottenceau, "Optimal closed-loop control of timed event graphs in dioids," *IEEE Trans. Autom. Control*, vol. 48, no. 12, pp. 2284–2287, Dec. 2003.

[18] O. Marchetti and A. Munier-Kordon, "Complexity results for weighted timed event graphs," *Discrete Optimizat.*, vol. 7, no. 3, pp. 166–180, 2010.

[19] P. Moller, "Théorie algébrique des systèmes à événements discrets," (in French) Ph.D. dissertation, École des Mines de Paris, Paris, France, 1988.

[20] T. Murata, "Petri nets: Properties, analysis and applications," *Proc. IEEE*, vol. 77, no. 4, pp. 541–580, Apr. 1989.

[21] S. Sriram and S. Bhattacharyya, *Embedded Multiprocessors: Scheduling and Synchronization*. Boca Raton, FL, USA: CRC, 2009.

Bertrand Cottenceau was born in 1973. He received the Ph.D. degree from the University of Angers, Angers, France, in 1999.

He is currently an Associate Professor at the University of Angers. His research interests include modeling, simulation, and control of timed discrete event systems with applications in manufacturing systems and computer networks.

Laurent Hardouin was born in 1967. He received the Ph.D. degree from the University of Poitiers, Poitiers, France, in 1993 and the Habilitation à Diriger des Recherches from the University of Angers, Angers, France, in 2004.

He is currently a Full Professor of dynamic systems, computer engineering, and computer networks at the University of Angers. He specializes in discrete event systems, max-plus algebra, interval analysis, with applications to computer networks, manufacturing systems, transportation systems, and robotics.

Jean-Louis Boimond was born in France, in 1963. He received the Ph.D. degree in automatic control from the University of Savoie, Chambéry, France, in 1990.

He is currently a Full Professor at the University of Angers, Angers, France. His research and teaching interests, motivated by industrial applications, include modeling, simulation and control of discrete event systems.

Bibliographie

[Baccelli et al., 1992] Baccelli, F., Cohen, G., Olsder, G., and Quadrat, J. (1992). *Synchronisation and Linearity : An Algebra for Discrete Event Systems*. John Wiley and Sons, New York.

[Benabid-Najjar et al., 2012] Benabid-Najjar, A., Marchetti, C. H. O., and Munier-Kordon, A. (2012). Periodic schedules for bounded timed weighted event graphs. *IEEE Trans. Autom. Control*, 57(5) :1222–1232.

[Bilsen et al., 1996] Bilsen, G., Engels, M., Lauwereins, R., and Peperstraete, J. (1996). Cycle-static dataflow. *Signal Processing, IEEE Transactions on*, 44(2) :397–408.

[Blyth and Janowitz, 1972] Blyth, T. and Janowitz, M. (1972). *Residuation Theory*. Pergamon Press, Oxford.

[Bodin et al., 2012] Bodin, B., Munier-Kordon, A., and De Dinechin, B. D. (2012). K-periodic schedules for evaluating the maximum throughput of a synchronous dataflow graph. In *Embedded Computer Systems (SAMOS), 2012 International Conference on*, pages 152–159. IEEE.

[Bouillard et al., 2009] Bouillard, A., Cottenceau, B., Gaujal, B., Hardouin, L., Lagrange, S., and Lhommeau, M. (2009). Coinc library : a toolbox for the network calculus. In *ValueTools 2009*, page 35, Pise, Italie.

[Bouillard and Thierry, 2008] Bouillard, A. and Thierry, É. (2008). An algorithmic toolbox for network calculus. *Discrete Event Dynamic Systems*, 18(1) :3–49.

[Boutin, 2009] Boutin, O. (2009). *Modelling of Conflicts and Bounds Estimation in Production Systems Thanks to Dioid Theory*. Theses, Ecole Centrale de Nantes (ECN) (ECN) (ECN) (ECN).

[Boutin et al., 2008a] Boutin, O., Cottenceau, B., and L'Anton, A. (2008a). Commande de zones de conflits dans une algèbre de dioïde. In *7ème conférence internationale de MOdélisation et de SIMulation (MOSIM'08)*, Paris, France.

[Boutin et al., 2008b] Boutin, O., Cottenceau, B., and L'Anton, A. (2008b). Dealing with mutual exclusion sections in production systems : from shared resources to parallel TEG's. In *17th IFAC World Congress, IFAC*, volume 8, Séoul, Corée.

[Boutin et al., 2006] Boutin, O., Cottenceau, B., L'Anton, A., Boimond, J.-L., and Gérard, M.-F. (2006). Simulation d'une gestion de production (max,+) linéaire sous SIMAN/ARENA. In *Journées de la Section Automatique du club EEA - Démonstrateurs en Automatique à vocation recherche*, Angers, France.

[Boutin et al., 2009a] Boutin, O., Cottenceau, B., L'Anton, A., and Loiseau, J.-J. (2009a). Modélisation de systèmes de production à routages périodiques dans le dioïde zmin. In *Journées Doctorales/Journées Nationales MACS (JD-JN-MACS 2009)*, Angers.

[Boutin et al., 2009b] Boutin, O., Cottenceau, B., L'Anton, A., and Loiseau, J.-J. (2009b). Modelling systems with periodic routing functions in dioid (min,+). In *Information Control Problems in Manufacturing INCOM'09*, Moscou.

[Boutin et al., 2011] Boutin, O., Cottenceau, B., Loiseau, J. J., and L'Anton, A. (2011). Shared Resources in Production Systems :(max,plus) Analysis. *International Journal of Mathematics in Operational Research (IJMOR)*, 3(2) :125–147.

[Boutin and L'Anton, 2011] Boutin, O. and L'Anton, A. (2011). Modelling routing phenomenon with bounds estimation in dioids. *Linear Algebra and its Applications*, 435(7) :1520–1541.

[Boutin et al., 2007a] Boutin, O., L'Anton, A., and Cottenceau, B. (2007a). Contribution au pilotage (max,+) en ligne d'un système de production émulé. In *JD MACS07 : 2èmes Journées Doctorales du GdR MACS*, Reims, France.

[Boutin et al., 2007b] Boutin, O., L'Anton, A., and Cottenceau, B. (2007b). Emulation as a means of designing an inline-control. In *IMSM07 : International Modeling & Simulation Multiconference 2007*, Buenos Aire, Argentine.

[Boutin et al., 2007c] Boutin, O., L'Anton, A., and Cottenceau, B. (2007c). Online control of a (max,+) linear emulated production system. In *IESM07 : International Conference on Industrial Engineering and Systems Management*, Pékin, Chine.

[Cassandras and Lafortune, 2008] Cassandras, C. G. and Lafortune, S. (2008). *Introduction to discrete event systems*. Springer.

[Chang, 2000] Chang, C.-S. (2000). *Performance guarantees in communication networks*. Springer.

[Cohen, 1998] Cohen, G. (1998). Residuation and applications. In *Algèbres Max-Plus et applications en informatique et automatique, Ecole de printemps d'informatique théorique*, Noirmoutier.

[Cohen et al., 1989a] Cohen, G., Gaubert, S., Nikoukhah, R., and Quadrat, J. (1989a). Convex analysis and spectral analysis of timed event graphs. In *28th Conf. Decision and Control*, Tampa, FL.

[Cohen et al., 1993] Cohen, G., Gaubert, S., and Quadrat, J. (1993). From first to second-order theory of linear discrete event systems. In *12th IFAC*, Sydney.

[Cohen et al., 1998a] Cohen, G., Gaubert, S., and Quadrat, J. (1998a). Max-plus algebra and system theory : Where we are and where to go now. In *IFAC Conference on System Structure and Control*, Nantes.

[Cohen et al., 1998b] Cohen, G., Gaubert, S., and Quadrat, J. (1998b). Timed event graphs with multipliers and homogeneous min-plus systems. *IEEE Trans. Autom. Control*, 43(9) :1296 – 1302.

[Cohen et al., 1984] Cohen, G., Moller, P., Quadrat, J., and Viot, M. (1984). Linear system theory for discrete-event systems. In *23rd IEEE Conf. on Decision and Control*, Las Vegas, Nevada.

[Cohen et al., 1986] Cohen, G., Moller, P., Quadrat, J., and Viot, M. (1986). Dating and counting events in discrete event systems. In *25th IEEE Conf. on Decision and Control*, Athens, Greece.

[Cohen et al., 1989b] Cohen, G., Moller, P., Quadrat, J., and Viot, M. (1989b). Algebraic Tools for the Performance Evaluation of Discrete Event Systems. *IEEE Proceedings : Special issue on Discrete Event Systems*, 77(1) :39–58.

[Correia et al., 2006] Correia, A., Lahaye, S., and Cottenceau, B. (2006). Commande de graphes d'evénements temporisés partiellement commandables avec contraintes temporelles. In *CIFA 2006 (Conférence Internationale Francophone d'Automatique)*, Bordeaux, France.

[Cottenceau, 1999] Cottenceau, B. (1999). *Contribution à la commande de systèmes à événements discrets : synthèse de correcteurs pour les graphes d'événements temporisés dans les dioïdes*. PhD thesis, Université d'Angers.

[Cottenceau et al., 2001a] Cottenceau, B., Hardouin, L., and Boimond, J.-L. (2001a). On Timed Event Graphs Stabilization by Output Feedback in Dioid. In *1st IFAC Symposium on System Structure and Control, Workshop on (max,+) algebras*, Prague, République Tchèque.

[Cottenceau et al., 2014a] Cottenceau, B., Hardouin, L., and Boimond, J.-L. (2014a). Modeling and control of weight-balanced timed event graphs in dioids. *IEEE Trans. Autom. Control*, 59(5) :1219–1231.

[Cottenceau et al., 1999] Cottenceau, B., Hardouin, L., Boimond, J.-L., and Ferrier, J.-L. (1999). Synthesis of greatest linear feedback for timed event graphs in dioid. *IEEE Trans. Autom. Control*, 44(6) :1258–1262.

[Cottenceau et al., 2001b] Cottenceau, B., Hardouin, L., Boimond, J.-L., and Ferrier, J.-L. (2001b). Model reference control for timed event graphs in dioids. *Automatica*, 37(9) :1451–1458.

[Cottenceau et al., 2009] Cottenceau, B., Hardouin, L., and Le Corronc, E. (2009). Représentation tridimensionnelle de la dynamique des graphes d'événements temporisés généralisés. In *MSR'09 Modélisation des Systèmes Réactifs*, Nantes.

[Cottenceau et al., 2006] Cottenceau, B., Hardouin, L., and Ouerghi, I. (2006). Evolution of kanban systems thanks to a (max,+)-algebra analysis. In *INCOM'06 (12th IFAC Symposium on Information Control Problems in Manufacturing*, Saint Etienne, France.

[Cottenceau et al., 2008] Cottenceau, B., Hardouin, L., and Ouerghi, I. (2008). Kanban policy improvement thanks to a (max,+)-algebra analysis. *International Journal of Systems Science*, 39(7) :689–698.

[Cottenceau et al., 2014b] Cottenceau, B., Lahaye, S., and Hardouin, L. (2014b). Modeling of time-varying (max,+) systems by means of weighted timed event graphs. In *12th IFAC-IEEE Int. Workshop on Discrete Event Systems*, Paris.

[Cottenceau et al., 2000] Cottenceau, B., Lhommeau, M., Hardouin, L., and Boimond, J.-L. (2000). Data processing tool for calculation in dioid. In *Proceedings of WODES'2000, Workshop on Discrete Event Systems*.

[Cottenceau et al., 2003] Cottenceau, B., Lhommeau, M., Hardouin, L., and Boimond, J.-L. (2003). On timed event graph stabilization by output feedback in dioid. *Kybernetika*, 39(2) :165–176.

[David-Henriet et al., 2013] David-Henriet, X., Hardouin, L., Raisch, J., and Cottenceau, B. (2013). Optimal control for timed event graphs under partial synchronization. *Proceedings of Conf. Decision and Control*.

[David-Henriet et al., 2014] David-Henriet, X., Hardouin, L., Raisch, J., and Cottenceau, B. (2014). Holding time maximization preserving output performance for timed event graphs. *IEEE Trans. Autom. Control*, 59(7) :1968–1973.

[de Groote et al., 2012] de Groote, R., Kuper, J., Broersma, H. J., and Smit, G. J. M. (2012). Max-plus algebraic throughput analysis of synchronous dataflow graphs. In *38th EUROMICRO Conference on Software Engineering and Advanced Applications (SEAA)*, pages 29–38.

[Delanoue, 2006] Delanoue, N. (2006). *Algorithmes numériques pour l'analyse topologique. Calcul par intervalle et théorie des graphes.* Thèse de doctorat, Université d'Angers.

[Delanoue et al., 2004] Delanoue, N., Jaulin, L., and Cottenceau, B. (2004). Proving that a set is connected via interval analysis. In *Workshop on State-of-the-art in Scientifc Computing Minisymposium, Interval methods, Para'04*, Copenhagen, Denmark.

[Delanoue et al., 2006a] Delanoue, N., Jaulin, L., and Cottenceau, B. (2006a). Attraction domain of a nonlinear system using interval analysis. *Twelfth International Conference on Principles and Practice of Constraint Programming (IntCP 2006), France, Nantes*, 21.

[Delanoue et al., 2006b] Delanoue, N., Jaulin, L., and Cottenceau, B. (2006b). Counting the number of connected components of a set and its application to robotics. In *Applied Parallel Computing. State of the Art in Scientific Computing*, pages 93–101. Springer Berlin Heidelberg.

[Delanoue et al., 2006c] Delanoue, N., Jaulin, L., and Cottenceau, B. (2006c). Using interval arithmetic to prove that a set is path-connected. *Theoretical computer science*, 351(1) :119–128.

[Delanoue et al., 2007] Delanoue, N., Jaulin, L., and Cottenceau, B. (2007). Guaranteeing the homotopy type of a set defined by non-linear inequalities. *Reliable Computing*, 13(5) :381–398.

[Delanoue et al., 2014] Delanoue, N., Jaulin, L., and Cottenceau, B. (2014). An algorithm for computing a neighborhood included in the attraction domain of an asymptotically stable point. *Communications in Nonlinear Science and Numerical Simulation (à paraître)*.

[Fidler and Recker, 2006] Fidler, M. and Recker, S. (2006). Conjugate network calculus : A dual approach applying the legendre transform. *Computer Networks*, 50(8) :1026–1039.

[Gaubert, 1992] Gaubert, S. (1992). *Théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes.* Thèse de doctorat, Ecole des Mines de Paris, Paris.

[Gaubert and Klimann, 1991] Gaubert, S. and Klimann, C. (1991). Rational computation in dioid algebra and its application to performance evaluation of discrete event systems. In Jacob, G. and Lamnabhi-Lagarrigue, F., editors, *Lecture notes in Control and Inf. Sci.*, number 165. Springer.

[Geilen, 2010] Geilen, M. (2010). Synchronous dataflow scenarios. *ACM Transactions on Embedded Computing Systems*, 10(2).

[Hamaci et al., 2006] Hamaci, S., Boimond, J.-L., and Lahaye, S. (2006). On modeling and control of discrete timed event graphs with multipliers using (min,+) algebra. In *Informatics in Control, Automation and Robotics*, pages 211–216. Springer Netherlands.

[Hamaci et al., 2007] Hamaci, S., Boimond, J.-L., and Lahaye, S. (2007). Performance analysis of timed event graphs with multipliers using (min,+) algebra. In *Informatics in Control, Automation and Robotics II*, pages 185–190. Springer Netherlands.

[Hardouin et al., 2013] Hardouin, L., Boutin, O., Cottenceau, B., Brunsch, T., and Raisch, J. (2013). *Control of Discrete Event Systems Chapter 22 Discrete-Event Systems in a Dioid Framework : Control Theory.* SPRINGER, C. SEATZU, M. SILVA J.H VAN SCHUPPEN, LN. Series : Lecture Notes in Control and Information Sciences, Vol. 433, ISBN 978-1-4471-4275-1.

[Hardouin et al., 2010a] Hardouin, L., Cottenceau, B., and Le Corronc, E. (2010a). On the dual product and the dual residuation over idempotent semiring of intervals. In *ILAS 2010, International Linear Algebra Society*, Pisa.

[Hardouin et al., 2009a] Hardouin, L., Cottenceau, B., Lhommeau, M., and Corronc, E. L. (2009a). Interval systems over idempotent semiring. *Linear Algebra and its Applications*, 431(5) :855–862.

[Hardouin et al., 2009b] Hardouin, L., Le Corronc, E., and Cottenceau, B. (2009b). Minmaxgd a Software Tools to Handle Series in (max,+) Algebra. In *SIAM Conference on Computational Science and Engineering*, Miami, USA.

[Hardouin et al., 2007] Hardouin, L., Maia, C. A., Cottenceau, B., and Lhommeau, M. (2007). Observer design for max-plus-linear systems. In *Dependable Control of Discrete Systems*, Cachan, France.

[Hardouin et al., 2010b] Hardouin, L., Maia, C. A., Cottenceau, B., and Lhommeau, M. (2010b). Observer design for (max, plus) linear systems. *IEEE Trans. on Autom. Control*, 55(2) :538–543.

[Heidergott et al., 2006] Heidergott, B., Olsder, G., and van der Woude, J. (2006). *Max Plus at Work - Modeling and Analysis of Synchronized Systems - A Course on Max-Plus Algebra and Its Applications.* Princeton University Press.

[Jaulin et al., 2001] Jaulin, L., Kieffer, M., Didrit, O., and Walter, E. (2001). *Applied interval analysis : with examples in parameter and state estimation, robust control and robotics.* Springer Verlag.

[Lahaye et al., 1999] Lahaye, S., Boimond, J., and Hardouin, L. (1999). Optimal control of (min,+) linear time-varying systems. In *PNPM'99*, Saragosse.

[Lahaye et al., 2004a] Lahaye, S., Boimond, J. L., and Hardouin, L. (2004a). Linear periodic systems over dioids. *Discrete Event Dynamic Systems*, 14(2) :133–152.

[Lahaye et al., 2004b] Lahaye, S., Cottenceau, B., and Correïa, A. (2004b). Commande de graphes d'événements temporisés avec contrainte de temps critique. In *Proceedings Conf. Internationale Francophone d'Automatique (CIFA'04)*.

[Le Boudec and Thiran, 2001] Le Boudec, J.-Y. and Thiran, P. (2001). *Network calculus : a theory of deterministic queuing systems for the internet*, volume 2050. Springer.

[Le Corronc, 2011] Le Corronc, E. (2011). *Guaranteed models and computations for (min,+)-linear systems*. Theses, Université d'Angers.

[Le Corronc et al., 2009a] Le Corronc, E., Cottenceau, B., and Hardouin, L. (2009a). Approximation convexe de systèmes (max,+)-linéaires. In *JDMACS'09 - 3èmes Journées Doctorales du Gdr MACS*, Angers, France.

[Le Corronc et al., 2009b] Le Corronc, E., Cottenceau, B., and Hardouin, L. (2009b). Control of uncertain (min,+)-linear systems. In *POSTA'09 - 3rd International Symposium on Positive Systems : Theory and Applications*, Valence, Espagne.

[Le Corronc et al., 2009c] Le Corronc, E., Cottenceau, B., and Hardouin, L. (2009c). Encadrement de systèmes (min,+)-linéaires. In *MSR'09 - 7ème colloque francophone sur la Modélisation des Systèmes Réactifs*, Nantes, France.

[Le Corronc et al., 2010a] Le Corronc, E., Cottenceau, B., and Hardouin, L. (2010a). Control of uncertain (max,+)-linear systems in order to decrease uncertainty. In *WODES'10 - 10th International Worksop On Discrete Event Systems*, Berlin, Allemagne.

[Le Corronc et al., 2010b] Le Corronc, E., Cottenceau, B., and Hardouin, L. (2010b). Flow control with (min,+) algebra. In *ISOLA'10 - Special Session WCTT (Worst Case Traversal Time) - 4th International Symposium On Leveraging Applications of Formal Methods, Verification and Validation*, Heraklion, Crete.

[Le Corronc et al., 2011] Le Corronc, E., Cottenceau, B., and Hardouin, L. (2011). Contrôle de flux en algèbre (min,+). In *Journées Nationales du GDR GPL (Génie de la Programmation et du Logiciel)*, Lille, France.

[Le Corronc et al., 2012] Le Corronc, E., Cottenceau, B., and Hardouin, L. (2012). Container-minmaxgd : a toolbox for (min,+)-linear systems. In *Workshop on Network Calculus, WoNeCa'12*, Kaiserslautern, Allemagne.

[Le Corronc et al., 2014] Le Corronc, E., Cottenceau, B., and Hardouin, L. (2014). Container of (min,+)-linear systems. *Discrete Event Dynamic Systems*, 24(1) :15–52.

[Lee and Messerschmitt, 1987] Lee, E. and Messerschmitt, D. (1987). Synchronous data flow. *Proc. IEEE*, 75(9) :1235–1245.

[Lhommeau, 2003] Lhommeau, M. (2003). *Etude de systèmes à événements discrets dans l'algèbre (max,+) : synthèse de correcteurs robustes dans un dioïde d'intervalles : synthèse de correcteurs en présence de perturbations*. PhD thesis, Angers.

[Lhommeau et al., 2004] Lhommeau, M., Hardouin, L., Cottenceau, B., and Jaulin, L. (2004). Interval analysis and dioid : application to robust controller design for timed event graphs. *Automatica*, 40(11) :1923–1930.

[Maia et al., 2003] Maia, C. A., Hardouin, L., Santos-Mendes, R., and Cottenceau, B. (2003). Optimal closed-loop control of timed eventgraphs in dioids. *IEEE Trans. on Autom. Control*, 48(12) :2284–2287.

[Marchetti and Munier-Kordon, 2010] Marchetti, O. and Munier-Kordon, A. (2010). Complexity results for weighted timed event graphs. *Discrete Optimization*, 7(3) :166–180.

[Max Plus, 1991] Max Plus (1991). Second Order Theory of Min-linear Systems and its Application to Discrete Event Systems. In *Proceedings of the 30th CDC*, Brighton, England.

[Munier, 1993] Munier, A. (1993). Régime asymptotique optimal d'un graphe d'évènement temporisé généralisé : application à un problème d'assemblage. *RAIRO-APII*, 27(5) :487–513.

[Murata, 1989] Murata, T. (1989). Petri nets : properties, analysis and applications. *Proceedings of the IEEE*, 77(4) :541–580.

[Ramadge and Wonham, 1989] Ramadge, P. and Wonham, W. (1989). The control of discrete event systems. *IEEE TAC*, 77 :81–98.

[Santos-Mendes et al., 2005] Santos-Mendes, R., Cottenceau, B., and Hardouin, L. (2005). Adaptive feedback control for (max,+)-linear systems. In *Emerging Technologies and Factory Automation, 2005. ETFA 2005. 10th IEEE Conference on*, Catane, Italie.

[Tarski, 1955] Tarski, A. (1955). A lattice-theoretical fixpoint theorem and its applications. *Pacific journal of Mathematics*, 5(2) :285–309.

[Teruel et al., 1992] Teruel, E., Chrzastowski-Wachtel, P., Colom, J., and Silva, M. (1992). On weighted t-systems. In Jensen, K., editor, *Application and Theory of Petri Nets 1992*, volume 616 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 348–367. Springer Berlin Heidelberg.