



Master Systèmes Dynamiques et Signaux

Mémoire de master

Extension des mesures d'importance pour la prise en compte du niveau de risque dans le processus d'allocation pour des systèmes innovants

Auteur :
Mme Louise NICOLAS

Jury :
Pr. L. AUTRIQUE
Pr. B. CASTANIER
Pr. A. HEURTIER
Pr. L. PEREZ
Pr. P. RICHARD

Président :
Pr. L. HARDOUIN

Version du
1^{er} juillet 2021

Remerciements

Tout d'abord, je tenais à remercier M. Kobi et M. Hardouin pour m'avoir permise de réaliser un M2 SDS un peu particulier.

Ensuite, je remercie M. Organisciak sans qui nous n'aurions pas pu aboutir sur un tel sujet de recherche puisqu'il nous avait proposé un sujet initial.

Également, je tenais à remercier mes deux collaborateurs direct, M. Castanier et M. Saintis, qui m'ont permise de réaliser mon stage tout en restant à distance. Je les remercie pour leur investissement, leur suivi pédagogique régulier ainsi que leurs nombreux conseils.

Table des matières

1	Présentation du sujet d'étude	1
1.1	Démonstration de la Fiabilité	1
1.2	Problématique d'un nouveau composant	1
1.3	Exemple de cas d'étude	2
2	Bibliographie	5
2.1	Modélisation de la connaissance	5
2.2	Mesures d'importance	6
2.2.1	Facteurs probabilistes	7
2.2.2	Facteurs intégrant les connaissances imparfaites	9
2.3	Allocation d'objectif	11
2.3.1	Principe d'allocation	11
2.3.2	Allocation et mesures d'importance	12
2.3.3	Allocation d'un plan d'essais	13
3	Méthodologie proposée	15
3.1	Méthode générale	15
3.2	Mesures d'importance retenues	16
3.3	Allocation du plan d'essais de démonstration de la fiabilité	18
3.3.1	Détermination du plan d'essais	18
3.3.2	Validation du plan d'essais	21
3.4	Cas particulier de la loi Gamma	24
4	Mise en place de la méthode sur un cas d'application	27

4.1	Cas d'application	27
4.2	Interprétation des résultats apportés par l'algorithme	29
4.2.1	Variation de la connaissance sur un composant	29
4.2.2	Variation de la fiabilité d'un composant	32
4.2.3	Variation du nombre total d'essais souhaité	34
	Conclusion	37
	Annexe	39

Table des figures

1.1	Système étudié	3
3.1	Algorithme d'estimation d'un plan d'essais par allocation	20
3.2	Algorithme de validation du plan d'essais choisi	22
4.1	Bloc-diagramme de fiabilité du système étudié	27
4.2	Évolution du nombre d'essais ajouté par composant suivant la valeur de α_1	30
4.3	Évolution du nombre d'essais ajouté par composant suivant la valeur de α_3	31
4.4	Évolution du nombre d'essais ajouté par composant suivant la valeur de λ_1	32
4.5	Évolution du nombre d'essais ajouté par composant suivant la valeur de λ_3	33
4.6	Validation de la fiabilité objectif selon le nombre total d'essais exigé	35
4.7	Initialisation des paramètres d'entrée de l'algorithme	49
4.8	Estimation de la fiabilité du système, de son intervalle de confiance et calcul du facteur de Birnbaum	50
4.9	Construction du plan d'essais	51
4.10	Obtention du plan d'essais	51
4.11	Initialisation des paramètres du système	52
4.12	Plan d'essais à valider	52
4.13	Simulations du plan d'essais	53
4.14	Acceptation ou refus du plan d'essais suivant le risque client	53

Liste des acronymes

REX	<i>Retour d'EXpérience</i>
ER	<i>Évènement Redouté</i>
RAW	<i>Risk Achievement Worth</i>
RRW	<i>Risk Reduction Worth</i>

Chapitre 1

Présentation du sujet d'étude

1.1 Démonstration de la Fiabilité

La mise sur le marché d'un nouveau produit ou encore d'une évolution significative d'un produit nécessite la démonstration de la conformité de ce même produit par rapport à un ensemble de réglementations ou normes. Cette démonstration est à la charge du manufacturier et validée par des organismes de certification. On parle par exemple de marquage CE ou simplement de certification. Nous poserons le sujet de ce stage dans ce contexte de démonstration de conformité ou objectif de performance, ici plus précisément de fiabilité, pour des systèmes dits complexes et innovants.

Avant de préciser le sujet de mon stage actuel, je voudrais revenir sur les éléments de contexte qui ont motivé cette recherche. L'idée initiale était d'appuyer la société SKF dans la démonstration, vis-à-vis de leur client, d'atteinte de performance de nouveaux roulements pour des essieux de train reposant sur une technologie innovante. La question posée était alors d'élaborer une méthodologie pour guider la démonstration en se reposant sur des « modèles » ainsi que la connaissance de SKF acquise à la fois sur les anciennes générations de roulements et lors de l'ensemble des études conduites lors de la conception même de cette nouvelle technologie.

1.2 Problématique d'un nouveau composant

C'est à partir de cette problématique que nous nous sommes intéressés à la signification et l'impact d'un composant nouveau sur un système et toute l'importance de la connaissance acquise sur un composant. Nous nous sommes donc penchés sur l'élaboration d'une méthodologie pour la détermination des efforts d'acquisition d'information sur des composants pour la validation d'exigences de fiabilité d'un système complexe innovant. Notons

que de nombreuses méthodes sont disponibles à ce jour pour, à partir de la décomposition dite fonctionnelle d'un système complexe, construire une réflexion systématique pour valider itérativement les exigences intermédiaires jusqu'aux exigences globales, ici de fiabilité d'un produit. Ces processus définissant le cycle en V de développement se décomposent classiquement en deux phases, à savoir la phase descendante d'allocation (qui permet de spécifier des niveaux de fiabilité objectif pour chacune des composantes du système) et la phase remontante de validation ou vérification intermédiaire. Les méthodes d'ingénierie de décomposition fonctionnelle des systèmes sont globalement bien maîtrisées et ne feront pas ici l'objet de notre recherche. Pour une architecture donnée d'un système, notons que le problème d'allocation reste un problème d'optimisation ouvert [4]. Des heuristiques de résolution sont proposées. Elles permettent d'allouer ces objectifs à chaque niveau de décomposition pour respecter l'exigence globale du système. Cependant, une exigence au niveau système est formulée en fonction d'un objectif, $R_S^*(5 \text{ ans}) = 0,7$ par exemple, et d'un niveau de confiance $1 - \delta$ de 90 % pour prendre en compte l'incertitude sur les données d'entrée au problème. La répartition ou allocation de ces niveaux d'incertitude sur les niveaux de décomposition du système reste clairement un challenge en terme méthodologique. Ils se doivent de refléter la connaissance à priori sur chacun des niveaux de décomposition (et quelque part sur les modèles de fiabilité à utiliser) et l'incertitude ou variabilité des paramètres des lois de fiabilité liées au processus d'estimation (qualité et taille de l'échantillon, s'il existe, ainsi que de la méthode d'estimation associée). Ils permettent par ailleurs de déterminer les efforts à produire, en phase de validation, pour améliorer la connaissance en termes de fiabilité de chacun des niveaux de décomposition. Les moyens à mettre en place peuvent être par exemple des plans d'essai de fiabilité, le retour d'expérience de système équivalent ou la recherche de connaissance à priori (modèles, expertise, etc.) sur les composantes les plus innovantes. Notons que, tout comme pour l'objectif de fiabilité, l'importance d'un composant (c'est-à-dire sa contribution à l'objectif global au niveau système) joue un rôle sur la définition des efforts en termes de connaissance à collecter. En effet, on peut supposer qu'il est moins important de chercher à renseigner un composant innovant s'il est redondé notamment avec un composant bien connu que s'il ne l'était pas. Notre objectif sera alors de baser notre méthodologie d'allocation sur cette notion d'importance des composants fonction de sa contribution sur la fiabilité globale (cet aspect est déjà pris en compte dans la définition des mesures d'importance telles que la mesure d'importance de Birnbaum [15]), ainsi que le niveau de connaissance en terme de fiabilité.

1.3 Exemple de cas d'étude

Pour la suite, nous appuierons notre étude sur un exemple. Le système fictif étudié est composé de deux composants en série ainsi que deux composants en parallèle.

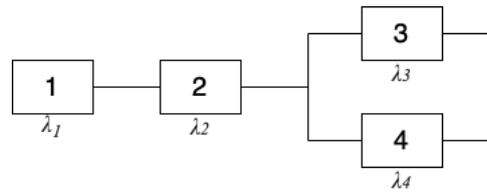


FIGURE 1.1 – Système étudié

Le composant 1 et 3 sont considérés comme des composants connus disposant de retour d'expérience issu de 10 essais. Le composant 2 représente l'innovation du système, aucune donnée n'est disponible à part son comportement suivant une loi de paramètres déterminés. Enfin, nous tirons des informations du composant 4 d'après un retour d'expérience d'un composant similaire (une estimation à partir de FIDES pour un composant électronique par exemple).

Ce système se doit de respecter les exigences de fiabilité demandée, c'est à dire avoir son intervalle de confiance de fiabilité supérieur à la fiabilité objectif et une probabilité de se qualifier à tort inférieure au risque de première espèce δ . Nous avons alors mis en œuvre une allocation d'objectif de fiabilité. Pour se faire, nous intégrons un facteur d'importance à l'allocation pour identifier sur quel composant nous devons appuyer nos efforts pour améliorer la variabilité de la fiabilité du système et ainsi respecter les exigences fixées.

Avant de venir à la méthodologie même, nous allons d'abord aborder une partie bibliographique pour faire le point sur les mesures d'importance existantes ainsi que les méthodes d'allocation répondant à notre problème.

Chapitre 2

Bibliographie

Comme nous l'avons introduit dans la partie précédente, nous souhaitons réduire le risque quant à l'évaluation de la fiabilité d'un système complexe et innovant. Pour se faire, nous avons opté pour l'utilisation de mesures d'importance permettant de mettre en avant sur quel composant il serait judicieux d'ajouter de l'information de façon à réduire l'incertitude sur la fiabilité et de respecter les exigences du cahier des charges. C'est le second point théorique que nous allons aborder dans cette partie. Ensuite, nous souhaitons intégrer une ou plusieurs mesures d'importance dans la phase d'allocation, c'est la troisième partie que nous aborderons sachant que la première sera consacrée à la façon dont nous pouvons quantifier l'information disponible sur chaque composant avant qu'il soit question de répondre à notre problématique.

2.1 Modélisation de la connaissance

Avant toute chose, il est important de préciser que pour ajouter de la connaissance sur un composant (que l'on considère nouveau ou partiellement nouveau), plusieurs façons de faire peuvent être envisagées. Nous pouvons d'abord enrichir ou affiner le modèle théorique suivi par le composant, c'est-à-dire faire appel à un expert. Il est aussi possible de se servir des REX (Retours d'EXpérience) d'un système ou composant équivalent (comme un ancien modèle) pour prédire le comportement du composant actuel. Ou enfin, nous pouvons réaliser des essais pour obtenir plus de données sur le composant. De ces trois apports d'information possibles, beaucoup de questions s'en dégagent. Quel type d'information choisir par exemple ? Lequel coûterai le moins ? Nous pouvons facilement imaginer une multitude de combinaisons possibles de ces types d'information permettant de respecter un objectif de fiabilité avec un faible risque associé : choisir l'avis d'un expert pour ne pas investir dans un banc d'essais, associer expertise et REX d'un système équivalent, mettre en place un plan d'essais pour tester un matériel, ... Également, les informations à priori

détenues avant l'application de la méthode peuvent venir de toutes sources confondues. Différentes lois permettent de modéliser ces types de connaissances (sachant que la fiabilité du système suit une loi exponentielle). En effet, il est classique de voir attribuer au taux de défaillance une loi Uniforme lorsque les informations disponibles initialement sur le composant sont seulement l'avis d'un expert (c'est le cas d'un composant nouveau). Dans ce cas là, les seules informations disponibles sur le comportement du taux de défaillance sont qu'il est compris entre une borne inférieure et supérieure. Cette modélisation peu précise témoigne d'un manque cruel d'information. Ensuite, pour modéliser des connaissances venant d'une banque de données de systèmes similaires, tout type de loi convient en fonction de l'information que l'on a sur le système : loi Normale, Uniforme ou bien Gamma. Et lorsque nous disposons d'un REX à partir d'essais, la loi Gamma est utilisée pour le taux de défaillance, c'est la loi la plus utilisée pour un taux de défaillance constant car il s'agit de la loi conjuguée avec la loi exponentielle.

Pour notre étude, nous modélisons les taux de défaillance des composants par une loi Gamma (ce choix sera justifié dans la Section 3.4). Nous considérons cette loi pour simplifier le modèle. Dans l'exemple que nous développerons dans le chapitre 4, les taux de défaillance λ_i des composants suivent une loi Gamma de paramètres α_i et β_i . Nous considérons donc que $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ avec $n \in \mathbb{R}^N$, λ_i est une variable aléatoire suivant une loi Gamma de densité de probabilité :

$$f(\lambda_i, \alpha_i, \beta_i) = \frac{\beta_i^{\alpha_i} e^{-\beta_i \lambda_i}}{\tau(\alpha_i)} \lambda_i^{\alpha_i - 1},$$

α_i étant le paramètre de forme et β_i le paramètre d'intensité.

Le paramètre de forme α est le paramètre le plus représentatif de l'information disponible sur un composant (avant de calculer la variance du taux de défaillance d'un composant). Lorsque la loi Gamma est utilisée pour un composant sans REX ou essais disponibles, le paramètre de forme prend la valeur minimale de 2. Cependant, si l'on dispose d'essais sur le composant, le paramètre α devient le nombre d'essais effectués sur ce composant.

À chaque instant où de nouvelles connaissances seront ajoutées au modèle, les paramètres a priori de la loi seront mis à jour a posteriori pour affiner le modèle.

2.2 Mesures d'importance

Un facteur d'importance mesure l'importance d'un composant vis-à-vis de la fiabilité du système. Il existe deux catégories principales de facteurs d'importance (présentées dans [14]) mesurant respectivement : l'influence sur la métrique telle que la fiabilité ou la disponibilité (facteurs probabilistes) et l'influence sur la variabilité de la métrique (intégrant les connaissances imparfaites sur le système).

Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ où $n \in \mathbb{R}^N$.

On note $\phi(X)$ la fonction de structure du système où $X = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ représente l'état des composants à un instant t donné d'après [6].

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{le composant fonctionne} \\ 0, & \text{le composant ne fonctionne pas} \end{cases}$$

Également,

$$\phi(X_i) = \begin{cases} 1, & \text{le système fonctionne} \\ 0, & \text{le système ne fonctionne pas} \end{cases}$$

$P(\phi(X) = 1) = E(\phi(X)) \Leftrightarrow$ la probabilité que le système fonctionne revient à trouver l'espérance de la fonction de structure.

$P(X_i = 0) = q_i(t)$, lorsque le composant i ne fonctionne pas. Par conséquent, l'indisponibilité d'un composant vaut q_i

On note ensuite $G(q(t)) = 1 - E(\phi(X))$ la fonction de défiabilité ou indisponibilité du système. Ainsi,

$G(1_i, q(t))$ est l'indisponibilité du système quand le composant i ne fonctionne pas.

$G(0_i, q(t))$ est l'indisponibilité du système quand le composant i fonctionne.

2.2.1 Facteurs probabilistes

Facteur de Birnbaum (ou facteur marginal) [3]

Ce facteur mesure « la variation de l'indisponibilité du système en fonction de l'indisponibilité de ses composants ».

$$\begin{aligned} I_B^i(t) &= \frac{\partial G(q(t))}{\partial q_i(t)} = G(1_i, q(t)) - G(0_i, q(t)) \\ &= Pr\{\phi(0_i, X(t)) - \phi(1_i, X(t)) = 1\} \end{aligned}$$

C'est donc la différence de l'indisponibilité du système entre le moment où le composant i est indisponible et le moment où le composant i est disponible et fonctionne. La plupart des facteurs d'importance qui suivent intègrent le facteur de Birnbaum dans leur expression. Il permet d'identifier les composants qui peuvent améliorer significativement la fiabilité du système.

Facteur d'amélioration

Ce facteur mesure la différence de fiabilité du système entre le composant i actuel et un composant i parfait. Il permet donc de voir le potentiel d'amélioration d'un composant.

$$I_{FA}^i(t) = G(q(t)) - G(0_i, q(t)) = I_B^i(t) \times q_i(t)$$

Facteur critique (ou de Lambert) [7]

Ce facteur mesure « la probabilité que le composant i ait provoqué la défaillance du système sachant que le système est défaillant au même instant t ».

$$\begin{aligned} I_{CR}^i(t) &= \frac{\partial G(q(t))}{\partial q_i(t)} \frac{q_i(t)}{G(q(t))} = I_B^i(t) \frac{q_i(t)}{G(q(t))} \\ &= Pr\{X_i(t) = 0, \phi(1_i, X(t)) = 1 \mid \phi(X(t)) = 0\} \end{aligned}$$

Il représente « la probabilité que le composant i soit en panne à l'instant t et que le système ait été en fonctionnement à ce même instant si le composant i n'avait pas été défaillant, sachant que le système est en panne à l'instant t ». Grâce à cette mesure d'importance, il est possible d'identifier le composant causant la défaillance du système.

Facteur de Fussel-Vesely (ou facteur de diagnostic)

$$\begin{aligned} I_{FV}^i(t) &= \frac{G_i(q(t))}{G(q(t))} = \frac{q_i(t)}{G(q(t))} \\ &= Pr\{X_i(t) = 0 \mid \phi(X(t)) = 0\} \end{aligned}$$

Il représente la probabilité que le « composant i soit en panne à l'instant t sachant que le système est en panne à l'instant t ».

Facteur de Barlow-Proshan [1]

$$I_{BP}^i(t) = \frac{\int_{t_0}^{t_F} \frac{\partial G(q(t))}{\partial q_i} \times \frac{dq_i}{dt} dt}{\sum_{k=1}^n \int_{t_0}^{t_F} \frac{\partial G(q(t))}{\partial q_k} \times \frac{dq_k}{dt} dt}$$

Il représente la probabilité que le composant i cause la défaillance du système sur l'intervalle $[t_0; t_F]$ sachant que le système est défaillant sur cet intervalle.

Facteur "Risk Achievement Worth"

Ce facteur mesure le risque sur la fiabilité.

$$I_{RAW}^i(t) = \frac{G(1_i, q(t))}{G(q(t))}$$

Il représente le ratio de la défiabilité quand le composant i ne fonctionne pas sur la défiabilité actuelle du système.

Facteur "Risk Reduction Worth"

Ce facteur permet d'identifier le composant qui apporte le plus grand risque sur la fiabilité du système.

$$I_{RRW}^i(t) = \frac{G(q(t))}{G(0_i, q(t))} \geq 1$$

Il représente le ratio de la défiabilité actuelle du système sur la défiabilité du système si le composant i est remplacé par un composant parfait.

2.2.2 Facteurs intégrant les connaissances imparfaites

Dans cette catégorie de mesures d'importance, les imperfections des informations disponibles sont prises en compte. Il existe deux catégories de ce genre de mesures : les facteurs d'importance sur l'incertitude et les facteurs d'importance flous. Ces derniers suivent la théorie des sous-ensembles flous dans laquelle il est considéré qu'il existe une infinité d'états possibles d'un composant (plutôt que l'état "fonctionnement" et "panne" dans la logique probabiliste des mesures d'importance probabilistes). Or, nous étudions des systèmes dont les composants sont soit en état de marche soit en état de panne. Nous ne nous intéresserons donc pas à cette catégorie de facteurs intégrant les connaissances imparfaites. Cependant, dans [14], Sallak les cite et va même plus loin en proposant ces propres mesures floues.

Revenons donc aux facteurs qui retiennent notre attention. Les facteurs sur l'incertitude permettent d'étudier « l'influence des variances des probabilités des événements de base sur la variance de la probabilité de l'évènement sommet ». En d'autres termes, ils mettent en avant l'influence de la variabilité des connaissances d'un composant sur celle du système global.

Facteur de Pan-Tai [14]

Celui-ci est un analogue à celui de Birnbaum. Il mesure l'influence de la variabilité de l'indisponibilité du composant i par rapport à la variabilité de l'indisponibilité du système.

$$I_{PN}^i(t) = \frac{\partial Var(G(q(t)))}{\partial Var(q_i(t))} = E \left\{ \left(\frac{\partial G(q(t))}{\partial q_i(t)} \right)^2 \right\}$$

Facteur de Bier [14]

Celui-ci est adapté de celui de Lambert (facteur critique) et a été développé par Bier dans [2].

$$I_{BR}^i(t) = \frac{\partial Var(G(q(t)))}{\partial Var(q_i(t))} \times \frac{Var(q_i(t))}{Var(G(q(t)))} = I_{PN}^i(t) \frac{Var(q_i(t))}{Var(G(q(t)))}$$

Pour ce facteur-ci aussi, on mesure l'impact de la variance du composant i sur la variance du système. De plus, le ratio de variance prend en compte l'importance de la variance du taux de défaillance du composant i .

De la même façon dont sont inspirés les facteurs de Pan-Tai et de Bier, on peut former des facteurs sur l'incertitude inspirés du facteur d'amélioration et du Risk Reduction Worth. Nous avons choisi ces deux facteurs car ce sont ceux, incluant le facteur de Birnbaum et le facteur de Bier, qui, à première vue, permettent d'entrevoir le potentiel d'amélioration d'un composant. Bien évidemment, si l'on venait à utiliser ces nouveaux facteurs, il faudrait valider leur expression théorique et leur existence. Cela peut être un nouvel axe de recherche.

Facteur d'amélioration en variance

$$I_{FAV}^i(t) = \frac{\partial Var(G(q(t)))}{\partial Var(q_i(t))} Var(q_i(t)) = I_{PN}^i(t) Var(q_i(t))$$

Ce facteur ne se trouve pas dans la littérature mais semble équivalent au facteur de Bier.

Facteur "Risk Reduction Worth" en variance

$$I_{RRWV}^i(t) = \frac{Var(G(q(t)))}{Var(G(0_i, q(t)))}$$

Ce facteur-ci compare la variance de l'indisponibilité du système tel quel par rapport à la variance de l'indisponibilité quand le composant i est fonctionnel. Finalement, il compare la variabilité de ces deux entités et de la potentielle réduction de cette variabilité si le composant i pouvait être "parfait".

Il est sûr que nous n'allons pas utiliser tous ces facteurs. Certains répondent plus à notre besoin que d'autres de mesurer la connaissance d'un composant. Nous verrons, dans le chapitre 3, lesquels nous avons choisis de garder et pourquoi. Ceux sélectionnés seront utilisés dans la phase d'allocation détaillée ci-dessous.

2.3 Allocation d'objectif

Dans cette Section, il est question de présenter le principe d'allocation d'objectif qui représente le corps de notre méthode. Plusieurs objectifs peuvent être alloués, cependant nous nous intéressons surtout à combiner cette méthode avec un facteur d'importance pour observer directement l'effort à fournir en termes de connaissances sur un composant. Pour cela, nous allons donc présenter le principe d'allocation avec la méthode d'allocation la plus classique, la méthode ARINC. Ensuite, nous ferons l'état de l'art de ce qu'il existe parmi les méthodes d'allocation intégrant l'utilisation d'une mesure d'importance. Enfin, nous nous intéresserons à l'allocation de plan d'essais.

2.3.1 Principe d'allocation

Comme l'explique Bouissou dans [4], le principe d'allocation est de répartir un objectif sur chacun des composants. Cet objectif peut être la fiabilité d'un système ou bien sa disponibilité, un intervalle de confiance ou encore un nombre d'essais. D'une manière plus mathématique et si l'on prend la fiabilité comme objectif, la fiabilité système est fonction des fiabilités de chaque composant et peut s'écrire comme suit : $R_S(t) = f(R_i)$ où $i \in [1; n]$, n étant le nombre de composants du système. Dans le cas de l'allocation, ce sont les R_i qui sont inconnues et R_S est l'objectif fixé par les exigences. Il existe donc de nombreuses solutions à cette équation où la fonction f n'est souvent pas connue pour des systèmes complexes. Aujourd'hui, la plupart des méthodes d'allocation sont numériques et testent tous les cas possibles. Les autres méthodes dites "heuristiques" se basent sur des calculs simples de coefficients c_i sur les composants tenant compte du degré de nouveauté, de la sévérité de l'environnement, du taux de défaillance de composants similaires et de l'avis d'experts. Ces coefficients sont ensuite utilisés pour calculer des coefficients d'allocation w_i permettant de répartir la fiabilité.

Parmi les méthodes d'allocation classiques, nous pouvons citer la méthode ARINC présentée dans [8]. En effet, cette méthode d'allocation attribue un facteur de poids pour

chaque composant d'un système dans le but d'exprimer à chacun leur taux de défaillance associé. Elle est basée sur le fait que les composants sont en série et leur durée de vie suit une loi exponentielle. Ce facteur W_i en question représente la proportion des taux de défaillance issus du REX des composants.

$$W_i = \frac{\lambda_i}{\sum_{j=1}^k \lambda_j},$$

où λ_i et λ_j sont respectivement le taux de défaillance actuel du $i^{\text{ème}}$ et du $j^{\text{ème}}$ composant et k le nombre de composants total. Pour finalement obtenir le taux de défaillance alloué à chaque composant, il faut faire la multiplication suivante :

$$\lambda_i^* = W_i \cdot \lambda_t^*,$$

où λ_t^* est le taux de défaillance exigé du système.

De cette manière, un taux de défaillance est alloué à chaque composant en se basant sur leur taux de défaillance initial. Dans la phase remontante du cycle en V, ce taux de défaillance est validé ou pas.

2.3.2 Allocation et mesures d'importance

Le genre de méthodes d'allocation présentées ci-dessus dites "heuristiques" ne correspondent pas exactement à ce que nous souhaitons obtenir. Certaines mesurent le degré de nouveauté d'un composant, c'est ce qui se rapproche le plus de notre objectif : mesurer la connaissance d'un composant. Cependant, cela n'est pas suffisant car la mesure est imprécise et se fait selon un barème subjectif. Nous nous sommes donc centrés sur la mesure de connaissances d'un composant de la manière la plus objective possible en se servant de facteurs d'importance évaluant mathématiquement le niveau de connaissances.

Parmi les méthodes d'allocation, peu d'entre elles se servent de facteurs d'importance et donc peu d'entre elles peuvent nous servir d'exemple pour nous en inspirer. Cependant, dans [9], l'auteur présente une méthode allouant l'indisponibilité du système à chaque composant. Le facteur de Vesely-Fussel est utilisé pour mesurer la probabilité que le composant i soit en panne au même instant que le système. Pour se faire, un facteur de poids est calculé :

$$K_i = \frac{q_i}{C + VF_i},$$

où q_i est l'indisponibilité du composant i , VF_i est le facteur de Vesely-Fussel pour le composant i et C est une constante positive qui permet de quantifier l'impact du facteur de Vesely-Fussel sur le calcul du facteur de poids. Si C prend une grande valeur alors

l'allocation ne tiendra compte que de l'indisponibilité du composant i en question et au contraire, si la constante C est de l'ordre de $V F_i (\leq 1)$, alors le facteur de Vesely-Fussel aura un impact sur le calcul de K_i .

Ensuite, l'indisponibilité est allouée :

$$q_i^* = m K_i Q^*,$$

où Q^* est l'objectif d'indisponibilité du système et m est une constante multiplicative (déterminée par une résolution itérative et vérifiant l'égalité $Q(q_1^*, \dots, q_n^*) = Q^*$).

Ainsi, l'indisponibilité du système est allouée en fonction de l'indisponibilité des composants obtenue par REX opérationnel. Une telle méthode peut être envisagée et inclure le facteur d'importance de notre choix.

Également, [13] propose un facteur d'importance très spécifique au sein d'une allocation de fiabilité, le WIF (Weighting Improvement Factor) basé sur la complexité et le niveau de maturité du système ainsi que l'impact estimé de la sévérité en termes de risque pour le patient, puisqu'ici, le système considéré est un cœur artificiel. La méthode permet de calculer le gain relatif RG_i pour un composant lors de l'allocation du taux de défaillance. C'est ce gain qui dépend, entre autres, du WIF.

$$RG_i = \begin{cases} \frac{P_S - P_{S_{\lambda_i^*}}}{[\ln(\lambda_i^*) - \ln(\lambda_i)] 10^{WIF_i - 1}}, & \text{si } \lambda_i \neq \lambda_i^{min} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

L'allocation est en fait une boucle Tant que qui, à chaque itération, compare la probabilité de défaillance de l'évènement redouté (ER) à la probabilité objectif. Tant que la probabilité objectif est dépassée, le taux de défaillance alloué de chaque composant est calculé à partir d'un ratio d'amélioration. Si ce ratio d'amélioration est intéressant, alors le gain relatif sera non nul et la probabilité de défaillance de l'évènement redouté sera calculée à nouveau et ainsi de suite jusqu'à obtenir une combinaison de taux de défaillance alloués des composants satisfaisant la condition $P(\text{Apparition de l'ER}) \leq P(\text{Objectif})$.

Ici, la méthode est intéressante mais bien trop spécifique pour pouvoir s'appliquer à notre étude.

De ce que nous venons de voir, nous pouvons en déduire qu'il est possible d'intégrer une mesure d'importance dans une allocation comme l'a fait Bouissou dans [9]. Nous pouvons aussi envisager d'allouer un objectif sans calculer de facteur de poids mais plutôt en utilisant et en interprétant directement le résultat des mesures d'importance par exemple.

2.3.3 Allocation d'un plan d'essais

Nous consacrons ici, une partie de l'allocation d'objectif à l'allocation de plan d'essais car ce cas particulier nous intéresse. En effet, dans le cas où l'on souhaite enrichir les

connaissances d'un composant via des essais seulement, l'allocation de plan d'essais nous fournirait directement le plan à mettre en place.

Classiquement, pour élaborer un plan d'essais, une allocation de la fiabilité permet de fixer des objectifs de fiabilité au niveau composant puis ces objectifs sont validés grâce à l'élaboration (et éventuellement la simulation) d'un plan d'essais. Il existe beaucoup d'articles décrivant des plans d'essais au niveau composant et la détermination de la taille de l'échantillon à tester. Nelson en fait un résumé dans son livre [10].

Dans un autre article, [11], avec une problématique similaire à la notre, l'objectif est d'allouer, de manière itérative, un nombre de tests à réaliser sur chaque composant de façon à diminuer la variance de l'estimation de la fiabilité du système. Les tests sont divisés en unité, chaque unité de tests réalisés permet d'enrichir l'estimation de la fiabilité du système. Le nombre d'unité de tests est cependant limité par le coût, tels que le coût d'un test ou le coût d'obtention d'estimations initiales de la fiabilité des composants. Tout en respectant le budget alloué aux composants, à chaque itération de l'algorithme, l'ajout d'un test sur un composant est déterminé exclusivement suivant l'impact qu'a ce test sur la variance de la fiabilité du système. Ainsi, le plan d'essais optimal est obtenu.

Par ailleurs, cet article vient confirmer une partie de nos travaux, puisqu'il met en lumière la diminution de la variance de la fiabilité du système lorsque des essais supplémentaires sont effectués au niveau composant. Qui plus est, l'estimation de cette variance se fait avec une méthode différente de la notre (qui sera présentée plus loin).

Cette partie bibliographique nous a permise de faire le point de ce dont nous pouvons nous inspirer et nous servir. De plus, il confirme la nécessité de la mise en œuvre de notre méthodologie puisqu'au aujourd'hui aucune méthode d'allocation ne semble pouvoir identifier les composants qui seraient en mesure de diminuer le risque lors de l'estimation de la fiabilité d'un système. Les mesures d'importance nous semblent être un outil pertinent dans cette identification des efforts à fournir en termes de connaissances, cependant, aucune n'est encore utilisée dans ce sens. Dans la partie suivante, nous passons donc au développement de la méthodologie que nous avons mise en place pour répondre à notre problématique.

Chapitre 3

Méthodologie proposée

À l'aide du chapitre 2 précédent, nous pouvons maintenant justifier les choix pour lesquels nous avons opté et surtout préciser la méthodologie suivie. Dans ce qui suit, nous verrons aussi les mesures d'importance que nous jugeons en adéquation avec la quantification de la connaissance des composants. Ensuite, nous détaillerons la stratégie d'allocation ayant pour objectif d'obtenir un plan d'essais. Finalement, le cas particulier de la loi Gamma à posteriori sera abordé, principe sur lequel nous nous sommes basés pour dimensionner un plan d'essais de fiabilité.

3.1 Méthode générale

Dans le but d'atteindre notre objectif de fiabilité, nous cherchons à mettre en œuvre une allocation de la fiabilité. Cette allocation viendra qualifier ou non notre système en termes de fiabilité objectif et de risque alloué. Grâce aux conclusions tirées du rapport bibliographique réalisé en amont, nous souhaitons intégrer un facteur d'importance à l'allocation pour témoigner de la connaissance que nous avons sur chaque composant. Ce facteur devra contenir les informations suivantes sur un composant : le taux de défaillance et sa variance ainsi que la structure du système. De cette manière, pour chaque composant, nous prenons en compte sa probabilité de défaillance à un temps donné, sa place dans le système vis à vis des autres composants et la quantité d'informations disponibles à travers la modélisation de son taux de défaillance.

Pour mettre en œuvre notre méthodologie, nous avons fait les hypothèses suivantes :

- La structure du système est connue ainsi que sa fonction d'indisponibilité.
- La fiabilité du système considéré ainsi que celle des n composants suivent une loi exponentielle, $R_S = e^{-\lambda_S t}$ et $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket R_i = e^{-\lambda_i t}$.
- Les composants du système sont considérés indépendants les uns des autres.
- Les composants peuvent soit être en état de fonctionnement, soit en état de panne.

— Le taux de défaillance des composants suit une loi Gamma $\gamma(\alpha_i, \beta_i)$.

C'est dans cet objectif que sont présentées les mesures d'importance connues de la littérature dans la partie suivante. Plus loin, le principe d'allocation est rappelé puisqu'il est le corps de notre méthodologie. En utilisant les mesures d'importance, nous allons allouer un objectif de fiabilité qui permettra d'identifier sur quel composant nous devons appuyer nos efforts pour améliorer la variabilité de la fiabilité du système.

3.2 Mesures d'importance retenues

Ce qui a retenu notre attention dans les mesures d'importance est le fait que nous soyons capables de mesurer l'effet d'un composant sur le système en termes de défaillance principalement mais pas seulement. Nous avons besoin que le facteur d'importance prenne en compte le taux de défaillance du composant puisque celui-ci témoigne directement de la probabilité de défaillance du composant. Également, il est important de considérer la structure du système : un composant en parallèle avec une probabilité de défaillance forte peut être moins important qu'un composant en série avec une probabilité de défaillance plus faible. Enfin, puisque le cœur de notre problème concerne l'intervalle de confiance sur la fiabilité du système, il va de soi que le facteur d'importance choisi tienne compte de l'intervalle de confiance du taux de défaillance d'un composant. Plus ce dernier sera faible et plus celui sur la fiabilité le sera aussi puisque finalement, réduire l'intervalle de confiance sur la fiabilité revient à réduire la variance de la fiabilité. Nous cherchons donc une mesure d'importance considérant la variance du taux de défaillance des composants.

Les mesures d'importance probabilistes sont connues pour évaluer l'impact du taux de défaillance d'un composant et de la structure sur le système entier. Quant aux mesures d'importance sur l'incertitude, elles permettent de prendre en compte la variance du taux de défaillance des composants en plus comparés aux mesures probabilistes. Par conséquent, nous éliminons directement les mesures d'importance probabilistes qui ne prennent pas en compte la variabilité du taux de défaillance d'un composant. Nous allons donc choisir une mesure d'importance sur l'incertitude.

Avant de rentrer dans la justification de notre choix, un point est nécessaire sur la formation de l'intervalle de confiance sur la fiabilité du système. Plusieurs méthodes existent pour calculer l'intervalle de confiance sur une grandeur de fiabilité. Nous utilisons l'approximation de la loi normale qui pour un risque δ , permet d'écrire :

$$IC_{1-\delta}(y) = \hat{y} \pm z_{1-\delta/2} \sqrt{\hat{V}(\hat{y})} \text{ pour } y \in]-\infty; +\infty[$$

L'évaluation de la variance d'une telle grandeur peut se faire en utilisant la méthode Delta. Les grandeurs de fiabilité dépendent directement des taux de défaillance des n composants

du système. Ainsi,

$$\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \hat{V}(\hat{y}(\lambda_i)) = \nabla y(\hat{\lambda}_i) \times \hat{V}(\hat{\lambda}_i) \times \left(\nabla y(\hat{\lambda}_i) \right)^T$$

Finalement, nous remarquons que l'intervalle de confiance se sépare en deux avec d'un côté la valeur cible \hat{y} de notre grandeur et de l'autre côté l'incertitude sur cette valeur exprimée principalement par $\hat{V}(\hat{y})$. Dans le but de réduire cet intervalle, nous voyons qu'il faut réduire l'incertitude de la grandeur, dans notre cas la fiabilité du système. Puisque celle-ci est directement dépendante de la variance du taux de défaillance des composants, il faut bien choisir une mesure d'importance sur l'incertitude capable de nous indiquer quel composant a la variance la plus forte.

Parmi les mesures d'importance sur l'incertitude, nous avons retenu 4 facteurs. Pour nous aider à choisir celui le plus en adéquation avec nos critères, nous avons simulé le système pris en exemple sur le logiciel RStudio et également sur les logiciels d'arbre de défaillance Arbre Analyst et CARA. Nous avons exprimé les facteurs d'importance de Pan-Tai, de Bier, d'amélioration "en variance" et le Risk Reduction Worth "en variance" (les détails des calculs sont disponibles en Annexe A).

L'important était d'observer le comportement de ces mesures d'importance lorsque la variance du taux de défaillance d'un composant fluctuait. Tous excepté le facteur RRW "en variance", ont montré un changement de comportement cohérent lorsque la variance de la fiabilité des composants était modifiée. Nous avons aussi appuyé notre choix sur le côté théorique de l'expression des facteurs.

Pour rappel,

$$I_{PN}^i(t) = \frac{\partial Var(G(q(t)))}{\partial Var(q_i(t))} \quad I_{BR}^i(t) = \frac{\partial Var(G(q(t)))}{\partial Var(q_i(t))} \times \frac{Var(q_i(t))}{Var(G(q(t)))}$$

$$I_{FAV}^i(t) = \frac{\partial Var(G(q(t)))}{\partial Var(q_i(t))} Var(q_i(t)) \quad I_{RRWV}^i(t) = \frac{Var(G(q(t)))}{Var(G(0_i, q(t)))}$$

- Le facteur de Bier et celui d'amélioration "en variance" sont équivalents
- Le facteur de Bier comprend une information supplémentaire par rapport au facteur de Pan-Tai : la variance de l'indisponibilité du composant i (lié à la variance du taux de défaillance de ce même composant)
- Le facteur RRW "en variance" ne semble pas être en adéquation avec nos critères de mesures d'importance puisqu'il propose d'améliorer le composant i pour diminuer la variabilité de la fiabilité (ce n'est pas notre objectif).

D'un point de vue littéral, le facteur de Bier semble être un bon choix car il mesure l'influence de la variance du taux de défaillance du composant i sur celle de la fiabilité

du système et en plus le ratio de variance prend en compte la valeur de la variabilité du taux de défaillance du composant i , sans oublier qu'il prend en compte la fiabilité des composants et la structure du système comme tous les autres facteurs d'importance. De plus, les simulations

Nous avons donc choisi d'utiliser le facteur d'importance de Bier pour déterminer sur quel composant il est nécessaire d'appuyer nos efforts en termes de connaissances et ainsi concevoir un algorithme d'allocation.

3.3 Allocation du plan d'essais de démonstration de la fiabilité

Nous avons évoqué précédemment que pour ajouter de la connaissance aux composants d'un système, trois sources d'information permettent de le faire : l'avis d'un expert, le REX d'un système équivalent ou bien les résultats d'essais. Nous avons choisi de nous concentrer uniquement sur l'ajout d'essais dans cette partie. La méthodologie est donc basée sur une allocation de plan d'essais via un algorithme traité avec le logiciel RStudio. Les résultats des essais réalisés en suivant le plan sont censés apporter plus de connaissances à certains composants et donc réduire la variabilité de la fiabilité du système tout en respectant le risque client de qualifier à tort le système vis à vis la fiabilité objectif imposée. Une première étape de l'algorithme permet de déterminer un plan d'essais qui semble pouvoir répondre aux exigences du cahier des charges, c'est à dire démontrer $R_{min} \geq R_0$. Dans un second temps, l'algorithme lance des simulations de ce plan d'essais et vérifie que ce dernier réponde toujours aux exigences. Pour cela, nous calculons les probabilités d'accepter et de refuser à tort un essai. Ces probabilités devant être respectivement inférieures aux risques de première et de seconde espèces δ et ε précisés dans le cahier des charges client et fournisseur. Par exigences, nous entendons ici l'objectif de fiabilité car l'ajout d'information sur un composant permet de réduire l'intervalle de confiance sur la fiabilité du système et donc peut permettre à la fiabilité minimale (borne inférieure) d'être supérieure à la fiabilité objectif. Si ce stade est atteint, le risque quant à l'évaluation de la fiabilité du système se verra diminuer encore plus.

3.3.1 Détermination du plan d'essais

L'objectif de cette première partie de l'algorithme est d'obtenir un plan d'essais respectant les critères imposés par le cahier des charges, c'est à dire démontrer la fiabilité, ce qui revient à non seulement diminuer la variance de la fiabilité du système mais aussi faire en sorte que $R_{min} \geq R_0$ sachant que $IC_{1-\alpha}(R_S) = [R_{min}; R_{max}]$

Nous différencions deux cas suivant l'objectif fixé :

- Cas 1 : $R_{min} < R_0$ et $R_S < R_0$
- Cas 2 : $R_{min} < R_0$ et $R_S \geq R_0$

Dans le Cas 1, la fiabilité objectif n'étant pas respectée par le système, le facteur de Birnbaum évalue quel composant nous devons redonder ou améliorer. Nous n'allons pas plus loin dans l'interprétation ou la démarche puisque ceci ne concerne pas le coeur de notre méthodologie. Par contre, le facteur d'importance de Birnbaum a été utilisé puisqu'il est le plus simple et efficace pour identifier le composant ayant le plus d'impact sur la fiabilité du système. Dans le Cas 2, puisque nous avons pu identifier que le facteur de Bier évaluait l'impact d'un composant sur la variance de la fiabilité globale, nous choisissons d'ajouter un essai au composant i ayant le plus important facteur de Bier.

Une fois cette étape réalisée dans le Cas 2, l'essai ajouté permet d'enrichir l'estimation du taux de défaillance du composant i en faisant évoluer ses paramètres α_i et β_i à posteriori. Si l'essai est suffisant pour que la borne inférieure de la fiabilité du système dépasse la fiabilité objectif alors le plan d'essais sera établi, sinon la même trame s'applique pour l'itération suivante.

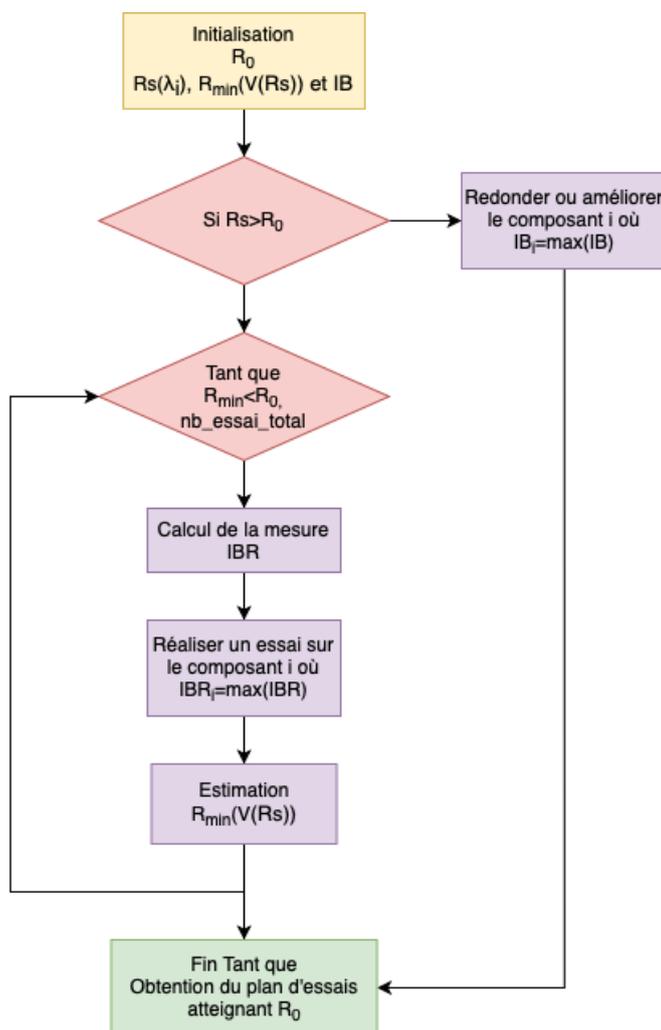


FIGURE 3.1 – Algorithme d'estimation d'un plan d'essais par allocation

Voici les étapes plus détaillées de l'algorithme :

- Étape 1 : Les taux de défaillance des composants sont estimés à partir des paramètres de la loi Gamma associée obtenus suivant les informations disponibles sur chaque composant initialement, $\lambda_i = \frac{\alpha_i}{\beta_i}$.
On estime alors la fiabilité du système ainsi que ses bornes minimales et maximales, $IC_{1-\delta}(R_S) = R_S \pm z_{1-\frac{\delta}{2}} \sqrt{V(R_S)}$
- Étape 2 : Si la fiabilité du système est supérieure à la fiabilité objectif définie, on peut continuer l'allocation. Dans le cas contraire, il est conseillé que le composant i ayant le facteur de Birnbaum le plus important soit redondé ou amélioré (ceci ne rentrant pas dans notre étude). Le calcul est présenté dans l'annexe B.

- Étape 3 : Les conditions sont bien réunies pour rentrer dans la boucle Tant que. Il faut que la borne inférieure de la fiabilité soit inférieure à la fiabilité objectif. De plus, un compteur a été ajouté et s'incrémente à chaque passage dans la boucle. Si celui-ci dépasse le nombre d'essais total alloué par le client, l'algorithme se dirige vers la sortie de la boucle. De cette façon, l'algorithme ne peut pas tourner à l'infini.
- Étape 4 : Le facteur d'importance de Bier est calculé pour chaque composant (Annexe A).
- Étape 5 : L'algorithme détermine quel composant a le facteur d'importance le plus grand, c'est à celui-ci que l'on ajoute un essai.
 $nb\ essai_i^{(z)} = nb\ essai_i^{(z-1)} + 1$, on ajoute un $z^{ième}$ essai au compteur ;
 $\alpha_i^{(z)} = \alpha_i^{(z-1)} + 1$, on incrémente le paramètre α_i du composant i au $z^{ième}$ essai ;
 $\beta_i^{(z)} = \beta_i^{(z-1)} + E(T_i)^{(z-1)}$, on ajoute au paramètre β_i le temps moyen de défaillance du composant i valant $E(T_i) = \frac{\alpha_i^{(0)}}{\beta_i^{(0)}}$ (preuve dans la Section 3.4) ;
 $\lambda_i^{(z)} = \frac{\alpha_i^{(z)}}{\beta_i^{(z)}}$, on évalue $\lambda_i^{(z)}$ du composant i modifié par l'ajout d'un essai ;
 $Var(\lambda_i^{(z)}) = \frac{\alpha_i^{(z)}}{(\beta_i^{(z)})^2}$, on calcule la nouvelle variance du taux de défaillance du composant i pour pouvoir réévaluer l'intervalle de confiance sur la fiabilité.
- Étape 6 : Nous pouvons estimer de nouveau la fiabilité minimale du système (la fiabilité du système reste inchangée). Dans le cas où l'ajout d'un essai a permis à R_{min} d'être supérieure à R_0 , la boucle Tant que s'arrête et le plan d'essais est obtenu. Dans le cas inverse, nous continuons vers l'étape 3.

L'algorithme en langage R est disponible en Annexe C.

3.3.2 Validation du plan d'essais

Maintenant que le plan d'essais est obtenu, nous voulons nous assurer qu'il valide les exigences de fiabilité cela revient à démontrer la fiabilité d'un système avec un niveau de confiance associé δ . Pour cela, la seconde partie de l'algorithme simule le plan d'essais en tirant aléatoirement les taux de défaillance des composants pour simuler leur variabilité.

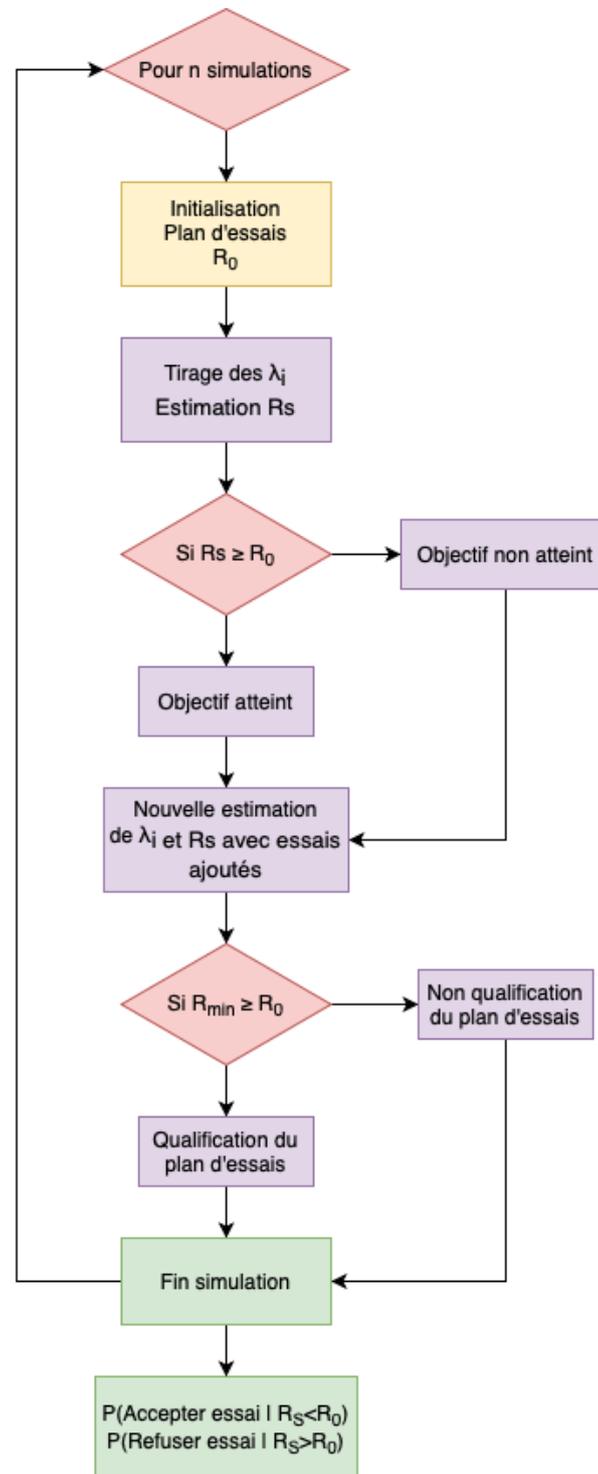


FIGURE 3.2 – Algorithme de validation du plan d'essais choisi

- Étape 1 : L'algorithme tourne pour n simulations du même plan d'essais avec des taux de défaillances différents.

- Étape 2 : On intègre le nombre d'essais préconisé pour chaque composant et on renseigne les paramètres α_i et β_i initiaux des taux de défaillance des composants.
- Étape 3 : Pour chaque composant i , on tire aléatoirement un taux de défaillance suivant une loi Gamma $\gamma(\alpha_i, \beta_i)$ puis on estime la fiabilité du système.
- Étape 4 : Ensuite, on intègre un compteur permettant de connaître le nombre de simulation où $R_S \geq R_0$, si c'est le cas l'objectif de fiabilité est atteint.
- Étape 5 : L'algorithme simule l'ajout des z essais de chaque composant.
 $T_i = \text{exp}(z, \lambda_i)$, on tire aléatoirement des temps de défaillance des composants (venant des essais) qui suivent une loi exponentielle de paramètre λ_i ;
 $\alpha_i^{(z)} = \alpha_i^{(0)} + z$, on incrémente le paramètre $\alpha_i^{(z)}$ du taux de défaillance du composant i pour les z essais réalisés ;
 $\beta_i^{(z)} = \beta_i^{(0)} + \sum_{k=1}^z T_i$, on ajoute les temps de défaillance tirés pour les z essais du composant i (explication dans la Section 3.4) ;
 $\lambda_i^{(z)} = \frac{\alpha_i^{(z)}}{\beta_i^{(z)}}$, on évalue le nouveau taux de défaillance du composant i modifié par l'ajout des essais ;
 $\text{Var}(\lambda_i^{(z)}) = \frac{\alpha_i^{(z)}}{(\beta_i^{(z)})^2}$, on calcule la nouvelle variance du taux de défaillance du composant i pour pouvoir évaluer l'intervalle de confiance de la fiabilité ;
 On évalue enfin la fiabilité du système ainsi que sa borne inférieure.
- Étape 6 : Maintenant, on intègre un compteur pour savoir combien de simulations ont permises de qualifier le système ($R_{min} \geq R_0$).
- Étape 7 : On repart à l'étape 2 pour les simulations suivantes. Lorsque le nombre de simulations souhaité est atteint, on sort de la boucle et on estime les probabilités d'accepter et de refuser à tort le plan d'essais de démonstration de la fiabilité. Si ces probabilités sont respectivement inférieures au risque de première espèce δ et au risque de seconde espèce ε alors le plan d'essais est validé et démontre la fiabilité objectif.

$$P(\text{Accepter}) = \frac{\sum (\text{Qualification} \cap \text{Objectif non atteint})}{\sum \text{Objectif non atteint}}$$

$$P(\text{Refuser}) = \frac{\sum (\text{Non qualification} \cap \text{Objectif atteint})}{\sum \text{Non qualification}}$$

Pour qualifier le système, les deux inégalités suivantes doivent être respectées :

$$\begin{aligned} P(\text{Accepter}) \leq \delta &\Leftrightarrow P(\text{Accepter l'essai} \mid R_S < R_0) \leq \delta \\ P(\text{Refuser}) \leq \varepsilon &\Leftrightarrow P(\text{Refuser l'essai} \mid R_S > R_0) \leq \varepsilon \end{aligned}$$

La première inégalité désigne le risque pris en ajoutant un essai à un composant sachant que celui-ci pourrait empêcher le système d'atteindre la fiabilité objectif, il s'agit du risque dit client δ . Quant à la seconde, elle désigne le risque encouru si l'on refuse un essai sachant que celui-ci aurait pu améliorer la fiabilité du système, il s'agit du risque dit fournisseur ε .

L'algorithme de cette partie validation est disponible en Annexe D.

Nous avons la conviction que cet algorithme peut s'appliquer de façon similaire lorsque nous consultons l'avis d'un expert ou le REX de système similaire. Bien évidemment, il faudra l'adapter pour par exemple, être capable de quantifier l'apport d'un expert.

3.4 Cas particulier de la loi Gamma

Dans la méthodologie mise en place, nous utilisons la loi Gamma pour estimer le taux de défaillance des composants pour plusieurs raisons. D'abord, par sa définition et ses paramètres α et β , elle permet de modéliser tout type de données. Bien sur, plus il y a de données et plus la modélisation est précise. C'est pour cela qu'elle sert souvent dans le cas de REX à partir d'essais. Également, pour l'approche du système et les calculs et estimation liés. D'autre part, nous pouvons mettre à jour les paramètres de la loi Gamma à chaque ajout d'un essai dans un cadre Bayésien ce qui permet d'affiner le modèle au fur et à mesure que l'on ajoute de l'information sur les composants. En effet, pour un essai ajouté, le paramètre α s'incrémente de un également. Il représente la précision de la loi mais aussi le niveau de connaissances disponibles sur un composant. Plus il y a d'essais d'effectués, plus α augmente et plus la loi sur le taux de défaillance est précise et proche de la réalité. Par exemple, si un composant n'a pas de REX ou aucun essai n'a été réalisé, nous considérons son paramètre de forme au minimum, soit 2, c'est ce qui est fait dans [12]. Au contraire, si un set de 10 essais a été réalisé sur ce composant, nous prendrions $\alpha = 10$. Pour le cas où nous disposons de REX de systèmes équivalents, l'évaluation du paramètre est beaucoup plus imprécise et subjective. Quant au paramètre d'intensité β , nous estimons sa valeur initiale : $\beta^{(0)} = \frac{\alpha^{(0)}}{E(\lambda_i)}$. Puis, à chaque essai ajouté, β s'incrémente du temps de défaillance de l'essai.

Rappelons que $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ avec n le nombre de composants du système, l'expression de

la densité de probabilité de la loi Gamma est la suivante :

$$f(\lambda_i, \alpha_i, \beta_i) = \frac{\beta_i^{\alpha_i} e^{-\beta_i \lambda_i}}{\tau(\alpha_i)} \lambda_i^{\alpha_i-1}$$

Les propriétés de la loi Gamma permettent d'écrire :

$$E(\lambda_i) = \frac{\alpha_i}{\beta_i} \quad Var(\lambda_i) = \frac{\alpha_i}{\beta_i^2}$$

$$\int_0^{+\infty} f(\lambda_i) d\lambda_i = \int_0^{+\infty} \frac{\beta_i^{\alpha_i} e^{-\beta_i \lambda_i}}{\tau(\alpha_i)} \lambda_i^{\alpha_i-1} d\lambda_i = 1$$

Cette propriété nous a notamment servis pour trouver une expression des mesures d'importance indépendante des taux de défaillance.

Pour identifier les paramètres initiaux de cette loi, nous partons d'un à priori où $\alpha^{(0)} = 2$ et $\beta^{(0)} = \frac{\alpha^{(0)}}{E(\lambda_i)}$ comme le fait Rausand dans [12], Chapitre 13, et construisons une loi à posteriori (de l'ajout d'un essai) de paramètres $\alpha^{(z)} = \alpha^{(z-1)} + 1 = \alpha^{(0)} + z$ et $\beta^{(z)} = \beta^{(z-1)} + T^{(z-1)} = \beta^{(0)} + \sum_{k=0}^{z-1} T^{(k)}$ où z représente le nombre d'essais ajouté au composant (si aucun essai n'a été réalisé sur un composant alors $z = 1$).

Cependant, dans la première partie de l'algorithme sur l'estimation du plan d'essais, nous ne calculons pas $\beta^{(z)} = \beta^{(z-1)} + T^{(z-1)} = \beta^{(0)} + \sum_{k=0}^{z-1} T^{(k)}$ mais $\beta^{(z)} = \beta^{(z-1)} + E(T)^{(z-1)}$. La raison est que t_k est un temps de défaillance suivant une loi exponentielle et dans ce cas là, il aurait fallu tirer tous les T_k aléatoirement suivant cette loi. Le tirage aléatoire implique un set de temps de défaillance différent si l'on relance la simulation ce qui implique une estimation du paramètre β différente à chaque simulation et donc un plan d'essais différent aussi. Or, pour obtenir le meilleur plan d'essais possible, nous avons décidé d'introduire l'espérance des temps de défaillance de façon à ce que l'on obtienne un unique plan d'essais dont les paramètres des taux de défaillance sont fixes.

Pour estimer cette moyenne de temps de défaillance pour un composant, nous procédons ainsi :

Par définition, $\forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket$, $\lambda_i \sim \text{Gamma}(\alpha_i, \beta_i)$

$E(T_i | \lambda_i) = \frac{1}{\lambda_i}$, pour un essai z , par conséquent,

$$E(T_i) = \int_0^{+\infty} \frac{1}{\lambda_i} f(\lambda_i) d\lambda_i = \int_0^{+\infty} \frac{\lambda_i^{\alpha_i-1}}{\lambda_i} \frac{\beta_i^{\alpha_i} e^{-\beta_i \lambda_i}}{\tau(\alpha_i)} d\lambda_i = \int_0^{+\infty} \lambda_i^{\alpha_i-2} \frac{\beta_i^{\alpha_i} e^{-\beta_i \lambda_i}}{\tau(\alpha_i)} d\lambda_i$$

En posant $\alpha_i - 2 = \alpha'_i - 1$, on obtient

$$E(T_i) = \int_0^{+\infty} \lambda_i^{\alpha'_i-1} \frac{\beta_i^{\alpha'_i+1} e^{-\beta_i \lambda_i}}{\tau(\alpha'_i + 1)} d\lambda_i = \frac{\beta_i \tau(\alpha'_i)}{\tau(\alpha'_i + 1)} \int_0^{+\infty} \lambda_i^{\alpha'_i-1} \frac{\beta_i^{\alpha'_i} e^{-\beta_i \lambda_i}}{\tau(\alpha'_i)} d\lambda_i = \frac{\beta_i \tau(\alpha'_i)}{\tau(\alpha'_i + 1)}$$

$$= \frac{\beta_i (\alpha'_i - 1)!}{\alpha'_i!} = \frac{\beta_i}{\alpha_i} \text{ où } \alpha_i \text{ et } \beta_i \text{ sont les paramètres initiaux du taux de défaillance, quand } z = 0$$

De plus, nous prouvons que $\forall z$, le nombre d'essai ajouté sur le composant i ,

$$E(T_i^{(z+1)}) = E(T_i^{(z)}) = \frac{\alpha_i^{(0)}}{\beta_i^{(0)}}.$$

$\forall k \in \llbracket 1; z \rrbracket$, z étant le nombre d'essai ajouté au composant i , $\lambda_i^{(k)} \sim \text{Gamma}(\alpha_i^{(k)}, \beta_i^{(k)})$.

On suppose $E(T_i^{(k)}) = \frac{\beta_i^{(k)}}{\alpha_i^{(k)}}$

Si on ajoute un essai alors $\lambda_i^{(k+1)} \sim \text{Gamma}(\alpha_i^{(k)} + 1, \beta_i^{(k)} + E(T_i^{(k)}))$ d'après ce que nous venons de trouver au dessus.

$$\text{Or, } E(T_i^{(k+1)}) = \frac{\beta_i^{(k+1)}}{\alpha_i^{(k+1)}} = \frac{\beta_i^{(k)} + E(T_i^{(k)})}{\alpha_i^{(k)} + 1} = \frac{\beta_i^{(k)} + \frac{\beta_i^{(k)}}{\alpha_i^{(k)}}}{\alpha_i^{(k)} + 1} = \frac{\beta_i^{(k)}}{\alpha_i^{(k)}}$$

Chapitre 4

Mise en place de la méthode sur un cas d'application

Reprenons le système présenté dans l'introduction. Le système fictif étudié est composé de deux composants en série ainsi que deux composants en parallèle.

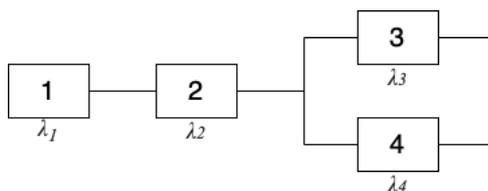


FIGURE 4.1 – Bloc-diagramme de fiabilité du système étudié

4.1 Cas d'application

Nous supposons que le taux de défaillance des composants suit une loi Gamma de paramètres différents. Ainsi, le composant 1 et 3 sont considérés comme des composants connus disposant de retour d'expérience issu de 10 essais. Le composant 2 représente l'innovation du système, aucune donnée n'est disponible à part son comportement suivant une loi Gamma de paramètres déterminés par l'avis d'un expert. Enfin, nous tirons des informations du composant 4 d'après un retour d'expérience d'un composant similaire. La fiabilité objectif est fixée à $R_0 = 0,84$ à $t = 10000 h$.

Dans un système réel, nous aurions eu les paramètres α_i et β_i de chacun des taux de défaillance des composants. Cependant, pour cet exemple-ci, nous ne disposons que d'un système fictif, nous définissons alors les paramètres comme suit :

- $\alpha_1 = 10; \beta_1 = \frac{\alpha_1}{E(\lambda_1)}$ où $E(\lambda_1) = 9.10^{-6} h^{-1}$
- $\alpha_2 = 2; \beta_2 = \frac{\alpha_2}{E(\lambda_2)}$ où $E(\lambda_2) = 5.10^{-6} h^{-1}$
- $\alpha_3 = 10; \beta_3 = \frac{\alpha_3}{E(\lambda_3)}$ où $E(\lambda_3) = 3.10^{-6} h^{-1}$
- $\alpha_4 = 3; \beta_4 = \frac{\alpha_4}{E(\lambda_4)}$ où $E(\lambda_4) = 5.10^{-5} h^{-1}$

L'algorithme donne $R_S = 0,8592$ pour $t = 10000 h$ et $R_S \in [0,8266; 0,9820]$. Nous sommes dans le Cas 2 de l'estimation d'un plan d'essais où $R_{min} < R_0$. C'est donc le facteur de Bier qui déterminera sur quel composant les essais seront ajoutés.

Nous obtenons le plan d'essais suivant :

- $nb\ essai_1 = 13$
- $nb\ essai_2 = 6$
- $nb\ essai_3 = 0$
- $nb\ essai_4 = 0$

Ce plan d'essais semble cohérent puisque les composants 1 et 2 sont les plus importants dans le système du fait de leur placement en série. Un plus grand nombre d'essais est alloué au composant 1 à cause de son fort taux de défaillance.

Si l'on réalise une seconde simulation où cette fois $E(\lambda_1) = E(\lambda_2) = 7.10^{-6} h^{-1}$ et on garde tous les autres paramètres, on obtient le plan d'essais suivant :

- $nb\ essai_1 = 5$
- $nb\ essai_2 = 12$
- $nb\ essai_3 = 0$
- $nb\ essai_4 = 0$

Ici, les composants 1 et 2 ont le même taux de défaillance et la même position dans le système, seul leur variance change. L'algorithme alloue plus d'essais au composant 2 sur lequel nous n'avons pratiquement aucune connaissance.

Nous passons maintenant à la partie validation du premier plan d'essais obtenu. Rappelons que le risque client est fixé à $\delta = 0,1$ et le risque fournisseur à $\varepsilon = 0,2$.

Nous obtenons $P(\textit{Accepter}) = 0,10 = \delta$ et $P(\textit{Refuser}) = 0,48 > \varepsilon$.

Le risque client est respecté de justesse, ce qui n'est pas le cas du risque fournisseur. Tout de même nous validons ce plan d'essais car notre étude se focalise sur le risque client uniquement.

4.2 Interprétation des résultats apportés par l'algorithme

Dans le but d'interpréter notre algorithme et de pouvoir en tirer des conclusions intéressantes, nous avons testé différentes combinaisons de paramètres pour voir leur impact sur le plan d'essais obtenu (cela concerne la sous-section 3.3.1 de l'algorithme). Nous avons donc trouvé pertinent d'observer l'effet d'un niveau de connaissances différent pour une même composant. Également, il peut être intéressant de voir l'influence du taux de défaillance d'un composant sur l'obtention d'un plan d'essais. Enfin, le nombre total d'essais est choisi par le client dans le but de ne pas faire tourner en boucle l'algorithme si les exigences sont trop élevées pour le système. Nous allons voir comment celui-ci impacte l'obtention d'un plan d'essais.

Pour faciliter l'entrée des données de tests, le paramètre α du taux de défaillance des composants ainsi que les taux de défaillance eux-mêmes sont entrés manuellement dans l'algorithme (dans le cas d'une utilisation sur un système réel, il faut entrer les paramètres α et β des composants, le taux de défaillance n'est pas connu).

4.2.1 Variation de la connaissance sur un composant

Pour tester l'influence de la variance du taux de défaillance d'un composant, nous modifions le paramètre α du taux de défaillance qui, comme nous l'avons expliqué auparavant, s'apparente le plus à une représentation de la quantité d'informations disponible sur un composant.

Tout en gardant toujours le même système de deux composants en série et deux autres en parallèle, nous faisons varier le paramètre de forme du composant 1 (pour la première série) et 3 (seconde série).

Série 1

Les paramètres entrés dans l'algorithme sont les suivants :

- Initialisation : $R_0 = 0,87$, nb essai total = 100, $t = 10000 h$, $\delta = 0,1$
- Composant 1 : $\lambda_1 = 6.10^{-6} h^{-1}$, α_1 varie
- Composant 2 : $\lambda_2 = 6.10^{-6} h^{-1}$, $\alpha_2 = 2$
- Composant 3 : $\lambda_3 = 6.10^{-6} h^{-1}$, $\alpha_3 = 2$

— Composant 4 : $\lambda_4 = 6.10^{-6} h^{-1}$, $\alpha_4 = 2$

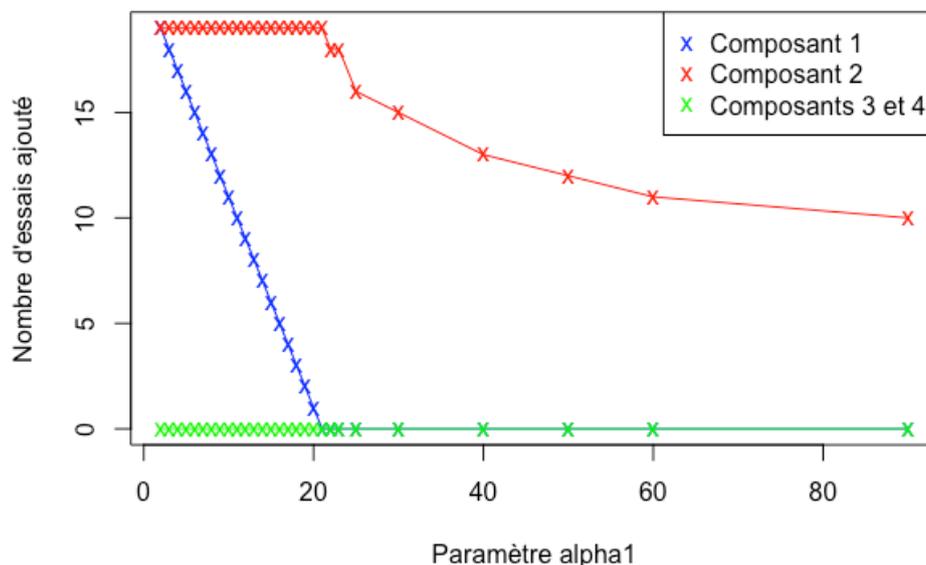


FIGURE 4.2 – Évolution du nombre d'essais ajouté par composant suivant la valeur de α_1

Avec $\alpha_1 = 2$ comme pour les autres composants, l'algorithme suggère de réaliser 19 essais sur le composant 1 et 2. Lorsque l'on incrémente d'une unité le paramètre α_1 , le nombre d'essais à faire sur le composant 1 décroît d'une unité jusqu'à 0 essais. À ce moment là, on observe que c'est le nombre d'essais du composant 2 qui commence à décroître. Cependant, pour $\alpha_1 > 60$, ce nombre d'essais se stabilise.

Nous pouvons donc en déduire que l'ajout de connaissances par le biais du paramètre α_1 diminue le nombre nécessaire d'essais à effectuer puisque plus d'informations sont disponibles avant la définition du plan d'essais. Également, dans une plus faible mesure, l'ajout à priori d'informations sur le composant 1 vient diminuer le nombre d'essais à faire sur le composant 2, tout ceci étant relié directement à la variance de la fiabilité du système.

Série 2

Maintenant, nous refaisons la même chose mais pour le composant 3 qui est en parallèle. Seulement, avec les conditions initiales que nous avons prises pour la première série, aucun essai n'est ajouté pour le composant 3 (comme pour le 4, puisqu'ils sont en redondance). L'augmentation du paramètre de forme du composant 3 n'influence aucunement sur le résultat du plan d'essais, ceci étant dû à sa position en redondance. Nous devons faire en sorte que des essais soient ajoutés au composant 3 si nous voulons tester son influence sur la fiabilité du système. C'est pour cela que nous attribuons un taux de défaillance plus fort

à ce composant dans ce cas précis.

- Initialisation : $R_0 = 0,87$, nb essai total = 100, $t = 10000 h$, $\delta = 0,1$
- Composant 1 : $\lambda_1 = 6.10^{-6} h^{-1}$, $\alpha_1 = 2$
- Composant 2 : $\lambda_2 = 6.10^{-6} h^{-1}$, $\alpha_2 = 2$
- Composant 3 : $\lambda_3 = 6.10^{-5} h^{-1}$, α_3 varie
- Composant 4 : $\lambda_4 = 6.10^{-6} h^{-1}$, $\alpha_4 = 2$

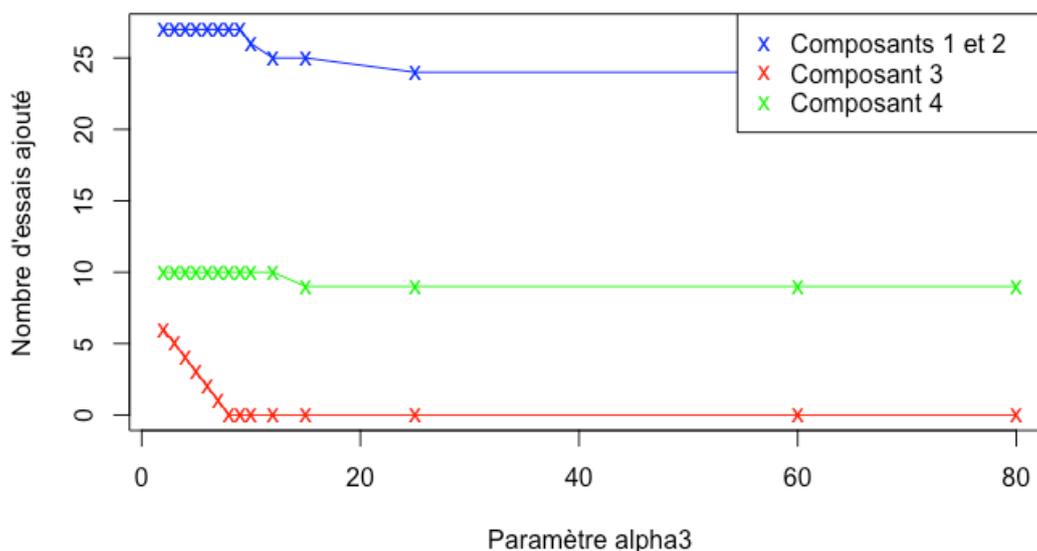


FIGURE 4.3 – Évolution du nombre d'essais ajouté par composant suivant la valeur de α_3

Comme pour la série 1, l'augmentation de α_3 fait décroître le nombre d'essais initialement proposé pour le composant 3 puis fait décroître ceux des composants 1 et 2 et enfin ceux du composant 4. Là encore, la diminution d'essais ajoutés est beaucoup plus rapide pour le composant concerné par l'augmentation de sa connaissance.

Ce qui a pu être observé sur l'influence de l'information détenue avant la détermination du plan d'essais est que cette information sur un composant impacte directement le composant lui-même. Lorsqu'il n'y a plus besoin de faire d'essais sur ce composant, on se trouve à la limite maximale d'informations nécessaires sur un composant puisqu'au delà, le nombre d'essais ajoutés sur les autres composants diminue très peu.

Grâce à cette analyse, nous pouvons spécifier au client que s'il ne souhaite pas faire d'essais sur un composant spécifique (alors que cela a été préconisé par l'algorithme), il faut apporter de l'information autrement en amont ou en aval du plan d'essais.

4.2.2 Variation de la fiabilité d'un composant

Une seconde métrique à prendre en compte est l'influence du taux de défaillance des composants sur l'obtention d'un plan d'essais. En effet, le taux de défaillance est très important car il permet de calculer directement la fiabilité du système. Une petite variation vient changer la fiabilité du système et dévalider l'exigence de fiabilité. C'est pour cela que nous sommes obligé de faire varier le taux de défaillance sur un petit intervalle pour ne pas avoir à changer la fiabilité objectif.

Tout comme précédemment, nous faisons varier le taux de défaillance d'un composant en série puis d'un composant en parallèle dans notre système.

Série 3

Le taux de défaillance du composant 1 varie entre $[3, 5 \cdot 10^{-6} h^{-1}; 6, 5 \cdot 10^{-6} h^{-1}]$. Au delà, l'objectif est inatteignable (plus de 100 essais sont nécessaires) et dans l'autre sens, le système qualifie sans avoir besoin de faire d'essais.

Voici les conditions initiales :

- Initialisation : $R_0 = 0,87$, nb essai total = 100, $t = 10000 h$, $\delta = 0,1$
- Composant 1 : λ_1 varie, $\alpha_1 = 2$
- Composant 2 : $\lambda_2 = 6 \cdot 10^{-6} h^{-1}$, $\alpha_2 = 2$
- Composant 3 : $\lambda_3 = 6 \cdot 10^{-6} h^{-1}$, $\alpha_3 = 2$
- Composant 4 : $\lambda_4 = 6 \cdot 10^{-6} h^{-1}$, $\alpha_4 = 2$

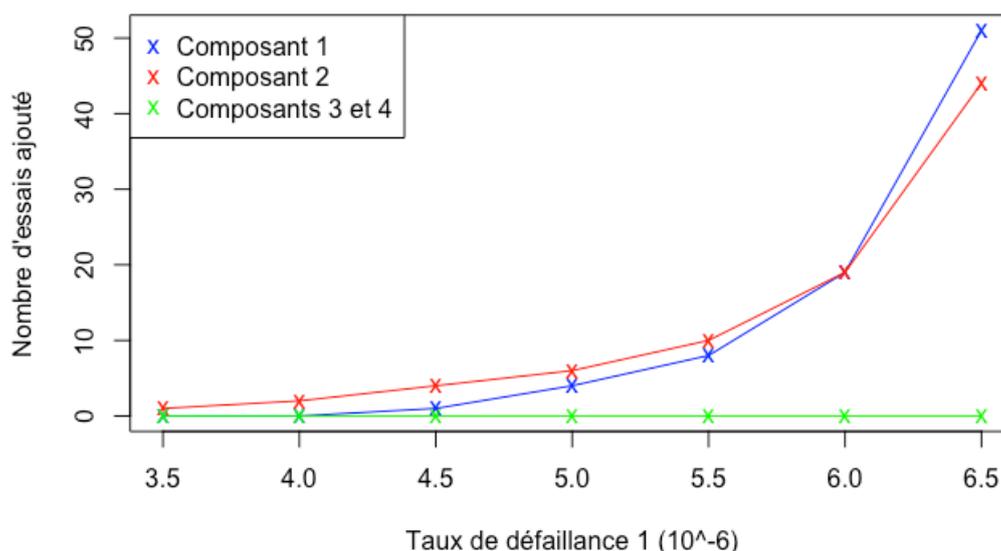


FIGURE 4.4 – Évolution du nombre d'essais ajoutés par composant suivant la valeur de λ_1

Nous observons que l'augmentation du taux de défaillance du composant 1 impose clairement un nombre d'essais à effectuer de plus en plus élevé. Aucun essai n'est préconisé pour les composants 3 et 4 du fait de leur position en redondance l'un par rapport à l'autre. Pour les deux autres composants, nous remarquons que les courbes se croisent lorsque le taux de défaillance des quatre composants est identique. Effectivement, lorsque le taux de défaillance du composant 1 est inférieur à celui du composant 2, il est plus important d'ajouter des essais sur le composant le plus critique. Ce phénomène se produit à l'inverse lorsque le taux de défaillance du composant 1 dépasse celui du composant 2.

Nous déduisons de cette série que plus le taux de défaillance des composants sera élevé et que la fiabilité objectif sera à portée, plus le plan d'essais sera grand.

Série 4

Nous réalisons la même chose que pour la série 3 excepté que le taux de défaillance du composant 3 varie entre $[10 \cdot 10^{-6} h^{-1}; 20 \cdot 10^{-6} h^{-1}]$ pour que l'objectif de fiabilité soit atteignable et obtenir un plan d'essais.

- Initialisation : $R_0 = 0,87$, nb essai total = 100, $t = 10000 h$, $\delta = 0,1$
- Composant 1 : $\lambda_1 = 6 \cdot 10^{-6} h^{-1}$, $\alpha_1 = 2$
- Composant 2 : $\lambda_2 = 6 \cdot 10^{-6} h^{-1}$, $\alpha_2 = 2$
- Composant 3 : λ_3 varie, $\alpha_3 = 2$
- Composant 4 : $\lambda_4 = 6 \cdot 10^{-6} h^{-1}$, $\alpha_4 = 2$

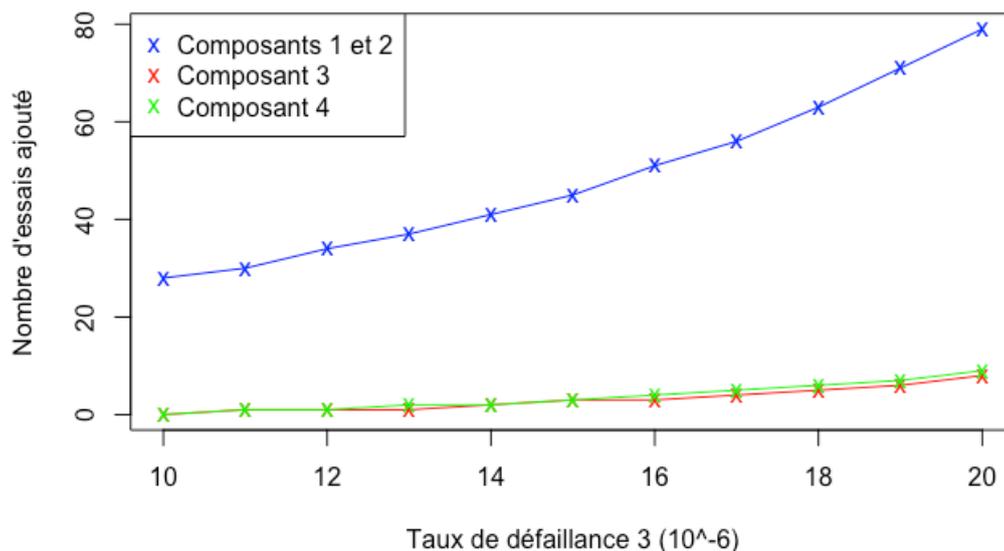


FIGURE 4.5 – Évolution du nombre d'essais ajoutés par composant suivant la valeur de λ_3

Ici, nous observons que même si le composant 3 a le taux de défaillance le plus faible, ce n'est pas à lui que l'on va ajouter des essais car ceci est déterminé par le facteur de Bier qui estime certes le taux de défaillance des composants mais aussi la place du composant dans le système. Dans notre cas, il est plus important d'ajouter de la connaissance sur un composant en série. De plus, malgré le taux de défaillance faible du composant 3, celui-ci est en parallèle avec un composant plus fiable. Par contre, on remarque que les essais ajoutés au plan pour les composants 3 et 4 sont relativement proches même si on observe une tendance à attribuer légèrement plus d'essais au composant 4. Nous n'avons pas d'explication à ce résultat. Nous remarquerons que les courbes concernant les composants 1 et 2 ont l'air de se comporter comme une fonction exponentielle.

En ce qui concerne l'influence de la variation du taux de défaillance d'un composant, nous pouvons dire que lorsque ce taux de défaillance augmente, il faut également augmenter le nombre d'essais des composants critiques nécessaire à valider la fiabilité objectif, peu importe la position dans le système du composant à l'origine de la variation de fiabilité. Du point de vue du client, il vaut peut-être mieux améliorer le composant en question avant toute chose afin de diminuer le nombre d'essais préconisé par cette méthode ou d'avoir à requalifier le système.

4.2.3 Variation du nombre total d'essais souhaité

Nous avons ajouté à l'algorithme un compteur permettant d'indiquer le nombre d'essais pour chaque boucle afin d'arrêter l'algorithme dans le cas où trop d'essais serait nécessaire à la validation des exigences. Cette limite permet également au client d'avoir la volonté de qualifier son système avec un nombre maximal d'essais et de répartir ce nombre total d'essais suivant les composants.

Nous testons l'influence du nombre d'essais total exigé par le client sur la validation des exigences, c'est à dire lorsque $R_{min} \geq R_0$. Pour réaliser cela, nous avons défini un set de nombre différent d'essais : $\{10; 40; 70; 100; 130; 160\}$. Pour chacun de ces nombres d'essais, nous augmentons au fur et à mesure la fiabilité objectif de façon à observer à quel moment l'algorithme atteint son nombre maximal d'essais autorisé à allouer aux composants. Les objectifs de fiabilité testés sont les suivants : $R_{0i} = \{0,84; 0,86; 0,87; 0,875; 0,877; 0,878; 0,879\}$

Les conditions initiales sont les suivantes :

- Initialisation : $t = 10000 h$, $\delta = 0, 1$
- Composant 1 : $\lambda_1 = 6.10^{-6} h^{-1}$, $\alpha_1 = 2$
- Composant 2 : $\lambda_2 = 6.10^{-6} h^{-1}$, $\alpha_2 = 2$
- Composant 3 : $\lambda_3 = 6.10^{-6} h^{-1}$, $\alpha_3 = 2$

— Composant 4 : $\lambda_4 = 6.10^{-6} h^{-1}$, $\alpha_4 = 2$

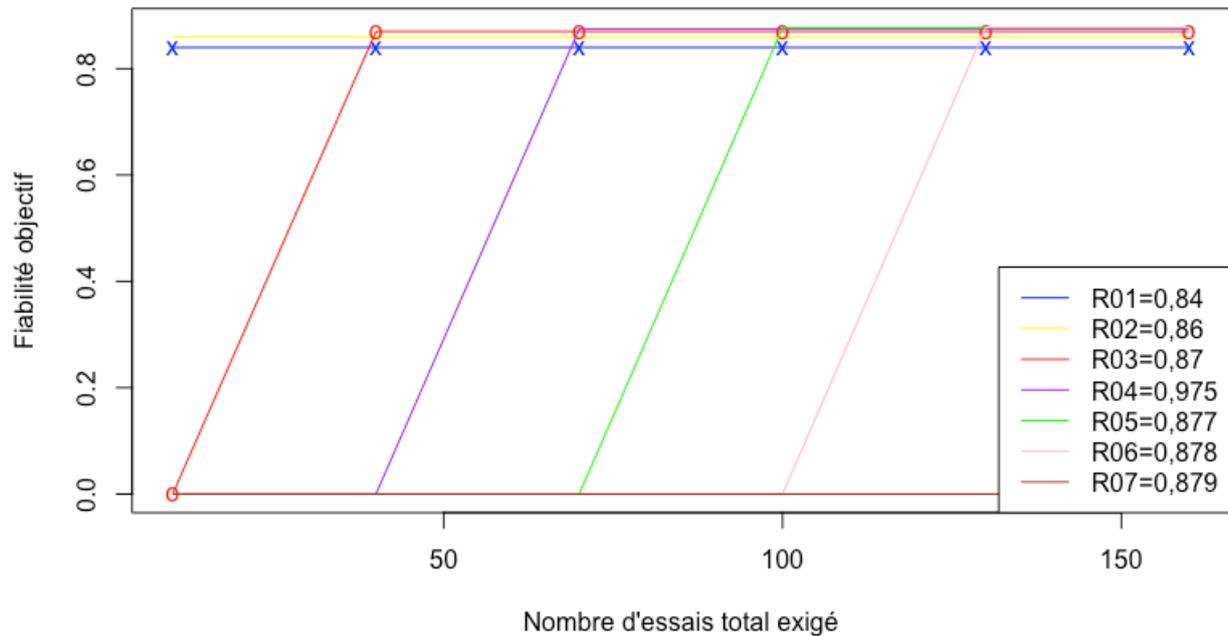


FIGURE 4.6 – Validation de la fiabilité objectif selon le nombre total d'essais exigé

Sur le graphique, lorsque la valeur de fiabilité est à zéro, ceci veut dire que la fiabilité objectif n'est pas tenue.

On observe facilement que l'augmentation de la fiabilité objectif implique un plan avec plus d'essais ajoutés puisque l'intervalle de confiance se réduit de plus en plus autour de la fiabilité du système.

Côté client, si les exigences en termes de fiabilité sont élevées, il faut s'attendre à beaucoup d'essais supplémentaires à réaliser.

Pour clôturer cette partie, l'algorithme mis en place semble fournir des résultats cohérents et apporter une réponse à notre problématique. Remarquons que lorsque l'algorithme doit gérer des composants ayant les mêmes caractéristiques et doit leur ajouter des essais, leur nombre d'essais augmente simultanément. D'un point de vue interprétation, si les composants sont identiques, nous pouvons réaliser les essais seulement pour un des deux composants ; si les composants sont différents (mais avec les mêmes paramètres), nous devons réaliser les essais préconisés pour chacun des composants.

Conclusion et perspectives

Pour rappel, nous avons pour but de mettre en œuvre une méthodologie d'allocation permettant d'identifier les efforts à fournir en termes de connaissance sur les composants afin de valider les exigences de fiabilité et de diminuer le risque lié à l'estimation de cette fiabilité du système.

Nous avons finalement choisi de nous concentrer sur la construction d'un plan d'essais de fiabilité. Celui-ci indique directement les essais à faire sur les composants du système pour valider les exigences de fiabilité. Bien évidemment, nous pouvons étendre l'algorithme à l'ajout de connaissances en général pour permettre au client de spécifier quel type de connaissance il est prêt à ajouter (essais, expertise ou REX de systèmes similaires). Ce plan d'essais, une fois validé par la seconde partie de l'algorithme, permet d'enrichir notre connaissance sur certains composants ce qui permet bien de respecter les exigences de fiabilité. Nous avons donc bien répondu à notre problématique. Initialement, le problème tournait autour de l'insertion d'un composant nouveau dans un système. Nous avons montré que ce n'est pas parce que celui-ci est nouveau que tous les efforts à fournir en termes de connaissance se focalisent sur ce composant. D'autres paramètres comme la fiabilité des composants ainsi que la structure du système sont tout aussi importants. C'est ce que prend très bien en compte le facteur d'importance de Bier.

De nombreuses perspectives se sont dégagées au court de cette étude. Tout d'abord, nous pourrions simuler des essais avec des données censurées. Ce sont des essais où aucune défaillance n'est constatée. Le paramètre β du taux de défaillance augmenterait en ajoutant le temps censuré et le paramètre α resterait constant puisqu'aucune défaillance ne sera constatée. Ainsi, la variance du taux de défaillance du composant diminuerait ainsi que la fiabilité du système. Également, nous pourrions vérifier si la méthodologie construite fonctionne avec des lois différentes pour le taux de défaillance des composants et pour la fiabilité aussi.

De plus, il serait intéressant de pouvoir généraliser cet algorithme avec un système quelconque en prenant en compte notamment la fonction de structure et d'indisponibilité du système. Ceci permettrait également à l'algorithme d'intégrer d'autres sources d'informations potentielles que l'ajout d'essais. Pour aller plus loin, nous pourrions même imaginer un modèle d'optimisation qui serait capable de calculer le meilleur gain d'information possible en combinant les sources de connaissance différentes et aussi en prenant en compte

l'aspect financier.

Un résumé de ce projet a été soumis à la Conférence Européenne de Sécurité de Fonctionnement ESREL en vue d'une éventuelle présentation du sujet en septembre prochain.

Annexe

A - Calcul de mesures d'importance sur l'incertitude

On considère un système de i composants : deux en série et deux en parallèle.

Soit $i \in \llbracket 1; n \rrbracket$ où n appartient aux entiers naturels.

La fiabilité des composants suit une loi exponentielle $R_i = e^{-\lambda_i t}$. Par conséquent, l'indisponibilité d'un composant vaut $q_i = 1 - e^{-\lambda_i t}$.

La fonction d'indisponibilité du système complet est :

$$G(q) = 1 - (1 - q_1)(1 - q_2)(1 - q_3q_4)$$

Facteur de Pan-Tai

$$I_{PN}^i(t) = \frac{\partial Var(G(q(t)))}{\partial Var(q_i(t))} = E \left\{ \left(\frac{\partial G(q(t))}{\partial q_i(t)} \right)^2 \right\}$$

Ici, on parle de la variance de l'indisponibilité des composants ce qui suppose donc que les taux de défaillance des composants suivent une loi. On considère que cette loi est une loi Gamma dont les paramètres sont les suivants :

$$E(\lambda_1) = 0,005; \alpha_1; \beta_1 = \frac{\alpha_1}{E(\lambda_1)}$$

$$E(\lambda_2) = 0,009; \alpha_2; \beta_2 = \frac{\alpha_2}{E(\lambda_2)}$$

$$E(\lambda_3) = 0,003; \alpha_3; \beta_3 = \frac{\alpha_3}{E(\lambda_3)}$$

$$E(\lambda_4) = 0,05; \alpha_4; \beta_4 = \frac{\alpha_4}{E(\lambda_4)}$$

Composant 1

$$\frac{\partial G(q)}{\partial q_1} = (1 - q_2)(1 - q_3q_4)$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\partial G(q)}{\partial q_1} \right)^2 = (1 - q_2)^2 (1 - q_3 q_4)^2 = e^{-2\lambda_2 t} (1 - (1 - e^{-\lambda_3 t})(1 - e^{-\lambda_4 t}))^2$$

$$\Leftrightarrow \left(\frac{\partial G(q)}{\partial q_1} \right)^2 = e^{-2\lambda_2 t} (e^{-\lambda_3 t} + e^{-\lambda_4 t} - e^{-(\lambda_3 + \lambda_4)t})^2$$

$$E \left\{ \left(\frac{\partial G(q)}{\partial q_1} \right)^2 \right\} = E \left(E \left(\left(\frac{\partial G(q)}{\partial q_1} \right)^2 \mid \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \right) \right)$$

$$= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-2\lambda_2 t} (e^{-\lambda_3 t} + e^{-\lambda_4 t} - e^{-(\lambda_3 + \lambda_4)t})^2 f(\lambda_2) f(\lambda_3) f(\lambda_4) d\lambda_2 d\lambda_3 d\lambda_4$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-2\lambda_2 t} f(\lambda_2) d\lambda_2 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} (e^{-\lambda_3 t} + e^{-\lambda_4 t} - e^{-(\lambda_3 + \lambda_4)t})^2 f(\lambda_3) f(\lambda_4) d\lambda_3 d\lambda_4$$

D'après les propriétés de la loi Gamma, $f(\lambda_i) = \frac{\lambda_i^{\alpha_i - 1} \beta_i^{\alpha_i}}{\Gamma(\alpha_i)} e^{-\lambda_i \beta_i}$ et $\int_0^{+\infty} f(\lambda_i) d\lambda_i = 1$.

On a alors

$$\int_0^{+\infty} e^{-2\lambda_2 t} f(\lambda_2) d\lambda_2 = \int_0^{+\infty} e^{-2\lambda_2 t} e^{-\lambda_2 \beta_2} \frac{\lambda_2^{\alpha_2 - 1} \beta_2^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)} d\lambda_2 = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_2 (2t + \beta_2)} \frac{\lambda_2^{\alpha_2 - 1} \beta_2^{\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_2)} d\lambda_2$$

En posant $\beta_2'' = 2t + \beta_2$, on obtient $\int_0^{+\infty} e^{-2\lambda_2 t} f(\lambda_2) d\lambda_2 = \frac{\beta_2^{\alpha_2}}{\beta_2''^{\alpha_2}}$

$$I_{PN}^1 = \frac{\beta_2^{\alpha_2}}{\beta_2''^{\alpha_2}} \int_0^{+\infty} \left[(1 - e^{-\lambda_4 t}) \int_0^{+\infty} e^{-2\lambda_3 t} f(\lambda_3) d\lambda_3 + (e^{-\lambda_4 t} - 2e^{-2\lambda_4 t}) \right. \\ \left. \times \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_3 t} f(\lambda_3) d\lambda_3 + e^{-2\lambda_4 t} \right] f(\lambda_4) d\lambda_4$$

$$I_{PN}^1 = \frac{\beta_2^{\alpha_2}}{\beta_2''^{\alpha_2}} \int_0^{+\infty} \left[(1 - e^{-\lambda_4 t}) \frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3^{\alpha_3}} + (e^{-\lambda_4 t} - 2e^{-2\lambda_4 t}) \frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3^{\alpha_3}} + e^{-2\lambda_4 t} \right] f(\lambda_4) d\lambda_4$$

$$= \frac{\beta_2^{\alpha_2}}{\beta_2''^{\alpha_2}} \left[\frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3^{\alpha_3}} + \left(\frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3^{\alpha_3}} - \frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3''^{\alpha_3}} \right) \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_4 t} f(\lambda_4) d\lambda_4 + \left(1 - 2 \frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3^{\alpha_3}} \right) \int_0^{+\infty} e^{-2\lambda_4 t} f(\lambda_4) d\lambda_4 \right]$$

$$= \frac{\beta_2^{\alpha_2}}{\beta_2''^{\alpha_2}} \left[\frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3^{\alpha_3}} + \left(\frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3^{\alpha_3}} - \frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3''^{\alpha_3}} \right) \frac{\beta_4^{\alpha_4}}{\beta_4^{\alpha_4}} + \left(1 - 2 \frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3^{\alpha_3}} \right) \frac{\beta_4^{\alpha_4}}{\beta_4^{\alpha_4}} \right]$$

où $\forall i \in [1; 2; 3; 4]$, $\beta'_i = t + \beta_i$ et $\beta''_i = 2t + \beta_i$

Composant 2

De la même façon,

$$I_{PN}^2 = \frac{\beta_1^{\alpha_1}}{\beta_1^{\prime\alpha_1}} \left[\frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3^{\prime\alpha_3}} + \left(\frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3^{\prime\alpha_3}} - \frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3^{\prime\prime\alpha_3}} \right) \frac{\beta_4^{\alpha_4}}{\beta_4^{\prime\alpha_4}} + \left(1 - 2 \frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3^{\prime\alpha_3}} \right) \frac{\beta_4^{\alpha_4}}{\beta_4^{\prime\prime\alpha_4}} \right]$$

Composant 3

$$\begin{aligned} \frac{\partial G(q)}{\partial q_3} &= (1 - q_1)(1 - q_2)q_4 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\partial G(q)}{\partial q_3} \right)^2 &= (1 - q_1)^2(1 - q_2)^2q_4^2 = e^{-2(\lambda_1 + \lambda_2)t}(1 - e^{-\lambda_4 t})^2 \\ \Leftrightarrow \left(\frac{\partial G(q)}{\partial q_3} \right)^2 &= e^{-2(\lambda_1 + \lambda_2)t}(1 + e^{-2\lambda_4 t} - 2e^{-\lambda_4 t}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_{PN}^3 &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-2(\lambda_1 + \lambda_2)t}(1 + e^{-2\lambda_4 t} - 2e^{-\lambda_4 t})f(\lambda_1)f(\lambda_2)f(\lambda_4)d\lambda_1d\lambda_2d\lambda_4 \\ &= \int_0^{+\infty} e^{-2\lambda_1 t}f(\lambda_1)d\lambda_1 \times \int_0^{+\infty} e^{-2\lambda_2 t}f(\lambda_2)d\lambda_2 \times \int_0^{+\infty} (1 + e^{-2\lambda_4 t} - 2e^{-\lambda_4 t})f(\lambda_4)d\lambda_4 \\ &= \frac{\beta_1^{\alpha_1}}{\beta_1^{\prime\alpha_1}} \frac{\beta_2^{\alpha_2}}{\beta_2^{\prime\alpha_2}} \left(1 + \frac{\beta_4^{\alpha_4}}{\beta_4^{\prime\alpha_4}} - 2 \frac{\beta_4^{\alpha_4}}{\beta_4^{\prime\prime\alpha_4}} \right) \end{aligned}$$

Composant 4

De même que pour le composant 3, $I_{PN}^4 = \frac{\beta_1^{\alpha_1}}{\beta_1^{\prime\alpha_1}} \frac{\beta_2^{\alpha_2}}{\beta_2^{\prime\alpha_2}} \left(1 + \frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3^{\prime\alpha_3}} - 2 \frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3^{\prime\prime\alpha_3}} \right)$

Facteur d'amélioration en variance

$$I_{FAV}^i(t) = \frac{\partial Var(G(q(t)))}{\partial Var(q_i(t))} Var(q_i(t)) = I_{PN}^i(t) Var(q_i(t))$$

En utilisant la méthode Delta, on peut écrire :

$$\begin{aligned} \forall i \in \llbracket 1; n \rrbracket, \text{Var}(q_i) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial q_i}{\partial \lambda_i} \hat{V}(\hat{\lambda}_i) \frac{\partial q_i}{\partial \lambda_i} f(\lambda_i) d\lambda_i = \int_0^{+\infty} \left(\frac{\partial(1 - e^{-\lambda_i t})}{\partial \lambda_i} \right)^2 \hat{V}(\hat{\lambda}_i) f(\lambda_i) d\lambda_i \\ &= \int_0^{+\infty} t^2 e^{-2\lambda_i t} \hat{V}(\hat{\lambda}_i) f(\lambda_i) d\lambda_i = t^2 \hat{V}(\hat{\lambda}_i) \frac{\beta_i^{\alpha_i}}{\beta_i''^{\alpha_i}} \end{aligned}$$

Composant 1

$$I_{FAV}^1 = \left[\int_0^{+\infty} e^{-2\lambda_2 t} f(\lambda_2) d\lambda_2 \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} (e^{-\lambda_3 t} + e^{-\lambda_4 t} - e^{-(\lambda_3 + \lambda_4)t})^2 f(\lambda_3) f(\lambda_4) d\lambda_3 d\lambda_4 \right] \times t^2 \hat{V}(\hat{\lambda}_1) \times \frac{\beta_1^{\alpha_1}}{\beta_1''^{\alpha_1}}$$

$$I_{FAV}^1 = I_{PN}^1 \times t^2 \hat{V}(\hat{\lambda}_1) \times \frac{\beta_1^{\alpha_1}}{\beta_1''^{\alpha_1}}$$

Composants 2, 3 et 4

De la même manière,

$$\begin{aligned} - I_{FAV}^2 &= I_{PN}^2 \times t^2 \hat{V}(\hat{\lambda}_2) \times \frac{\beta_2^{\alpha_2}}{\beta_2''^{\alpha_2}} \\ - I_{FAV}^3 &= I_{PN}^3 \times t^2 \hat{V}(\hat{\lambda}_3) \times \frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3''^{\alpha_3}} \\ - I_{FAV}^4 &= I_{PN}^4 \times t^2 \hat{V}(\hat{\lambda}_4) \times \frac{\beta_4^{\alpha_4}}{\beta_4''^{\alpha_4}} \end{aligned}$$

où $\forall i \in [1; 2; 3; 4]$, $\beta_i' = t + \beta_i$ et $\beta_i'' = 2t + \beta_i$

Facteur de Bier

$$I_{BR}^i(t) = \frac{\partial \text{Var}(G(q(t)))}{\partial \text{Var}(q_i(t))} \times \frac{\text{Var}(q_i(t))}{\text{Var}(G(q(t)))} = I_{PN}^i(t) \frac{\text{Var}(q_i(t))}{\text{Var}(G(q(t)))}$$

Commençons d'abord par exprimer la variance de l'indisponibilité :

$$Var(G) = \hat{V} \left(\hat{G}(\lambda) \right) = \nabla G(\hat{\lambda}) \times \hat{V}(\hat{\lambda}) \times \nabla G(\hat{\lambda})^T \quad \text{avec } \hat{\lambda} = (\hat{\lambda}_1, \hat{\lambda}_2, \hat{\lambda}_3, \hat{\lambda}_4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \lambda_1} &= \frac{\partial}{\partial \lambda_1} [1 - (1 - q_1)(1 - q_2)(1 - q_3 q_4)] = \frac{\partial}{\partial \lambda_1} [1 - e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} (e^{-\lambda_3 t} + e^{-\lambda_4 t} - e^{-(\lambda_3 + \lambda_4)t})] \\ &= t e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} (e^{-\lambda_3 t} + e^{-\lambda_4 t} - e^{-(\lambda_3 + \lambda_4)t}) \\ &= \frac{\partial G}{\partial \lambda_2} \\ \frac{\partial G}{\partial \lambda_3} &= t e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} (e^{-\lambda_3 t} - e^{-(\lambda_3 + \lambda_4)t}) \\ \frac{\partial G}{\partial \lambda_4} &= t e^{-(\lambda_1 + \lambda_2)t} (e^{-\lambda_4 t} - e^{-(\lambda_3 + \lambda_4)t}) \end{aligned}$$

La matrice de variance des taux de défaillance des composants est la suivante :

$$\hat{V}(\hat{\lambda}) = \begin{pmatrix} \hat{V}(\hat{\lambda}_1) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \hat{V}(\hat{\lambda}_2) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \hat{V}(\hat{\lambda}_3) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \hat{V}(\hat{\lambda}_4) \end{pmatrix}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} Var(G) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-2(\lambda_1 + \lambda_2)t} \left[(e^{-\lambda_3 t} + e^{-\lambda_4 t} - e^{-(\lambda_3 + \lambda_4)t})^2 \left[\hat{V}(\hat{\lambda}_1) + \hat{V}(\hat{\lambda}_2) \right] \right. \\ &\quad \left. + (e^{-\lambda_3 t} - e^{-(\lambda_3 + \lambda_4)t})^2 \hat{V}(\hat{\lambda}_3) + (e^{-\lambda_4 t} - e^{-(\lambda_3 + \lambda_4)t})^2 \hat{V}(\hat{\lambda}_4) \right] f(\lambda_1) f(\lambda_2) f(\lambda_3) f(\lambda_4) d\lambda_1 d\lambda_2 d\lambda_3 d\lambda_4 \end{aligned}$$

En appelant $A = (e^{-\lambda_3 t} + e^{-\lambda_4 t} - e^{-(\lambda_3 + \lambda_4)t})^2$, $B = (e^{-\lambda_3 t} - e^{-(\lambda_3 + \lambda_4)t})^2$ et $C = (e^{-\lambda_4 t} - e^{-(\lambda_3 + \lambda_4)t})^2$, on obtient

$$\begin{aligned} Var(G) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-2(\lambda_1 + \lambda_2)t} f(\lambda_1) f(\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 \left[\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} A \left(\hat{V}(\hat{\lambda}_1) + \hat{V}(\hat{\lambda}_2) \right) f(\lambda_3) f(\lambda_4) d\lambda_3 d\lambda_4 \right. \\ &\quad \left. + \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(B \times \hat{V}(\hat{\lambda}_3) + C \times \hat{V}(\hat{\lambda}_4) \right) f(\lambda_3) f(\lambda_4) d\lambda_3 d\lambda_4 \right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left(B \times \hat{V}(\hat{\lambda}_3) + C \times \hat{V}(\hat{\lambda}_4) \right) f(\lambda_3) f(\lambda_4) d\lambda_3 d\lambda_4 \\
&= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \left[\hat{V}(\hat{\lambda}_3) (e^{-2\lambda_3 t} - 2e^{-(2\lambda_3 + \lambda_4)t}) + \left(\hat{V}(\hat{\lambda}_3) + \hat{V}(\hat{\lambda}_4) \right) e^{-2(\lambda_3 + \lambda_4)t} \right. \\
&\quad \left. + \hat{V}(\hat{\lambda}_4) (e^{-2\lambda_4 t} - 2e^{-(\lambda_3 + 2\lambda_4)t}) \right] f(\lambda_3) f(\lambda_4) d\lambda_3 d\lambda_4 \\
&= \int_0^{+\infty} \left[\left(\hat{V}(\hat{\lambda}_3) (1 - 2e^{-\lambda_4 t}) + \left(\hat{V}(\hat{\lambda}_3) + \hat{V}(\hat{\lambda}_4) \right) e^{-2\lambda_4 t} \right) \frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3^{\prime\prime\alpha_3}} - 2\hat{V}(\hat{\lambda}_4) e^{-2\lambda_4 t} \frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3^{\prime\alpha_3}} \right. \\
&\quad \left. + \hat{V}(\hat{\lambda}_4) e^{-2\lambda_4 t} \right] f(\lambda_4) d\lambda_4 \\
&= \int_0^{+\infty} \left[\hat{V}(\hat{\lambda}_3) \frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3^{\prime\prime\alpha_3}} - 2\hat{V}(\hat{\lambda}_3) \frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3^{\prime\alpha_3}} e^{-\lambda_4 t} + \left(\left(\hat{V}(\hat{\lambda}_3) + \hat{V}(\hat{\lambda}_4) \right) \frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3^{\prime\prime\alpha_3}} - 2\hat{V}(\hat{\lambda}_4) \frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3^{\prime\alpha_3}} + \hat{V}(\hat{\lambda}_4) \right) \right. \\
&\quad \left. e^{-2\lambda_4 t} \right] f(\lambda_4) d\lambda_4 \\
&= \hat{V}(\hat{\lambda}_3) \frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3^{\prime\prime\alpha_3}} \left(1 + \frac{\beta_4^{\alpha_4}}{\beta_4^{\prime\alpha_4}} - 2 \frac{\beta_4^{\alpha_4}}{\beta_4^{\prime\prime\alpha_4}} \right) + \hat{V}(\hat{\lambda}_4) \frac{\beta_4^{\alpha_4}}{\beta_4^{\prime\alpha_4}} \left(1 + \frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3^{\prime\alpha_3}} - 2 \frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3^{\prime\prime\alpha_3}} \right)
\end{aligned}$$

La partie contenant A a déjà été calculée pour un facteur d'importance précédent, ce qui donne :

$$\begin{aligned}
Var(G) &= \frac{\beta_1^{\alpha_1}}{\beta_1^{\prime\alpha_1}} \frac{\beta_2^{\alpha_2}}{\beta_2^{\prime\alpha_2}} \left[\left(\frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3^{\prime\alpha_3}} + \left(\frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3^{\alpha_3}} - \frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3^{\prime\alpha_3}} \right) \frac{\beta_4^{\alpha_4}}{\beta_4^{\alpha_4}} + \left(1 - 2 \frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3^{\prime\alpha_3}} \right) \frac{\beta_4^{\alpha_4}}{\beta_4^{\alpha_4}} \right) \right. \\
&\quad \left. \times \left(\hat{V}(\hat{\lambda}_1) + \hat{V}(\hat{\lambda}_2) \right) + \hat{V}(\hat{\lambda}_3) \frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3^{\prime\alpha_3}} \left(1 + \frac{\beta_4^{\alpha_4}}{\beta_4^{\prime\alpha_4}} - 2 \frac{\beta_4^{\alpha_4}}{\beta_4^{\prime\prime\alpha_4}} \right) + \hat{V}(\hat{\lambda}_4) \frac{\beta_4^{\alpha_4}}{\beta_4^{\prime\alpha_4}} \left(1 + \frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3^{\prime\alpha_3}} - 2 \frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3^{\prime\prime\alpha_3}} \right) \right]
\end{aligned}$$

où $\forall i \in [1; 2; 3; 4]$, $\beta_i' = t + \beta_i$ et $\beta_i'' = 2t + \beta_i$

D'après les résultats obtenus du facteur d'amélioration en variance ainsi que l'expression de la variance de l'indisponibilité exprimée en amont, on exprime le facteur de Bier de chaque composant.

Composant 1, 2, 3 et 4

$$- I_{BR}^1 = \frac{I_{PN}^1 \times t^2 \hat{V}(\hat{\lambda}_1) \times \frac{\beta_1^{\alpha_1}}{\beta_1''^{\alpha_1}}}{Var(G)}$$

$$- I_{BR}^2 = \frac{I_{PN}^2 \times t^2 \hat{V}(\hat{\lambda}_2) \times \frac{\beta_2^{\alpha_2}}{\beta_2''^{\alpha_2}}}{Var(G)}$$

$$- I_{BR}^3 = \frac{I_{PN}^3 \times t^2 \hat{V}(\hat{\lambda}_3) \times \frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3''^{\alpha_3}}}{Var(G)}$$

$$- I_{BR}^4 = \frac{I_{PN}^4 \times t^2 \hat{V}(\hat{\lambda}_4) \times \frac{\beta_4^{\alpha_4}}{\beta_4''^{\alpha_4}}}{Var(G)}$$

Facteur "Risk Reduction Worth" en variance

$$I_{RRWV}^i(t) = \frac{Var(G(q(t)))}{Var(G(0_i, q(t)))}$$

Composant 1

On exprime la variance de $G(0_1, q)$ de la même façon que la variance de l'indisponibilité du système.

$$G(0_1, q) = 1 - (1 - q_2)(1 - q_3q_4)$$

$$\frac{\partial G(0_1, q)}{\partial \lambda_1} = \frac{\partial}{\partial \lambda_1} [1 - (1 - q_2)(1 - q_3q_4)] = \frac{\partial}{\partial \lambda_1} [1 - e^{-\lambda_2 t} (e^{-\lambda_3 t} + e^{-\lambda_4 t} - e^{-(\lambda_3 + \lambda_4)t})]$$

$$\frac{\partial G(0_1, q)}{\partial \lambda_2} = te^{-\lambda_2 t} (e^{-\lambda_3 t} + e^{-\lambda_4 t} - e^{-(\lambda_3 + \lambda_4)t})$$

$$\frac{\partial G(0_1, q)}{\partial \lambda_3} = te^{-\lambda_2 t} (e^{-\lambda_3 t} - e^{-(\lambda_3 + \lambda_4)t})$$

$$\frac{\partial G(0_1, q)}{\partial \lambda_4} = te^{-\lambda_2 t} (e^{-\lambda_4 t} - e^{-(\lambda_3 + \lambda_4)t})$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} Var(G(0_1, q)) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-2\lambda_2 t} \left[(e^{-\lambda_3 t} + e^{-\lambda_4 t} - e^{-(\lambda_3 + \lambda_4)t})^2 \hat{V}(\hat{\lambda}_2) \right. \\ &\quad \left. + (e^{-\lambda_3 t} - e^{-(\lambda_3 + \lambda_4)t})^2 \hat{V}(\hat{\lambda}_3) + (e^{-\lambda_4 t} - e^{-(\lambda_3 + \lambda_4)t})^2 \hat{V}(\hat{\lambda}_4) \right] f(\lambda_2) f(\lambda_3) f(\lambda_4) d\lambda_2 d\lambda_3 d\lambda_4 \\ &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-2\lambda_2 t} \left[A \hat{V}(\hat{\lambda}_2) + B \hat{V}(\hat{\lambda}_3) + C \hat{V}(\hat{\lambda}_4) \right] f(\lambda_2) f(\lambda_3) f(\lambda_4) d\lambda_2 d\lambda_3 d\lambda_4 \end{aligned}$$

Finalement, on obtient le dénominateur suivant :

$$\begin{aligned} Var(G(0_1, q)) &= \frac{\beta_2^{\alpha_2}}{\beta_2''^{\alpha_2}} \left[\left(\frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3''^{\alpha_3}} + \left(\frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3'^{\alpha_3}} - \frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3''^{\alpha_3}} \right) \frac{\beta_4^{\alpha_4}}{\beta_4'^{\alpha_4}} + \left(1 - 2 \frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3'^{\alpha_3}} \right) \frac{\beta_4^{\alpha_4}}{\beta_4''^{\alpha_4}} \right) \hat{V}(\hat{\lambda}_2) \right. \\ &\quad \left. + \hat{V}(\hat{\lambda}_3) \frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3''^{\alpha_3}} \left(1 + \frac{\beta_4^{\alpha_4}}{\beta_4''^{\alpha_4}} - 2 \frac{\beta_4^{\alpha_4}}{\beta_4'^{\alpha_4}} \right) + \hat{V}(\hat{\lambda}_4) \frac{\beta_4^{\alpha_4}}{\beta_4''^{\alpha_4}} \left(1 + \frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3''^{\alpha_3}} - 2 \frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3'^{\alpha_3}} \right) \right] \end{aligned}$$

où $\forall i \in [1; 2; 3; 4]$, $\beta_i' = t + \beta_i$ et $\beta_i'' = 2t + \beta_i$

Composant 2

$$G(0_2, q) = 1 - (1 - q_1)(1 - q_3 q_4)$$

$$\begin{aligned} Var(G(0_2, q)) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-2\lambda_1 t} \left[(e^{-\lambda_3 t} + e^{-\lambda_4 t} - e^{-(\lambda_3 + \lambda_4)t})^2 \hat{V}(\hat{\lambda}_1) \right. \\ &\quad \left. + (e^{-\lambda_3 t} - e^{-(\lambda_3 + \lambda_4)t})^2 \hat{V}(\hat{\lambda}_3) + (e^{-\lambda_4 t} - e^{-(\lambda_3 + \lambda_4)t})^2 \hat{V}(\hat{\lambda}_4) \right] f(\lambda_1) f(\lambda_3) f(\lambda_4) d\lambda_1 d\lambda_3 d\lambda_4 \end{aligned}$$

De la même manière que pour le composant 1, on obtient de dénominateur suivant :

$$\begin{aligned} Var(G(0_2, q)) &= \frac{\beta_1^{\alpha_1}}{\beta_1^{\prime\alpha_1}} \left[\left(\frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3^{\prime\alpha_3}} + \left(\frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3^{\prime\alpha_3}} - \frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3^{\prime\alpha_3}} \right) \frac{\beta_4^{\alpha_4}}{\beta_4^{\prime\alpha_4}} + \left(1 - 2 \frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3^{\prime\alpha_3}} \right) \frac{\beta_4^{\alpha_4}}{\beta_4^{\prime\alpha_4}} \right) \hat{V}(\hat{\lambda}_1) \right. \\ &\quad \left. + \hat{V}(\hat{\lambda}_3) \frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3^{\prime\alpha_3}} \left(1 + \frac{\beta_4^{\alpha_4}}{\beta_4^{\prime\alpha_4}} - 2 \frac{\beta_4^{\alpha_4}}{\beta_4^{\prime\alpha_4}} \right) + \hat{V}(\hat{\lambda}_4) \frac{\beta_4^{\alpha_4}}{\beta_4^{\prime\alpha_4}} \left(1 + \frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3^{\prime\alpha_3}} - 2 \frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3^{\prime\alpha_3}} \right) \right] \end{aligned}$$

Composant 3

$$G(0_3, q) = 1 - (1 - q_1)(1 - q_2)$$

$$\begin{aligned} Var(G(0_3, q)) &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} t^2 e^{-2(\lambda_1 + \lambda_2)t} \left(\hat{V}(\hat{\lambda}_1) + \hat{V}(\hat{\lambda}_2) \right) f(\lambda_1) f(\lambda_2) d\lambda_1 d\lambda_2 \\ &= t^2 \left(\hat{V}(\hat{\lambda}_1) + \hat{V}(\hat{\lambda}_2) \right) \frac{\beta_1^{\alpha_1}}{\beta_1^{\prime\alpha_1}} \frac{\beta_2^{\alpha_2}}{\beta_2^{\prime\alpha_2}} \end{aligned}$$

Composant 4

$G(0_4, q)$ étant indépendant de q_3 et q_4 comme pour le composant 3, le facteur d'importance est le même que le composant 3.

$$Var(G(0_4, q)) = t^2 \left(\hat{V}(\hat{\lambda}_1) + \hat{V}(\hat{\lambda}_2) \right) \frac{\beta_1^{\alpha_1}}{\beta_1^{\prime\alpha_1}} \frac{\beta_2^{\alpha_2}}{\beta_2^{\prime\alpha_2}}$$

B - Calcul de la mesure d'importance de Birnbaum

En considérant le même système que dans l'annexe A, l'expression du facteur de Birnbaum est la suivante.

- $I_B^1 = (1 - q_2)(1 - q_3 q_4)$
- $I_B^2 = (1 - q_1)(1 - q_3 q_4)$
- $I_B^3 = (1 - q_1)(1 - q_2) q_4$
- $I_B^4 = (1 - q_1)(1 - q_2) q_3$

Cependant, on considère les q_i inconnus puisque les taux de défaillance des composants ne sont pas connus non plus. Nous intégrons le facteur de Birnbaum suivant les taux de

défaillance pour avoir une expression dépendant uniquement du temps et des paramètres α_i et β_i de λ_i .

Composant 1

$$\begin{aligned}
 I_B^1 &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} (1 - q_2)(1 - q_3q_4)f(\lambda_2)f(\lambda_3)f(\lambda_4)d\lambda_2\lambda_3\lambda_4 \\
 &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_2t}(1 - (1 - e^{-\lambda_3t})(1 - e^{-\lambda_4t}))f(\lambda_2)f(\lambda_3)f(\lambda_4)d\lambda_2\lambda_3\lambda_4 \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_2t}f(\lambda_2)d\lambda_2 \left[\left(1 + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_4t}f(\lambda_4)d\lambda_4\right) \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_3t}f(\lambda_3)d\lambda_3 + \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_4t}f(\lambda_4)d\lambda_4 \right] \\
 &= \frac{\beta_2^{\alpha_2}}{\beta_2'^{\alpha_2}} \left[\left(1 + \frac{\beta_4^{\alpha_4}}{\beta_4'^{\alpha_4}}\right) \frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3'^{\alpha_3}} + \frac{\beta_4^{\alpha_4}}{\beta_4'^{\alpha_4}} \right]
 \end{aligned}$$

Composant 2

Tout comme le composant 1, le composant 2 s'exprime comme suit :

$$I_B^2 = \frac{\beta_1^{\alpha_1}}{\beta_1'^{\alpha_1}} \left[\left(1 + \frac{\beta_4^{\alpha_4}}{\beta_4'^{\alpha_4}}\right) \frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3'^{\alpha_3}} + \frac{\beta_4^{\alpha_4}}{\beta_4'^{\alpha_4}} \right]$$

Composant 3

$$\begin{aligned}
 I_B^3 &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} (1 - q_1)(1 - q_2)q_4f(\lambda_1)f(\lambda_2)f(\lambda_4)d\lambda_1\lambda_2\lambda_4 \\
 &= \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_1t}f(\lambda_1)d\lambda_1 \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_2t}f(\lambda_2)d\lambda_2 \left(1 - \int_0^{+\infty} e^{-\lambda_4t}f(\lambda_4)d\lambda_4\right) \\
 &= \frac{\beta_1^{\alpha_1}}{\beta_1'^{\alpha_1}} \frac{\beta_2^{\alpha_2}}{\beta_2'^{\alpha_2}} \left(1 - \frac{\beta_4^{\alpha_4}}{\beta_4'^{\alpha_4}}\right)
 \end{aligned}$$

Composant 4

$$\begin{aligned}
 I_B^4 &= \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} (1 - q_1)(1 - q_2)q_3 f(\lambda_1)f(\lambda_2)f(\lambda_3)d\lambda_1\lambda_2\lambda_3 \\
 &= \frac{\beta_1^{\alpha_1}}{\beta_1'^{\alpha_1}} \frac{\beta_2^{\alpha_2}}{\beta_2'^{\alpha_2}} \left(1 - \frac{\beta_3^{\alpha_3}}{\beta_3'^{\alpha_3}}\right)
 \end{aligned}$$

C - Algorithme d'estimation d'un plan d'essais par allocation

```

#Détermination du plan d'essais

R0 <- 0.84 # Fiabilité objectif
nb_essai_total <- 100 # Pour éviter la boucle Tant que infini
t <- 10000
seuil_conf <- 0.1 # Delta (risque client)

alpha <- c(0) # Initialisation des paramètres
alpha[1] <- 10
alpha[2] <- 2
alpha[3] <- 10
alpha[4] <- 3
beta <- c(0)
beta[1] <- alpha[1]/0.000007
beta[2] <- alpha[2]/0.000007
beta[3] <- alpha[3]/0.000003
beta[4] <- alpha[4]/0.000005

lambda <- c(0)
lambda[1] <- alpha[1]/beta[1]
lambda[2] <- alpha[2]/beta[2]
lambda[3] <- alpha[3]/beta[3]
lambda[4] <- alpha[4]/beta[4]

Var_l <- c(0) # Variance des taux de défaillance
E_Ti <- c(0) # Espérance des temps de défaillance
nb_essai <- c(0) # Initialisation du vecteur nombre d'essais
for(m in seq(1,4)){
  Var_l[m] <- alpha[m]/(beta[m])^2
  E_Ti[m] <- beta[m]/alpha[m]
  nb_essai[m] <- 0
}

```

FIGURE 4.7 – Initialisation des paramètres d'entrée de l'algorithme

```

# Fiabilité système et intervalle de confiance
Rs <- exp(-(lambda[1]+lambda[2])*t)*(1-(1-exp(-lambda[3]*t))*(1-exp(-lambda[4]*t)))
Grad_Rs1 <- -t*Rs
Grad_Rs2 <- -t*Rs
Grad_Rs3 <- -t*exp(-(lambda[1]+lambda[2])*t)*(exp(-lambda[3]*t)-exp(-(lambda[3]+lambda[4])*t))
Grad_Rs4 <- -t*exp(-(lambda[1]+lambda[2])*t)*(exp(-lambda[4]*t)-exp(-(lambda[3]+lambda[4])*t))
#Variance de Rs suivant la méthode Delta
Var_Rs <- Grad_Rs1^2*Var_l[1]+Grad_Rs2^2*Var_l[2]+Grad_Rs3^2*Var_l[3]+Grad_Rs4^2*Var_l[4]
Rmax <- Rs+pnorm(1-seuil_conf/2)*sqrt(Var_Rs)
Rmin <- Rs-pnorm(1-seuil_conf/2)*sqrt(Var_Rs)
Rs
Rmin
Rmax

FIB <- c(0) # Facteur de Birnbaum
FB <- c(0) # Facteur de Bier
compteur <- 0 # Compte le nombre d'itération de la boucle Tant que

#Facteur de Birnbaum
beta__1 <- 2*t+beta[1]
beta__2 <- 2*t+beta[2]
beta__3 <- 2*t+beta[3]
beta__4 <- 2*t+beta[4]
beta_1 <- t+beta[1]
beta_2 <- t+beta[2]
beta_3 <- t+beta[3]
beta_4 <- t+beta[4]
FIB[1] <- (beta[2]/beta_2)^alpha[2]*((1+(beta[4]/beta_4)^alpha[4])*(beta[3]/beta_3)^alpha[3]+(beta[4]/beta_4)^alpha[4])
FIB[2] <- (beta[1]/beta_1)^alpha[1]*((1+(beta[4]/beta_4)^alpha[4])*(beta[3]/beta_3)^alpha[3]+(beta[4]/beta_4)^alpha[4])
FIB[3] <- (beta[1]/beta_1)^alpha[1]*(beta[2]/beta_2)^alpha[2]*(1-(beta[4]/beta_4)^alpha[4])
FIB[4] <- (beta[1]/beta_1)^alpha[1]*(beta[2]/beta_2)^alpha[2]*(1-(beta[3]/beta_3)^alpha[3])

```

FIGURE 4.8 – Estimation de la fiabilité du système, de son intervalle de confiance et calcul du facteur de Birnbaum

```

if(Rs>R0){ #Si la fiabilité du système est bien supérieure à la fiabilité objectif
  while((Rmin<R0)&&(compteur<nb_essai_total)){ # Tant que Rmin<R0 et que le nombre d'essais total n'a pas été dépassé

    #Facteur de Bier
    beta__1 <- 2*t+beta[1]
    beta__2 <- 2*t+beta[2]
    beta__3 <- 2*t+beta[3]
    beta__4 <- 2*t+beta[4]
    beta_1 <- t+beta[1]
    beta_2 <- t+beta[2]
    beta_3 <- t+beta[3]
    beta_4 <- t+beta[4]
    E_VarG <- (beta[1]/beta__1)^alpha[1]*(beta[2]/beta__2)^alpha[2]*(((beta[3]/beta__3)^alpha[3]+(beta[3]/beta_3)^alpha[3]
    FB[1] <- (((beta[2]/beta__2)^alpha[2])*((beta[3]/beta__3)^alpha[3]+(beta[3]/beta_3)^alpha[3])-(beta[3]/beta__3)^alpha[3]
    FB[2] <- (((beta[1]/beta__1)^alpha[1])*((beta[3]/beta__3)^alpha[3]+(beta[3]/beta_3)^alpha[3])-(beta[3]/beta__3)^alpha[3]
    FB[3] <- (((beta[1]/beta__1)^alpha[1])*((beta[2]/beta__2)^alpha[2])*(1+(beta[4]/beta__4)^alpha[4]-2*(beta[4]/beta_4)^
    FB[4] <- (((beta[1]/beta__1)^alpha[1])*((beta[2]/beta__2)^alpha[2])*(1+(beta[3]/beta__3)^alpha[3]-2*(beta[3]/beta_3)^

    for (i in seq(1,4)){ # Parmi les 4 composants,
      if (FB[i]==max(FB)){ # Lequel a un FB le plus important
        nb_essai[i] <- nb_essai[i]+1 # on ajoute 1 essai
        alpha[i] <- alpha[i] + 1 # on incrémente alpha et beta
        beta[i] <- beta[i] + E_Ti[i]
        lambda[i] <- alpha[i]/beta[i] # on renseigne la nouvelle valeur du lambda_i calculé
        Var_l[i] <- alpha[i]/beta[i]^2
      }
    }
    # On estime de nouveau l'intervalle de confiance de la fiabilité système
    Rs <- exp(-(lambda[1]+lambda[2])*t)*(1-(1-exp(-lambda[3]*t))*(1-exp(-lambda[4]*t)))
    Grad_Rs1 <- -t*Rs
    Grad_Rs2 <- -t*Rs
    Grad_Rs3 <- -t*exp(-(lambda[1]+lambda[2])*t)*(exp(-lambda[3]*t)-exp(-(lambda[3]+lambda[4])*t))
    Grad_Rs4 <- -t*exp(-(lambda[1]+lambda[2])*t)*(exp(-lambda[4]*t)-exp(-(lambda[3]+lambda[4])*t))
    #Variance de Rs suivant la méthode Delta
    Var_Rs <- Grad_Rs1^2*Var_l[1]+Grad_Rs2^2*Var_l[2]+Grad_Rs3^2*Var_l[3]+Grad_Rs4^2*Var_l[4]
    Rmin <- Rs-pnorm(1-seuil_conf/2)*sqrt(Var_Rs)
    Rmax <- Rs+pnorm(1-seuil_conf/2)*sqrt(Var_Rs)
    compteur <- compteur+1
  }
} else{ # Rs<R0
  for (i in seq(1,4)){ # Parmi les 4 composants,
    if (FIB[i]==max(FIB)){ # Lequel devons nous améliorer
      print("Redonder ou améliorer le composant :")
      print(i)
    }
  }
}
}

```

FIGURE 4.9 – Construction du plan d'essais

```

Rs
Rmin
lambda
nb_essai

if(Rmin>=R0){ #Si Rmin>=R0, on a bien atteint notre objectif
  print("L'objectif a été atteint")
} else{
  print("L'objectif est inatteignable")
}

```

FIGURE 4.10 – Obtention du plan d'essais

D - Algorithme de validation du plan d'essais obtenu

```

#Validation plan d'essais

R0 <- 0.84 # Fiabilité objectif
t <- 10000 # Temps auquel est calculé la fiabilité
nb_simul <- 10000 # Nombre simulations du plan d'essais
Obj_atteint <- c(0)
Qualif <- c(0)
Qualif_non_Obj_atteint <- 0
non_Qualif_Obj_atteint <- 0
seuil_conf <- 0.1 # Delta risque client

```

FIGURE 4.11 – Initialisation des paramètres du système

```

for(j in seq(1,nb_simul)){ # Pour n simulations
  lambda <- c(0)
  nb_essai <- c(0)
  nb_essai[1] <- 5 # Plan d'essais à valider
  nb_essai[2] <- 12
  nb_essai[3] <- 0
  nb_essai[4] <- 0
  alpha <- c(0)
  alpha[1] <- 10 # Paramètres de départ des taux de défaillance des composants
  alpha[2] <- 2
  alpha[3] <- 10
  alpha[4] <- 3
  beta <- c(0)
  beta[1] <- alpha[1]/0.000007
  beta[2] <- alpha[2]/0.000007
  beta[3] <- alpha[3]/0.000003
  beta[4] <- alpha[4]/0.000005
  Var_l <- c(0)
  Var_l[1] <- alpha[1]/beta[1]^2
  Var_l[2] <- alpha[2]/beta[2]^2
  Var_l[3] <- alpha[3]/beta[3]^2
  Var_l[4] <- alpha[4]/beta[4]^2
}

```

FIGURE 4.12 – Plan d'essais à valider

```

for(i in seq(1,4)){ # Pour chaque composant
  lambda[i] <- rgamma(1, shape=alpha[i], scale=1/beta[i]) # On tire un lambda suivant sa loi Gamma
}
Rs <- exp(-(lambda[1]+lambda[2])*t)*(1-(1-exp(-lambda[3]*t))*(1-exp(-lambda[4]*t))) # Calcul fiabilité système
if(Rs>=R0){ # Si Rs>=R0 alors l'objectif est atteint
  Obj_atteint[j] <- 1
}else{
  Obj_atteint[j] <- 0
}
for(i in seq(1,4)) { # Pour chaque composant
  if(nb_essai[i]!=0){ # Si le composant a des essais ajoutés
    td <- c(0)
    td <- rexp(nb_essai[i],rate=lambda[i]) # On tire les temps de défaillance suivant
    #le nb d'essais attribué à chaque composant
    alpha[i] <- alpha[i]+nb_essai[i] # On met à jour les paramètres du taux de défaillance
    beta[i] <- beta[i]+sum(td)
    lambda[i] <- alpha[i]/beta[i] # On calcule un nouveau taux de défaillance des composants
    Var_l[i] <- alpha[i]/beta[i]^2
  }
}
# On calcule de nouveau la fiabilité système pour voir l'influence du tirage des temps de défaillance
Rs <- exp(-(lambda[1]+lambda[2])*t)*(1-(1-exp(-lambda[3]*t))*(1-exp(-lambda[4]*t)))
Grad_Rs1 <- -t*Rs
Grad_Rs2 <- -t*Rs
Grad_Rs3 <- -t*exp(-(lambda[1]+lambda[2])*t)*(exp(-lambda[3]*t)-exp(-(lambda[3]+lambda[4])*t))
Grad_Rs4 <- -t*exp(-(lambda[1]+lambda[2])*t)*(exp(-lambda[4]*t)-exp(-(lambda[3]+lambda[4])*t))
#Variance de Rs suivant la méthode Delta
Var_Rs <- Grad_Rs1^2*Var_l[1]+Grad_Rs2^2*Var_l[2]+Grad_Rs3^2*Var_l[3]+Grad_Rs4^2*Var_l[4]
Rmin <- Rs-pnorm(1-seuil_conf/2)*sqrt(Var_Rs)

if(Rmin>=R0){ # Si Rmin>=R0 alors on qualifie l'essai sinon on le rejette
  Qualif[j] <- 1
}else{
  Qualif[j] <- 0
}
if((Qualif[j]==1)&&(Obj_atteint[j]==0)){ # Calcul pour trouver P(accepter)
  Qualif_non_Obj_atteint <- Qualif_non_Obj_atteint+1
}
if((Qualif[j]==0)&&(Obj_atteint[j]==1)){ # Calcul pour trouver P(Refuser)
  non_Qualif_Obj_atteint <- non_Qualif_Obj_atteint+1
}
} # Fin simulations

```

FIGURE 4.13 – Simulations du plan d'essais

```

# On calcule ensuite le risque de 1ere et 2nde espèce sur la mise en place de notre plan d'essai
P_accepter <- (Qualif_non_Obj_atteint)/sum(Obj_atteint==0)
P_refuser <- (non_Qualif_Obj_atteint)/sum(Qualif==0)
# Si ces risques sont tolérables, on peut lancer les essais
P_accepter
P_refuser
Rmin
Rs

```

FIGURE 4.14 – Acceptation ou refus du plan d'essais suivant le risque client

Bibliographie

- [1] R.E. Barlow and F. Proschan. Importance of system components and fault tree events. *Stochastic Processes and their Applications* 3, pages 153–173, 1975.
- [2] Vicki M. Bier. A measure of uncertainty importance for components in fault trees. January 1983.
- [3] ZW Birnbaum. On the importance of different components in a multicomponent system. *Krishnaiah PR*, page 581, May 1969.
- [4] Marc Bouissou. Les méthodes d'allocation : principes mathématiques. page 6.
- [5] David W. Coit and Enrico Zio. The evolution of system reliability optimization. *Reliability Engineering & System Safety*, 192 :106259, December 2019.
- [6] A. Elsayed Elsayed. 2.13. Importance measures of components. In *Reliability engineering*. 2012.
- [7] H.E. Lambert. Measures of importance of events and cut sets in fault trees. *Reliability and Fault Tree Analysis*, pages 77–100, 1995.
- [8] Damien Manceau, Chaymaa Bourich, and Laurent Saintis. Méthode d'allocation d'objectifs de fiabilité pour la conception d'un système partiellement nouveau. page 6, 2018.
- [9] C. Brizec Marc Bouissou. Application of two generic availability allocation methods to a real life example. January 1996.
- [10] Wayne Nelson. *Applied Life Data Analysis*. February 1982.
- [11] Jose E. Ramirez-Marquez, David W. Coit, and Tongdan Jin. Test plan allocation to minimize system reliability estimation variability. *International Journal of Reliability, Quality and Safety Engineering*, 11(03) :257–272, September 2004.
- [12] Marvin Rausand and Arnljot Høyland. *System reliability theory : models, statistical methods, and applications*. Wiley series in probability and statistics. Wiley-Interscience, Hoboken, NJ, 2nd ed edition, 2004.
- [13] L. Saintis, B. Castanier, A. Kobi, F. Guérin, M. Mélot, G. Mingot, M. Grimmé, C. Blanchon, and P. Dubuis. The Application of Reliability Allocation Methodology, From Preliminary Test Data, to Design a Definitive Test Plan. Application to Mechanical Heart Replacement Technology. In *Proceedings of the 29th European Safety*

-
- and Reliability Conference (ESREL)*, pages 2575–2582. Research Publishing Services, 2019.
- [14] Mohamed Sallak. Évaluation de paramètres de sûreté de fonctionnement en présence d’incertitudes et aide à la conception : Application aux systèmes instrumentés de sécurité. October 2007.
- [15] Shubin Si, Mingli Liu, Zhongyu Jiang, Tongdan Jin, and Zhiqiang Cai. System Reliability Allocation and Optimization Based on Generalized Birnbaum Importance Measure. *IEEE Transactions on Reliability*, 68(3) :831–843, September 2019.
- [16] Morteza Soleimani, Mohammad Pourgol-Mohammad, Ali Rostami, and Ahmad Ghanbari. Design for Reliability of Complex System : Case Study of Horizontal Drilling Equipment with Limited Failure Data. *Journal of Quality and Reliability Engineering*, 2014 :1–13, November 2014.

Résumé — In the design phase, the overall RAMS requirements at the system level, a generally complex system, need to be validated and verified. Classical approaches are based on the deconstruction and functional specifications of these systems before seeking to estimate the performance at the level of the various components and then aggregation for final validation. Risk requirements are tackled in the corresponding RAMS confidence intervals but the risk allocation to the component level is, from our point of view, not sufficiently addressed, especially in the industrial context of innovative systems. This risk allocation issue is crucial in the design optimization process, mainly to select and define the efforts to be implemented to reinforce the reliability knowledge of the critical components. First approaches [16] are proposed to deal with this issue but are however limited to systems with classical reliability structures and are restricted to the allocation phase. However, the optimization issue [5] remains a challenge in the validation phase of those requirements. Here, with the support of allocation approaches, our aim is to elaborate a methodology for the identification and the definition of effort levels that we need to produce, for each component, on the acquisition of new knowledge in compliance to the overall system requirements. These input elements are intended for the definition of life test plans at a component level for example. One of the expected contributions is to extend the classic importance factors usually done for the evaluation of components' criticality depending on one requirement. In our case, they will be used in order to take the uncertainty in the estimation process of the components' parameters into consideration. The elaboration of a such approach will be motivated by the development of a real and innovative system in which few knowledge and feedback are available.

Mots clés : Reliability, Confidence interval, Knowledge, Allocation, Complex system, Effort level, Importance factor

Polytech Angers
62, avenue Notre Dame du Lac
49000 Angers